Geometrie für Lehramt TUD SS 2010

1 Äquivalenzrelationen$^{\#}$.

[1]

Dieses Kapitel soll nur an hoffentlich aus dem 1. Semester Bekanntes erinnern.

Die Umgangssprache bezeichnet häufig Dinge als gleich, wenn sie in gewissen, jeweils relevanten, Merkmalen übereinstimmen. Damit allein kann man aber keine ernsthafte mathematische Begriffsbildung treiben, sondern man muss, in gegebenem Zusammenhang, 'Gleichheit' als eine Relation definieren, etwa auf der Grundlage gegebener Relationen und Operationen. Der Zusammenhang ist dabei wesentlich: Etwa beim Rechnen mit rationalen Zahlen ist 1 gleich $\frac{2}{2}$, jedoch wird man 1 Teller und $\frac{2}{2}$ Teller nicht unbedingt als gleich ansehen.

Nach Leibniz bedeutet Gleichheit zweier Objekte in einem gegebenen Zusammenhang, dass man das eine durch das andere ersetzen kann, ohne dass sich an den relevanten Aussagen und Beziehungen etwas ändert. Die Axiome der Äquivalenzrelationen ergeben sich zwingend daraus: Schreibt man $s \sim t$, falls s gleich t ist, und geht man davon aus, dass jedes Ding sich selbst gleich sei ($s \sim s$), so kann man aus $s \sim t$ auf $t \sim s$ schliessen (ersetze in $t \sim t$ das zweite t durch s) und man kann von $s \sim t$ und $t \sim u$ auf $s \sim u$ schliessen, indem man in $t \sim u$ das t durch s ersetzt.

Diese Axiome reichen aus, solange man keine Struktur berücksichtigt. Die Verwendung des Gleichheitszeichens '=' signalisiert, dass in dem gegebenen Zusammenhang klar ist, was mit Gleichheit gemeint ist.

1.1 Definition und Beispiele.

Eine binäre Relation $\sim$ auf einer Menge M heisst eine *Äquivalenzrelation*, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt

$(E1)$	$x \sim x$	Reflexivität
$(E2)$	$x \sim y \Rightarrow y \sim x$	Symmetrie
$(E3)$	$x \sim y$ und $y \sim z \quad \Rightarrow x \sim z$	Transitivität

Beispiele: 1. Zwei Brüche bedeuten die gleiche rationale Zahl

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \;\Leftrightarrow\; ad = bc.$$

2. Zwei rationale Cauchyfolgen bedeuten die gleiche reelle Zahl

$$(a_n)_{n\in N} \sim (b_n)_{n\in N} \;\Leftrightarrow\; (a_n - b_n)_{n\in N} \text{ ist Nullfolge}$$

3. Zwei Quotienten reeller Polynome bedeuten die gleiche rationale Funktion

$$\frac{p(x)}{q(x)} \sim \frac{r(x)}{s(x)} \;\Leftrightarrow\; p(x)s(x) \equiv r(x)(q(x)$$

[1] Mit $^{\#}, ^{+}, ^{*}$ bezeichnen wir Abschnitte, die nur verkürzt, später bzw. garnicht behandelt werden

4. Zwei Pfeile im Anschauungsraum bedeuten den gleichen Vektor

$$(P,Q) \sim (P',Q') \quad \Leftrightarrow (P,Q) \text{ und } (P',Q') \text{ haben dieselbe Länge und Richtung }.$$

5. Zwei I-Tupel stimmen auf $J \subseteq I$ überein

$$(a_i \mid i \in I) \sim_J (b_i \mid i \in I) \;\Leftrightarrow\; \text{ für alle } j \in J.\ a_j = b_j$$

6. Zwei ganze Zahlen haben den gleichen Rest modulo n

$$a \sim_n b \;\Leftrightarrow\; a \equiv b(\bmod n) \;\Leftrightarrow\; n \text{ teilt } a - b$$

7. Zwei algebraische Strukturen sind isomorph

$$A \sim B \;\Leftrightarrow\; A \cong B$$

8. Für eine Abbildung $\phi : M \to .$ der *Kern* $\sim_\phi$

$$x \sim_\phi y \quad \Leftrightarrow \;\phi(x) = \phi(y).$$

9. Sind $\sim_1, \ldots, \sim_n$ Äquivalenzrelationen auf M, so auch der *Durchschnitt* mit

$$a \sim b \;\Leftrightarrow\quad a \sim_1 b \text{ und } \ldots \text{ und } a \sim_n b$$

10. Zwei Programme berechnen bei gleicher Einge die gleiche Ausgabe - oder hängen sich beide auf bzw. stürzen ab.
11. Zwei Befehlswörter w und w' bewirken dieselben Zustandsänderungen des Automaten A

$$\delta(z,w) = \delta(z,w') \quad \text{ für alle Zustände } z \text{ von } A$$

1.2 Klasseneinteilung

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Wir definieren

$\tilde{a} := \{x \in M \mid x \sim a\} = a[\mathsf{mod}\ \sim]$ die (Äquivalenz)Klasse von a nach/modulo $\sim$.

Lemma 1.1 $\quad a \sim b \Leftrightarrow \tilde{a} = \tilde{b}.$

Beweis. Sei $a \sim b$. Aus $x \sim a$ folgt dann mit (E3), dass $x \sim b$, also $\tilde{a} \subseteq \tilde{b}$. Wegen (E2) haben wir auch $b \sim a$ und $\tilde{b} \subseteq \tilde{a}$. Also haben $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$ dieselben Elemente, weshalb $\tilde{a} = \tilde{b}$. Gelte umgekehrt $\tilde{a} = \tilde{b}$. Wegen (E1) haben wir $a \sim a$, also $a \in \tilde{a} = \tilde{b}$ und damit $a \sim b$ per definitionem. $\square$

Eine *Partition* oder *Klasseneinteilung* von M ist ein System Π von Teilmengen von M derart, dass

$(P1)$ $\quad P \neq \emptyset \quad$ für alle $P \in \Pi$
$(P2)$ $\quad$ Zu jedem $x \in M$ gibt es $P \in \Pi$ mit $x \in P$
$(P3)$ $\quad$ Für alle $P, Q \in \Pi$ gilt $P = Q$ oder $P \cap Q = \emptyset$

Lemma 1.2 *Zwischen Äquivalenzrelationen und Partitionen auf einer Menge M besteht eine bijektive Entsprechung vermöge*

$$\Pi = \{\tilde{a} \mid a \in M\} \quad \textit{sowie} \quad a \sim b \;\Leftrightarrow\; \textit{es gibt } A \in \Pi \textit{ mit } a, b \in A.$$

Beweis. (P1) und (P2) folgen sofort aus (E1): $a \in \tilde{a}$. Ist $c \in \tilde{a} \cap \tilde{b}$, so $c \sim a$, und $c \sim b$, also $a \sim b$ mit (E2) und (E3) und daher nach Lemma 1.1 $\tilde{a} = \tilde{b}$. Gilt $a \sim b$, so $a, b \in A = \tilde{b}$. Gilt umgekehrt $a, b \in A = \tilde{c}$, so $a \sim c$ und $b \sim c$, also $a \sim b$ mit (E2) und (E3). Ist die Partition gegeben, so gilt (E1) wegen (P2) und (E2) ist trivial. Hat man $a \sim b \sim c$, so $a, b \in A$ und $b, c \in B$ mit $A, B \in \Pi$, also $b \in A \cap B$ und $A = B$ nach (P3), also $a \sim c$. Und $\tilde{a} = A$ für $a \in A$. $\square$. Partitionen taugen insbesondere als bildliche Vorstellung von Äquivalenzrelationen.

1.3 Repräsentanten

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Ein Element a von M heisst *Repräsentant* der Klasse A, wenn $a \in A$. Also

$$a, b \text{ repräsentieren dieselbe Klasse, nämlich } \tilde{a} = \tilde{b}, \quad \Leftrightarrow \quad a \sim b.$$

Eine Teilmenge S von M, die aus jeder Klasse genau einen Repräsentanten enthält, heisst ein *Repräsentantensystem.*

Prinzip 1.3 Repräsentation. *Jede Äquivalenzrelation hat mindestens ein Repräsentantensystem*

Aber meist tut man sich schwer, eines zu finden. Der Beweis ergibt sich wieder aus dem Auswahlaxiom, für endliche Mengen durch Induktion. Für obige Beispiele hat man z.B. folgende Repräsentantensysteme

1	$\frac{a}{b}$	a, b teilerfremd, $b > 0$
2	$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$a_0 \in \mathbb{Z}$, $\forall n > 0.\ (a_n - a_{n-1})10^n \in \{0, \ldots, 9\}$,
	$\forall m. \exists n.\ (a_n - a_{n-1})10^n \neq 9$	
3	$\frac{p(x)}{q(x)}$	$p(x), q(x)$ teilerfremd, $q(x)$ normiert
4	(O, Q)	mit festem Punkt O
5	$(a_i \mid i \in I)$	$a_j = 0_j$ für alle $j \in J$ mit ausgezeichnetem $0_j \in A_j$
6	a	$a \in \mathbb{Z},\ 0 \leq a < n$

1.4 Abstraktion

Prinzip 1.4 Abstraktion. *Zu jeder Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M gibt es eine Menge K und eine surjektive Abbildung π von M auf K so, dass*

$$x \sim y \;\Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y) \quad \textit{für alle } x, y \in M.$$

Wir sagen dann, dass K eine *Faktormenge* (auch *Quotientenmenge* von M nach (oder modulo) $\sim$ ist mit *kanonischer Projektion* $\pi = \mathsf{mod}_{\sim}$. Kurz: $\pi : M \to K$ ist *Abstraktion* nach $\sim$. Durch einen solchen Übergang kommen

wir z.B. von den (konkreten) Brüchen/Cauchyfolgen zu den (abstrakten) rationalen/reellen Zahlen, von den Pfeilen im Anschauungsraum zu den Vektoren.
Man kann sich K auf vielfältige Weise verschaffen. Dogmatiker behaupten, man müsse die Menge der Äquivalenzklassen nehmen. Ist M gar keine Menge (wie in Beisp. 7), so verbietet es sich das, weil die Gesamtheit der Äquivalenzklassen dann noch weniger greifbar ist als M selbst. Trotzdem kann man durch Abstraktion den Begriff 'Isomorphietyp' bilden und, etwa im Falle der endlichen abelschen Gruppen, die Menge der Isomorphietypen explizit bestimmen. Wir empfehlen daher folgenden Umgang mit 'der Faktormenge' $M/\sim$

- Man arbeite bevorzugt in M mit der 'erweiterten Gleichheitsbeziehung' $\sim$
- Man bezeichne die Elemente von $M/\sim$, wenns denn sein muss, mit $\tilde{a} = \pi(a)$ und rechne mit
$$\tilde{a} = \pi(a) \;=\; \tilde{b} = \pi(b) \qquad \Leftrightarrow a \sim b$$

1.5 Ergänzung

Satz 1.5 *Sei π eine surjektive Abbildung von M auf K und ψ eine Abbildung von M in N. Genau dann gibt es eine Abbildung χ von K in N mit*
$$\psi = \chi \circ \pi \qquad\qquad \textit{wenn } (*) \;\; x \sim_\pi y \;\Rightarrow\; x \sim_\psi y \;\; \textit{für alle } x, y \in M$$
Die Abbildung χ ist dabei eindeutig bestimmt: $\chi(y) = \psi(x)$ falls $y = \pi(x)$.
$$\chi \textit{ ist injektiv } \Leftrightarrow (**) \;\; x \sim_\pi y \;\Leftrightarrow\; x \sim_\psi y \;\; \textit{für alle } x, y \in M$$
$\chi : K \to N$ surjektiv $\Leftrightarrow \psi : M \to N$ surjektiv.

Beweis. Sei χ gegeben und $a \sim_\pi b$. Dann $\pi(a) = \pi(b)$, also $\psi(a) = \chi(\pi(a)) = \chi(\pi(b)) = \psi(b)$ und somit $a \sim_\psi b$. Sei umgekehrt (*) erfüllt. Setze
$$\chi = \{(y, z) |\, y \in K,\; z \in N \text{ und } \exists x \in M : \pi(x) = y \text{ und } \psi(x) = z\}.$$
χ ist in der Tat eine Abbildung: Ist $y \in K$ gegeben, so gibt es wegen der Surjektivität von π ein $x \in M$ mit $\pi(x) = y$ und man hat $(y, z) \in \chi$ für $z = \psi(x)$. Hat man $(y, z) \in \chi$ und $(y, z') \in \chi$, so gibt es nach Definition $x, x' \in M$ mit $\pi(x) = y$, $\psi(x) = z$, $\pi(x') = y$, $\psi(x') = z'$. Es folgt $\pi(x) = \pi(x')$ (da '=' eine Äquivalenzrelation ist), also $x \sim_\pi x'$ und nach Voraussetzung (*) $x \sim_\psi x'$. Das besagt aber $z = \psi(x) = \psi(x') = z'$.
Beweis des Zusatzes. Sei χ injektiv und $a \sim_\psi b$, d.h $\chi(\pi(a)) = \psi(a) = \psi(b) = \chi(\pi(b)$. Mit der Injektivität folgt $\pi(a) = \pi(b)$, also $a \sim_\pi b$. Gelte umgekehrt (**) und sei $\chi(c) = \chi(d)$. Nach Definition von χ gibt es $a, b \in M$ mit $c = \pi(a)$, $d = \pi(b)$ und $\psi(a) = \chi(c) = \chi(d) = \psi(d)$. Das bedeutet $a \sim_\psi b$, also nach (**) $a \sim_\pi b$ und damit $c = \pi(a) = \pi(b) = d$. □

Korollar 1.6 *Die Abstraktion einer Menge M nach einer gegebenen Äquivalenzrelation $\sim$ ist eindeutig bestimmt: d.h. zu je zwei Abstraktionen $\pi_i : M \to K_i$ (d.h. surjektiven Abbildungen mit $\pi_i a = \pi_i b \;\Leftrightarrow a \sim b$) gibt es eine (eindeutig bestimmte) bijektive Abbildung $\chi : K_1 \to K_2$ mit $\pi_2 = \chi \circ \pi_1$.*

2 Affine Geometrie und Vektorrechung

2.1 Affine Ebenen

Wie Euklid in den 'Elementen' (um - 300) und Hilbert in den 'Grundlagen der Geometrie' (1899) begründen wir die Geometrie axiomatisch, d.h. wir betrachten im Falle der Ebenen eine Menge $\mathbb{P}$ von *Punkten* und eine Menge $\mathbb{G}$ of *Geraden* sowie die Relation I der *Inzidenz* I zwischen Punkten und Geraden. Wir schreiben $P\,I\,g$ falls P mit g in Relation steht, d.h. mit g inzidiert. Wir sagen dann auch, dass P ein Punkt auf/von g ist und g eine Gerade durch P.

Dass wir die Elemente von $\mathbb{P}$ Punkte und die von $\mathbb{G}$ Geraden nennen, reflektiert die anschauliche Bedeutung, die wir den Begriffen zuschreiben, ist aber letztlich irrelevant - wir könnten, wie von Hilbert bemerkt, auch von Bierseideln und Tischen reden. Auch Euklid hat seine "Definition" von Punkten, als etwas "das keinen Teil hat" nie benutzt, sondern nur die die geometrischen Konstruktionen beschreibenden Axiome. Wir betrachten zunächst nur die Konstruktionen, die mit Lineal und Geodreieck ausgeführt werden können.

Definition 2.1 *Punkte auf derselben Geraden sind* kollinear. *Geraden sind* parallel *($g \parallel h$) wenn sie identisch sind oder keinen Punkt gemeinsam haben.*

Definition 2.2 *Ist I eine Relation zwischen den Mengen $\mathbb{P}$ und $\mathbb{G}$, d.h. $I \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{G}$ so liegt eine als notierte* $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$ affine Ebene *vor, falls die folgenden Axiome erfüllt sind.*

Axiom 2.3 *(E0) Auf jeder Geraden gibt es mindestens 2 verschiedene Punkte*

(E1) Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade: zu $P \neq Q$ in $\mathbb{P}$ gibt es genau ein $g \in \mathbb{G}$ so, dass $P\,I\,g$ und $Q\,I\,g$.

(E2) Parallelenaxiom. *Zu jeder Geraden g und Punkt P gibt es eindeutig bestimmte* Parallele *$h \parallel g$ durch P.*

(E3) Es gibt 3 nicht kollineare Punkte: ein Dreieck

Bemerkung: (E0) kann man aus (E1-3) herleiten, aber das Paralellenaxiom (E2) nicht aus (E0,1,3). Dies gilt sogar dann, wenn man noch weitere Axiome hinzunimmt, die sich auf Anordnung und Kongruenz beziehen - dies wurde nach mehr als 2000 Jahren vergeblicher Versuche (E2) zu beweisen zu Beginn des 19. Jahrhunderts von Gauß, Bolyai und Lobatschewski durch die Konstruktion "nichteuklidischer Geometrien" gezeigt. Das war auch ein entscheidender Schritt zur Klärung der Rolle der *axiomatischen Methode* in der Mathematik und zur Entwicklung der Mathematischen Logik - dokumentiert in Hilberts 'Grundlagen der Geometrie'.

Beispiele alle mit $P\,I\,g \Leftrightarrow P \in g$.

1. Das Grundbeispiel ist natürlich die anschauliche Ebene mit der üblichen Bedeutung der Begriffe.

2. Sei K ein Körper, $\mathbb{P} = K^2$ die Menge der Punkte und die Geraden von der Form $\{(x, ax+b) \mid x \in K\}$ oder $\{(c, y) \mid y \in K\}$ mit $a, b, c \in K$.

3. $\mathbb{P} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathbb{G}$ die Menge der 2-elementigen Teilmengen von $\mathbb{P}$

4. Ein Beispiel, in dem (E0,1,3) gelten aber nicht (E2) erhält man so: Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der 2-elementige Körper, $\mathbb{P} = \mathbb{F}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ und die Geraden von der Form $U \setminus \{(0, 0, 0)\}$ wobei U 2-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{F}^3$.

Im Folgenden sei stets vorausgesetzt, dass es um eine affine Ebene geht.

Korollar 2.4 *Eine Gerade g ist eindeutig durch die Menge $\{P \mid P\,I\,g\}$ bestimmt. Für Geraden g, h tritt genau einer der folgenden Fälle ein*

(i) $g = h$

(ii) $g \neq h$ *und* $g \parallel h$*, d.h.* g *und* h *haben keinen Punkt gemeinsam*

(iii) g *und* h *haben genau einen Punkt gemeinsam.*

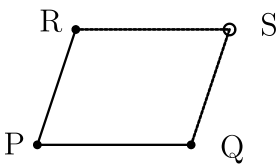
Beweis. Nach Axiom (E0) gibt es $P \neq Q$ auf g. Nach Axiom (E1) ist g durch diese schon eindeutig bestimmt. Sind g, h nicht parallel, so haben sie mindestens einen Punkt gemeinsam. Aber nach (E1) auch höchstens einen, da sonst $g = h$. Sei umgekehrt angenommen, dass g und h genau einen Punkt gemeinsam haben. Dann $g \neq h$ nach (E0) und $g \not\parallel h$ nach Definition. □

Wir können somit eine Gerade auch als die Menge ihrer Punkte auffassen, $P \in g$ statt $P\,I\,g$ schreiben und die Menge der gemeinsamen Punkte zweier Geraden g, h als $g \cap h$ notieren. Gibt es nur einen gemeinsamen Punkt P, so dürfen wir, etwas missbräuchlich, $P = g \cap h$ schreiben und nennen P den *Schnittpunkt* von g und h. Die eindeutig bestimmte Gerade durch 2 verschiedene Punkte P, Q notieren wir als $P \vee Q$.

