Markovketten und wechselwirkende stochastische Modelle 3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

SoSe 2012
30.04.2012

Gruppenübung

Aufgabe G12
Betrachte Beispiel 0.1 aus der Vorlesung ('Heimweg eines Betrunkenen 1') mit Gehwegbreite $n \in \mathbb{N}$, der Straße als absorbierendem Zustand auf der einen Seite, und einer (reflektierenden) Wand auf der anderen Seite. Einmal an der Wand angelangt, ist er im nächsten Zeitpunkt mit Wahrscheinlichkeit 1 wieder einen Schritt näher an der Straße.[1] Ansonsten torkelt er jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0.5 in Richtung Straße bzw. in Richtung Wand.
Wie weit kommt er im Durchschnitt?

Aufgabe G13
Führe ein Beispiel für eine Irrfahrt auf einer endlichen abelschen Gruppe an, die nicht reversibel ist.

Aufgabe G14
Betrachte den 'Ruin des Spielers' mit Startkapital $k \in \mathbb{N}$ und Zustandsraum $\{0, \dots, n\}$. Verliert der Spieler sein Startkapital, so geht er zur Bank und lässt sich weitere $j \in \mathbb{N}$ Geldeinheiten mit $k + j < n$ auszahlen, mit denen er erneut spielt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er komplett ruiniert ist? Wie hoch ist die erwartete Dauer des Spiels?

Aufgabe G15
Beweise Lemma 2.6 aus der Vorlesung:
Lemma. Sei (X_t) eine Markovkette mit Übergangsmatrix P und Zustandsraum Ω. Die Funktion $f : \Omega \to \Omega'$ sei messbar. Definiere eine Äquivalenzrelation für $x \in \Omega$ durch

$$x \sim \bar{x} \Leftrightarrow f(x) = f(\bar{x}) \Leftrightarrow \bar{x} \in f^{-1}(\{x\}).$$

Wenn für alle $x, \bar{x}$ mit $x \sim \bar{x}$ gilt

$$\mathbf{P}(f(X_{t+1}) = y \mid X_t = x) \;=\; \mathbf{P}(f(X_{t+1}) = y \mid X_t = \bar{x}),$$

dann ist $(f(X_t))_{t \in \mathbb{N}}$ eine Markovkette auf Ω' mit Übergangsmatrix

$$P_f(q, r) \;\equiv\; \mathbf{P}(f(X_{t+1}) = r \mid f(X_t) = q) \;=\; \sum_{y \in f^{-1}(r)} P(x, y) \quad, \; x \in f^{-1}(q).$$

Aufgabe G16
Sei P die Übergangsmatrix für die Ehrenfest-Kette. Zeige, dass die stationäre Verteilung gegeben ist durch die Binomialverteilung $\mathrm{B}(n, \frac{1}{2})$.

[1] vgl. G11

Hausübung

Aufgabe H5 (5 Punkte)

Zeige Proposition 2.6 aus der Vorlesung, also dass es sich bei $(W(V_t))_{t\in\mathbb{N}}$ um die Ehrenfest-Urne handelt, wenn $(V_t)_{t\in\mathbb{N}}$ die Irrfahrt auf dem n-dimensionalen Hyperwürfel und

$$W(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j \quad , \; v = (x_1, ..., x_n)$$

das Hamming-Gewicht ist.

Aufgabe H6 (5 Punkte)

Betrachte das Ruinproblem auf $\{0, ..., n\}$ für den Fall, dass die Münze gefälscht ist. Die Wahrscheinlichkeit r eine Geldeinheit zu gewinnen sei echt größer als die Wahrscheinlichkeit u eine Geldeinheit zu verlieren. Die Stoppzeit τ ist wie gewohnt gegeben als der erste Zeitpunkt, zu dem der Spieler entweder pleite ist, oder sein Ziel von n Geldeinheiten erreicht hat. Berechne die Wahrscheinlichkeit des Spielers bankrott zu gehen in Abhängigkeit von seinem Startkapital x.

Hinweis. Sei $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ eine harmonische Funktion auf $\{1, ..., n-1\}$. Zeige zunächst, dass für alle $x \in \{1, ..., n\}$, gilt:

$$\mathbf{P}_x(X_\tau = 0) = \frac{h(n) - h(x)}{h(n) - h(0)}.$$

Verwende hierzu (ohne Beweis): $h(x) = \mathbb{E}_x\{h(X_\tau)\}$ für alle $x \in \{1, ..., n-1\}$.
Wähle anschließend die Funktion $h(x)$ in geschickter Weise.

Aufgabe H7 (5 Punkte)

Weise nach, dass es sich (für ein $n \geq 1$) bei der einfachen Irrfahrt auf dem n-Zykel um eine Projektion[2] der einfachen Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ handelt.

Aufgabe H8 (5 Punkte)

Betrachte die folgende Variation für den 'Ruin des Spielers' auf dem Zustandsraum $\{0, ..., n\}$ mit Startkapital k: zu jedem Zeitpunkt entscheidet der Spieler per Münzwurf, ob er ein (faires) Spiel ausübt, oder ob er die Runde aussetzt. Die Erfolgswahrscheinlichkeit des Münzwurfs sei p. Der Spieler stoppt den Prozess, wenn er entweder bei 0 oder bei n angekommen ist. Gib die erwartete Anzahl an Runden in Abhängigkeit von p,k und n an.

[2] vgl. Hausaufgabe H5 und Abschnit 2.3.1 in 'Levin, Peres, Wilmer'