Markovketten und wechselwirkende stochastische Modelle 10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

SoSe 2012
25.06.2012

Gruppenübung

Aufgabe G40

In dieser Aufgabe soll die Mischungszeit für die faule Irrfahrt auf dem Hyperwürfel (mithilfe von 'distinguishing statistics') nach unten beschränkt werden.

a) Wir beginnen mit einem Hilfslemma, welches zu beweisen ist:

Lemma. Betrachte das 'Sammelbildchen'-Problem mit n Sammelbildchen. Bezeichne mit $\mathbf{1}_j(t)$ die Indikatorfunktion des Ereignisses, dass Sammelbildchen j bis zur Zeit t noch nicht gesammelt wurde, sowie mit $R_t = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_j(t)$ die Anzahl der Sammelbildchen, die bis t noch nicht gesammelt wurden.
Dann sind die Zufallsvariablen $I_j(t)$ negativ korreliert und mit $p = (1-\frac{1}{n})^t$ gilt für $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}[R_t] = np$$

$$\mathrm{Var}[R_t] \leq np(1-p) \leq \frac{n}{4}.$$

b) Für die faule Irrfahrt auf dem Hyperwürfel $\{0,1\}^n$ betrachten wir das Hamming-Gewicht $W(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x^i$, $\mathbf{x} = (x^1, ..., x^n) \in \{0,1\}^n$. Berechne Erwartungswert $\mathbb{E}_\pi(W)$ und Varianz $\mathrm{Var}_\pi(W)$ von W bezüglich der stationären Verteilung π.

c1) Sei R_t die Anzahl der Koordinaten, die bis zum Zeitpunkt t noch kein update erfuhren. Als Gegenstück zur stationären Verteilung π widmen wir uns nun der Verteilung der Markovkette $\mathbf{X}_t = (X_t^1, ..., X_t^n)$ bei Start im Vektor $\mathbf{1} = (1, ..., 1)$. Auch für diese sollen der Erwartungswert $\mathbf{E}_\mathbf{1}[W(\mathbf{X}_t)]$ und die Varianz $\mathrm{Var}_\mathbf{1}[W(\mathbf{X}_t)]$ berechnet werden.

Hinweis. Um den Erwartungswert zu berechnen, überlege zunächst was die entsprechende bedingte Erwartung ist, gegeben dass $R_t = r$.
Zur Berechnung der Varianz, verwende die Identität

$$\mathrm{Var}[W(\mathbf{X}_t)] = \mathrm{Var}[\mathbb{E}[W(\mathbf{X}_t \mid R_t]] + \mathbb{E}[\mathrm{Var}[W(\mathbf{X}_t \mid R_t]].$$

c2) Schlussfolgere, dass die Varianz $\mathrm{Var}_\mathbf{1}[W(\mathbf{X}_t)]$ nach oben abgeschätzt werden kann durch $\frac{n}{4}$.

d) Zeige dass dann gilt

$$|E_\pi[W] - \mathbb{E}_1[W(\mathbf{X}_t)]| \;\geq\; \sigma \cdot e^{-\frac{t}{n}(1+\frac{1}{n})+\frac{\log n}{2}}.$$

Hinweis. Für $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ gilt $\log(1-x) \geq -x - x^2$.

e) Verwende die zentrale Aussage über die 'distinguishing statistics' aus der Vorlesung um abzuleiten dass

$$||P^t(\mathbf{1}, \cdot) - \pi||_{\mathrm{TV}} \geq 1 - 8e^{\frac{2t}{n}(1+\frac{1}{n})-\log n}.$$

Als Konsequenz erhalten wir für die Mischungszeit:

$$d(\frac{1}{2}\, n \log n - \alpha\, n) \geq 1 - 8e^{-2\alpha+1}.$$

Aufgabe G41

Zeige dass für das Kantenmaß Q und $S \subset \Omega$ gilt:

$$Q(S, S^c) = Q(S^c, S).$$

Hausübung

Aufgabe H33 (5 Punkte)