Lemma 2.5 *Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{G}$ der Geraden.*

Die Äquivalenzklassen heissen *Parallelscharen*. Beweis. Nur die Transitiviät ist zu zeigen. Sei $g \parallel h$ und $h \parallel k$. Falls $g \cap k = \emptyset$ so $g \parallel k$ nach Definition. Sei also $P \in g \cap k$. Dann sind sowohl g wie auch k Parallelen zu h durch P und somit $g = k$ nach (E2), also auch $g \parallel k$. □.

Lemma 2.6 Parallelogrammergänzung. *Zu jeden Dreieck P, Q, R gibt es einen eindeutig bestimmten vierten Punkt S so, dass $P \vee Q \parallel P \vee S$ und $P \vee R \parallel Q \vee S$.*



Beweis. Sei $g = P \vee Q$ und $h = P \vee R$. Dann $g \not\parallel h$ weil sonst nach (E2) $g = h$, also P, Q, R kollinear. Nach dem Axiom (E2) gibt es eindeutig bestimmtes $g' \parallel g$ durch R und $h' \parallel h$ durch Q. Wegen Transitivität, $g' \not\parallel h'$, also gibt es Schnittpunkt $S = g' \cap h'$. Eindeutigkeit: ist S gegeben, so sei $g' = R \vee S$ und $h' = Q \vee S$. Nach Voraussetzung, $g' \parallel g$ und $h' \parallel h$. Nach (E2), g' und h' eindeutig bestimmt und $g' \not\parallel h'$ da sonst $g \parallel h$ wegen Transitiviät. Also ist $S = g' \cap h'$ eindeutig bestimmt. $\square$

2.2 Unendliche affine Ebenen

Um uns spätere Beweise zu vereinfachen, verschärfen wir Axiom (E0)

Axiom 2.7 *(E0'): Jede Gerade enthält unendlich viele Punkte.*

Satz 2.8 *(i) Zu jedem Punkt gibt es eine Gerade nicht durch diesen Punkt*

(ii) Durch jeden Punkt gehen unendlich viele Geraden.

(iii) Jede Gerade hat unendlich viele Parallelen

(iv) Zu je endlich vielen Geraden gibt es einen Punkt, der auf keiner dieser Geraden liegt.

Beweis als Übung. $\square$ * Setzt man nur (E0-3) voraus und gibt es eine Gerade mit genau n Punkten, $n < \infty$ so gilt: Jede Gerade enthält genau n Punkte; durch jeden Punkt gehen genau $n+1$ Geraden; jede Parallelschar besteht aus genau n Geraden; es gibt genau $n+1$ Parallelscharen; $\mathbb{P}$ hat n^2 und $\mathbb{G}$ $n(n+1)$ Elemente. n heisst dann die *Ordnung* der affinen Ebene. Bis jetzt kennt man nur Ebenen der Ordung p^k mit einer Primzahl p, aber es war ein nicht so einfach zu zeigen, dass es keine Ebene der Ordnung 10 gibt - C.W.H. Lam, The search for a finite projective plane of order 10, Amer. Math. Monthly 98 (4) (1991), 305-318.

2.3 Pfeile

Die Motivation für Vektoren kommt natürlich aus der Physik z.B. Kraft- und Geschwindigkeitsvektoren

> Eine vektorielle Grösse wird angegeben durch Betrag/Länge und Richtung

Um eine bestimmte Länge und Richtung anzugeben, weist man am einfachsten ein Objekt auf, dem diese zukommen. Zum Beispiel einen *Pfeil*, d.h. ein Punktepaar $PQ = (P, Q)$ bestehend aus Anfangspunkt P und Endpunkt Q des Pfeils. Wir haben damit einen neuen Typ von geometrischen Objekten und müssen nun präzisieren, was "Übereinstimmung nach Länge und Richtung", kurz "Äquivalenz", heissen soll.

Definition 2.9 *Zwei Pfeile PQ und RS sind* strikt äquivalent *und wir schreiben $PQ \approx RS$ falls eine der folgenden Bedingungen gilt*

(i) $P = R$ *und* $Q = S$

(ii) $P = Q$ *und* $R = S$

(iii) P, Q, R, S *sind paarweise verschieden, keine 3 von ihnen sind kollinear und es gilt* $P \vee Q \parallel R \vee S$ *und* $P \vee R \parallel Q \vee S$ *(d.h sie bilden ein Parallelogramm wie in der Skizze).*

Korollar 2.10 $PQ \approx RS \Leftrightarrow QP \approx SR \Leftrightarrow PR \approx QS \Leftrightarrow RP \approx SQ$

Den Fall, dass die Pfeile auf derselben Geraden g liegen, führen wir auf den vorherigen zurück durch die folgende Definition.

Definition 2.11 *Die Pfeile PQ und RS sind* äquivalent *und wir schreiben $PQ \sim RS$, falls $PQ \approx RS$ oder falls $P \neq Q$ und $R \neq S$ auf einer Geraden g liegen und es UV gibt mit $PQ \approx UV \approx RS$.*

2.4 Vektoren

Wir wollen nun den Begriff "Vektor" dadurch einführen, dass wir sagen:

- *Pfeile repräsentieren genau dann denselben Vektor, wenn sie äquivalent sind.*

Wenn das nicht zu Widersprüchen führen soll, muss $\sim$ eine "Äquivalenzrelation" sein. Um das zu garantieren benötigen wir das folgende Axiom - das im Raum bewiesen werden kann.

Axiom 2.12 (E4) Desargues. *Aus $PQ \approx UV \approx RS$, $P \neq Q$ und $P \vee Q \neq R \vee S$ folgt $PQ \approx RS$.*

Im Folgenden setzen wir voraus, dass Axiom 2.12 gilt.

Satz 2.13 *Die "Äquivalenz" $\sim$ aus Definition 2.11 ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{P}^2$ der Pfeile.*

Beweis. Nur die Transitivität ist ein Problem. Hier genügt es aus $P_iQ_i \approx P_{i+1}Q_{i+1}$ $(i = 1, 2, 3)$ auf $P_1Q_1 \sim P_4Q_4$ zu schließen. Gilt $PS_i = Q_i$ für ein I, so auch für alle anderen. Daher kann man $P_i \neq Q_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ und setzen $g_i = P_i \vee Q_i$. Dann $g_i \parallel g_{i+1}$ und $g_i \neq g_{i+1}$ für $i = 1, 2, 3$. Wegen der Transitivität der Parallelität (Satz 2.5) gilt $g_i \parallel g_j$ für alle i, j. Hat man $g_i \neq g_{i+2}$ für ein i so folgt mit dem Axiom 2.12 von Desargues $P_iQ_i \approx P_{i+2}Q_{i+2}$. Also $P_1Q_1 \sim P_4Q_4$ wieder nach Desargues oder nach Definition von $\sim$. Es bleibt somit der Fall $g_1 = g_3$ und $g_2 = g_4$, Wegen Satz 2.8 gibt es $X \notin g_1 \cup g_2$. Parallelogrammergänzung (Lemma 2.6) liefert Y mit $XY \approx P_4Q_4$ und wir haben $h = X \vee Y \neq g_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Wenden wir den schon behandelten Fall auf P_2Q_2, P_3Q_3, P_4Q_4, XY an, so folgt $P_2Q_2 \sim XY$ und $P_2Q_2 \approx XY$ da $G_2 \neq h$. Nun wieder mit Desargues $P_1Q_1 \approx XY$ und dann $P_1Q_1 \approx P_4Q_4$. $\square$.

Korollar 2.14 *Liegen $P \neq Q$ und $R \neq S$ auf der Geraden g und gibt es UV mit $PQ \approx UV \approx RS$, so gibt es zu jedem $X \notin g$ ein Y mit $PQ \approx XY \approx RS$.*

Der zweite Teil der Definition von $\sim$ ist also von der Wahl des "Hilfspfeils" UV unabhängig und die Relation der Äquivalenz kann mittels Geodreieck und Lineal überprüft werden. Beweis. Nach Lemma 2.6 gibt es Y mit $PQ \approx XY$, $XY \sim PQ \sim RS$ und damit $XY \sim RS$ sowie $XY \approx RS$, da $X, Y \notin R \vee S$. □

Durch "Abstraktion" nach dieser Äquivalenzrelation erhalten wir nunmehr den Begriff *Vektor*:

- Vektoren sind Grössen, die durch Pfeile repräsentiert werden
- Jeder Pfeil PQ repräsentiert genau einen Vektor $\overrightarrow{PQ}$
- $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \Leftrightarrow PQ \sim RS \Leftrightarrow$ es gibt $PQ \approx UV \approx RS$

Lemma 2.15 *(i) Gilt $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, so $P = R$ genau dann, wenn $Q = S$*

(ii) Gilt $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ und $P \neq Q$ so $R \neq S$ und $P \vee Q \parallel R \vee S$

Beweis. Zu (i). Ist $PQ \approx RS$ so folgt die Behauptung sofort aus der Definition. Sei also $P \neq Q$, $PQ \approx UV \approx RS$ und $P = R, Q, S$ auf $g \neq U \vee V$. Parallelogrammergänzung für P, U, V ergibt Q, für R, U, V ergibt S, also $Q = S$, da $P = R$.

Zu (ii). Wir haben $PQ \approx UV \approx RS$. und $P = Q \Leftrightarrow U = V \Leftrightarrow R = S$. Ist also $P \neq Q$, so haben wir $P \vee Q \parallel U \vee V \parallel R \vee S$ and $P \vee Q \parallel R \vee S$ nach der Transitivität (Lemma 2.5) der Parallelität. □

2.5 Punkte und Vektoren

Entscheidend für das Zusammenspiel zwischen Punkten und Vektoren und damit die Grundlage für das Rechnen mit Vektoren sind nun die folgenden beiden Tatsachen

(A1) Zu jedem Punkt P und Vektor $\vec{v}$ gibt es genau einen Punkt Q mit $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$. Wir schreiben

$$Q = \vec{v} + P.$$

(A2) Zu je zwei Punkten P, Q gibt es genau einen Vektor $\vec{v}$ mit $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ (gleichwertig: mit $Q = \vec{v} + P$)

Ist nämlich $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, so erhält man $Q = \vec{v} + P$, indem man A, B, P zum Parallelogramm ergänzt und Q ist dadurch eindeutig bestimmt, unabhängig von der Wahl des repräsentierenden Pfeils: Ist $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ und Q' die Ergänzung von A', B', P zum Parallelogramm, so $PQ \sim AB \sim A'B' \sim PQ'$, also $PQ \sim PQ'$ und daher $Q = Q'$. Wir haben somit eine wohldefinierte Operation $+$, die Vektoren mit Punkten zu Punkten verknüpft. In der zweiten Aussage steckt die Tatsache, dass wir Vektoren durch Abstraktion aus der Menge der Pfeile eingeführt haben.

2.6 Vektoraddition

Lemma 2.16 *Zu Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ gibt es genau einen Vektor $\vec{c}$ so, dass es Punkte P, Q, R gibt mit*

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} \text{ und } \vec{b} = \overrightarrow{QR} \text{ und } \vec{c} = \overrightarrow{PR}$$

Beweis. Wähle einen Punkt P, $Q = \vec{a} + P$, $R = \vec{b} + Q$ und $\vec{c} = \overrightarrow{PR}$. Das beweist die Existenz. Zur Eindeutigkeit ist zu zeigen: Gilt $\vec{a} = \overrightarrow{P'Q'}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{Q'R'}$ so $\overrightarrow{P'R'} = \overrightarrow{PR}$. Der Fall, dass $P = Q$ oder $Q = R$ und damit auch $P' = Q'$ bzw, $Q' = R'$ ist, ist trivial. Ebenso der Fall das $P = P'$. Seien also P, Q, R paarweise verschieden und $P \neq P'$. Nach Lemma 2.15 gilt $Q \neq Q'$, $R \neq R'$ und $P \vee P' \parallel Q \vee Q' \parallel R \vee R'$ und es folgt $P \vee P' \parallel R \vee R'$ mit der Transitivität der Parallelität (Lemma 2.5),

Wir betrachten zunächst den Fall, dass P, Q, R auf einer Geraden g liegen also P', Q', R' auf einer Parallelen g' zu g. Ist $P' \notin g$ so $g' \neq g$ und somit $PR \approx P'R'$. Liegt P' auf g, so wählen wir nach (E2) ein $P'' \notin g$ und erhalten, indem wir das eben Bewiesene zweimal anwenden, $PR \approx P''R'' \approx P'R'$, also $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{P'R'}$.

Sei nun angenommen, dass P, Q, R nicht kollinear sind - also auch $P'Q'R'$ nicht kollinear. Sei zunächst zusätzlich angenommen, dass P' auf keiner der Geraden $P \vee Q$ und $P \vee R$ noch auf der Parallelen zu $Q \vee R$ durch P liegt. Also $PQ \approx P'Q'$ und damit nach Kor.2.10 auch $PP' \approx QQ'$. Es gilt nun auch $R \notin Q \vee Q'$, da sonst $P \vee P' \parallel Q \vee R$. Daher $QR \approx Q'R'$, also $QQ' \approx RR'$. Da $P \vee P' \neq R \vee R'$ (sonst wären P, R, P' kollinear), folgt $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{P'R'}$ nach dem Axiom 2.12 von Desargues. Ist P' beliebig, so wählen wir P'' nach Satz 2.8 so, dass P'' auf keiner der Geraden $P \vee Q$, $P \vee R$ und der Parallelen zu $Q \vee R$ durch P liegt noch auf einer zu einer dieser Geraden Parallelen durch P'. Dann können wir wieder mit $PR \approx P''R'' \approx P'R'$ schliessen. □

Damit dürfen wir definieren:

$$\vec{b} + \vec{a} := \vec{c} \quad \text{falls} \quad \vec{c} + P = \vec{b} + (\vec{a} + P)$$

2.7 Gesetze der Addition

(A3) $(\vec{w} + \vec{v}) + P = \vec{w} + (\vec{v} + P)$

(V1) $(\vec{w} + \vec{v}) + \vec{u} = \vec{w} + (\vec{v} + \vec{u})$

(V2) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

(A3) und (V1) sind offensichtlich nach Definition der Addition, (V2) folgt mut Parallelogrammergänzung. □

- Alle Pfeile PP repräsentieren denselben Vektor $\vec{0}$ und es gilt

$$\text{(A4)}\ \ \vec{0} + P = P, \quad \text{(V3)}\ \ \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

- Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es genau einen Vektor $\vec{b}$ so, dass es Punkte P, Q gibt mit $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{QP}$.

Somit erhalten wir eine wohldefinierte Operation $\vec{a} \mapsto -\vec{a}$ mit

$$-\vec{a} = \overrightarrow{QP} \text{ genau dann, wenn } \vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

und es gilt

$$\text{(V4)}\ \ \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

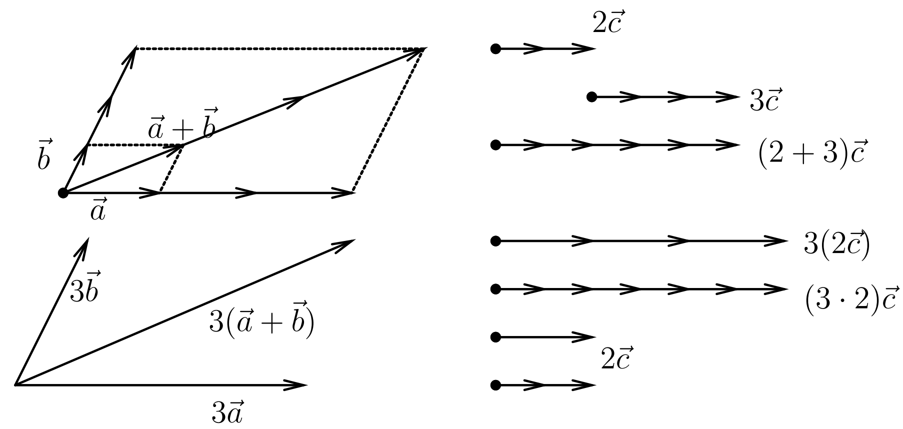
2.8 Ganzzahlige Vielfache von Vektoren

Durch Rekursion definieren wir für einen Vektor $\vec{a}$ die Vielfachen $n\vec{a}$ mit $n \in \mathbb{N}$ (Null ist die natürlichste aller Zahlen)

$$0\vec{a} = \vec{0}, \ \ (n+1)\vec{a} = n\vec{a} + \vec{a}$$

und dann auch für negative ganze Zahlen

$$(-n)\vec{a} = -(n\vec{a})$$



Es gilt für alle $r, s \in \mathbb{Z}$

$$\text{(V5)}\ \ r(\vec{v} + \vec{w}) = r\vec{v} + r\vec{w}$$

$$\text{(V6)}\ \ 1\vec{v} = \vec{v}, \quad \text{(V7)}\ \ (r+s)\vec{v} = r\vec{v} + s\vec{v}, \quad \text{(V8)}\ \ r(s\vec{v}) = (rs)\vec{v}$$

Das kann man leicht aus (V1-4) beweisen, für $r, s \geq 0$ durch Induktion. za mit $z \in \mathbb{Z}$ und $a \in A$ kann man ganz analog für jede kommutative Gruppe definieren und (V5-8) beweisen. Schreibt man multiplikativ a^z statt za so hat man gerade die bekannten Regeln für das Rechnen mit Exponenten.

