Markovketten und wechselwirkende stochastische Modelle
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

SoSe 2012
07.05.2012

Gruppenübung

Aufgabe G17
Für das Beispiel des münzwerfenden Frosches auf den beiden Seerosenblättern $\{e\}$ und $\{w\}$ (also $\Omega = \{e, w\}$) mit Startposition auf $\{e\}$ war die Übergangsmatrix gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

a) Wiederhole kurz, wie die stationäre Verteilung lautet und wie man sie erhält.

b) Zeige dass gilt

$$||\mathbf{P}_0(X_t = \cdot) - \pi||_{TV} = P^t(e,e) - \pi(e) = \pi(w) - P^t(e,w) = (1-p-q)^t(1-\pi(0)) \underset{\text{exponentiell in t}}{\longrightarrow} 0.$$

Aufgabe G18
Sei P die Übergangsmatrix einer Markovkette auf Ω, sowie μ und ν zwei beliebige Verteilungen auf Ω. Beweise

$$||\mu P - \nu P||_{TV} \leq ||\mu - \nu||_{TV}.$$

Aufgabe G19
Gegeben seien Verteilungen μ_i und ν_i auf Ω_i, für $i \in \{1, ..., n\}$. Außerdem seien $\mu := \prod_{i=1}^n \mu_i$ und $\nu := \prod_{i=1}^n \nu_i$ definiert auf $\prod_{i=1}^n \Omega_i$. Zeige dass gilt

$$||\mu - \nu||_{TV} \leq \sum_{i=1}^n ||\mu_i - \nu_i||_{TV}.$$

Aufgabe G20 (Galton-Watson-Prozess)

a) Seien $T, X_1, X_2, ...$ unabhängige, $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariablen und $X_1, X_2, ...$ identisch verteilt. Zeige, dass die Erzeugendenfunktion von $S = \sum_{n=1}^T X_n$ gegeben ist durch

$$\psi_S(z) = \psi_T(\psi_{X_1}(z)).$$

Seien jetzt $p_0, p_1, p_2, ... \in [0,1]$ mit $\sum_{k=0}^\infty p_k = 1$ und $(X_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}_0}$ eine unabhängige Familie von Zufallsvariablen mit $\mathbf{P}(X_{n,i} = k) = p_k$ für alle $i, k, n \in \mathbb{N}_0$. Setze $Z_0 = 1$ und

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n-1,i} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Der sogenannte **Galton-Watson-Prozess** Z_n kann interpretiert werden als die Anzahl von Individuen in der n-ten Generation einer sich zufällig entwickelnden Population. Das i-te Individuum aus der n-ten Generation hat $X_{n,i}$ Nachkommen (in der (n+1)-ten Generation). Sei

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

die Erzeugendenfunktion der Nachkommenverteilung $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, ψ' deren Ableitung und ψ_{Z_n} die Erzeugendenfunktion von Z_n.

b) Zeige dass $\psi_n = \psi_{Z_n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, wobei $\psi_n := \psi \circ \psi_{n-1}$ für $n = 2, 3, \ldots$ und $\psi_1 := \psi$.

Die Wahrscheinlichkeit $q_n := \mathbf{P}(Z_n = 0)$, dass Z zur Zeit n schon ausgestorben ist, ist offenbar wachsend in n. Bezeichne mit $q := \lim_{n\to\infty} q_n$ die Aussterbewahrscheinlichkeit.

c) Zeige $F := \{r \in [0,1] : \psi(r) = r\} = \{q, 1\}$.

Hausübung

Aufgabe H9 (5 Punkte)
Sei P die Übergangsmatrix einer Markovkette mit stationärer Verteilung π. Zeige dass für jedes $t \geq 0$ gilt[1]:

$$d(t+1) \leq d(t).$$

Aufgabe H10 (5 Punkte)
Betrachte die einfache Irrfahrt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $\mathbb{Z}$ und definiere

$$Y_n := \max_{s\leq n} X_s.$$

Wie lautet die Verteilung von Y_n?

Aufgabe H11 (5 Punkte)
Gegeben seien zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu_1,\ \mu_2$ auf $\mathbb{Z}$. Wir schreiben $\mu_1 \preceq \mu_2$, falls $\sum_{i\in\mathbb{Z}} f(i)\cdot\mu_1(i) \leq \sum_{i\in\mathbb{Z}} f(i)\cdot\mu_2(i)$ für jede monoton wachsende, beschränkte Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Für die Verteilungsfunktionen $F_1,\ F_2$ von μ_1 bzw. μ_2 gilt offenbar $\mu_1 \preceq \mu_2$ genau dann, wenn $F_1(x) \geq F_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.
Zeige, dass außerdem genau dann $\mu_1 \preceq \mu_2$ gilt, wenn es eine Kopplung φ von μ_1 und μ_2 gibt, mit $\varphi(L) = 1$, für $L := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_1 \leq x_2\}$.

Aufgabe H12 (Galton-Watson-Prozess) (5 Punkte)
Betrachte noch einmal Aufgabe G20. Zeige

$$q < 1 \Leftrightarrow \lim_{z\uparrow 1} \psi'(z) > 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p_k > 1.$$

[1] die Definition von d(t) erfolgt in der Vorlesung vom 07.05. bzw. ist nachzulesen in Abschnitt 4.4. von 'Levin, Peres, Wilmer'