Markovketten und wechselwirkende stochastische Modelle 8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

SoSe 2012
11.06.2012

Gruppenübung

Aufgabe G33 (MCMC: Glauber-Dynamik und Metropolis-Kette)
Um aus einem großen, aber endlichen Zustandsraum Ω beispielsweise eine Auswahl gemäß einer bestimmten Verteilung π zu treffen, oder den Erwartungswert $\mathbb{E}_\pi(f)$ zu berechnen für ein $f : \Omega \to \mathbb{R}$, wurden in der Vorlesung die Glauber-Dynamik und die Metropolis-Ketten eingeführt. Das Ziel ist jeweils die Konstruktion einer Markov-Kette, deren stationäre Verteilung gerade π ist (die Ausgangslage ist jedoch etwas unterschiedlich). Es stellt sich die Frage, ob die beiden konstruierten Markov-Ketten immer gleich/ungleich sind. Betrachte hierzu die folgenden zwei Beispiele:

a) Betrachte den Zustandsraum Ω der richtigen q-Einfärbungen ('proper q-colorings') eines Graphen $G = (V, E)$, und bezeichne mit π die Gleichverteilung auf diesem Raum. Definiere eine Basis-Kette für die Metropolis-Kette (für π) auf dem Raum $\{1,...,q\}^V$ aller q-Einfärbungen (nicht unbedingt aller richtigen q-Einfärbungen) wie folgt: Eine Farbe und ein Knoten werden jeweils gleichverteilt ausgewählt und dann der ausgewählte Knoten mit der ausgewählten Farbe versehen. Hat die entsprechende Metropolis-Kette erst einmal eine richtige Einfärbung erreicht, so akzeptiert sie für den nächsten Schritt nur Vorschläge, die ebenfalls zu einer richtigen Einfärbung führen. Die Glauber-Dynamik (für π) hingegen startet von einer beliebigen richtigen Einfärbung σ.

   Wie entwickelt sich die Glauber-Dynamik? Stimmen die so konstruierten Markovketten (mit stationärer Verteilung π) überein?

   Hinweis. Berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass (in einem Schritt) die Einfärbung gleich bleibt.

b) Betrachte für eine Knotenmenge V eines Graphen G den Raum $\{0,1\}^V$, welcher den Raum Ω der Hardcore-Konfigurationen enthält. Die Verteilung π sei die Gleichverteilung auf Ω. Die Basiskette auf $\{0,1\}^V$ für die Metropolis-Kette wird definiert durch die zufällige Auswahl eines Knoten $v \in V$ und Besetzung dieses Knoten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Die entsprechende Metropolis-Kette (für π) lehnt den Übergang $\sigma \to \sigma'$ für $\sigma \in \Omega$ genau dann ab, wenn $\sigma' \notin \Omega$.

   Stimmen die Metropolis-Kette und die Glauber-Dynamik hier überein?

Aufgabe G34 (Anwendung: Kopplung)
In der Vorlesung wurde bereits für $d = 1$ gezeigt, dass für die faule Irrfahrt auf dem Torus $\mathbb{Z}_n^d$ die ϵ-Mischungszeit $t_{\text{mix}}(\epsilon)$ abgeschätzt werden kann durch

$$t_{\text{mix}}(\epsilon) \leq d^2 \cdot n^2 \cdot \log_2\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Im Folgenden soll dies auch allgemein für $d > 1$ gezeigt werden. Gehe hierzu wie folgt vor:

a) Wähle zunächst zufällig (d.h. gleichverteilt) eine Koordinate i und gehe in dieser Koordinate vor wie im Falle $d = 1$. Nutze die dortigen Ergebnisse gemeinsam mit der Wald'schen Identität um (für die Kopplungszeit in der i-ten Koordinate τ_i)

$$\mathbb{E}_{x,y}[\tau_i] \leq \frac{d \cdot n^2}{4}$$

   abzuleiten.

b) Betrachte $\tau_{\text{kopp}} = \max_{1 \le i \le d} \tau_i \le \sum_{i=1}^{d} \tau_i$ und zeige mithilfe der Markov'schen (Chebyshev'schen) Ungleichung:

$$\mathbf{P}_{x,y}(\tau_{\text{kopp}} > t) \le \frac{1}{t} \cdot \frac{d^2 \cdot n^2}{4}.$$

c) Überlege dass $t_{mix} \le d^2 \cdot n^2$ gilt und schlussfolgere obige Behauptung.

Es ist möglich diese obere Schranke für die Mischungszeit noch zu verbessern.

d) Zeige zunächst die folgende Abschätzung: $\mathbf{P}(\tau_i > kdn^2) \le (\frac{1}{4})^k$.

e) Wähle dann k in geeigneter Weise um eine Schranke der Form $O((d \cdot \log(d))n^2)$ für t_{mix} zu erhalten.