2.9 Teilung von Vektoren

Lemma 2.17 *Gegeben sei eine desarguessche affine Ebene und $n \in \mathbb{N}_{>1}$ so, dass $k\vec{v} \neq \vec{0}$ für alle Vektoren $\vec{v} \neq \vec{0}$ und alle $0 < k \leq n$. Dann können wir jeden Vektor in n gleiche Teile teilen: Zu jedem Vektor $\vec{a}$ und jedem $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $\vec{b}$ mit*

$$n\vec{b} = \vec{a} \quad \textit{geschrieben } \vec{b} = \frac{1}{n}\vec{a}$$

Beweis durch Konstruktion. Sei $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$. Wähle $C_0 = S$, C_1 nicht auf der Geraden g durch SA. Sei $\vec{c} = \overrightarrow{SC_1}$ und C_k auf der Geraden $h = S \vee C_1$ so, dass $\overrightarrow{S, C_k} = k\vec{c}$. Sei $B_n = A$ und B_k der Schnittpunkt von g mit der Parallelen zu $C_n \vee B_n$ durch C_k. Wähle $D_1 = B_1$und rekursiv

$$D_{i+1} = \vec{c} + D_i.$$

Wir zeigen induktiv

$$\overrightarrow{B_iB_{i+1}} = \overrightarrow{C_iD_{i+1}} = \vec{b}$$

Für $i = 0$ gilt das nach Definition. Im Schritt von $i-1$ nach i haben wir das Parallelogramm $C_{i-1}C_i \approx D_iD_{i+1}$ nach Definition von D_{i+1}. Also ist die Gerade $C_i \vee D_{i+1}$ parallel zu g (nämlich parallel $C_{i-1} \vee D_i$ was wiederum nach Induktionsannahme zu g parallel ist). Also haben wir das Parallelogramm $B_iC_i \approx B_{i+1}D_{i+1}$ und erhalten $\overrightarrow{B_iB_{i+1}} = \overrightarrow{C_iD_{i+1}} = \overrightarrow{C_{i-1}D_i} = \vec{b}$. Somit $\vec{a} = n\vec{b}$. $\square$

3 Vektorgruppe und Translationen

3.1 Gruppen und Untergruppen#

Eine Gruppe ist gegeben durch eine Menge G mit einer 2-stelligen Operation $(x, y) \mapsto x \cdot y = xy$ (*Multiplikation*), einer Konstanten e (*Neutralelement*) und einer 1-stelligen Operation $x \mapsto x^{-1}$ (*Inversion*) so, dass für alle $x, y, z \in G$ gilt

- $x(yz) = (xy)z$ *assoziativ*
- $ex = x = ex$
- $xx^{-1} = e = x^{-1}x$

Man schreibt auch $(G, \cdot, e, ^{-1})$ oder einfach G, wenn klar ist, welche Operationen gemeint sind. Die Gruppe ist *kommutativ* oder *abelsch*, falls gilt

- $xy = xy$ für alle $x, y \in G$

In diesem Falle notiert man die Operationen auch oft *additiv*: $(G, +, 0, -)$. Eine Teilmenge U von G ist eine *Untergruppe*, falls gilt

- $xy \in U$ für alle $x, y \in U$

- $e \in U$
- $x^{-1} \in U$ für alle $x \in U$

Dann wird U zu einer Gruppe mit den von G geerbten Operationen.

Beispiele.

1. Die (abelsche) Gruppe $(\mathbb{Z}, +, 0, -)$ der ganzen Zahlen mit der Addition. Die geraden Zahlen bilden eine Untergruppe $2\mathbb{Z}$.

2. Die (abelsche) Gruppe $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot, 1, ^{-1})$ mit der Multiplikation. Untergruppen $\mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{Q}_{\neq 0}$, $\mathbb{Q}_{>0}$.

3. S_M bezeichnet die *symmetrische Gruppe* aller bijektiven Abbildungen $\sigma : M \to M$ mit der Komposition als Multiplikation, dem Neutralelement id_M, der identischen Abbildung, und der Umkehrabbildung σ^{-1} als Inverser. Nicht abelsch falls $|M| \geq 3$.

4. Die *allgemeine lineare Gruppe* $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$.

3.2 Homomorphismen*

Seien G und H Gruppen. Eine Abbildung $\phi : G \to H$ ist ein *Homomorphismus*, falls

$$\phi(g \cdot_G h) = \phi(g) \cdot_H \phi(h) \quad \text{für alle } g, h \in G$$

1. $x \mapsto \cos x + i \sin x$ ist ein Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +, 0, -)$ auf die multiplikative Gruppe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

2. Für endliches M ist das *Signum* $\mathsf{sign} : S_M \to \{1, -1\}$ ein Homomorphismus

3. $\det : \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\neq 0}$ ist ein Homomorphismus.

Wir definieren $\mathsf{Kern}(\phi) = \{g \in G \mid \phi(g) = e_H\}$

Lemma 3.1 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus von Gruppen. Dann*

$$\phi(e_G) = e_H, \quad \phi(g^{-1_G}) = (\phi(g))^{-1_H}$$

und $\mathsf{Kern}(\phi)$ ist eine Untergruppe von G. Weiterhin ist ϕ genau dann injektiv, wenn $\mathsf{Kern}(\phi) = \{e_g\}$.

Beweis. $\phi(e_G) = \phi(e_g e_G) = \phi(e_G)\phi(e_G)$ und durch Multiplikation mit $\phi(e_G)^{-1}$ folgt $\phi(e_G) = e_H$. Nun $\phi(g)\phi(g^{-1}) = \phi(gg^{-1}) = \phi(e_g) = e_H$ und durch Multiplikation mit $\phi(g)^{-1}$ von links folgt $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$.

Seien $g, h \in \mathsf{Kern}(\phi)$, Dann $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h(= e_H e_H = e_H$ und $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1} = e_H^{-1} = e_H$ also ist $\mathsf{Kern}(\phi)$ Untergruppe von G.

Ist $\phi(g) = \phi(h)$, so $\phi(gh^{-1}) = \phi(g)\phi(h)^{-1} = e_h$ also $gh^{-1} = e_G$ und $g = h$.
□

3.3 Gruppenwirkungen

Eine *Wirkung* oder *Operation* einer Gruppe G auf einer Menge M ordnet jedem Element $g \in G$ und $x \in M$ ein Element $g(x) \in M$ zu so, dass gilt

$$e(x) = x, \quad (hg)(x) = h(g(x)) \qquad \text{für alle } g, h \in G,\ x \in M$$

Man darf auch $gx = g(x)$ schreiben. Ist U Untergruppe von G, so kann man die Wirkung nur der Elemente $g \in U$ auf M betrachten.

Satz 3.2 * *Die Wirkungen einer Gruppe G auf einer Menge M entsprechen bijektiv den Homomorphismen $\phi : G \to S_M$ vermöge*

$$\phi(g)(x) = g(x) = gx \qquad \text{für } g \in G,\ x \in M$$

Insbesondere

$$\phi(hg) = \phi(h) \circ \phi(g),\ \phi(e) = \mathsf{id}_M,\ \phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$$

Beweis. Sei eine Wirkung gegeben. Es ist zu zeigen, dass jedes $\phi(g) : M \to M$ bijektiv ist. Nun gibt es aber in G das inverse Element g^{-1} und wir haben $\phi(g^{-1})(\phi(g)(x)) = g^{-1}(g(x)) = (g^{-1}g)(x) = e(x) = e$ und $\phi(g)(\phi(g^{-1})(x)) = g(g^{-1}(x)) = (gg^{-1})(x) = e(x) = x$. Das besagt aber gerade, dass $\phi(g^{-1})$ die Umkehrabbildung von $\phi(g)$ ist und somit beide bijektiv. Die Homomorphiebedingung $\phi(hg) = \phi(h) \circ \phi(g)$ ist gleichbedeutend zu $(hg)(x) = h(g(x))$ (für alle $x \in M$), da $\phi(hg)(x) = (hg)(x)$ und $h(g(x)) = \phi(h)(\phi(g)(x)) = (\phi(h) \circ \phi(g))(x)$. Und $\phi(e) = \mathsf{id}_M$ bedeutet gerade, dass $\phi(e)(x) = x$ für alle x. □

Die Wirkung von G auf M ist

- *treu*, falls es zu allen $g \neq h$ in G ein $x \in M$ gibt mit $gx \neq hx$
- *transitiv*, falls es zu allen $x, y \in M$ ein $g \in G$ gibt mit $gx = y$
- (einfach) *scharf transitiv*, falls es zu allen Paaren $x, y \in M$ genau ein $g \in G$ gibt mit $gx = y$.

Lemma 3.3 *Für die Wirkung einer Gruppe G auf M sind äquivalent*

(i) Die Wirkung ist treu

(ii) Ist $gx = x$ für alle $x \in M$ so $g = e$

(iii) Die Abbildung ϕ ist injektiv.

Jede scharf transitive Wirkung ist treu.

Beweis. $(i) \Leftrightarrow (iii)$ folgt sofort aus dem Satz. (ii) besagt, dass der Kern (des Homomorphismus) ϕ trivial ist, somit $\Leftrightarrow (iii)$. Ist die Wirkung scharf transitiv, so folgt (ii) trivialerweise.

3.4 Vektorgruppe

Satz 3.4 *Die Vektoren einer (unendlichen) Desarguesschen affinen Ebene* $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$ *bilden eine kommutative Gruppe* $V = (V, +, \vec{0}, -)$. *Diese wirkt mit* $P \mapsto \vec{v} + P$ *scharf transitiv auf der Punktmenge* $\mathbb{P}$.

Beweis: Die (V1-4) sind gerade die Axiome einer kommutativen Gruppe. (A1-4) die Axiome für eine scharf transitive Wirkung. □

3.5 Translationen

Die Abbildung

$$\tau_{\vec{v}} : \mathbb{P} \to \mathbb{P}, \quad \tau_{\vec{v}}(P) = \vec{v} + P$$

heisst *Translation* mit *Verschiebungsvektor* $\vec{v}$.

Korollar 3.5 *Die Abbildung* $\vec{v} \mapsto \tau_{\vec{v}}$ *ist ein Isomorphismus von* V *auf eine Untergruppe von* $S_{\mathbb{P}}$, *die* Translationsgruppe $T = T(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$ *von* $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$

$$\tau_{\vec{w}+\vec{v}} = \tau_{\vec{w}} \circ \tau_{\vec{v}}, \quad \tau_{\vec{0}} = \mathsf{id}_{\mathbb{P}}, \quad \tau_{-\vec{v}} = \tau_{\vec{v}}^{-1}$$

Satz 3.6 $^+$ *Eine bijektive Abbildung* $\tau : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ *einer (unendlichen) Desarguesschen affinen Ebene* $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$ *ist genau dann eine Translation, wenn dass Bild* $\{\tau(P) \mid P \in g\}$ *einer Geraden* g *stets eine zu* g *parallele Gerade ist und wenn* $\tau(P) \neq P$ *für alle* P *oder* $\tau(P_i) = P_i$ *für zwei verschiedene Punkte* P_1, P_2 *- in diesem Fall* $\tau = \mathsf{id}_{\mathbb{P}}$.

Damit können wir den Vektor $\vec{v}$ mit der Translation $\tau_{\vec{v}}$ identifizieren. Häufig werden Vektoren auf diesem Weg eingeführt. Dagegen spricht, dass das Konzept bijektiver Selbstabbildungen der Ebene deutlich abstrakter ist, als das von durch Pfeile repräsentierten Vektoren. Dafür spricht, dass sich die Addition direkt aus der Komposition der Abbildungen ergibt.

Beweis. Dass Translationen die genannten Eigenschaften haben, wird in U2.5 gezeigt. Wir nehmen nun an, dass τ bijektiv ist und Geraden auf parallele Geraden abbildet. Dann gilt

(1) Liegen $P \neq Q$ und $\tau(P)$ auf der Geraden g, so liegt auch $\tau(Q)$ auf g

(2) Ist Z ein Fixpunkt, $\tau(Z) = Z$, so geht jede Gerade durch Z in sich über: $\{\tau(P) \mid P \in g\} = g$.

Zu (1): Das Bild $h = \{\tau(X) \mid X \in g\}$ von g ist nach Voraussetzung zu g parallel. Da $\tau(P) \in g \cap h$, folgt $g = h$ nach Definition der Parallele. (2) folgt sofort.

Sei nun τ fixpunktfrei, also $\tau(P) \neq P$ für alle P. Wir zeigen

(3) Liegt Q nicht auf der Geraden $P \vee \tau(P)$, so gilt $P\tau(P) \approx Q\tau(Q)$, d.h. man hat ein Parallelogramm

(4) $\overrightarrow{P\tau(P)} = \overrightarrow{Q\tau(Q)}$ für alle P, Q.

Zu (3): $\tau(Q) \neq \tau(P)$, da τ injektiv ist. Nach Voraussetzung sind dann $P \vee Q$ und $\tau(P) \vee \tau(Q)$ parallel. Angenommen, $g = P \vee \tau(P)$ und $h = Q \vee \tau(Q)$ haben gemeinsamen Punkt S. Nach (1) liegt $\tau(S) \neq S$ sowohl auf g wie auf h, also $g = h$ nach der Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden - Axiom (E1). Also $Q \in g$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also war die Annahme $g \cap h \neq \emptyset$ falsch und es folgt $g \parallel h$. Zu (4). Für Q nicht auf der Geraden $P \vee \tau(P)$ folgt die Behauptung sofort aus (3). Liegt Q auf $P \vee \tau(P)$ so wähle $U \notin P \vee \tau(P)$. Dann folgt $\overrightarrow{P\tau(P)} = \overrightarrow{U\tau(U)} = \overrightarrow{Q\tau(Q)}$. Wählt man nun $\vec{v} = \overrightarrow{P_0\tau(P_0)}$ für ein P_0, so folgt $\tau(P) = \vec{v} + P$ für alle P.

Sei schliesslich angenommen, dass τ mindestens 2 Fixpunkte hat: $\tau(P_1) = P_1 \neq \tau(P_2) = P_2$. Liege Q nicht auf $P_1 \vee P_2$ und sei $g = Q \vee P_1$. Nach (2) gilt $\tau(Q) \in g$. Also $Q \neq P_2$, $\tau(Q) \neq P_2 = \tau(P_2)$ und, nach Voraussetzung, $Q \vee P_2 \parallel \tau(Q) \vee \tau(P_2)$. Da $P_2 = \tau(p_2)$ gemeinsamer Punkt dieser Parallelen ist, folgt $Q \vee P_2 = \tau(Q) \vee \tau(P_2)$ und $Q = g \cap (Q \vee P_2) = g \cap (\tau(Q) \vee \tau(P_2)) = \tau(Q)$. Indem man nun Q anstelle von P_2 nimmt, folgt dass auch alle Punkte von $P_1 \vee P_2$ Fixpunkte sind. $\square$

3.6 Stabilisator#

Gegeben sei eine Wirkung der Gruppe G auf der Menge M. Sei $x \in M$ und

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

Lemma 3.7 *G_x ist eine Untergruppe von M, der* Stabilisator *oder die* Standuntergruppe *von x.*

Beweis. Sei $gx = hx = x$. Dann $(hg)x = h(gx) = hx = x$. Gilt $gx = x$ so folgt $x = ex = g^{-1}(gx) = g^{-1}x$. $\square$

3.7 Induzierte Wirkung und Gitterbasen#

Gegeben sei eine Wirkung der Gruppe G auf der Menge M. Bezeichne $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen von M. Dann wird eine Wirkung von G auf $\mathcal{P}(M)$ induziert

$$gX = \{gx \mid x \in X\}$$

und wir können den Stabilisator

$$G_X = \{g \in G \mid gx \in X \text{ für alle } x \in X\}$$

betrachten, d.h. die $g \in G$ die die Menge X invariant lassen. Ist z.B. M die Anschauungsebene, G ihre Translationsgruppe und X der Streifen zwischen 2 parallenen Geraden g, h, so ist G_X gerade durch Vektoren der Richtung von g gegeben.

Entsprechend haben wir auch eine Wirkung von G auf $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$

$$g\mathcal{X} = \{gX \mid X \in \mathcal{X}\}$$

und betrachten die $g \in G$, die das Mengensystem $\mathcal{X}$ invariant lassen,

$$G_{\mathcal{X}} = \{g \in G \mid gX \in \mathcal{X} \text{ für alle } X \in \mathcal{X}\}$$

Ist z.B. G die Translationsgruppe der Anschauungsebene und $\mathcal{X}$ die Zerlegung der Ebene in kongruente Parallelogramme durch ein Gitter, so besteht $G_{\mathcal{X}}$ aus den $\tau_{\vec{v}}$ mit $\vec{v} = z_1\vec{v}_1 + z_2\vec{v}_2$ wobei $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ eine Basis des Gitters ist, d.h. durch 2 Seiten (mit gemeinsamen Punkt) eines Parallelogramms gegeben.

Ist $G = T$ die Translationsgruppe einer affinen Ebene $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$ mit der kanonischen Wirkung auf $M = \mathbb{P}$, so ist T_X bzw. $T_{\mathcal{X}}$ die Gruppe der *Translationssymmetrien* von X bzw. $\mathcal{X}$. Später werden wir zeigen

> Für die Anschauungsebene gilt: eine Untergruppe U der Translationsgruppe enthält entweder zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Translation $\tau_{\vec{v}}$ mit $\|\vec{v}\| < \varepsilon$ oder es gibt Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$
>
> $$U = \{\tau_{\vec{v}} \mid \vec{v} = z_1\vec{v}_1 + z_2\vec{v}_2,\ z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$$
>
> d.h. jeder Translationsvektor aus U ist ganzzahlige Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ linear unabhängig, so bilden sie eine *Gitterbasis* für U.

3.8 Bahnen$^{\#}$

Sei eine Wirkung der Gruppe G auf der Menge M gegeben. Die *Bahn* oder *Orbit* eines Elements a von M ist definiert als

$$G(a) = \{g(a) \mid g \in G\} \subseteq M.$$

Man hat nur die eine Bahn M genau dann, wenn die Wirkung transitiv ist. Ein *Repräsentantesystem* für eine Wirkung ist eine Teilmenge von M, die genau ein Element aus jeder Bahn enthält.

Lemma 3.8 *Die Bahnen der Wirkung einer Gruppe auf M sind die Klassen einer Äquivalenzrelation auf M*

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \textit{es gibt } g \in G \textit{ mit } g(x) = y$$

Inbsondere gehört jedes Element von M zu genau einer Bahn - und das ist dann seine Bahn.

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, dass $\sim$ Äquivalenzrelation ist. Wegen $e(x) = x$ haben wir $x \sim x$. Ist $x \sim y$, also $g(x) = y$ für ein $g \in G$, so $g^{-1}(y) = x$ und somit $y \sim x$. Haben wir $x \sim y \sim z$, so $y = g(x)$ und $h(y) = z$ für passende $g, h \in G$ und $(hg)(x) = h(g(x)) = h(y) = z$, woraus $x \sim z$. Die Klasse zum Element $a \in M$ ist $\{y \in M \mid a \sim y\} = \{y \in M \mid \exists g \in G.\ g(a) = y\}$ also gerade die Bahn $G(a)$ von a. Ist a auch in der Bahn $G(b)$ von b, so gilt folgt $b \sim a$. Also für jedes $x \in G(a)$ auch $b \sim a \sim x$ und somit $G(a) \subseteq G(b)$. Andererseits aber für jedes $y \in G(b)$ auch $a \sim b \sim y$ und somit $G(b) \subseteq G(a)$ und es folgt $G(b) = G(a)$. $\square$

Beispiel. Färbt man die Quadrate einer Gitterzerlegung der Ebene so mit den Farben Rot und Gelb, dass Quadrate mit gemeinsamer Kante verschiedene Farben haben, und ist $\mathcal{X}_r$ die Menge der roten Quadrate, so hat die Wirkung von $T_{\mathcal{X}_r}$ genau 2 Bahnen, die 'rote' und die 'gelbe'.

3.9 Kommutative Gruppen als $\mathbb{Z}$-Moduln#

Sei A eine additiv geschriebene kommutative Gruppe $(A, +, \mathbf{0}, -)$. Wir im Falle der Vektorgruppe definieren wir rekursiv für $a \in A$ und $n \in \mathbb{N}$

$$0a = \mathbf{0},\ (n+1)a = na + a,\ (-n)a = -(na).$$

Lemma 3.9 *Jede kommutative Gruppe ist ein* $\mathbb{Z}$-Modul, *d,h, es gelten*

$$(V5)\ \ r(a+b) = ra + rb$$

$$(V6)\ \ 1a = a, \quad (V7)\ \ (s+r)a = sa + ra, \quad (V8)\ \ r(sa) = (rs)a$$

Beweis. (V6): Nach Definition $1a = (0+1)a = 0a+a = \mathbf{0}+a = a$. Wir zeigen (V5) und (V7-8) für $r \geq 0$ und alle a, b jeweils durch Induktion. (V5): Nach Definition gilt $0(a+b) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = 0a + 0b$. Nun mit Induktionsannahme $(r+1)(a+b) = r(a+b) + a + b = ra + rb + a + b = ra + a + rb + b = (r+1)a + (r+1)b$. (V7): $(s+0)a = sa = sa + \mathbf{0} = sa + 0a$. Mit Defintion und Induktion: $(s+r+1)a = (s+r)a + a = sa + ra + a = sa + (r+1)a$. (V8): Nach (V6) $(1s)a = sa = 1(sa)$. Nun mit (V7) und Induktion $((r+1)s)a = (rs+s)a = (rs)a + sa = r(sa) + sa = (r+1)(sa)$.

