Markovketten und wechselwirkende stochastische Modelle 1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

SoSe 2012
16.04.2012

Allgemeine Informationen

Das erste Übungsblatt enthält noch keine Hausübungen. Diese beginnen am 23.April. Zur Bearbeitung der Hausübungen ist Zeit bis zur jeweils nächsten Übung. Die schriftliche Abgabe sollte beim Übungsleiter erfolgen. Mithilfe der Hausübungen wird es möglich sein, einen Bonus für die Prüfung zu erhalten. Nähere Informationen folgen in Tucan.

Gruppenübung

Aufgabe G1

Diskutiert in Kleingruppen die folgenden Begriffe und führt Beispiele auf.

- Markovprozess und Markovkette
- stetige Markovkette
- Markovkette in diskreter Zeit
- endliche Markovkette
- zeitinhomogener Markovprozess
- Irreduzibilität
- Periodizität

Aufgabe G2

In einer Grundschulklasse wird 'Stille Post' gespielt. Das erste Kind denkt sich das Wort 'Haus' aus. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 hört das folgende Kind das Wort 'Maus', mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 hört es 'Haut' und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 hört es das korrekte Wort.
Hat ein Kind das Wort 'Maus' verstanden, so versteht das nächste Kind an der Reihe jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0,5 das korrekte Wort 'Maus' oder 'Haus'.
Hat ein Kind das Wort 'Haut' verstanden, so versteht das nächste Kind mit Wahrscheinlichkeit 0,8 wieder 'Haut', und jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0,1 'Maus' bzw. 'Haus'.

a) Wie lässt sich dies als Markovprozess interpretieren/modellieren? Was ist, wenn ein Kind lauscht, bevor es an der Reihe ist? Wie verändert sich der Prozess vermutlich, wenn ein Kind beim Erhalt des geheimen Wortes seinen Walkman anhat und das Lied 'Meine kleine Maus' hört?

b) Veranschauliche den Sachverhalt graphisch und stelle die Übergangsmatrix P auf.

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das 4.Kind an der Reihe das Wort 'Haut' hört? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kinder zwei,vier und fünf alle das Wort 'Haus' hören?

d) Wie lautet die stationäre Verteilung?

Aufgabe G3

Betrachte die zufällige Irrfahrt auf dem diskreten Kreis mit n Zuständen, wobei n eine ungerade Zahl ist. Finde das kleinste t, so dass gilt $P^t(x, y) > 0$ für alle Zustände x und y.

Aufgabe G4
Eine Maus befindet sich in einer Wohnung mit sechs Räumen. Sie kann die Räume horizontal und vertikal wechseln, nicht jedoch diagonal. Eine Präferenz hat sie dabei nicht, d.h. jeder der möglichen nächsten Räume wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit betreten. Gelangt die Maus jedoch in Raum 3 oder in Raum 6, so bleibt sie für immer dort und wechselt fortan nicht mehr.
Wie hoch ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Maus zum Futter gelangt, gegeben dass sie in Raum i, $i \in \{1, \ldots, 6\}$ startet?

Aufgabe G5
Gegeben sei eine irreduzible Übergangsmatrix P mit Periode b. Zeige, dass sich der Zustandsraum in b Mengen $C_1, C_2, \ldots, C_b$ partitionieren lässt, so dass gilt

$$P(x,y) > 0 \Rightarrow x \in C_i \ \wedge \ y \in C_{i+1},$$

wobei die Addition i+1 modulo b erfolgt.

Aufgabe G6
Gegeben sei eine symmetrische Übergangsmatrix, d.h.

$$P(x,y) = P(y,x) \quad \forall x,y \in \Omega.$$

Zeige, dass die Gleichverteilung auf Ω stationär ist für P.