Markovketten und wechselwirkende stochastische Modelle 9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

SoSe 2012
18.06.2012

Gruppenübung

Aufgabe G36
Betrachte die faule (einfache) Irrfahrt auf dem Hyperwürfel $\Omega = \{0,1\}^n$. Die 'Faulheit', also der Umstand dass ein vorgeschlagener (möglicher) Übergang von ω nach ω' nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ angetreten wird, kann auch modelliert werden durch einen fairen Münzwurf, welcher einer (gleichverteilt) ausgewählten Koordinate $j \in \{1,...,n\}$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ den Wert 0 bzw. 1 zuordnet (d.h. unabhängig vom bisherigen Wert in dieser Koordinate!). Diese Modellierung motiviert die folgende Kopplung: man betrachte zwei Irrfahrten auf Ω mit möglicherweise unterschiedlichen Anfangszuständen. Zunächst wird eine Koordinate $j \in \{1,...,n\}$ zufällig ausgewählt, und dann in beiden Irrfahrten die j-te Koordinate durch die selbe (zufällig gewählte) Zahl $k \in \{0,1\}$ ersetzt.
Man überlege sich, dass auf diese Weise jede der beiden Irrfahrten für sich genommen tatsächlich eine faule Irrfahrt auf Ω ist. Wie verhält sich die Kopplung nach τ, dem ersten Zeitpunkt zu dem jede Koordinate zumindest ein Mal ausgewählt wurde? Gibt es eine Verbindung zwischen τ und der Stoppzeit im Beispiel der 'Sammelbildchen' ('coupon-collecting')? Schätze zuletzt $t_{\text{mix}}(\epsilon)$ nach oben ab.
Hinweis. Für die 'Sammelbildchen'-Stoppzeit galt für alle $c > 0$:

$$\mathbf{P}(\tau > \lceil n\log(n) + cn\rceil) \le e^{-c}.$$

Aufgabe G37 (Hardcore-Modell mit Fugazität λ, Großkopplung)
Wie in der Vorlesung angekündigt soll nun der Beweis von Satz 7.12 (Abschätzung der Mischungszeit der Glauber-Dynamik für kleine Fugazitäten λ im hard-core-Modell; Theorem 5.8 LPW) analog zu Satz 7.10 (Theorem 5.7 LPW) vollendet werden.

Aufgabe G38
Sei G der Graph den man erhält wenn man zwei vollständige Graphen mit jeweils n Knoten an einem gemeinsamen Knoten $v^\star$ zusammenklebt. Für eine einfache Irrfahrt modifizieren wir G derart zu einem neuen Graphen G', dass G' regulär ist. Man überlege sich dass dies möglich ist, indem eine Schleife an $v^\star$ hinzugefügt wird (d.h. eine Kante von $v^\star$ nach $v^\star$) und jeweils n-viele Schleifen an alle anderen Knoten.[1] Wir wissen dann bereits, dass die Gleichverteilung stationär ist für die einfache Irrfahrt auf G'.
Überprüfe zunächst, dass $\tau := \tau_{v^\star} + 1$ eine *stark stationäre Zeit* ist. Gebe anschließend $\mathbb{E}[\tau]$ an und verwende dies gemeinsam mit der Markoff'schen Ungleichung und der Abschätzung für die Konvergenzzeit mittels stark stationärer Zeiten um zu zeigen:

$$t_{\text{mix}} \le 8n.$$

Aufgabe G39 ('move-to-front' - Kette)
Ein Professor habe auf seinem Regalbrett n Bücher stehen. Nachdem er ein Buch fertig gelesen hat, macht er sich nicht die Mühe es wieder an seine alte Position einzuordnen, sondern stellt es stattdessen wieder ganz nach vorne. Anschließend wählt er dann erneut und zufällig das nächste der n-vielen Bücher aus, um es zu lesen. Gibt es einen cleveren Weg, um die Mischungszeit abzuschätzen?
Hinweis. Betrachte die zeitumgekehrte Kette und verwende bekannte Resultate.

[1] für ein Beispiel siehe Abbildung 6.2 in LPW

Hausübung

Aufgabe H29 (5 Punkte)

a) Sei (X_t) eine Markovkette mit Start in x und random-mapping-representation (RMR) gegeben durch die u.i.v.-Folge (Z_t) mitsamt Funktion f:

$$X_0 = x, \qquad X_t = f(X_{t-1}, Z_t).$$

Zeige dass jede Stoppzeit für (X_t) eine *randomisierte Stoppzeit* für (X_t) ist.

b) Man erinnere sich an das Beispiel 'langsames Kartenmischen' und betrachte den ersten Zeitpunkt, nachdem die ursprünglich unterste Karte oben angekommen ist und zufällig in den Kartenstapel gelegt wurde. Zeige dass dies eine *stark stationäre Zeit* ist.

c) Für das Beispiel 'Nicht-Stoppzeit' einer faulen Irrfahrt (X_t) auf dem Hyperwürfel, $\Omega = \{0,1\}^n$, wurde die Zeit τ_{komplett} eingeführt als der erste Zeitpunkt, zu dem jede der n Koordinaten mindestens einmal ein 'update' erfuhr. Zeige dass es sich auch hier um eine *stark stationäre Zeit* handelt.

Aufgabe H30 (5 Punkte)

Sei (X_t) die einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, ..., \overline{n-1}\}$. Definiere die Stoppzeit τ wie folgt: Zunächst werde eine Münze geworfen, die mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ 'Kopf' anzeigt. In diesem Fall setze $\tau = 0$. Zeigt die Münze jedoch 'Zahl', so sei τ der erste Zeitpunkt, so dass jeder Zustand mindestens einmal vorkam. Zeige zunächst, dass - gegeben 'Zahl' - X_τ gleichverteilt ist auf allen Zuständen außer dem Anfangszustand. Begründe damit anschließend die Wahl von $\frac{1}{n}$ als Wahrscheinlichkeit für 'Kopf' im Hinblick auf den Begriff *stationäre Zeit*.

Aufgabe H31 (5 Punkte)

Betrachte erneut den zusammengeklebten Graphen G' aus Aufgabe G38. Diesmal soll die Mischungszeit t_{mix} jedoch nach unten beschränkt werden. Betrachte hierzu die Menge A aller Knoten in einem der beiden vollständigen Graphen um zu zeigen

$$t_{\text{mix}} \geq \frac{n}{2} \cdot (1 + o(1)).$$

Aufgabe H32 (5 Punkte)

Definiere zunächst für eine Markovkette auf Ω mit Übergangsmatrix P und stationärer Verteilung π

$$s_x(t) := \max_{y \in \Omega}(1 - \frac{P^t(x,y)}{\pi(y)}),$$

(sogenannte *Separationsdistanz*) sowie

$$s(t) := \max_{x \in \Omega} s_x(t).$$

a) Zeige, dass eine stochastische Matrix Q existiert, so dass mit π stationär für Q gilt: $P^t(x,\cdot) = (1 - s(t))\pi + s(t)Q^t(x,\cdot)$.

b) Folgere aus der a) dass

$$P^{t+u}(x,y) = (1 - s(t)s(u))\pi(y) + s(t)s(u) \sum_{z \in \Omega} Q^t(x,z) Q^u(z,y). \tag{1}$$

c) Verwende obige Gleichung (1) um nachzuweisen, dass s submultiplikativ ist: $s(t+u) \leq s(t) \cdot s(u)$.