Mit $r \geq 0$ und $s = -r$ haben wir nach dem schon bewiesenen Fall von (V5), dass $(-r)a + ra = (-r+r)a = 0a = \mathbf{0}$ für alle a, also

$$(*) \quad (-r)a = -(ra)$$

das eindeutig bestimmte Inverse von ra. Es folgt $(s-1)a = (-(1+r))a = -((1+r)a) = -(1a+ra) = -(a+ra) = -a-ra = sa-a$. Somit gilt

$$(r-1)a = ra - a \quad \text{für alle } a \in A,\ r \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$$

Nun können wir (V5) und (V7-8) für $r \leq 0$ ganz analog mit absteigender Induktion von r nach $r-1$ beweisen. □

4 Skalare

4.1 Ausblick#

Wir haben bis jetzt die kommutative Gruppe V der Vektoren aus den Axiomen einer (unendlichen) desarguesschen affinen Ebene $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \in)$ hergeleitet, Unser Ziel ist es, einen (Schief)Körper K von *Skalaren* und eine Multiplikation $(r, \vec{v}) \mapsto r\vec{v}$ von Skalaren mit Vektoren so zu definieren, dass V zum K-Vektorraum wird und so, dass

- $g \in G \ \Leftrightarrow\ g = \{r\vec{v} + P \mid r \in K\}$ für ein $P \in \mathbb{P}$ und $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$

Man sagt auch: $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \in)$ wir durch den K-Vektorraum V *koordinatisiert* - das Koordinatensystem erhält man dann durch Wahl eines Ursprungs(Punktes) und einer Basis. Anders ausgedrückt, bis auf Isomorphie ist $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \in)$ von der Form wie in Aufgabe U1.6.c. Zu diesem Ziel gibt es mehrere Wege

(i) Man wählt in der Tradition der Geometrie von der Antike über Descartes bis Hilbert (Grundlagen der Geometrie, 1899) eine Gerade als *Zahlengerade*, zeichnet zwei Punkte als 0 und 1 aus, definiert die Addition $r+s$ so, dass $\overrightarrow{0\,(r+s)} = \overrightarrow{0r} + \overrightarrow{rs}$, und die Multiplikation motiviert durch den Strahlensatz. Insbesondere ist dann zu zeigen, dass weder der Körper K noch der K-Vektorraum V von der Wahl der Zahlengeraden abhängt.

(ii) Wählt man zwei sich im gemeinsamen Punkt 0 schneidende Geraden g und g' als Zahlengeraden, deren Entsprechung durch die Einheitspunkte 1 und $1'$ festgelegt ist, so kann man die Skalare als Paare entsprechender Punkte auffassen. Von Neumann hat das entsprechend für n Geraden im n-dimensionalen Raum gemacht und auf Geometrien verallgemeinert, die zur Beschreibung der Quantenmechanik taugen (Continuous Geometry,Princeton 1960).

(iii) Wir führen die Skalare als "Quotienten" von Vektoren ein, d.h. wir erklären eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Paare $(\vec{a}, \vec{b})$ von Vektoren mit $\vec{b} \neq \vec{0}$ und $\vec{a}, \vec{b}$ repräsentiert durch Pfeile auf derselben Geraden. Auch hier ist der Strahlensatz die Motivation. Grundgedanken sind denen von (i) und (ii) sehr ähnlich, der Unterschied besteht nur darin, ob man mit einem Repräsentantensystem oder der Faktorstruktur arbeitet.

(iv) Man führt die Skalare als "Streckungen" mit Zentrum Z ein: bijektive Abbildungen $\sigma : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ mit $\sigma(Z) = Z$ und $\sigma(g) \parallel g$ für alle g. Fasst man auch Vektoren als Translationen τ auf, so ergibt sich die das Produkt des "Skalars" σ mit dem "Vektor" τ als die Translation mit $Z \mapsto (\sigma \circ \tau)(Z)$. Das ist die Sicht der "Abbildungsgeometrie", vgl. E.Artin, Geometric Algebra, New York 1957. Eine ausführliche und elementare Diskussion, die auch nicht-desarguessche Ebenen einschliesst findet man in Scherk und Lingenberg (letzter Rektor der TH Darmstadt), Rudiments of Plane Affine Geometry, Toronto 1975. Die "didaktische" Version in Ewald, Geometrie, eine Einführung für Studenten und Lehrer, Göttingen 1971. Dies ist der abstrakteste Zugang - und der von den Autoren der Hessischen Lehrpläne zur Geometrie favorisierte. Dass man mit diesem Zugang Einfaches recht kompliziert machen kann, zeigt sich, wenn man ihn auf die von von Neumann betrachteten Geometrien übertragen will.

(v) Noch etwas abgefahrener kann man es haben, wenn man die Geometrie auf die Spiegelungen gründet: Bachmann, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Berlin 1973,

(vi) Man verschärft die Axiomatik so, dass K schliesslich der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist. Dazu benötigen wir einen weiteren Grundbegriff: die Anordnung von Punkten auf einer Geraden bzw. den Begriff "P liegt (auf der Strecke) zwischen Q und R". Dann können wir von der Multiplaktion mit ganzen Zahlen rein algebraisch zur Multiplikation mit rationalen Zahlen übergehen. Die reellen Zahlen haben hier zunächst keine geometrische Bedeutung, sondern werden wie in der Analysis axiomatisch aufgefasst oder aus den rationalen gewonnen. Die Multiplikation von $r\vec{v}$ wir dann aus $q_n\vec{v}$ mit $r = \lim_{n\to\infty} q_n$ und $q_n \in \mathbb{Q}$ definiert. Man findet dies in Grauert und Grunau, Lineare Algebra und Analytische Geometrie, München 1999. Dies ist der kürzeste Zugang (wenn man die Analysis voraussetzt), gibt aber ein verkürztes und auch der geschichtlichen Entwickung nicht gerecht werdendes Bild.

An der Universität wird die (affine) Geometrie meist als bloßes Derivat der Linearen Algebra behandelt, d.h. man setzt den Vektorraumbegriff axiomatisch oder den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ der n-Tupel reeller Zahlen (hier $n = 2$) per Dekret voraus, und definiert affine Ebenen als scharf transitive Wirkungen eines 2-dimensionalen Vektorraums, d.h. an die Stelle der Anschauungsebene tritt eine scharf transitive Wirkung von $\mathbb{R}^2$, die dann mit geometrischen Vokabeln unterlegt wird (vgl. Berger, Geometry, Berlin 2009). Um dem dann einen didaktischen Anstrich zu geben, wird die Punktmenge mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert und damit die Unterscheidung zwischen affiner und linearer Struktur verwischt.

Weitere Literatur. In Fortführung von Hilbert: Hessenberg, Grundlagen der Geometrie, Berlin 1967 (Manuskript von 1925); Reidemeister, Grundlagen der Geometrie 1930 Berlin 1968. Borsuk and Szmielev, Foundations of Geometry, Amsterdam 1960
Als Teil einer Enzyklopädie: Behnke, Bachmann und Fladt, Grundzüge der Mathematik II, Geometrie, Teil A und B, Göttingen 1967; H. Lenz, Grundlagen der Elementarmathematik, Berlin 1961; Macke, Mechanik der Teilchen, Leipzig 1964
Für Erstsemester: Sperner, Einführung in die Analyische Geometrie und Algebra, Göttingen 1948; Pickert, Analytische Geometrie, Leipzig 1964; Tietz, Lineare Geometrie, Münster 1967; Jeger, Einführung in die vektorielle Geometrie und Algebra.
Didaktik: Freudenthal, Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht (Kap. 4., Ich sehe es so) , München 1978; Freudenthal, Mathematik als Pädagogische Aufgabe, Stuttgart, 1973; Artmann und Törner, Lineare Algebra und Geometrie, Göttingen 1980
Mit Themen zur Schul-Geometrie: Agricola und Friedrich, Elementargeometrie, Wiesbaden 2009; Jennings, Modern Geometry with Applications, New York 1997
Coxeter, Unvergängliche Geometrie, Basel 1963

4.2 Zahlengerade

Wir zeichnen eine Gerade g und auf dieser zwei Punkte $O \neq E$ aus und setzen $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$. Dadurch wird g zur *Zahlengeraden* und die Punkte P auf g zu *Skalaren* - wir schreiben daher $r, s \in g$ für Skalare. O ist der *Nullpunkt* und wird auch als 0 geschrieben. $E = 1$ ist der *Einheitspunkt*. Die Addition ergibt sich aus der Vektoraddition. Der nächste Schritt ist, die Multiplikation von Skalaren mit Vektoren, d.h. die Streckung von Vektoren geometrisch einzuführen und daraus die Multiplikation von Skalaren herzuleiten. Dann können die Vektorraumaxiome (V5-8) bewiesen werden und aus diesen die Körperaxiome. Entscheidend sind die Unabhängigkeit der Multiplikation von der Hilfsgeraden und die Isomorphie aller Zahlengeraden - und damit die Möglichkeit, den Begriff des Skalars durch Abstraktion zu bilden. Dazu wird eine weitere Version des Satzes von Desargues benötigt. Kommutativität der Multiplikation können wir vorerst nicht beweisen, diese benötigt ein weiteres Axiom, den Satz von Pappus-Pascal.

4.3 Addition von Skalaren

Die Skalare r entspechen eindeutig den Vektoren $\overrightarrow{0r}$ (in der Physik spricht man bei dieser Gelegenheit von *Ortsvektoren*). Daher können wir Addition und Subtraktion über diese Vektoren einführen: $r + s$ und $-r$ sind die eindeutig bestimmten Skalare mit

$$\overrightarrow{0, r+s} = \overrightarrow{0s} + \overrightarrow{0r}, \quad \overrightarrow{0\ -r} = -\overrightarrow{0r}$$

Die Abbildung

$$\phi(r) = \overrightarrow{0r}$$

ist somit eine injektive Abbildung von g in die Gruppe V der Vektoren und es gilt

$$\phi(0) = \vec{0}, \;\; \phi(r+s) = \phi(r) + \phi(s), \;\; \phi(-r) = -\phi(r)$$

d.h. sie bildet die Zahlengerade isomorph auf eine Untergruppe der Gruppe V aller Vektoren ab. Daher erbt die Zahlengerade die Axiome (V1-4), ist also eine kommutative Gruppe bzgl. der Addition, d.h. es gelten

$$(K1)\; r + (s+t) = (r+s) + t, \;\; (K2)\; r + s = s + r$$

$$(K3)\; 0 + r = r = r + 0, \; (K4)\; r + (-r) = 0 = (-r) + r$$

und man definiert

$$r - s = r + (-s)$$

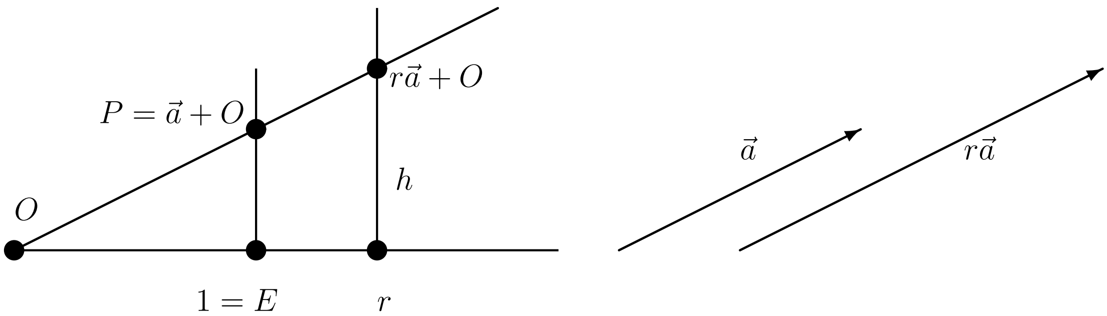
Dann folgt:

$$t = r - s \Leftrightarrow t + s = r$$

4.4 Skalar mal Vektor

Die Multiplikation $r\vec{v}$ des Skalars r mit dem Vektor $\vec{a}$, d.h. die *Streckung* oder *Dehnung* von $\vec{a}$ um den Faktor r wird dadurch motiviert, dass schließlich der Strahlensatz gelten soll: Ist $r = 0$ oder $\vec{a} = \vec{0}$ so definieren wir $r\vec{a} = \vec{0}$. Sei also $r \neq 0$. Haben wir $\vec{a} = \overrightarrow{OP} \neq \vec{0}$ mit $P \notin g$, so ist $r\vec{a} + O$ der Schnittpunkt mit g der Geraden durch r parallel zu $E \vee P$

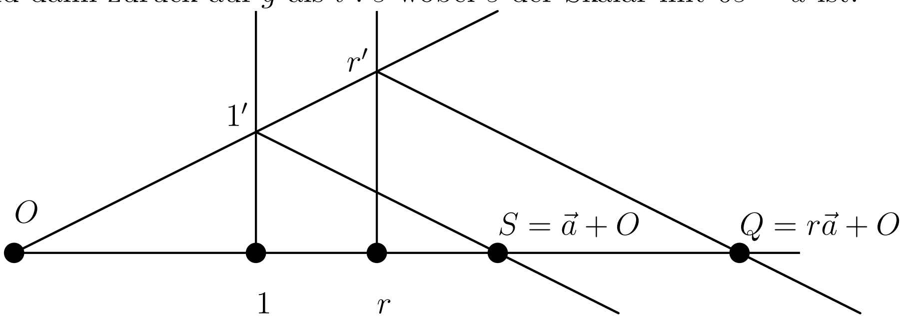
$$r\vec{a} + O = h \cap O \vee P \quad r \in h \parallel E \vee P \qquad \text{wobei } \vec{a} = \overrightarrow{OP} \neq \vec{0}, P \notin O \vee E$$



Liegt $\vec{a} + O$ auf g, so müssen wir eine Hilfskonstruktion ausführen: wir wählen eine von g verschiedene Gerade g' durch O und einen Punkt $E' = 1' \neq O$ auf g' und konstruieren wie eben $r\vec{e}\,'$ wobei $\vec{e}\,' = \overrightarrow{OE'}$. Sei $r' = O + r\vec{e}\,'$ und k die Parallele durch r' zu $(\vec{a} + O) \vee E'$

$$t = k \cap g, \quad r\vec{a} := \overrightarrow{0t}$$

d.h. wie übertragen zunächst das Verhältnis $r : 1$ auf die Gerade g' als $r' : 1'$ und dann zurück auf g als $t : s$ wobei s der Skalar mit $\overrightarrow{0s} = \vec{a}$ ist.



In beiden Fällen gilt nach Konstruktion

$$(V6) \quad 1\vec{a} = \vec{a}, \quad (1) \;\; r\vec{a} = s\vec{a} \Rightarrow \; r = s \;\text{ oder } \vec{a} = \vec{0}$$

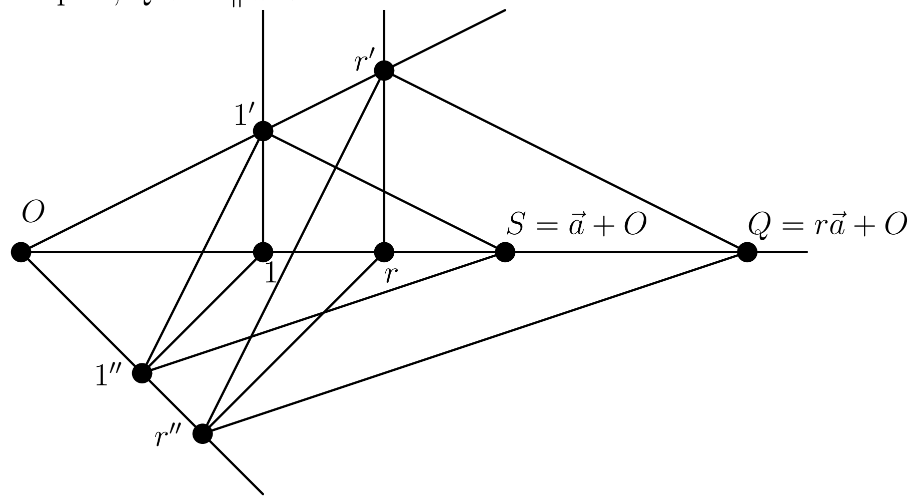
- es ist r' als Schnitt von g' mit der Parallelen zu $1 \vee 1'$ durch $r\vec{a} + O$ eindeutig bestimmt. Um die Unabhängigkeit der Definition von der Wahl von g' und E' zu zeigen, benötigen wir als Axiom eine weitere Form des Satzes von Desargues

Axiom 4.1 *(E5) Sind A, B, C und A', B', C' Dreiecke und gibt es eine* Zentrum *Z so, dass jeweils Z, A, A' und Z, B, B' und Z, C, C' kollinear sind (die Dreiecke sind* zentral perspektiv *und gilt $A \vee B \parallel A' \vee B'$ und $B \vee C \parallel B' \vee C'$, so gilt auch $A \vee C \parallel A' \vee C'$ (die Dreiecke sind* axial perspektiv*).*

Sind nun g', g'' zwei verschiedene Hilfsgeraden mit $1'$ und $1''$ und sind dort r' bzw, r'' konstruiert, und ist $Q = r\vec{a} + O$ mittels g konstuiert, so ist (mit $S = \vec{a} + O$) zu zeigen, dass $Q \vee r'' \parallel S \vee 1''$. Wir wenden Desargues mit Zentrum O an: Nach Konstruktion haben wir

$$1 \vee 1' \parallel r \vee r', \quad 1 \vee 1'' \parallel r \vee r'', \quad S \vee 1' \parallel Q \vee r'$$

Eine erste Anwendung liefert also $1' \vee 1'' \parallel r' \vee r''$, eine zweite dann, wie behauptet, $Q \vee r'' \parallel S \vee 1''$. □



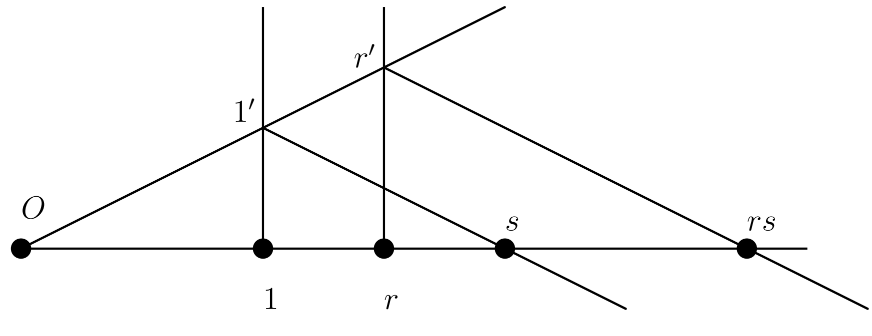
4.5 Multiplikation von Skalaren

Das Produkt rs von Skalaren auf der Zahlengeraden g, O, E können wir nun so definieren

$$rs = r\vec{a} + O \quad \text{wobei } \vec{a} = \overrightarrow{0s}$$

und wissen, dass das nicht von der Hilfsgeraden abhängt. Es gilt nach Konstruktion

