Markovketten und wechselwirkende stochastische Modelle 5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

SoSe 2012
14.05.2012

Gruppenübung

Aufgabe G21
Ein Professor besitzt n Regenschirme, von denen sich zu Beginn $k \in \{1, ..., n-1\}$ Stück in seinem Büro befinden und $n-k$ zuhause. Jeden Tag läuft der Professor morgens von zuhause in sein Büro und abends wieder zurück. Bei jedem dieser Läufe kann es mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ regnen, unabhängig von anderen Läufen. Falls es auf seinen Wegen regnet, bedient er sich eines Regenschirmes.

a) Wie oft wird er prozentual nass (asymptotisch gesehen)?
b) Wie hoch ist die erwartete Anzahl an Läufen, bis alle Regenschirme an einem Ort sind?
c) Wie hoch ist die erwartet Anzahl an Läufen, bis er das erste Mal nass wird?

Aufgabe G22
Betrachte ein Wesen mit beschränktem Gedächtnis, welches wiederholt eine faire Münze wirft und sich jeweils merkt, wie lang die Serie der letzten 'Kopf'-Würfe war. Übersteigt diese Zahl jedoch ein festes $n \in \mathbb{N}$, so merkt er sich auch weiterhin nur n.
Man überlege sich, dass man alternativ auch ein 'Fenster' der Länge n betrachten kann, welches sich (mit voranschreitender Zeit t) entlang eines unendlichen binären Stranges fortbewegt, wobei auf einer Position des Stranges mit gleicher Wahrscheinlichkeit $0,5$ eine 0 oder eine 1 stehen kann. X_t ist dann der Prozess, welcher den Block der 1'er (vom rechten Endpunkt des Fensters aus gesehen) zählt, wobei entsprechend 'Kopf' assoziiert wird mit einer 1.

a) Gebe die relevanten Übergangswahrscheinlichkeiten für (X_t) an.
b) Zeige dass
$$\pi(i) = \begin{cases} \frac{1}{2^{i+1}}, & \text{falls } i = 0, 1, ..., n-1 \\ \frac{1}{2^n}, & \text{falls } i = n \end{cases}$$
stationär ist für P.
c) Stelle $\hat{P}$ (Zeitumkehr) von P auf.

Betrachte für den zeitumgekehrten Markov-Prozess $(\hat{X}_t)$ ein Fenster der Länge n, welches sich mit fortlaufender Zeit auf dem Strang von rechts nach links bewegt. $\hat{X}_t$ ist erneut der Prozess, welcher den Block der 1'er (vom rechten Endpunkt des Fensters aus gesehen) zählt.

d) Leite her, dass nach n Schritten beim zeitumgekehrten Markov-Prozess die stationäre Verteilung erreicht ist (unabhängig von der Startverteilung).
e) Beschreibe die *Mischungszeit* in Worten.
f) Begründe
$$d(n-1) \geq |\hat{P}^{n-1}(n,1) - \pi(1)| = \frac{1}{4}$$
und schlussfolgere, dass für die Mischungszeit der zeitumgekehrten Kette gilt:
$$t_{\text{mix}}(\epsilon) = n \quad \forall \epsilon \leq \frac{1}{4}.$$

Aufgabe G23
Zeige dass alle irreduziblen Markov-Ketten mit zwei Zuständen reversibel sind.

Aufgabe G24
Betrachte die Markovkette (X_t) mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Überlege, ob P gegen die stationäre Verteilung konvergiert.

Hausübung

Aufgabe H13 (5 Punkte)
Definiere $\mathscr{P}$ als den Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der endlichen Menge Ω. Weise nach, dass dann gilt:

a)

$$d(t) = \sup_{\mu \in \mathscr{P}} ||\mathbf{P}_\mu(X_t = \cdot) - \pi||_{TV},$$

b)

$$\bar{d}(t) = \sup_{\mu,\nu \in \mathscr{P}} ||\mathbf{P}_\mu(X_t = \cdot) - \mathbf{P}_\nu(X_t = \cdot)||_{TV}.$$

Aufgabe H14 (5 Punkte)
Eine Funktion $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, falls ihr Wert in jedem $x \in \mathbb{Z}^d$ gleich dem arithmetischen Mittel ihrer Werte auf den $2d$ Nachbarn von x ist.

a) Gilt

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d \Rightarrow f \text{ ist konstant} \qquad ?$$

b) Ist jede beschränkte harmonische Funktion konstant?

Aufgabe H15 (Zum Beweis des Ergodensatzes für irreduzible Markov-Ketten) (5 Punkte)
Betrachte erneut den Beweis des Ergodensatzes aus der Vorlesung. Zur Erinnerung: Es waren (X_t) eine irreduzible Markovkette auf Ω, $\Omega < \infty$, mit Startverteilung μ, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (beschränkt), $\tau^+_{x,0} := 0$, $\tau^+_{x,1} = \min\{t > 0 \mid X_t = x\}$, $\tau^+_{x,k} = \min\{t > \tau^+_{x,t-1} \mid X_t = x\}$ und

$$Y_k := \sum_{s=\tau^+_{x,k-1}}^{\tau^+_{x,k}-1} f(X_s).$$

Zeige für $p \in [1, \infty)$

$$\mathbb{E}_x[Y_1^p] \leq \max_{x \in \Omega} f(x) \mathbb{E}_x[(\tau^+_{x,1})^p] < \infty.$$

Hinweis (partielle Summation). Benutze: $\mathbb{E}[f(Y)] = f(0) + \sum_{m=0}^{\infty} (f(m+1) - f(m)) \cdot \mathbf{P}(Y > m)$.

Aufgabe H16 (5 Punkte)
Sei (a_n) eine beschränkte Folge und (n_k) eine ganzzahlige Folge, für die gilt $\lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{n_{k+1}} = 1$ und

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_{n_k}}{n_k} = a.$$

Zeige dass dann auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = a.$$