Markovketten und wechselwirkende stochastische Modelle 7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

SoSe 2012
04.06.2012

Gruppenübung

Aufgabe G29
Betrachte folgendes Modell aus der Warteschlangentheorie. In digitalen Telekommunikationsnetzen werden Datenpäckchen ("packets") zu festen Zeitpunkten ("time slots") $0, 1, 2, \ldots$, übertragen. Da das weiterverarbeitende System (z.B. ein Router) manchmal nicht alle Päckchen auf einmal abfertigen kann, kommt es möglicherweise zu Warteschlangen, die gemäß FIFO ("first-in-first-out") abgearbeitet werden.
Besteht die Warteschlange aus mindestens einem Datenpäckchen, so geschieht in diesem Modell zu jedem Zeitpunkt genau eines der folgenden Ereignisse: entweder kommt (mit Wahrscheinlichkeit α) ein weiteres Päckchen hinzu, oder (mit Wahrscheinlichkeit $(1-\alpha)$) wird ein wartendes Päckchen abgefertigt. Gibt es keine Warteschlange, so kommt immernoch mit Wahrscheinlichkeit α ein Päckchen hinzu, aber mit Wahrscheinlichkeit $(1-\alpha)$ passiert in diesem Zeitschritt nichts.
Beschreibe (X_t) nun die Anzahl der wartenden Datenpäckchen in fortlaufender Zeit. Zeige

a) (X_t) ist positiv rekurrent falls $\alpha < \frac{1}{2}$. Bestimme in diesem Fall die stationäre Verteilung π und berechne damit $\mathbb{E}_\pi[T]$, wobei T die Wartezeit eines Datenpäckchens angibt (Ankunft bis Verarbeitung).
b) (X_t) ist null-rekurrent, falls $\alpha = \frac{1}{2}$.
c) (X_t) ist transient, falls $\alpha > \frac{1}{2}$.

Aufgabe G30 (abzählbar unendlicher Zustandsraum)
Sei P irreduzibel und betrachte eine Verteilung π mit $\pi = \pi P$. Zeige dass dann gilt $\pi(x) > 0 \ \forall x \in \Omega$.

Aufgabe G31
Wiederhole (ausführlich) warum die einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ nicht positiv rekurrent ist.

Aufgabe G32
Zeige, dass die symmetrische einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^3$ transient ist. Konstruiere hierfür einen Teilgraphen[1] von $\mathbb{Z}^3$, für den man $\mathscr{R}'(0 \longleftrightarrow \infty) < \infty$ ausrechnen kann.

[1] siehe Tafelanschrieb

Hausübung

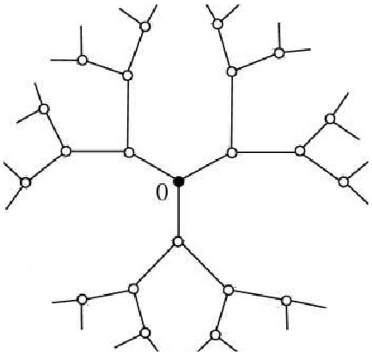
Aufgabe H21 (5 Punkte)

Betrachte unten stehenden Ausschnitt eines unendlichen Graphen, der in entsprechender Weise fortgesetzt wird. Jeder Knoten besitzt genau 3 Nachbarn, von denen jeder mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ als nächstes erreicht wird. Ein Knoten sei ausgezeichnet als '0'. (X_n) sei die Irrfahrt auf dem Graphen, mit $X_0 = 0$. Bezeichne ferner mit $D(i)$ die Abstandsfunktion des Knoten i vom Ursprung 0 (also D(0)=0 und D(i)=1 für einen Nachbarn von 0).

a) Überprüfe, dass es sich bei $Z_n = D(X_n)$ um eine Markovkette handelt und gebe die Übergangswahrscheinlichkeiten an.

b) Verwende die Ergebnisse vom 'Gambler's Ruin' um zu zeigen, dass (Z_n) transient ist.

c) Verwende b) um zu erklären, warum auch (X_n) transient ist.



Aufgabe H22 (5 Punkte)

Setze $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und gegeben $F_0, F_1, ..., F_n$ das folgende F_{n+1} als entweder die Summe oder die Differenz von F_{n-1} und F_n (jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$). Setze nun $X_n = (F_{n-1}, F_n)$. Weise nach, dass (X_n) transient ist und fast sicher gilt $F_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

Aufgabe H23 ('Springer am Rand...') (5 Punkte)

Wie hoch ist die erwartete Rückkehrzeit eines Springers auf dem Schachbrett, wenn er in einem Eckfeld startet und jeder erlaubte Sprung mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintritt?

Aufgabe H24 (5 Punkte)

Zeige dass jeder Teilgraph eines rekurrenten Graphen rekurrent sein muss.