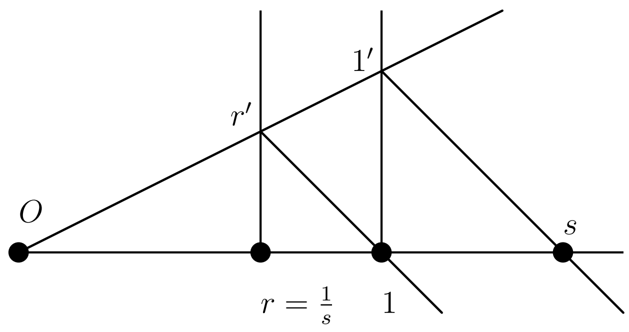
$$(K6) \quad r \cdot 1 = r \;\text{ und }\; 1 \cdot s = s$$



Korollar 4.2 *Hat man die Zahlengerade g, O, E und $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$ so gilt*

$$r\vec{e} = \overrightarrow{Or}, \quad (rs)\vec{e} = r(s\vec{e})$$

Lemma 4.3 *Zu jedem Skalar $s \neq 0$ gibt es einen Skalar $r \neq 0$ so, dass $rs = 1$. Zu jedem Skalar $r \neq 0$ gibt es einen Skalar $s \neq 0$ so, dass $rs = 1$.*



4.6 Wechsel der Zahlengeraden

Satz 4.4 *Zu je zwei Zahlengeraden g, O, E und g', O', E' einer desarguesschen affinen Ebene gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus, d.h. eine bijektive Abbildung $\phi : g \to g'$ mit*

$$\phi(O) = O',\ \phi(E) = E'$$

$$\phi(r+s) = \phi(r) + \phi(s),\ \phi(-r) = -\phi(r),\ \phi(r \cdot s) = \phi(r) \cdot \phi(s)$$

und es gilt für die Multiplikation eines Vektors $\vec{v}$ mit Skalaren von g, O, E bzw. g', O', E'

$$r\vec{v} = \phi(r)\vec{v}$$

Dabei ist ϕ wie folgt definiert

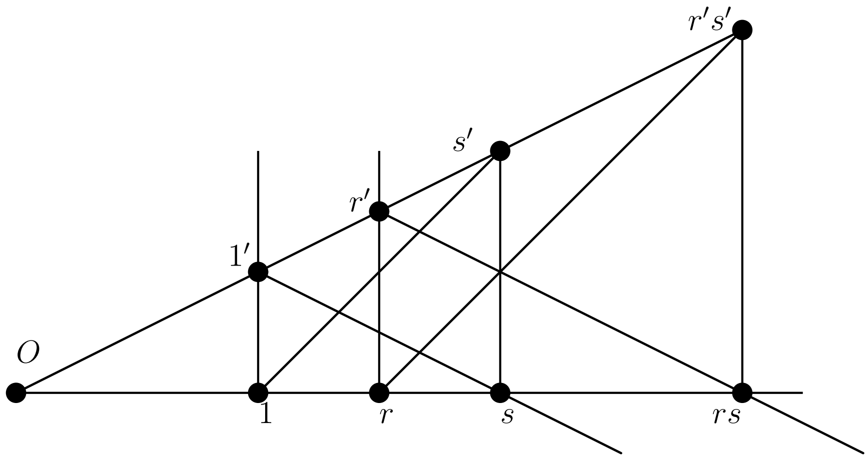
(i) Falls $g \neq g'$ aber $O = O'$, so $\phi(r) = r' \Leftrightarrow r \vee r' \parallel E \vee E'$

(ii) Falls $g \parallel g' \neq g$ und $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{O'E'}$, so $\phi(r) = r' \Leftrightarrow r \vee r' \parallel O \vee O'$

(iii) Andernfalls kann man ϕ als Hintereinanderausführung mehrerer Isomorphismen nach (i) und (ii) wählen.

Der Satz besagt, dass jede Wahl der Zahlengeraden zu demselben Begriff von Skalar führt - indem man einfach r und $\phi(r)$ identifiziert. Das Prinzip ist hier: Abstraktion auf der Grundlage der Isomorphie von Representantensystemen. Anders ausgedrückt, wie haben nun einen abstrakten Skalarenbereich, der durch beliebige Wahl der Zahlengeraden realisiert werden kann. Und diese kann man dann jeweils so wählen, dass sie in der betrachteten Situation günstig liegt.

Beweis. Im Fall (ii) ist $\phi = \tau_{\overrightarrow{OO'}}$ Translation und alle Konstruktionen übertragen sich von g auf g'. Fall (i): Es ist leicht zu sehen, dass ϕ bijektiv ist. Wie bei der Unabhängigkeit der Multiplikation mit Skalaren sieht man $\phi(r)\vec{v} = r\vec{v}$. Dass $\phi(r)\phi(s) = \phi(rs)$ gilt, ist trival falls $s = 1$ und folgt für $s \neq 1$ mit Desargues (E5) für die Dreiecke $s, 1, \phi(s)$ und $rs, r, \phi(r)\phi(s)$ mit Zentrum O. Hier $r' = \phi(r)$. Rest als Übung. $\square$



4.7 Parallele Vektoren und Parametrisierung der Geraden

Lemma 4.5 *Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent*

(i) Es gibt einen Punkt P so, dass $P, \vec{a}+P, \vec{b}+P$ kollinear

(ii) Für jeden Punkt P sind $P, \vec{a}+P, \vec{b}+P$ kollinear

(iii) Es gibt $s \neq 0$ mit $s\vec{a} = \vec{b}$

(iv) Es gibt $r \neq 0$ mit $r\vec{b} = \vec{a}$

Im Falle (i) sowie wenn $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ Nullvektor ist, schreiben wir $\vec{a} \parallel \vec{b}$ und sagen, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die "*gleiche Richtung*" haben bzw. dass $\vec{b}$ die Richtung der Geraden $g = P \vee \vec{a} + P$ hat oder zu g parallel ist.

Beweis. $(ii) \Rightarrow (i)$ ist trivial. Gilt (i) so wähle die Zahlengerade als $g = O \vee E$ mit $O = P$ und $E = \vec{a} + O$. Nach Kor.4.2 ist dann $\vec{b} = \overrightarrow{0s} = s\vec{a}$ und $s \neq 0$ da $\vec{b} \neq \vec{0}$. Also (iii). Ebenso (iv) mit Vertauschen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Gilt (iii), und konstriert man $s\vec{b}$ mit $O = P$, so liegt $s\vec{b} + O$ auf der Geraden durch O und $\vec{a} + O$ und es gilt (ii). Analog, wenn (iv) gilt. □

Korollar 4.6 *g ist eine Gerade genau dann, wenn es $\vec{a} \neq \vec{0}$ und P gibt mit*

$$g = \{r\vec{a} + P \mid r \text{ Skalar}\}.$$

Ist g Gerade, so liefern $P \in g$ und $\vec{a} = \overrightarrow{QR}$ mit $Q \neq R$ auf g eine solche Darstellung.

4.8 Gesetze für die Multiplikation mit Skalaren

Korollar 4.7 *Es gelten*

$$(V5)\ r(\vec{v} \pm \vec{w}) = r\vec{v} \pm r\vec{w}, \quad (V7)\ (r \pm s)\vec{v} = r\vec{v} \pm s\vec{v}, \quad (V8)\ (rs)\vec{v} = r(s\vec{v})$$

Beweis. Zu (V7) und (V8): O.B.d.A. hat man $\vec{v} = \overrightarrow{OP} \neq \vec{0}$ mit $P \notin g$, der gewählten Zahlengeraden g, O, E. Mache $g' = O \vee P$ zur Zahlengeraden mit $O' = O$ und $E' = P$ (also $\vec{v}$ der Einheitsvektor von g', O', E') und sei ϕ der Isomorphismus von g, O, E auf g', O', E'. Dann gilt nach dem Satz 4.4 und Kor. 4.2

$$r\vec{v} = \phi(r)\vec{v} = \overrightarrow{O\ \phi(r)}$$

und somit nach Definition der Addition bzw. Multiplikation auf der Zahlengeraden g', O', E'

$$(r+s)\vec{v} = \overrightarrow{0\ \phi(r+s)} = \overrightarrow{0\ \phi(r)+\phi(s)} = \overrightarrow{0\ \phi(r)} + \overrightarrow{0\ \phi(s)} = r\vec{v} + s\vec{v}$$

$$(rs)\vec{v} = \phi(rs)\vec{v} = (\phi(r)\phi(s))\vec{v} = \phi(r)(\phi(s)\vec{v}) = r(s\vec{v})$$

unter Verwendung von Kor.4.2.

Zu (V5): Seien zunächst $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$. O.B.d.A. ist $r \neq 0$ und $g = O \vee E$ mit $E = \vec{a}+O$ die Zahlengerade, also $r = r\vec{a}+O$. Nach Konstruktion des skalaren Vielfachen gilt $\vec{a} + O \vee \vec{b} + O \parallel r\vec{a} + O \vee r\vec{b} + O$ und $\vec{a} + O \vee \vec{a} + \vec{b} + O \parallel r\vec{a} + O \vee r(\vec{a} + \vec{b} + O$. Nach (E5) folgt

$$\vec{b} + O \vee \vec{a} + \vec{b} + O \parallel r\vec{b} + O \vee r(\vec{a} + \vec{b} + O \parallel .$$

Nun gilt aber

$$g \parallel \vec{b}+O \vee \vec{a}+\vec{b}+O, \quad O \vee r\vec{b}+O \parallel \vec{a}+O \vee \vec{a}+\vec{b}+O \parallel r\vec{a}+O \vee r(\vec{a}+\vec{b})+O$$

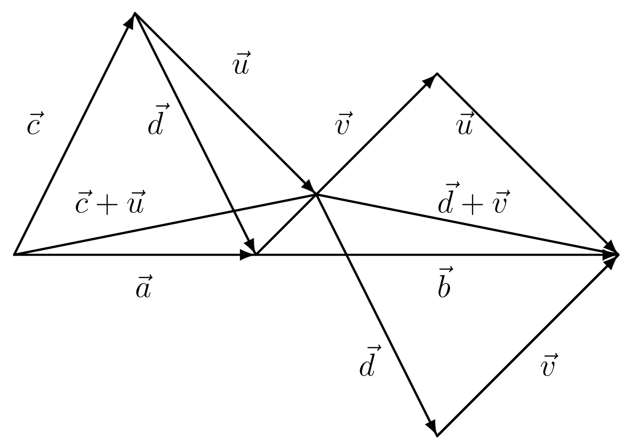
also hat man das Parallelogramm

$$O\ r\vec{a} + O \approx r\vec{b} + O\ \ r(\vec{a} + \vec{b}) + O$$

und somit $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$.

Sind $\vec{a} \parallel \vec{b}$ nicht Null, so zerlege man $\vec{a} = \vec{c} + \vec{d}$ und $\vec{b} = \vec{u} + \vec{v}$ mit nichtparallelen Vektoren so, dass auch $\vec{c} + \vec{u} \not\parallel \vec{d} + \vec{v}$. Dann gilt nach dem schon bewiesenen Fall: $r(\vec{a} + \vec{b}) = r(\vec{c} + \vec{u} + \vec{d} + \vec{v}) = r(\vec{c} + \vec{u}) + r(\vec{d} + \vec{v}) = r\vec{c} + r\vec{u} + r\vec{d} + r\vec{v} = r\vec{c} + r\vec{d} + r\vec{u} + r\vec{v} = r(\vec{c} + \vec{d}) + r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{a} + r\vec{b}$.

Die Aussagen für Subtraktion folgen dann durch die Charakterisierung $z = x - y \Leftrightarrow z + y = x$, die in allen kommutativen Gruppen gilt. $\square$



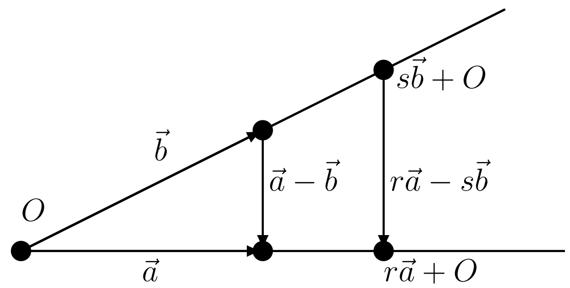
4.9 Strahlensatz

Satz 4.8 *Für $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ und Skalare $r, s \neq 0$ sind äquivalent*

(i) $r\vec{a} - s\vec{b} \parallel \vec{a} - \vec{b}$

(ii) $r = s$

(iii) $r\vec{a} - s\vec{b} = r(\vec{a} - \vec{b})$



Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Nach (V5) und Lemma 4.5 $r\vec{a} - s\vec{b} = t(\vec{a} - \vec{b}) = t\vec{a} - t\vec{b}$ für ein t. Also mit (V7) $(r-t)\vec{a} = (s-t)\vec{b}$ und dann $r - t = s - t = 0$ da $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. $(ii) \Rightarrow (iii)$ sofort mit (V5) und $(iii) \Rightarrow (i)$ mit Lemma 4.5. □

4.10 Gesetze für Skalare und Vektoren

Satz 4.9 *Sei $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, I)$ eine (unendliche) desarguessche affine Ebene, d.h es gelten (E0'-5). Hinsichtlich der oben eingefürten Operationen gilt dann: Die Skalare bilden einen* Schiefköper, *d.h. es gelten $(K1-4)$, $(K6)$ sowie*

$$(K5)\ t(r+s) = tr + ts, \quad (K7)\ (r+s)t = rt + st, \quad (K8)\ r(st) = (rs)t$$

$(K9)$ *Zu jedem $r \neq 0$ gibt es $s \neq 0$ mit $rs = sr = 1$ und s ist schon durch $rs = 1$ bzw, $sr = 1$ eindeutig bestimmt.*

*Die Vektoren bilden einen K-*Vektorraum, *d.h. es gelten $(V1-8)$ und $\mathbb{G} = \{U + P \mid P \in \mathbb{P},\ U$ Untervektorraum$, \dim U = 1\}$.*

Beweis. Auf der Zahlengeraden g, O, E sei $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$. Nach (V5-8)

$$(t(r+s))\vec{e} = t((r+s)\vec{e}) = t(r\vec{e} + s\vec{e}) = t(r\vec{e}) + t(s\vec{e}) = (tr)\vec{e} + (ts)\vec{e} = (tr+ts)\vec{e}$$

und mit (1) folgt (K5). Analog für (K7) und (K8). Zu (K9): Nach Lemma 4.3 gibt es $s, t \neq 0$ $sr = 1 = rt$. Mit (K6) folgt $s = s1 = srt = 1t = t$. Haben wir $sr = s'r = 1$, so $s = t = s'$. □

4.11 Zentrische Streckungen$^+$

Abbildungen $\sigma : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ der Form

$$\sigma(P) = r\overrightarrow{ZP} + Z$$

mit *Zentrum* Z und *Faktor* r heißen *zentrische Streckungen* oder *Dehnungen.*

Satz 4.10 *Eine Abbildung $\sigma : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ ist genau dann eine Streckung mit Zentrum Z und einem Faktor $r \neq 0, 1$, wenn σ bijektiv ist, Geraden auf parallele Geraden abbildet und Z als einzigen Fixpunkt hat.*

Beweis. Ist die Dehnung gegeben, so $r\overrightarrow{ZP} \neq 1\overrightarrow{ZP}$ für $P \neq Z$, also $\sigma(P) \neq P$. Die Umkehrabbildung ist die Dehnung mit Faktor r^{-1} und der Strahlensatz garantiert, dass $\sigma(g) \parallel g$. Umkehrung. Nach (1) im Beweis von Satz 3.6 sind $Z, P, \sigma(P)$ für alle $P \neq Z$ kollinear. Seien $P_1 \neq P_2$ von Z verschieden und nach Kor.4.6 $\overrightarrow{Z\sigma(P_i)} = r_i\overrightarrow{ZP_i}$. Sind Z, P_1, P_2 nicht kollinear, so nach dem Strahlensatz $r_1 = r_2$ da $\sigma(P_1) \vee \sigma(P_2) \parallel P_1 \vee P_2$. Sind Z, P_1, P_2 kollinear, so wähle man $P_3 \notin Z \vee P_1$ und schließe $r_1 = r_3 = r_2$. Also σ Dehnung mit Faktor r_1. □

4.12 Pappos-Pascal

Axiom 4.11 ($E6$) *(Pappos 320, Pascal 1623-1662) Liegen auf 2 Geraden mit Schnittpunkt S je 3 von S verschiedene Punkte A, B, C bzw. A', B', C' so, dass $A \vee B' \parallel A' \vee B$ und $B \vee C' \parallel B' \vee C$, so auch $C \vee A' \parallel C' \vee A$.*

Daraus folgt dann leicht das Axiom von Desargues im Falle, dass alle Punkte in einer Ebene liegen. Auf der Grundlage der Kongruenzsätze kann man das Axiom von Pappos-Pascal aus dem Satz vom Kreis(Sehnen)viereck beweisen.

Satz 4.12 *Das Axiom von Pappos-Pascal gilt genau dann in einer desargueschen Ebene, wenn deren Skalare einen kommutativen Körper bilden.*

Beweis nach der Figur: Die Parallelität $B \vee A' \parallel A \vee B'$ gilt, da die Skalare λ und μ auf die Hilfsgerade übertragen werden. $\lambda\mu$ ist nun definiert durch den Schnitt der Zahlengeraden mit der Parallelen $A' \vee C$ zu $A \vee C'$. $\mu\lambda$ ist definiert durch den Schnitt der Zahlengeraden mit der Parallelen $B' \vee C$ zu $A \vee B'$. Nach Pappos-Pascal ist aber $A' \vee C \parallel A \vee C'$ genau dann, wenn $B/\vee C \parallel A \vee B'$, d.h. man erhält bei beiden Konstruktionen denselben Punkt C.

Hat man umgekehrt Punkte gemäß der Vorausetzung von Pappos-Pascal gegeben, so mache man $g = S \vee A$ zur Zahlengeraden mit $O = S$ und E als Schnittpunkt von g mit der Parallelen zu $B \vee A'$ durvch C'. Konstruiert man $C = \mu\lambda\vec{e} + O$, so hat man $B' \vee C \parallel B \vee C'$. Gilt nun $\mu\lambda = \lambda\mu$ so folgt $C = \lambda\mu\vec{e} + O$, also $A' \vee C \parallel A \vee C'$ nach der Konstruktion von $\lambda\mu$. □

4.13 Alternative: Vektorverhältnisse*

Einen begrifflich einfacheren, in der Ausführung aber etwas langwierigeren Zugang zu Skalaren erhalten wir, wenn wir diese als Verhältnisse (Proportionen) paralleler Vektoren einführen, ganz analog zur Definiton der rationalen Zahlwen aus den ganzen Zahlen. Dabei nennen wir $\vec{a}, \vec{b}$ parallel und schreiben $\vec{a} \parallel \vec{b}$, wenn es Pukte P, Q, R, S auf einer Geraden gibt mit $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{RS}$.

