Markovketten und wechselwirkende stochastische Modelle 6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

SoSe 2012
21.05.2012

Gruppenübung

Aufgabe G25

Betrachte eine Irrfahrt auf dem Graphen von Abbildung 1, der in x startet und überall mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu einem Nachbarn springt. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit P, mit der die Kette den Punkt 1 vor dem Punkt 0 erreicht. Die Fragestellung soll mithilfe der Netzwerkreduktion[1] gelößt werden. Fasse deshalb den Graphen als elektrisches Netzwerk auf, dessen Kanten allesamt den gleichen Widerstand (z.B. 1) besitzen, und welches Spannung 0 in 0, sowie Spannung 1 in 1 hat. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt dann

$$P = u(x) = \frac{\mathscr{R}(0 \longleftrightarrow x)}{\mathscr{R}(0 \longleftrightarrow x) + \mathscr{R}(x \longleftrightarrow 1)}.$$

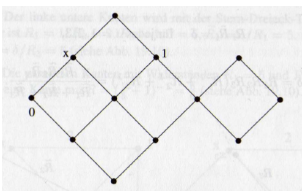

Abbildung 1: Netzwerkreduktion I (aus *Klenke: Wahrscheinlichkeitstheorie*)

Aufgabe G26

Sei $1 \neq \alpha > 0$ und betrachte den Pfad mit Ecken $\{0, \dots, n\}$ und Gewichten $c(k-1, k) = \alpha^k$ für $k \in \{1, \dots, n\}$.

a) Gib die Übergangswahrscheinlichkeiten an.

b) Verwende die Reihenschaltung um die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}_k(\tau_n < \tau_0)$ zu berechnen.

Aufgabe G27 (Beweis zu Proposition 4.15 aus der Vorlesung)

Zur Wiederholung: Ist θ ein Fluss $a \to z$, der die Schlaufenregel erfüllt, dann ist θ eindeutig bestimmt als der Strom I zur Spannung W mit $W(a) - W(z) = ||\theta|| \mathscr{R}(a \longleftrightarrow z)$.

Definiere eine Funktion h auf den Knotenpunkten durch

$$h(x) = \sum_{i=1}^{m} [\theta(\vec{e}_i) - I(\vec{e}_i)]\ r(\vec{e}_i),$$

wobei $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$ ein Pfad von a nach x ist.

a) Zeige dass h wohldefiniert und überall harmonisch ist.

[1] neben den in der Vorlesung vorgestellten Methoden kann außerdem noch die *Stern-Dreieck-Transformation* verwendet werden

b) Verwende a) für einen Beweis von Proposition 4.15 aus der Vorlesung[2].

Aufgabe G28
Zeige, dass die effektiven Widerstände eine Metrik auf Netzwerken (mit Leitfähigkeiten $\{c(e)\}$) bilden.

Hausübung

Aufgabe H17 (5 Punkte)
Betrachte erneut die einfache Irrfahrt auf $\{0, \dots, n\}$ mit Startpunkt in $x \in \{1, \dots, n-1\}$. Versuche die Wahrscheinlichkeit des Erreichens von n vor dem Erreichen von 0 diesmal durch Netzwerkreduktion herzuleiten.

Aufgabe H18 (5 Punkte)
Betrachte den Graphen aus Abbildung 2. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(\tau_z < \tau_a)$?

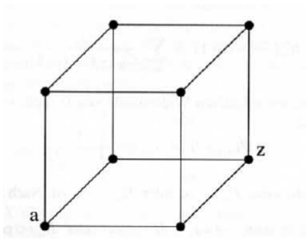

Abbildung 2: Netzwerkreduktion II (aus *Klenke: Wahrscheinlichkeitstheorie*)

Aufgabe H19 (5 Punkte)
Zeige, dass es sich beim effektiven Widerstand $\mathscr{R}(a \longleftrightarrow z)$ um eine konkave Funktion von $\{r(e)\}$ handelt.

Aufgabe H20 (5 Punkte)
Betrachte das Problem des Wartens auf eine Folge KKK von hintereinander ausgeführten (fairen) Münzwürfen.

a) Ist dies die gleiche Wartezeit wie für ZKZ?

b) Berechne $\mathbb{E}[\tau_{KKK}]$ und $\mathbb{E}[\tau_{ZKZ}]$ für die Markovkette (X_t), in der X_t den Ausgang der Würfe $(t, t+1, t+2)$ beschreibt.

[2] ein alternativer Beweis findet sich in Levin/Peres/Wilmer (Proposition 9.4)