Aufgabe G35 (Kopplung für Bildmaße)
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, $(\Omega, \mathscr{A}, \nu)$, $(\Omega \times \Omega, \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}, \sigma)$ Maßräume, $(E_1, \mathscr{E}_1)$, $(E_2, \mathscr{E}_2)$ messbare Räume und $f : \Omega \to E_1$, $g : \Omega \to E_2$ messbare Funktionen. Das Maß σ auf $\Omega \times \Omega$ habe die Eigenschaft

$$\sigma(A \times \Omega) = \mu(A) \quad \text{und} \quad \sigma(\Omega \times A) = \nu(A).$$

Dann ist insbesondere auch $\sigma \circ (f^{-1}, g^{-1})$ ein Maß auf $E_1 \times E_2$ mit $(C \times D) \mapsto \sigma(f^{-1}(C) \times g^{-1}(D))$ für $C \in \mathscr{E}_1$, $D \in \mathscr{E}_2$. Zeige dass $\sigma \circ (f^{-1}, g^{-1})$ eine Kopplung von $\mu \circ f^{-1}$ (gegeben durch $C \mapsto \mu(f^{-1}(C))$) und $\nu \circ g^{-1}$ (gegeben durch $D \mapsto \nu(g^{-1}(D))$) ist.

Hausübung

Aufgabe H25 (Metropolis-Kette für Ising-Modell) (5 Punkte)
Betrachte das Ising-Modell auf $V = \mathbb{Z}^d \cap [-L, L]^d$, $L \in \mathbb{N}$, mit Gibbs-Maß μ zur Energie H und inversen Temperatur β. Gesucht ist eine Markovkette mit stationärer Verteilung μ. Ausgehend von einer Basiskette mit Übergangsmatrix Q,

$$Q(\sigma, \sigma') = \begin{cases} \frac{1}{|V|}, & \text{falls sich } \sigma' \text{ an genau einer Stelle i} \in V \text{ von } \sigma \text{ unterscheidet,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

soll die Metropolis-Kette für das Gibbs-Maß μ bestimmt werden.

Aufgabe H26 (Glauber-Dynamik für Ising-Modell) (5 Punkte)
Betrachte das Ising-Modell mit Gibbs-Maß μ zur Energie H und inversen Temperatur β. Gesucht ist eine Markovkette mit stationärer Verteilung μ. Wende hierzu die Glauber-Dynamik an und gebe ihre Übergangswahrscheinlichkeiten an.

Aufgabe H27 (5 Punkte)
Sei $(\hat{X}_t, \hat{Y}_t)$ eine Markov'sche Kopplung derart, dass für $0 < \alpha < 1$, $t_0 > 0$, die Kopplungszeit $\tau_{\text{kopp}} = \min\{t \ge 0 \mid \hat{X}_t = \hat{Y}_t\}$ folgende Ungleichung für alle Paare (x, y) von Anfangszuständen erfüllt: $\mathbf{P}(\tau_{\text{kopp}} \le t_0) \ge \alpha$. Zeige dass dann gilt

$$\mathbb{E}[\tau_{\text{kopp}}] \le \frac{t_0}{\alpha}.$$

Aufgabe H28 (Poisson-Approximation durch Kopplung) (5 Punkte)
Seien Y_m, $m = 1, \dots, n$ unabhängige $\{0,1\}$-wertige Zufallsvariablen mit $\mathbf{P}(Y_m = 1) = p_m$ für $m = 1, \dots, n$. Setze $X = \sum_{m=1}^{n} Y_m$. Aus der Einführung in die Statistik ist bekannt, dass für kleine p_m's X näherungsweise Poisson-λ-verteilt ist mit Parameter $\lambda = \sum_{m=1}^{n} p_m$ (im Folgenden kurz: p_λ). Die Zufallsvariable X' habe diese Verteilung p_λ.

a) Zeige zunächst $||\mathbf{P}(X \in \cdot) - p_\lambda(\cdot)||_{\text{TV}} \le 2 \cdot \mathbf{P}(X \ne X')$.

Um eine gute Approximation zu gewährleisten, genügt es folglich eine Kopplung von X und X' zu finden, so dass mit hoher Wahrscheinlichkeit $X = X'$ gilt. Betrachte hierzu die unabhängigen $\{0,1\} \times \mathbb{N}_0$-wertigen Zufallsvektoren (Y_m, Y'_m), $m = 1, \dots, n$ mit Verteilung

$$\mathbf{P}((Y_m, Y'_m) = (i, i')) = \begin{cases} 1 - p_m, & \text{falls } i = 0,\ i' = 0, \\ e^{-p_m} - (1 - p_m), & \text{falls } i = 1,\ i' = 0, \\ 0, & \text{falls } i = 0,\ i' \in \mathbb{N}, \\ e^{-p_m} \cdot \frac{p_m^{i'}}{i'!}, & \text{falls } i = 1,\ i' \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad m = 1, \dots, n.$$

b) Zeige dass durch obige Definition eine Kopplung von X und X' gegeben ist.

c) Weise mithilfe der Kopplung nach, dass $\mathbf{P}(X \ne X') \le \sum_{m=1}^{n} p_m^2$ und somit auch $||\mathbf{P}(X \in \cdot) - p_\lambda(\cdot)||_{\text{TV}} \le 2 \cdot \lambda \cdot M$, für $M = \max_{m=1,\dots,n} p_m$, gilt.