Ein *Vektorverhältnis* ist ein Paar

$$\vec{a} : \vec{b} \quad \text{mit } \vec{b} \neq \vec{0} \text{ sowie } \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ oder } \vec{a} = \vec{0}$$

Im Folgenden haben wir zu diskutieren, wann wir zwei Vektorverhältnisse $\vec{a} : \vec{b}$ und $\vec{c} : \vec{d}$ als in Proportion stehend und somit als gleichwertig ansehen wollen. Ist $\vec{a} = r\vec{b}$ und $\vec{c} = s\vec{d}$, so soll dies genau dann der Fall sein, wenn $r = s$.

Zwei Vektorverhältnisse $\vec{a} : \vec{b}$ und $\vec{c} : \vec{d}$ mit $\vec{a}, \vec{c} \neq \vec{0}$ stehen in *direkter Proportion*,

$$\vec{a} : \vec{b} \approx \vec{c} : \vec{d} \Leftrightarrow \; (\vec{a} - \vec{c}) \parallel (\vec{b} - \vec{d}) \text{ und } \vec{b} \nparallel \vec{d}.$$

Das können wir auch so ausdrücken: Für jeden Punkt P sind die Geraden durch P und $\vec{b} + P$ bzw $\vec{d} + P$ voneinander verschieden und die Geraden durch $\vec{b} + P, \vec{d} + P$ und $\vec{a} + P, \vec{c} + P$ zueinander parallel. Aus dem Satz von Desargues erhalten wir

Lemma 4.13

$$\vec{a} : \vec{b} \approx \vec{c} : \vec{d} \approx \vec{e} : \vec{f} \wedge \vec{b} \nparallel \vec{f} \quad \Rightarrow \vec{a} : \vec{b} \approx \vec{e} : \vec{f}.$$

Zwei Vektorverhältnisse $\vec{a} : \vec{b}$ und $\vec{c} : \vec{d}$ stehen in *Proportion*, $\vec{a} : \vec{b} \sim \vec{c} : \vec{d}$ genau dann, wenn einer der folgenden Fälle eintritt

- $\vec{a} : \vec{b} \approx \vec{c} : \vec{d}$
- $\vec{b} \parallel \vec{d}$ und es gibt $\vec{e} : \vec{f}$ mit $\vec{a} : \vec{b} \approx \vec{e} : \vec{f} \approx \vec{c} : \vec{d}$
- $\vec{a} = \vec{c} = \vec{0}$

Dabei kann man zu gegebenem $\vec{g}$ immer $\vec{f} \nparallel \vec{g}$ erreichen. Es folgt

“In Proportion Stehen” ($\sim$) ist eine Äquivalenzrelation für Vektorverhältnisse

Durch Abstraktion nach dieser Äquivalenzrelation

$$\vec{a} : \vec{b} \mapsto \frac{\vec{a}}{\vec{b}}$$

erhalten wir die *Skalare*. Wir halten fest

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{c}}{\vec{d}} \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{c}) \parallel (\vec{b} - \vec{d}) \quad \text{falls } \vec{a}, \vec{c} \neq \vec{0},\ \vec{b} \nparallel \vec{d}$$

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{c}}{\vec{b}} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{c}$$

Lemma 4.14 *Sei $\vec{e} \neq \vec{0}$ ein fest gegebener Vektor. Dann gibt es zu jedem Skalar $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ einen eindeutig bestimmten Vektor $\vec{c}$ mit*

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = \frac{\vec{c}}{\vec{e}}$$

Beweis. Sei zunächst $\vec{b} \nparallel \vec{e}$. Wähle einen Punkt O und $\vec{c} = \overrightarrow{OP}$, wobei P der Schnitt der Geraden durch $O, \vec{e} + O$ mit der Parallelen zu $\vec{b} + O, \vec{e} + O$ durch den Punkt $\vec{a} + O$ ist. Ist $\vec{b} \parallel \vec{e}$ so betrachte zunächst ein $\vec{e}' \nparallel \vec{b}$. □

Korollar 4.15 *Zu jedem Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ und Skalar ρ gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $\vec{w}$ mit*

$$\frac{\vec{w}}{\vec{v}} = \rho\ .\ \textit{Wir schreiben } \vec{w} = \rho\vec{v}$$

und sprechen von der Streckung/Multiplikation *des Vektors $\vec{v}$ um/mit den/m Skalar ρ. Es folgt*

$$\rho\vec{b} - \rho\vec{v} \parallel \vec{b} - \vec{v}$$

Korollar 4.16 *Seien g eine Gerade, O, E zwei verschiedene Punkte auf g und $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$. Dann erhält man eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen Skalaren und Punkten auf g mit*

$$\rho \mapsto \rho\vec{e} + O, \quad P \mapsto \frac{\vec{a}}{\vec{e}} \quad \textit{wobei } \vec{a} = \overrightarrow{OP}.$$

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar führt zu demselben Ergebnis, unabhängig davon, ob man Skalare als Punkte auf einer Zahlengeraden oder als Vektorquotienten auffasst.

5 Punkte und Vektoren im Raum

5.1 Axiome für den affinen Raum

Um den affinen (3-dimensionalen) Raum axiomatisch zu erfassen, benötigen wir dem weitere Grundebegriff der Ebenen. Wir haben also 3 Sorten von Objekten

- Punkte
- Geraden
- Ebenen

und die Inzidenzrelation(en)

- zwichen Punkten und Geraden
- zwischen Punkten und Ebenen
- Zwischen Geraden und Ebenen

Punkte auf derselben Geraden *kollinear*. Punkte bzw. Gerdaen auf derselmen Ebene sind *komplanar*. Geraden g, h sind *parallel*, falls $g = h$ oder g, h komplanar und es keinen gemeinsamen Punkt von g und h gibt.

Axiom 5.1 *(R1) Einen Gerade inzidiert mit einer Ebene genau dann, wenn jeder Punkt der Gerade mit dieser Ebene inzidiert.*

(R2) Durch zwei verschiedene Pubkte geht genau eine Gerade

(R3) Auf jeder Geraden gibt es mindestens 2 verschiedene Punkte

(R4) Es gibt ein Dreieck, *d.h. 3 nicht kollineare Punkte*

(R5) Jedes Dreieck liegt in genau einer Ebene

(R6) Jede Ebene enthält mindestens einen Punkt

(R7) Liegen zwei verschiedene Punkte einer Gerdaen in einer Ebene, so liegt die Gerade in dieser Ebene

(R8) Zu jedem Punkt P und jeder Geraden g gibt es genai eine Parallele zu g durch P

(R9) Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, so haben sie mindestene einen weiteren Punkt gemeinsam

(R10) Es gibt vier nicht komplanare Punkte

Es folgt, dass eine Gerade und Ebene durch die Menge ihrer inzidenten Punkte eindeutig bestimmt ist. Wir dürfen daher Geraden und Ebenen als Punktmengen auffassen und die Inzidenz so schreiben

$$P \in g \subseteq \varepsilon$$

5.2 Satz von Desargues

Satz 5.2 *In einem affinen Raum gelten beide Versionen des Axioms von Deargues, also (E4) und (E5).*

Wir werden dafür später einen einfachen Beweis sehen, der auf der Erweiterung des affinen Raums zum projektiven Raum beruht.

Korollar 5.3 *Im affinen Raum wird durch $\sim$ eine aus Def.2.11 eine Äquivalenzrelation definiert und ma erhält wie in Kap.2. die kommutative Gruppe V der Vektoren (d.h. (V1-4)) und ihre Wirkung auf der Punktmenge (d.h. (A1-2)). Ebenso bilden die Skalare einen Schiefkörper K und machen V zum K-Vektorraum. Gilt das Axiom von Pappus, so ist K ein Schiefkörper. Weiterhin gilt die folgende* Parameterdarstellung *von Geraden und Ebenen*

- *Sei g ein Gerade, A ein Punkt auf g und $\vec{v} \neq \vec{0}$ so, dass $\vec{v} + A$ auf g liegt ($\vec{v}$ heisst dann ein* Richtungsvektor *von g). Dann besteht g gerade aus den Punkten folgender Form (und diese Darstellung ist eindeutig)*

  $$P = r\vec{v} + A \ (r \in K)$$

  Umgekehrt ist jede Menge $\{r\vec{v} + P \mid r \in K\}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ eine Gerade.

- *Sei ε eine Ebene, A ein Punkt auf ε und $\vec{v}, \vec{w}$ so, dass $A, \vec{v}+A, \vec{w}+A$ in der Ebene ε, aber nicht auf einer Geraden liegen ($\vec{v}, \vec{w}$ bilden dann ein Paar* unabhängiger Richtungsvektoren *von ε). Dann besteht ε gerade aus den Punkten folgender Form (und diese Darstellung ist eindeutig)*

$$P = r\vec{v} + s\vec{w} + A \ (r, s \in K)$$

Umgekehrt ist jede Menge $\{r\vec{v} + s\vec{w} + A \mid r, s \in K\}$ mit $\vec{v} \not\parallel \vec{w}$ eine Ebene.

Im Folgenden geht es immer um pappusche affine Ebenen oder Räume, d.h. wir haben stets einen kommutativen Skalarenkörper

5.3 Unterverktorräume

Eine Teilmenge U des Vektorraums V aller Vektoren einer gegebenen (pappusschen) affinen Ebene oder Raumes ist ein *Unterverktorraum* falls gilt:

- $\vec{0} \in U$
- $\vec{x}, \vec{y} \in U \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in U$
- $\vec{x} \in U,\ r \in K \Rightarrow r\vec{x} \in U$

Dann ist U auch ein K-Vektorraum. Insbesondere

- $U = \{r\vec{v} \mid r \in K\}$ *vektorielle Gerade* und $\dim U = 1$ falls $\vec{v} \neq \vec{0}$
- $U = \{r\vec{v} + s\vec{w} \mid r, s \in K\}$ *vektorielle Ebene* und $\dim U = 2$, falls $\vec{v} \not\parallel \vec{w}$

$\dim U$ ist die *Dimension* von U. Damit können wir die Parameterdarstellung von Geraden bzw. Ebenen in der folgenden einfachen Form schreine

$$U + P = \{\vec{u} + P \mid \vec{u} \in U\}$$

U heisst dann auch *Richtungsgerade* bzw. *Richtungsebene* von $U + P$.

5.4 Unabhängigkeit zweier Vektoren

Die Bedingungen aus Lemma 4.5 können wir noch um die folgende ergänzen

(v) *Es gibt Skalare r, s nicht beide* $= 0$ *mit $r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0}$*

In der Tat, ist z.B. $r \neq 0$, so $\vec{a} = -r^{-1}s\vec{b}$. Ist umgekehrt z.B. $\vec{a} = t\vec{b}$ mit $t \neq 0$, so $1\vec{a} + (-t)\vec{b} = \vec{0}$. $\Box$

Trifft eine der Bedingungen (i)-(v) zu, so sagen wir: $\vec{a}, \vec{b}$ sind *linear abhängig.*

Korollar 5.4 *Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ sind genau dann Richtungsvektoren zueinander paralleler Geraden, wenn sie linear abhängig sind.*

Ist $\vec{a}, \vec{b}$ nicht linear abhängig, so spricht man von *linear unabhängig.* Insbesondere gilt $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$.

Korollar 5.5 *(i) $\vec{a}, \vec{b}$ ist linear unabhängig*

(ii) Aus $r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0}$ folgt stets $r = s = 0$

(iii) Für einen/jeden Punkt O liegen $O, \vec{a}+O, \vec{b}+O$ nicht auf einer Geraden

(iv) Zu jedem Vektor $\vec{c}$ gibt es höchstens eine Darstellung $\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}$

Beweis. Es ist nur noch $(ii) \Leftrightarrow (iv)$ zu zeigen. Gilt (iV) und $r\vec{a}+s\vec{b} = \vec{0}$ so folgt $r = s = 0$ da ja $\vec{0} = 0\vec{a}+0\vec{b}$. Gelte umgekehrt (ii) und $\vec{c} = r\vec{a}+s\vec{b} = r'\vec{a}+s'\vec{b}$. Dann $(r - r')\vec{a} + (s - s')\vec{b} = \vec{0}$ also $r - r' = 0 = s - s'$. □

Korollar 5.6 *$\{r\vec{v} + s\vec{w} + A \mid r, s \in K\}$ ist genau dann eine Ebene (und $\vec{v}, \vec{w}$ sind eine Paar unabhängiger Richtungsvektoren), wenn $\vec{v}, \vec{w}$ linear unabhängig sind.*

Die Eindeutigkeit der Parameterdarstellung kann man nun algebraisch so sehen; aus $r\vec{v} + s\vec{w} + A = r'\vec{v} + s'\vec{w} + A$ folgt $r\vec{v} + s\vec{w} = r'\vec{v} + s'\vec{w}$ folgt also $r = r$ und $s = s'$.

5.5 Unabhängigkeit dreier Vektoren

Lemma 5.7 *Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ des Raumes und einen beliebigen Punkt P sind die folgenden Aussagen äquivalent*

1 *Geeignete Repräsentanten von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ liegen in einer Ebene, d.h. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ liegen in einer vektoriellen Ebene.*

2 *Die Punkte $\vec{a} + P$, $\vec{b} + P$, $\vec{c} + P$, P liegen in einer Ebene.*

3 *Es gibt Skalare r, s, t, nicht alle 0, mit $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{0}$,*

4 *Sind $\vec{a}, \vec{b}$ nicht parallel, so kann man noch hinzufügen: $\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}$ für passende r, s*

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar. Ist $\vec{a} \parallel \vec{b}$, so liegen $\vec{A} + P, \vec{b} + P, P$ schon auf einer Geraden und man kann in (3) $t = 0$ nehmen. Andernfalls hat man in (3) $t \neq 0$ also $\vec{c} = t^{-1}r\vec{a} + t^{-1}s\vec{b}$ und somit $\vec{c} + P$ in der von $\vec{a}+P, \vec{b}+P, P$ aufgespannten Ebene. Liegt umgekehrt $\vec{c}+P$ in dieser Ebene, so $\vec{c} + P = r\vec{a} + s\vec{b} + P$ mit passenden r, s, also $r\vec{a} + s\vec{b} + (-1)\vec{c} = \vec{0}$. □

Gilt eine der Bedingungen des Lemmas, so sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *linear abhängig*, andernfalls *linear unabhängig.*

Lemma 5.8 *Äquivalent sind*

(i) $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sind linear unabhängig

(ii) Aus $r_1\vec{e}_1 + r_2\vec{e}_2 + r_3\vec{e}_3 = \vec{0}$ folgt $r_1 = r_2 = r_3 = 0$

(iii) Aus $x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$ folgen $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ und $x_3 = y_3$

Beweis. (ii) und (ii) sind nach dem vorangehenden Lemma äquivalent. (ii) folgt aus (iii) mit $x_i = r_i$ und $y_i = 0$. Gelte nun (ii) und sei $x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$. Dann $\vec{0} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 - (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) = (x_1 - y_1)\vec{e}_1 + (x_2 - y_2)\vec{e}_2 + (x_3 - y_3)\vec{e}_3$ also $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = x_3 - y_3 = 0$. □

5.6 Basen

Bei der Unabhängigkeit geht esa immer um eine Liste $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ von Vektoren, nie um eine Menge von Vektoren. Wir sagen, dass $\vec{v}_1$ unabhängig ist, wenn $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$. Auch die leere Liste (d.h. $n = 0$) ist unabhängig.

Ist $\vec{v} = r_1\vec{v}_1 + \ldots + r_n\vec{v}_n$ so sagt man, $\vec{v}$ ist *Linearkombination* der $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

Die Dimension der Vektorraums V aller Vektoren einer gegebenen (3-dimensionalen) affinen Raums definieren wir als $\dim V = 3$. Der Untervektoraum $\{\vec{0}\}$ hat die Dimension 0.

Satz 5.9 *Sei U Untervektorraum des Vektorraums aller Vektoren einer pappuschen affinen Ebene oder affinen Raums. Sei $\dim U = n$ (also $n \leq 3$), Dann sind die folgenden Aussagen für $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in U$ äquivalent*

(i) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sind linear unabhängig

(ii) Jedes $\vec{u} \in U$ hat mindestens eine Darstellung $\vec{u} = r_1\vec{v}_1 + \ldots + r_n\vec{v}_n$

(iii) Jedes $\vec{u} \in U$ hat genau eine Darstellung $\vec{u} = r_1\vec{v}_1 + \ldots + r_n\vec{v}_n$

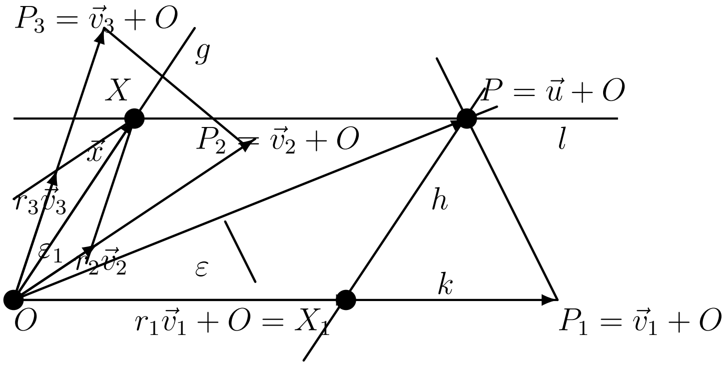
Weiterhin gilt: Es gibt $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in U$, die (i)-(iii) erfüllen.

Beweis. Die Existenz unabhängiger Vektoren ist für $n = 1, 2, 3$ jeweils durch (E0), (E3) bzw. (R10) garantiert. Gelte nun (i). Wir haben (ii) zu zeigen. Für $n = 1, 2$ folgt aus der Parameterdarstellung von $U + P$ dass $\vec{u} + P = r_1\vec{v}_1 + P$ bzw. $\vec{u}+P = r_1\vec{v}_1+r_2\vec{v}_2+P$ und somit $\vec{u} = r_1\vec{v}_1$ bzw, $\vec{u} = r_1\vec{v}_1+r_2\vec{v}_2$. Sei also $n = 3$ und wähle einen Punkt O (als Usprung) und $P_i = \vec{v}_i+O$. Jeden Vektor $\vec{u}$ können wir dann eindeutig als $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ schreiben. Liegt P in der durch O, P_2, P_3 bestimmten Ebene ε_1, so haben wir eine Darstellung $\vec{u} = r_2\vec{v}_2+r_3\vec{v}_3$. Liegt p auf der Geraden $O \vee P_1$ so haben wir $\vec{u} = r_1\vec{v}_1$. Andernfalls bestimmen O, P_1, P eine Ebene ε, die mit ε_1 den Punkt O, also nach (R10) und (R2) eine Gerade g gemeinsam hat, und das ist die Schnittgerade, da $\varepsilon \neq \varepsilon_1$. Sei nun h die Parallele zu g durch P nach (R8), also auch h in ε (wegen der Eindeutigkeit in (R5)). Da $\vec{v}_1$ nach Voraussetzung nicht Linearkombination von $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ ist, gilt $k := O \vee P_1 \neq g$, also $k \not\parallel g$ und somit $k \not\parallel h$, also haben die Geraden h und k der Ebene ε einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt X_1 und wir haben $X_1 = r_1\vec{v}_1$. Sein nun l die Parallele zu k durch P. Dann $l \not\parallel g$ und l in ε, also gibt es einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt X mit g. $X \in \varepsilon_1$, also $\vec{x} = \overrightarrow{OX} = r_2\vec{v}_2 + r_3\vec{v}_3$. Es folgt

$$\vec{u} = r_1\vec{v}_1 + \vec{x} = r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + r_3\vec{v}_3$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Wären $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ linear abhängig, so gäbe es einen Untervektorraum W von U mit dim $< n$ und $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in W$. Dann aber wegen (ii) auch $\vec{u} \in W$ für alle $\vec{u} \in U$, also $W = U$. Widerspruch.

