# Markovketten und wechselwirkende stochastische Modelle 11. Übungsblatt

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Volker Betz**
Stefan Walter

**SoSe 2012**
**02.07.2012**

## Gruppenübung

**Aufgabe G42**
Betrachte die Menge $S_n$ aller Permutationen einer n-elementigen Menge $\{1,\dots,n\}$. Der folgende Algorithmus liefert eine Methode, um nach n Schritten eine gleichverteilt gewählte Permutation aus $S_n$ zu erhalten. Setze $\sigma_0 = \mathrm{id}$. Konstruiere $\sigma_k$ für $k = 1,2,\dots,n-1$ induktiv über $\sigma_{k-1}$ durch Vertauschen der Karten auf den Positionen k und $J_k$, wobei $J_k$ eine ganze Zahl ist, die gleichverteilt aus $\{k,\dots,n\}$ und unabhängig von $\{J_1,\dots,J_{k-1}\}$ gewählt wird.
Weise nach dass $\sigma_{n-1}$ gleichverteilt ist.

**Aufgabe G43**
Sei $Q$ eine Verteilung auf $S_n$ so dass, wenn $\sigma \in S_n$ gemäß Q gewählt wird, für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$ gilt

$$\mathbf{P}(\sigma(i) > \sigma(j)) = \frac{1}{2}.$$

Folgt hieraus die Gleichverteilung von Q auf $S_n$?
*Hinweis.* Vergleiche auch H37.

**Aufgabe G44**
Sei $\tilde{P} = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}\mathbb{E}$ die Übergangsmatrix der faulen Version der Markovkette mit Übergangsmatrix P. Zeige dass alle Eigenwerte von $\tilde{P}$ nicht-negativ sind.

**Aufgabe G45**
Sei P irreduzibel und $A \neq P$ eine Matrix so dass jeder einzelne Eintrag mindestens 0, aber kleiner gleich dem entsprechenden Eintrag von P ist. Zeige dass für jeden Eigenwert $\lambda$ von A gilt $|\lambda| < 1$.

## Hausübung

**Aufgabe H37** (5 Punkte)
Sei $Q$ eine Verteilung auf $S_n$ derart, dass wenn $\sigma \in S_n$ gemäß Q gewählt wird, für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$ gilt

$$\mathbf{P}(\sigma(i) = j) = \frac{1}{n}.$$

Folgt hieraus die Gleichverteilung von Q auf $S_n$?

**Aufgabe H38** (5 Punkte)
Sei $P$ reversibel bezüglich $\pi$ und $\Omega$ endlich.

a) Zeige dass für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathrm{Var}_\pi[P^t f] \leq (1-\gamma_\star)^{2t}\, \mathrm{Var}_\pi[f]$$

b) Folgere als nützliche Aussage bezüglich der Relaxationszeit $t_{\mathrm{rel}}$, dass für $t \geq t_{\mathrm{rel}}$ gilt:

$$\sigma(P^t f) \leq \frac{1}{e} \cdot \sigma(f),$$

wobei $\sigma$ die Standardabweichung bezeichne.