Markovketten und wechselwirkende stochastische Modelle
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

SoSe 2012
23.04.2012

Gruppenübung

Aufgabe G7

Gegeben seien Stoppzeiten S und T für den stochastischen Prozess[1] $X_0, X_1, \dots$. Entscheide und beweise gegebenenfalls, ob es sich im folgenden um Stoppzeiten handelt:

- $\min\{S, T\}$
- $\max\{S, T\}$
- S + T
- S - T
- $\alpha \cdot T$, für $\alpha \geq 1,\ \alpha \in \mathbb{N}$.

Aufgabe G8

Zeige dass die Übergangsmatrix P genau dann reversibel bezüglich π ist, wenn die lineare Abbildung $f \mapsto Pf$ in $L^2(\pi)$ selbstadjungiert ist.

Aufgabe G9

Die Eintrittszeit in eine Menge $A \subset \Omega$ sei bezeichnet mit τ_A. Definiere ferner $f(x) = \mathbb{E}_x\{\tau_A\}$.

a) Zeige, dass gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \forall x \in A \quad \text{und} \\ f(x) &= 1 + \sum_{y \in \Omega} P(x, y) \cdot f(y) \quad \forall x \notin A. \end{aligned} \tag{1}$$

b) Zeige, dass f durch obige Gleichungen eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe G10

Sei P die Übergangsmatrix einer irreduziblen Markovkette in Ω. Sei $\emptyset \neq B \subset \Omega$ und die Funktion $h : \Omega \to \mathbb{R}$ nicht-konstant und harmonisch auf $\Omega \setminus B$. Prüfe nach, dass gilt

$$h(y) = \max_{x \in \Omega} h(x) \Rightarrow y \in B.$$

Aufgabe G11

Betrachte eine zufällige Irrfahrt auf $\{0, 1, \dots, n\}$ mit

$$\mathbf{P}(X_k = j \mid X_{k-1} = i) = \begin{cases} 0.5, & \text{falls } j = i + 1 \ \vee j = i - 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } j \in \{1, 2, \dots, n-1\},$$

absorbierendem Zustand in 0 und

$$\mathbf{P}(X_k = j \mid X_{k-1} = n) = \begin{cases} 0.5, & \text{falls} j = n \vee j = n - 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Berechne die erwartete Zeit bis zur Absorption in 0 wenn die Irrfahrt in Zustand n beginnt.

[1] ausgestattet mit der natürlichen Filtration

Hausübung

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Sei $\mathbf{X}$ eine diskrete Markovkette in Ω. Definiere die Stoppzeit τ als

$$\tau := \inf_{x\in A}\{\ \inf\{n > 0\ :\ X_n = x\}\ \}$$

für eine Menge $A \subset \Omega$ mit der Eigenschaft $\mathbf{P}_x(\tau < \infty) = 1$ für alle $x \in \Omega$. Die Funktion $g : A \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. Weise nach, dass die Funktion f

$$f(x) := \begin{cases} g(x), & \text{falls } x \in A, \\ \mathbb{E}_x\{g(X_\tau)\}, & \text{falls } x \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

harmonisch ist auf $\Omega \setminus A$.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Sei $K \in \mathbb{N}$ und Zahlen $W_1, \ldots, W_K \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$ gegeben. Definiere

$$p(i,j) := \frac{1}{Z} e^{-\beta \cdot W_j} \quad \forall i,j = 1,\ldots,K \quad ,$$

mit $Z := \sum_{j=1}^{K} e^{-\beta \cdot W_j}$.

In K nummerierten Urnen befinden sich insgesamt N ununterscheidbare Kugeln. In jedem Zeitschritt wird (uniform) eine der N Kugeln zufällig ausgesucht. Ist i die Nummer der Urne, aus der die Kugel gezogen wurde, so wird die Kugel mit Wahrscheinlichkeit $p(i,j)$ in die Urne mit der Nummer j gelegt.

a) Gebe eine formale Beschreibung als Markovkette an.

b) Bestimme den invarianten Zustand π und zeige, dass die Kette reversibel bezüglich π ist.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Gegeben sei der stochastische Prozess $\mathbf{Z} = (Z_i)_{i\in\mathbb{N}},\ Z_i : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $Z_i \geq 0$ und einem Erwartungswert $\mathbb{E}\{Z_i\} = c < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$, sowie eine Stoppzeit $\tau_0 : \Omega \to \mathbb{N}$, die unabhängig von $\mathbf{Z}$ ist. Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}\{g_{\tau_0}(Z_1^{\tau_0})\}$, wobei $g_j(\omega) := \sum_{k=1}^{j} Z_k(\omega)$.

Aufgabe H4 (5 Punkte)

Sei τ eine Stoppzeit für $X_0, X_1, \ldots$ und $\bar{\Omega}$ der entsprechende Folgenraum.[2] Definiere die Mengenfamilie $\mathscr{F}_\tau$ durch

$$\mathscr{F}_\tau = \{A \subset \bar{\Omega} \mid A \cap \{\tau \leq n\} \in \sigma\{X_0, X_1, \ldots, X_n\} \text{ für alle } n \geq 0\}.$$

Dabei bezeichnet $\sigma\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ die σ-Algebra, die von $X_0, \ldots, X_n$ erzeugt wird.

a) Zeige, dass es sich bei $\mathscr{F}_\tau$ um eine σ-Algebra handelt (sogenannte σ-Algebra der τ-Vergangenheit).

b) Zeige, dass die Stoppzeit τ $\mathscr{F}_\tau$-messbar ist.

c) Sei κ eine weitere Stoppzeit mit $\kappa \geq \tau$. Zeige dass gilt $\mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_\kappa$.

[2] siehe ggf. 1.Vorlesung vom 10.April