Damit $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Aus (ii) folgt nun (iii) nach Lemma 5.8 bzw. Kor.5.5. Das (ii) aus (iii) folgt, ist trivial. □



Gelten die Bedingungen des Satzes, so ist $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ eine *Basis* von U.

Korollar 5.10 *Jeder Untervektorraum U von V besitzt eine Basis.* $\dim U = n$ *genau dann, wenn U eine Basis aus n Vektoren besitzt - und dann besteht jede Basis von U aus n Vektoren.*

> Geometrie ist eine eigenständige mathematische Disziplin. Algebraische Methoden dürfen in der Geometrie nur dann benutzt werden, wenn sie aus der Goemtrie heraus gerechtfertigt worden sind.

6 Koordinaten

6.1 Ortsvektoren

Zeichnet man einen Punkt O aus (und nennt ihn den *Ursprung*), so entsteht eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen Punkten und Vektoren

$P \mapsto \vec{x} = \overrightarrow{OP}, \quad \vec{x} \mapsto P = \vec{x} + O$

Gebraucht man Vektoren in diesem Sinne, so spricht man von *Ortsvektoren.* Mit $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ geht dann die Parameterdarstellung von Geraden bzw. Ebenen über in (und es ist beliebt, das "$+O$" zu unterschlagen)

$$\vec{x} + O = r\vec{v} + \vec{a} + O, \ (r \in \mathbb{R}) \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} + O = r\vec{v} + s\vec{v} + \vec{a} + O, \ (r, s \in \mathbb{R})$$

6.2 Vektor-Koordinaten in der Ebene

Wir beschränken uns im Moment auf eine feste Ebene. Ein Paar $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ von Vektoren ist (linear) *unabhängig*, wenn für einen/jeden Punkt O der Ebene die Punkte O, $O + \vec{a}_1$, $O + \vec{a}_2$ nicht auf einer Geraden liegen. Damit haben wir die eindeutige (Parameter)Darstellung

$$P = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + O \ \ (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

für Punkte der Ebene und daher auch für die Vektoren

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 \ \ (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

Wir sagen dann, dass $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ eine *Basis* α der Ebene bilden. Die eindeutig bestimmten Skalare x_1 und x_2 heissen die *Koordinaten* von $\vec{x}$ bzgl. α und wir schreiben

$$\vec{x}^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Das Rechnen mit Koordinaten geht so

$$\boxed{(\vec{x} + \vec{y})^\alpha = \vec{x}^\alpha + \vec{y}^\alpha, \quad (r\vec{x})^\alpha = r(\vec{x}^\alpha)}$$

Dabei ist für Spalten von Skalaren (*komponentenweise*) definiert

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}, \quad r\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix}, \quad -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Beweis. Sei $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2, \ \ \vec{y} = y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2$. Dann

$$\vec{x} + \vec{y} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 = (x_1 + y_1)\vec{a}_1 + (x_2 + y_2)\vec{a}_2$$

$$r\vec{x} = r(x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2) = rx_1\vec{a}_1 + rx_2\vec{a}_2 \qquad \square$$

6.3 Vektor-Koordinaten im Raum

Die Dreidimensionalität des Raumes drückt sich nun so aus: Ist eine Liste α dreier unabhängiger Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ gegeben (und solche gibt es!), so haben wir die (Parameter)Darstellung

$$P = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + O \ \ (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$$

für Punkte des Raumes und daher auch für die Vektoren

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 \ \ (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$$

Die Koordinaten x_i sind nach den vorangegangenen Lemma eindeutig bestimmt. Wir schreiben $\vec{x}^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und sagen, dass $\alpha : \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ eine *Basis* α des Raumes ist. Aus den Vektorraumaxiomen folgt sofort, dass man mit Koordinaten komponentenweise rechnet:

$$(\vec{x} + \vec{y})^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}, \quad (r\vec{x})^\alpha = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \\ rx_3 \end{pmatrix} \ \text{ für } \vec{x}^\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}^\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

6.4 Punkt-Koordinaten

Zeichnet man in einer Ebene bzw. im Raum einen Punkt O (Urpsrung) aus, so kann man (wie wir in 1.10 gesehen habe) Punkte durch (Orts)Vektoren bezeichnen

$$P = \vec{x} + O, \quad \vec{x} = \overrightarrow{OP}$$

Hat man zusätzlich eine Basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ so erhält man ein (affines) *Koordinaten-sytem* α mit Urspung $O_\alpha = O$ und kann die Koordinaten von P so einführen

$$P^\alpha = \vec{x}^\alpha \quad \text{mit } \vec{x} = \overrightarrow{OP}$$

$$P^\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6.5 Koordinatentransformation in der Ebene

Gegeben seien zwei Basen von $\mathcal{V}_\varepsilon$: die alte $\alpha : \vec{a}_1, \vec{a}_2$ und die neue $\beta : \vec{b}_1, \vec{b}_2$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Skalare t_{ij}, die die neue Basis in der alten ausdrücken

$$\vec{b}_1 = \begin{cases} & t_{11}\vec{a}_1 \\ + & t_{21}\vec{a}_2 \end{cases} \qquad \vec{b}_2 = \begin{cases} & t_{12}\vec{a}_1 \\ + & t_{22}\vec{a}_2 \end{cases}$$

$^+$ Die *Transformationsmatrix* ${}_\alpha T_\beta$ ist

$${}_\alpha T_\beta = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

In den Spalten der Transformationsmatrix stehen die Koordinaten der Vektoren der neuen Basis bzgl. der alten Basis

Wir definieren

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

Lemma 6.1 $\vec{v}^{\,\alpha} = {}_\alpha T_\beta \, \vec{v}^{\,\beta}$

Beweis. Sei $\vec{v} = r_1\vec{b}_1 + r_2\vec{b}_2$. Dann

$$\vec{v} = r_1(t_{11}\vec{a}_1 + t_{21}\vec{a}_2) + r_2(t_{12}\vec{a}_1 + t_{22}\vec{a}_2) = (r_1t_{11} + r_2t_{12})\vec{a}_1 + (r_1t_{21} + r_2t_{22})\vec{a}_2. \quad \square$$

6.6 Punktkoordinaten-Transformation in der Ebene

Lemma 6.2 *Gegeben seien zwei Koordinatensyteme O_α, α und O_β, β der Ebene. Dann*

$$P^\alpha = {}_\alpha T_\beta \, P^\beta + (O_\beta)^\alpha = {}_{\vec{\alpha}} T_{\vec{\beta}} \, P^\beta + \vec{v}^{\,\alpha} \text{ wobei } \vec{v} = \overrightarrow{O_\alpha O_\beta}.$$

Beweis. Sei

$$P = \vec{x} + O_\alpha = \vec{y} + O_\beta.$$

Dann

$$\vec{y}^{\,\alpha} = {}_{\vec{\alpha}} T_{\vec{\beta}} \, \vec{y}^{\,\beta}, \quad \vec{v}^{\,\alpha} = (O_\beta)^\alpha$$

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{v}, \quad P^\alpha = \vec{x}^{\,\alpha} = \vec{y}^{\,\alpha} + \vec{v}^{\,\alpha} \qquad \square$$

6.7 Koordinatentransformation im Raum

Die Regeln für Koordinatentransformation im Raum gelten ganz entsprechend. + Die Transformationsmatrix ist hier eine 3×3-Matrix mit

$$\vec{x}^{\alpha} = {}_{\alpha}T_{\beta}\vec{x}_{\beta}$$

Dabei ist für eine Matrix T und Spalte $\boldsymbol{x}$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

definiert

$$T\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + t_{23}x_3 \\ t_{31}x_1 + t_{32}x_2 + t_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

7 Anordnung und Dichte der Skalare

7.1 Rationale Vielfache von Vektoren

Ganzzahlige Vielfache von Vektoren haben wir rekursiv so definiert

$$0\vec{v} = \vec{0}, \quad (n+1)\vec{v} = n\vec{v} + \vec{v}, \quad (-n)\vec{v} = -(n\vec{n}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Entsprechend definieren wir ganzzahlige Vielfache von Skalaren

$$0r = 0, \quad (n+1)r = nr + r, \quad (-n)r = -(nr) \quad (n \in \mathbb{N})$$

und da die Addition $r + s$ von Skalaren als Addition $\overrightarrow{Or} + \overrightarrow{Os} = \overrightarrow{O\,r+s}$ definiert war, stimmen hier beide Definition überein. Wir nehmen nun in diesem Abschnitt an, dass $n\vec{v} = \vec{0}$ nur wenn $n = 0$ oder $\vec{v} = \vec{0}$. Es folgt

$$z\vec{v} = w\vec{v} \text{ und } \vec{v} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow z = w$$

Nämlich $(z - w)\vec{v} = (w - z)\vec{v} = \vec{0}$ und $z - w \in \mathbb{N}$ oder $w - z \in \mathbb{N}$. Unter dieser Annahmen haben wir in Kap.2.9 die Teilung von Vektoren eingeführt, d.h. gezeigt, dass es zu $n \neq 0$ und $\vec{v}$ einen eindeutig bestimmten Vektor $\frac{1}{n}\vec{v}$ gibt mit $n(\frac{1}{n}\vec{v}) = \vec{v}$. Es folgt, dass es zu $z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und Vektor $\vec{v}$ einen eindeutig bestimmten Vektor

$$\frac{z}{n}\vec{v} \quad \text{mit} \quad n(\frac{z}{n}\vec{v}) = z\vec{v}$$

gibt. Eine einfache Rechnung zeigt, dass für $\vec{v} \neq \vec{0}$ gilt

$$\frac{z}{n}\vec{v} = \frac{w}{m}\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad mz = nw \quad \Leftrightarrow \frac{z}{n} = \frac{w}{m}$$

wobei die zweite Äquivalenz sich darauf bezieht, dass die beiden Brüche dieselbe rationale Zahl darstellen d.h. $m = kn$ und $w = kz$ für ein $k \in \mathbb{N}_{>0}$. In der Tat $\frac{1}{nm}\vec{v} = \frac{1}{n}(\frac{1}{m}\vec{v})$ weil $(nm)(\frac{1}{n}(\frac{1}{m}\vec{v}) = m(n(\frac{1}{n}(\frac{1}{m}\vec{v})) = m(\frac{1}{m}\vec{v}) = \vec{v}$ und es folgt $\frac{kz}{kn}\vec{v} = (kz)(\frac{1}{kn}\vec{v} = z(k(\frac{1}{k}(\frac{1}{n}\vec{v}))) = z(\frac{1}{n}\vec{v}) = \frac{z}{n}\vec{v}$. □

Somit haben wir eine wohldefinierte Multiplikation von rationalen Zahlen mit Vektoren. Ist nun eine Zahlengerade g, O, E mit Einheitsvektor $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$ gegeben, so können wir demnach der rationalen Zahl $\frac{z}{n}$ den Skalar r mit $r\vec{e} = \frac{z}{n}\vec{e}$ zuordnen, also $\frac{z}{n}$ als Skalar auffassen. Da wir die Teilung von Vektoren ebenso wie die Streckung nach dem Prinzip des Strahlensatzes erklärt haben, folgt

$$\frac{z}{n}\vec{v} = r\vec{v} \quad \text{falls } r\vec{e} = \frac{z}{n}\vec{e}$$

d.h. die Multiplikation mit solchen *rationalen Skalaren* r stimmt mit der eben beschriebenen Multiplikation mit rationalen Zahlen überein, wenn wir rationale Zahlen mit den entsprechenden Skalaren identifizieren.

7.2 Ausblick

Um unserer Vorstellung der Zahlengeraden mit einer Anordnung oder Orientierung gerecht zu werden, müssen wir einen weiteren undefinierten Grundbegriff und die zugehörige Axiomatik einführen. Und dies so, dass es mit der für rationale Skalare aus $\mathbb{Q}$ übertragenen Anordnung kompatibel ist. Dazu kann man für jede Gerade eine 2-stellige Relation betrachten oder für beliebige Punkte die 3-stellige Relation Q liegt zwischen P und R. Mit beidem kommt man zu demselben Ziel, die zweite Variante erscheint aber intutiver.

Dieses Ziel ist zunächst, den Skalarenkörper als angeordneten Körper zu verstehen, d.h. die aus der Analysis bekannten Grundregeln für den Umgang mit der Relation "kleiner" bzw. "kleiner oder gleich" herleiten - den Begriff des Betrages und die weiteren Regeln hat man dann so wie dort gehabt. Als Anwendung, die in der linearen Optimierung relevant ist, betrachten wir im nächsten Kapitel konvexe Mengen.

7.3 Zwischenrelation

Wir führen einen neuen undefinierten Grundbegriff der Geometrie ein - eine dreistellige Relation auf der Punktmenge. Stehen die Punkte P, Q, R in dieser Relation, so schreiben wir

- $P|Q|R$ und sagen: Q *liegt zwischen* P und R

Wir fordern die Gültigkeit der folgenden Axiome

Axiom 7.1 ($Z0$) *Auf jeder Geraden gibt es mindestens 3 verschiedene Punkte*

($Z1$) *Liegt Q zwischen P und R, so sind P, Q, R kollinear und paarweise verschieden*

($Z2$) Symmetrie: *Liegt Q zwischen P und R, so auch zwischen R und P*

($Z3$) Trichotomie: *Vor drei verschiedenen kollinearen Punkten liegt genau einer zwischen den beiden anderen*

($Z4$) Pasch: *Sei A, B, C ein Dreieck. Dann tritt für jede Gerade g, die $A \vee B$ in einen Punkt P zwischen A und B schneidet, genau einer der folgenden Fälle ein: $C \in g$; es gibt Q zwischen A und C mit $Q \in g$; es gibt Q zwischen B und C mit $Q \in g$.*

7.4 Strecken

Sind P, Q Punkte, so definieren wir

- die *Strecke* $[P, Q] = \{R \in \mathbb{P} \mid R \text{ zwischen } P \text{ und } Q\} \cup \{P, Q\}$
- die *offene Strecke* $]P, Q[= \{R \in \mathbb{P} \mid R \text{ zwischen } P \text{ und } Q\}$, auch das *Innere* der Strecke $[PQ]$

Aus der Symmetrie folgt sofort

$$[P, Q] = [Q, P] \text{ und }]P, Q[=]Q, P[$$

und wir haben

- Q zwischen P und $R \quad \Leftrightarrow Q \in]P, R[\quad \Leftrightarrow Q \in [P, R]$ und $P \neq Q \neq R$

Bei einem Dreick A, B, C heißen die Strecken $[A, B]$, $[A, C]$ und $[B, C]$ auch die *Seiten* des Dreicks. Das Axiom von Pasch liest sich dann so: geht eine Gerade durch das Innere einer Dreicksseite, so geht sie durch die gegenüberliegende Ecke oder durch das Innere (genau) einer der beiden anderen Seiten.

Lemma 7.2 *Seien von den Punkten A, A', B, B' keine drei kollinear und sei $A \vee A' \parallel B \vee B'$. Liegt P zwischen A und B, so schneidet die Parallele g zu $A \vee A'$ die Gerade $A' \vee B'$ in einem Punkt P' zwischen A' und B'.*

Beweis. Eine erste Anwendung des Axioms von Pasch auf das Dreieck ABB' ergibt $Q \in g \cap]A, B'[$, eine zweite auf das Dreieck $AB'A'$ ergibt $P' \in g \cap]A', B'[$. □

7.5 Geordnete Mengen

Eine *Ordnung* auf einer Menge M wird gegeben durch eine zweistellige Relation $\leq$ so, dass gilt

- *reflexiv:* $x \leq x$
- *transitiv:* $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- *antisymmetrisch:* $x \leq y \leq x \Rightarrow x = y$
- *Trichotomie:* Es gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$

Man definiert dann

$$x < y \quad \Leftrightarrow x \leq y \text{ und } x \neq y$$

und kann leicht zeigen

- *irreflexiv:* nie $x < x$
- *transitiv:* $x < y$ und $y < z \Rightarrow\ x < z$
- *Trichotomie:* Es gilt entweder $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$

Umkehrt bekommt man aus einer Relation $<$ mit diesen 3 Eigenschaften durch die Definition $x \leq y\ \Leftrightarrow x < y$ oder $x = y$ eine Anordnung.

7.6 Angeordnete Körper

Ein Körper K ist *angeordnet*, wenn eine Ordnung der Menge K so gegeben ist, dass gilt

- $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
- $x \leq y$ und $0 \leq z \neq 0\ \ \Rightarrow xz \leq yz$

Es folgt dann leicht

- $x = 0$ oder $0 < x$ oder $0 < -x$
- $0 < x$ und $0 < y\ \ \ \Rightarrow 0 < x + y$
- $0 < x$ und $0 < y\ \ \ \Rightarrow 0 < xy$

und man kann umgekehrt zeigen, dass für eine Menge $K_+ = \{x \in K \mid 0 < x\}$ mit Bedingungen durch $x \leq y\ \ \Leftrightarrow x = y$ oder $y - x \in K_+$ eine Anordnung von K definiert wird. Zudem gilt in jedem angeordneten Körper

- $0 < 1$

Wäre nämlich $1 < 0$, so $0 = 1 + (-1) < 0 + (-1) = -1$ und dann $0 < (-1)(-1) = 1$, ein Widerspruch. $\square$ $\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper mit

$$\frac{z}{n} \leq \frac{w}{m} \Leftrightarrow\ mz \leq nw \quad (z, w \in \mathbb{Z},\ n, m \in \mathbb{N}_{>0})$$

Dabei bezieht sich diese Äquivalenz auf die Anordnung von $\mathbb{Z}$. Diese erhält man rekursiv so für $n, m \in \mathbb{N}$

$$0 \leq n,\ \ m \leq n + 1 \Leftrightarrow m \leq n \text{ oder } m = n + 1$$

$$-m \leq -n \Leftrightarrow n \leq m, \quad -m \leq n$$

Für a in einem Körper K und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv

$$0a = 0_K,\ \ (n + 1)a = na + a$$

Lemma 7.3 *In jedem angeordneten Körper gilt*

(i) $na = 0_K \Rightarrow n = 0$ *oder* $a = 0_K$

(ii) Zu $a < b$ *gibt es* c *mit* $a < c < b$

(iii) Zu jedem a gibt es b mit $a < b$

Beweis. Zu (i). Sei $0_K < a = 1a$. Mit Induktion $0_K < na = na + 0_K < na + a = (n+1)a$. Ist $a < 0_K$, so $0_K < -a$ und $na = -n(-a) < 0K$. Insbesondere gilt also $2(1_K) \neq 0_K$ und man kann die Gleichung $2x = d$ durch $x = (2(1_K))^{-1}d$ lösen. Ist nun $a < b$, so $0_K < d = b - a$ und $0_K < x$, also $a < c <$ mit $c = a + x$. Schliesslich gilt $a < a + a$ falls $0 < a$. □

Für $-n \in \mathbb{Z}$ definiert man $(-n)a = -(na)$ und kann dann wie in Kap.7.1 für jeden angeordenten Körper K eine Abbildung von $\phi : \mathbb{Q} \to K$ definieren durch

$$\phi(\frac{z}{n}) = a \Leftrightarrow \quad na = z1_K, \quad \text{kurz} a = \frac{z}{n}1_K$$

Diese ist injektiv und überträgt Addition, Multiplkation und Ordnung von $\mathbb{Q}$ in die von K, ist also eine Einbettung und man kann $\mathbb{Q}$ mit seinem Bild in K identifizieren.