Gegeben sei die Markovkette auf der Menge aller Permutationen von $\{1, 2, ..., n\}$ mit Start in der identischen Permutation id, die sich pro Zeitschritt fortbewegt durch zufällige Auswahl einer benachbarten Transposition. Es ist hilfreich sich eine solche Permutation vorzustellen als eine Anordnung von n nummerierten Karten; einen Zeitschritt später ist dann genau eines der n-1 benachbarten Paare vertauscht.

a) Zeige zunächst die folgende Abschätzung:

$$\mathbf{P}(\text{Karte 1 hat bis zur Zeit t die Position } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \text{ besucht}) \leq \mathbf{P}(\max_{1 \leq s \leq t} |\tilde{S}_s| \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor),$$

wobei $(\tilde{S}_t)$ eine faule Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ ist, die mit Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{2}{n-1}$ stehenbleibt und jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eins nach oben oder eins nach unten läuft.

Mit B_t sei die Anzahl der Zeitschritte bis t bezeichnet, bei denen sich die faule Irrfahrt $(\tilde{S}_t)$ fortbewegt. Mithilfe des Reflexionsprinzips lässt sich für $\alpha_0 = \frac{1}{16\sqrt{2}}$ und $\tau_{\frac{n}{2}}$ als kleinster Trefferzeit von $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ für (S_t), abschätzen dass

$$\mathbf{P}(\tau_{\frac{n}{2}} \leq \alpha_0 n^2) \leq \frac{1}{8},$$

sowie für n groß genug unter Ausnutzung dass B_t binomialverteilt ist mit Parametern t und $\frac{2}{n-1}$

$$\mathbf{P}(B_{\beta_0 n^3} > \alpha_0 n^2) \leq \frac{1}{8},$$

mit $\beta_0 = \frac{1}{64\sqrt{2}}$.

b) Weise damit nach, dass für n groß genug gilt

$$\mathbf{P}(\text{Karte 1 hat bis zur Zeit } \beta_0 n^3 \text{ die Position } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \text{ besucht}) \leq \frac{1}{8}.$$

c) Schlussfolgere mithilfe der Menge $A = \{\sigma \in S_n : \sigma(1) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, mit S_n als Menge aller Permutationen einer n-elementigen Menge, dass $t_{\text{mix}} \geq \beta_0 n^3$.

Aufgabe H34 (5 Punkte)

Sei $\mathbf{X}_t = (X_t^1, ..., X_t^n)$ die Position der faulen Irrfahrt auf $\{0, 1\}^n$, startend in $\mathbf{1} = (1, ..., 1)$. Zeige dass die Kovarianz zwischen X_t^i und X_t^j negativ ist. Folgere daraus für die Varianz des Hamming-Gewichts: $\text{Var}[W(X_t)] \leq \frac{n}{4}$.

Hinweis. Betrachte gegebenenfalls $Y_t^i = 2X_t^i - 1$.

Aufgabe H35 (5 Punkte)

Betrachte die Markovkette auf der Menge $\Omega := \{x \in \{0, 1\}^{n+1} \mid x(n+1) = 1\}$, die sich in $x \in \Omega$ bewegt (bzw. nicht bewegt) durch zufällige Auswahl von $k \in \{1, ..., n\}$ und 'Umdrehen' des Wertes $x(k)$ genau dann wenn für seinen rechtsseitigen Nachbarn gilt $x(k+1) = 1$.

a) Ist die Gleichverteilung auf Ω stationär?

b) Zeige dass die Mischungszeit nach unten beschränkt werden kann durch $t_{\text{mix}} \geq n^2 - 2n^{\frac{3}{2}}$.
Hinweis. Was die beiden Maxima in der Definition von d(t) anbelangt, so betrachte einen Start der Kette in $x_0 = (0, 0, ..., 0, 1)$ und die Menge $A = \{x \mid x(1) = 1\}$.

Aufgabe H36 (5 Punkte)

Sei (X_t) die faule Irrfahrt auf $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, ..., \overline{n-1}\}$. Zeige dass eine Konstante c_1 existiert, so dass für die Mischungszeit t_{mix} gilt:

$$t_{\text{mix}} \geq c_1 \cdot n^2.$$