Markovketten und wechselwirkende stochastische Modelle 12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Volker Betz
Stefan Walter

SoSe 2012
09.07.2012

Gruppenübung

Aufgabe G46 (Wiederholung)
Kreuze jeweils die richtige Antwort an.

wahr	falsch	
☐	☐	Sei (X_t) eine Markovkette und τ eine Stoppzeit mit $\mathbf{P}(\tau = \infty) = 0$. Dann bezeichnet man die Gültigkeit von $$\mathbb{E}_{x_0}[F(X_{\tau+1},...,X_{\tau+l}) \mid X_1 = x_1,...,X_{\tau-1} = x_{\tau-1}, X_\tau = y] = \mathbb{E}_y[F(X_1,...,X_l)]$$ für alle $F : \Omega^l \to \mathbb{R}$, $l > 0$ und $x_0 \in \Omega$, als *starke Markoveigenschaft*.
☐	☐	Die Markovkette auf Ω mit Übergangsmatrix P besitze eine reversible Verteilung π. Dann ist π auch reversibel für P^t, für $t \in \mathbb{N}$ fix.
☐	☐	Die Multiplikation Pf eines Spaltenvektors f mit der Übergangsmatrix P für die Markovkette (X_t) liefert einen Vektor, welcher den bedingten Erwartungswert von $f(X_t)$ gegeben den Zustand X_{t+1} widerspiegelt.
☐	☐	*Stochastik* macht Spaß.
☐	☐	*Stoppzeiten* sind Zufallsvariablen.
☐	☐	Eine *stark stationäre Zeit* τ für eine irreduzible Markovkette (X_t) mit stationärer Verteilung μ ist eine Stoppzeit mit $$\mathbf{P}_x(X_\tau = y) = \mu(y).$$
☐	☐	*MCMC-Verfahren* sind eine Klasse von Algorithmen, die mittels Konstruktion einer beliebigen Markowkette Stichproben für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung μ ziehen.
☐	☐	Das *Konvergenztheorem* besagt, dass irreduzible, aperiodische Markovketten gegen ihre stationäre Verteilung konvergieren.
☐	☐	Das Studium rekurrenter Markovketten ist äquivalent zum Studium von Markovketten in elektrischen Netzwerken.
☐	☐	Die symmetrische, einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^3$ ist rekurrent.

Aufgabe G47 (Wiederholung)

a) Sei S_n eine einfache, symmetrische Irrfahrt mit $S_0 = 0$. Ist $|S_n|$ Markov?

b) Sei S_n eine einfache, *un*symmetrische Irrfahrt mit $S_0 = 0$. Ist $|S_n|$ Markov?

Aufgabe G48
Seien P_1 und P_2 Übergangsmatrizen auf Ω_1 bzw. Ω_2. Betrachte die Markovkette auf $\Omega_1 \times \Omega_2$, die unabhängig in der ersten und zweiten Koordinate gemäß P_1 bzw. P_2 läuft. Ihre Übergangsmatrix ist das Tensorprodukt $P_1 \otimes P_2$, definiert durch

$$P_1 \otimes P_2\,((x,y),(z,w)) = P_1(x,z) \cdot P_2(y,w).$$

Das Tensorprodukt einer Funktion f auf Ω_1 mit einer Funktion g auf Ω_2 ist diejenige Funktion auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ mit $(f \otimes g)(x,y) = f(x) \cdot g(y)$.
Seien jetzt φ und ψ Eigenfunktionen von P_1 bzw. P_2 mit Eigenwerten λ und μ. Zeige dass $\varphi \otimes \psi$ eine Eigenfunktion von $P_1 \otimes P_2$ mit Eigenwert $\lambda \cdot \mu$ ist.

Aufgabe G49
Betrachte erneut die Glauber-Dynamik für das Hardcore-Modell mit Fugazität λ.[1] Man erinnere sich an die Nutzung einer Gropkopplung, mithilfe derer man eine obere Schranke für $\mathbb{E}[\rho(X_1^x, X_1^y)]$ angeben konnte, wobei $\rho(x,y)$ die Anzahl der Knoten angab, in denen sich x und y unterscheiden.
Leite mithilfe von Satz 11.17 aus der Vorlesung eine untere Schranke für die absolute Spektrallücke $\gamma_\star$ ab.

Aufgabe G50
Sei $|\Omega| < \infty$ und P die Übergangsmatrix einer irreduziblen und aperiodischen Markovkette.
Zeige dass -1 kein Eigenwert von P sein kann.

[1] Vergleiche Abschnitt 7.11 VL, Aufgabe G37 des 9.Übungsblattes und Unterabschnitt 5.4.2 LPW