In einem angeordneten Körper definiert man den *Betrag* $|x|$ als $|x| = x$ falls $0 \leq x$ und $|x| = -x$ sonst. Dann gilt

- $|x| \leq y \Leftrightarrow \quad 0 \leq y$ und $x \leq y$ und $-x \leq y$

7.7 Anordnung der Zahlengeraden

Satz 7.4 *Wir fassen eine Gerade g mit den Punkten $0 \neq 1$ als Zahlengerade und damit als Skalarenkörper K auf und definieren eine Relation $\leq$ durch*

(i) $r \leq 0 \Leftrightarrow 0 \in [r, 1]$

(ii) $r \leq s \Leftrightarrow r - s \leq 0$

Dann ist $\leq$ eine Anordnung des Köpers K so, dass für alle $r, s, t \in K$ gilt

$$t \in [r, s] \Leftrightarrow \quad r \leq t \leq s \text{ oder } s \leq t \leq r$$

Weiterhin gilt für jede Zahlengerade $g', 0', 1'$ nach (i) bzw. (ii) von Satz 4.4, die entsprechend definierte Anordnung $\leq'$ von $g' = K'$ und die Abbildung $\phi : K \to K'$ mit $\phi(r) = r'$

$$r \leq s \;\Leftrightarrow\; r' \leq' s'$$

Kurz, ϕ ist ein Isomorphismus der angeordneten Körper K und K'.

Korollar 7.5 (i) Dichte: *Zu je zwei Punkten $P \neq R$ gibt es einen Punkt Q zwischen P und R.*

(ii) Unbeschränkthkeit: *Zu je zwei Punkten $P \neq Q$ gibt es einen Punkt R so, dass Q zwischen P und R.*

(iii) $[P, Q] = \{r\vec{v} + P \mid 0 \leq r \leq 1\}$ *und* $]P, Q[= \{r\vec{v} + P \mid 0 < r < 1\}$ *wobei* $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$

Beweis folgt sofort aus dem Satz und Lemma 7.3. □

7.8 Anordnung der Zahlengeraden, die zweite

Literatur: Karzel, Sörensen, Windelberg, Einführung in die Geometrie, Göttingen 1973.

Satz 7.6 *Wir fassen eine Gerade g mit den Punkten $0 \neq 1$ als Zahlengerade und damit als Skalarenkörper K auf und definieren eine Relation $<$ durch*

$$p < q \Leftrightarrow \; p \neq q \; und \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{lccc} & 0 \in]p,q[& und & 0 \in]1,p[\\ oder & q \in]0,p[& und & 0 \in]1,p[\\ oder & p \in]0,q[& und & p \in]0,1[\\ oder & p \in]0,q[& und & 1 \in]0,p[\end{array} \right\} & falls\ p \neq 0 \\ \qquad\qquad 0 \notin]1,q[& falls\ p = 0 \end{array} \right.$$

Dann ist $<$ eine Anordnung des Köpers K so, dass $0 < 1$, und so, dass für alle $p, q, r \in K$ gilt

$$(a) \;\; q \in]p,r[\;\Leftrightarrow\;\; entweder\ p < q < r\ oder\ r < q < p$$

Die Anordnung und ist durch $0 < 1$ und (a) sogar schon eindeutig bestimmt. Weiterhin gilt für jede Zahlengerade $g', 0', 1'$ nach (i) bzw. (ii) von Satz 4.4, die entsprechend definierte Anordnung $\leq'$ von $g' = K'$ und die Abbildung $\phi : K \to K'$ mit $\phi(r) = r'$

$$r < s \;\Leftrightarrow\; r' <' s'$$

Kurz, ϕ ist ein Isomorphismus der angeordneten Körper K und K'.

7.9 Ein Lemma

Das Axiom von Pasch (Z4) wird oft so angewendet

> *In einem Dreieck A, B, C schneidet die Parallele zu $B \vee C$ durch einen Punkt von $]A, B[$ die Strecke $]B, C[$ im Inneren.*

Lemma 7.7 *Gegeben vier paarweise verschiedenen Punkte A, B, C, P auf einer Geraden l so, dass P zwischen A und B liegt. Dann gilt*

(i) *P liegt zwischen A und C oder zwischen B und C.*

(ii) *Liegt P zwischen B und C, so liegt P nicht zwischen A und C.*

Beweis. Wähle einen Punkt S nicht auf l und $g = B \vee S$. Sei h die Parallele zu g durch P. Anwendung von Pasch auf das Dreieck APB und $P = h \cap]A, B[$ liefert Schnittpunkt $Q = h \cap]A, S[$.

Sei nun $P \notin]A, C[$ angenommen. Anwendung von Pasch auf das Dreieck ASC und $Q = h \cap]A, S[$ liefert Schnittpunkt $R = h \cap]S, C[$ oder $R_2 = h \cap]A, C[$. Im zweiten Falle wäre $P = h \cap l = R_2$ also $p \in]A, C[$, ein Widerspruch. Also haben wir den Punkt $R = h \cap]S, C[$. Anwendung von Pasch auf das Dreieck SCB und $R = h \cap]S, C[$ ergibt Schnittpunkt $X = h \cap]B, C[$. Aber $X = l \cap h = P$ also $P \in]B, C[$. Damit ist (i) bewiesen.

Zu (ii). Anwendung von Pasch auf das Dreieck CBS und $P = h \cap]B, C[$ ergibt Schnittpunkt $T = h \cap]C, S[$ Im Dreieck CSA schneidet also h sowohl $]A, S[$ (in Q) wie auch $]C, S[$ (in T) im Inneren. Nach der Eindeutigkeitsausage in Pasch kann dann h nicht auch $]A, C[$ im Inneren schneiden. Da $P \in h$ gilt also $P \notin]A, C[$. □

7.10 Beweis des Satzes

Um die vielen erforderlichen Fallunterscheidungen handhaben zu können, setzen wir für $a \neq b, c$ auf g

$$(a|b, c) = \begin{cases} -1 & \in \mathbb{R} \quad \text{falls } a \text{ zwischen } b \text{ und } c \\ 1 & \in \mathbb{R} \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Die Definition von $<$ liest sich dann so

$$(*) \quad p < q \Leftrightarrow \; p \neq q \text{ und } \begin{cases} (p|0, q)(0|1, p) = -1 & \text{falls } p \neq 0 \\ (0|1, q) = 1 & \text{falls } p = 0 \end{cases}$$

Aus den Axiomen (Z1-4) folgen

(1) $(a|b, b) = 1 = (a|a, b)$

(2) $(a|b, c) = (a|c, b)$ für paarweise verschiedene a, b, c

(3) Für paarweise verschiedene a, b, c ist genau einer der Werte $(a|b, c)$, $(b|a, c)$ und $(c|a, b)$ gleich -1. Insbesondere $(a|b, c) = -(b|a, c)(c|a, b)$.

(4) $(a|b, c)(a|c, d) = (a|b, d)$ falls $a \notin \{b, c, d\}$

(1), (2), (3) folgen jeweils aus (Z1), (Z2) und (Z3). (4) folgt aus (1) falls $|\{b, c, d\}| \leq 2$. Andernfalls benutzen wir Lemma 7.7. Dazu bertachten wir alle Wertepaare $(\pm 1, \pm 1)$ von $(a|b, c)$ und $(a|c, d)$. Für $(-1, -1)$ folgt mit (ii) und $a = P$, $b = A$, $c = B$, $d = C$ dass $(a|b, d) = 1$. Für $(-1, 1)$ folgt mit (i) und $a = P$, $b = A$, $c = B$ und $d = C$ dass $(a|b, d) = -1$. Der Fall $(-1, 1)$ folgt hieraus durch Vertauschen von b und d. Im Fall $(1, 1)$ sei schließlich $(a|b, d) = -1$ angenommen. Mit $a = P$, $b = B$, $c = C$ und $d = A$ bedeutet das $P \in]A, B[$, also nach (i) $P \in]A, C[$ oder $P \in]B, C[$, d.h $(a|c, d) = -1$ oder $(a|b, c) = -1$, ein Widerspruch. Also $(a|b, d) = 1$.

Wir zeigen nun

(b) entweder $p < q$ oder $q < p$ falls $p \neq q$

Sind $0, p, q$ paarweise verschieden, so nach (3) und (4)

$$(p|0, q)(0|1, p) = -(0|p, q)(q|0, p)(0|1, p) = -(q|0, p)(0|p, q)(0|1, p) = -(q|0, p)(0|1, q)$$

Für $p = 0$ und $q \neq 0, 1$ hat man nach (4) $(0|1, q) = (0|0, q)(0|1, 0)$. Also in beiden Fällen nach der Definition entweder $p < q$ oder $q < p$.

Beweis von (a). Wir betrachten paarweise verschiedene p, q, r. Sei $q = 0$. Dann nach (4)

$$(q|p,r) = (q|0,p)(0|1,q)(q|0,r)(0|1,q)$$

also

$$(q|p,r) = -1 \;\Leftrightarrow\; (q|0,p)(0|1,q) = -(q|0,r)(0|1,q)$$

also $p < q < r$ falls dies $= -1$ ist, andernfalls $r < q < p$. Für $q = 0$ gilt nach (4)

$$(0|p,r) = (0|1,p)(0|1,r)$$

$$(0|p,r) = -1 \;\Leftrightarrow\; (0|1,p) = -(0|1,r)$$

Also ist (a) bewiesen.

Es bleibt die Transitivität zu zeigen. Es sei $p < q < r$, also nach (a) und mit (3)

$$(q|p,r) = -1, \quad \text{und} \quad (p|q,r) = 1$$

Für $p \neq 0$ folgt aus $p < q$ und mit (4)

$$-1 = (p|0,q)(0|1,p) = (p|q,r)(p|0,q)(0|1,p) = (p|0,r)(01,p)$$

Für $p = 0 < q$ folgt mit $1 = (0|q,r)$ und (4)

$$1 = (0|1,q) = (0|1,q)(0|q,r) = (0|1,r)$$

Also in beiden Fällen $p < r$.

Zur Eindeutigkeit: Ist nun $<'$ eine weitere Anordnung mit (a), so gilt

$$\begin{array}{llcll}
(c) & 0 < 1 < x & \Leftrightarrow & (1|0,x) = -1 & \Leftrightarrow 0 <' 1 <' x \\
(d) & 0 < x < 1 & \Leftrightarrow & (x|0,1) = -1 & \Leftrightarrow 0 <' x <' 1 \\
(e) & x < 0 < 1 & \Leftrightarrow & (0|x,1) = -1 & \Leftrightarrow x <' 0 <' 1
\end{array}$$

Für $1 < x$ folgt aus (c) $(x|0,y) = (x|0,y)(x|0,1) = (x|1,y)$ mit (4) also

$$x < y \Leftrightarrow (x|1,y) = -1 \Leftrightarrow x <' y$$

Für $0 < x < 1$ folgt aus (d) entsprechend $x < y \Leftrightarrow (x|y,0) = -1 \Leftrightarrow x <' y$ und für $y < 0$ aus (e) $x < y < 0 \Leftrightarrow (y|x,0) = -1 \Leftrightarrow x <' y <' 0$.

Korollar 7.8 *Sei M eine Menge mit mindestens 3 Elementen und einer Abbildung $M^3 \to \{1,-1\}$ die (1)-(4) erfüllt. Dann ist die durch (*) definierte Relation $<$ eine Ordnung auf M und es gilt $(a|b,c) = -1$ genau dann, wenn $b < a < c$ oder $c < a < b$.*

Wegen (Z1) liefert unsere Definiton nun

$$p < 0 \Leftrightarrow 0 \in]1,p[$$

$$0 \leq p \quad \Leftrightarrow \quad p \not< 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \in [0,1] \text{ oder } 1 \in [0,p]$$

Zur Isomorphie der Zahlengeraden: Es gilt $\phi(0) = 0'$ und $\phi(1) = 1'$. Ferner sind die Ordungen auf g und g' nach derselben Formel mithilfe der Zwischenrelation definiert. Nach Lemma 7.2 gilt aber

$$t \in]r, s[\Leftrightarrow t' \in]r', s'[$$

Damit folgt die Isomorphie trivialerweise. Es folgt aber auch

(f) $q \in [r, s] \Leftrightarrow q + t \in [t + r, s + t], \quad q \in [r, s] \Leftrightarrow q + t \in [t + r, s + t]$

(g) $q \in]r, s[\Rightarrow qt \in]rt, st[\quad$ falls $t \neq 0$

Zu (f): Man gehe von $g, 0, 1$ durch Parallelverschiebung von 0 nach $0'$ zu g' über und von da durch Parallelverschiebung von $0'$ nach $0'' = t$ zurück zu $g'' = g$. Aus $q \in]r, s[$ folgt dann $q' \in]r', s'[$ und wieder $q'' = q + t \in]r'', s''[=]r + t, s + s[$. Zu (g): Betrachte $g', 0', 1'$ und $g'', 0'', 1''$ mit $0 = 0' = 0''$ und $t = 1''$. Asu $qin]r, s[$ folgt dann, $q' \in]r', s'[$ und $q'' = qt \in]r'', s''[=]rq, sq[$.

In der obigen Notation folgt (die umgekehrte Inklusion erhält man durch Addtion von $-q$ bzw. Multiplikation mit q^{-1})

(5) $(a|b, c) = (a + d|b + d, c + d)$

(6) $(a|b, c) = (ad|bd, cd)$ falls $d \neq 0$

Der Beweis des Satzes ist nun komplett mit dem folgenden Lemma. □

Lemma 7.9 *Sei K ein Körper mit mindestens 3 Elementen und einer Abbildung $K^3 \to \{1, -1\}$ die (1)-(6) erfüllt. Dann ist die durch (*) definierte Relation $<$ eine Anordnung des Köpers K.*

Beweis.

(a) Es gilt $1 + 1 \neq 0$ in K.

Nach Voraussetzung haben wir ein $a \neq 0, 1$. Aus $1 + 1 = 0$ folgte $x + x =$ für alle $x \in K$, also hier durch Addition von $a + 1$ bzw. 1 ein Widerspruch zu (3)

$$(a|0, 1)(0|1, a) \overset{(5)}{=} (1|a + 1, a)(1|0, a + 1) \overset{(4)}{=} (1|a, 0)$$

(b) $(0|b, c) = -(0, -b, c)$ für $b, c \neq 0$.

Nach (3) ist genau einer der Werte $(0|1, -1)$, $(1| - 1, 0)$ und $(-1|0, 1)$ glech -1, nach (6) gilt $(1| - 1, 0) = (-1|1, 0)$ also

$$-1 = (0|1, -1) \overset{(2)}{=} (0|b, -b) \overset{(4)}{=} (0|b, c)(0| - b, c)$$

(c) $(0|b, b + c) = (b + c|c, 0)$ für $b \neq 0$, $c \neq -b$

$$(0|b, b + c) \overset{(6)}{=} (0| - b, -b - c) \overset{(5)}{=} (b + c|c, 0)$$

Beachte im Folgenden, dass nach Definition

$$0 < a \Leftrightarrow (0|a, 1) = 1$$

(d) $0 < b,\, 0 < c \;\Rightarrow 0 < bc$

$$1 = (0|1, b) \overset{(6)}{=} (0, c, bc) \overset{(4)}{=} (0|1, bc)(0|1, c) = (0|1, bc)$$

(e) $c \neq 0 < b \;\Rightarrow\; c < b + c$

$$1 = (0|1, b) \overset{(5)}{=} (c|1 + c, b + c) \overset{(4)}{=} (c|0, b + c)(c|1 + c, 0)$$
$$\overset{(5)}{=} (c|0, b + c)(0|1, -c) \overset{(b)}{=} -(c|0, b + c)(0|1, c)$$

(f) $0 \neq a < b \;\Rightarrow\; 0 < b - a$

$$-1 = (a|0, b)((0|1, a) \overset{(5)}{=} (0|{-a}, b{-}a)(0|1, a) \overset{(b)}{=} -(0|a, b{-}a)(0|1, a) \overset{(4)}{=} (0|1, b{-}a)$$

(g) $0 \neq a < b$ und $c \neq -a \;\;\Rightarrow\;\; a + c < b + c$

$$-1 = (a|o, b)(0|1, a) \overset{(5)}{=} a + c|c, b + c)((0|1, a) = (a + c|c, b + c)(0|1, a)(\pm 1)^2$$
$$\overset{(c)}{=} (a + c|c, b + c)(0|1, a)(0|a, a + c)((a + c|c, 0) \overset{(4)}{=} (a + c|0, b + c)(0|1, a + c)$$

7.11 Diskussion

Die Aussage

$$q \in]r, s[\;\Leftrightarrow\; q' \in]r', s'[$$

folgt direkt aus dem Axiom von Pasch. Aus der geometrischen Definition der Operationen mittels Hilfsgeraden folgt dann

$$(f)\;\; q \in]r, s[\;\Leftrightarrow\; q + t \in]t + r, s + t[$$

$$(g)\;\; q \in]r, s[\Rightarrow qt \in]rt, st[\quad \text{falls } t \neq 0$$

Andererseits folgt schon in der Ebenen Lemma 7.7 allein aus den Axiomen (E1-3) und (Z1-4), und dann auch (Z1-3) und diesem Lemma die Existenz der Ordnung auf den Geraden. Definition und Beweis besteht im Wesentlichen aus Fallunterscheidungen, die geschickt in die Funktion $(a|b, c)$ kodiert sind.

Ist (z.B. durch Desargues und Pappus) garantiert, dass die Skalare auf einer bestimmten Geraden einen Körper bilden, so folgt nun mit (Z1-3), Lemma 7.7 und (f),(g) dass der Körper angeordnet ist, wieder durch Rechnen mit $(a|b, c)$.

Es bleibt offen, ob ein stärker geometrisches Vorgehen bzw. Ausnutzen der Vektorraumstruktur zu einem einfacheren Beweis führen können. Ein erstes Problem ist hier: warum gilt $P \in [-\vec{v} + P,\, P + \vec{v}]$?

Literatur, insbesondere auch zu konvexen Mengen und “elementarem” Beweis von Caratheodory siehe: H.Lenz, Konvexität in Anordnungsräumen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 62 (1992), 255–285

8 Konvexe Mengen

8.1 Definition und Beispiele

Wir betrachten Ebene oder Raum unter Annahme aller bisher erwähnten Axiome. Eine Menge M von Punkten, d.h. $M \subseteq \mathbb{P}$ ist *konvex*, wenn $]P, Q[\subseteq M$ (d.h. $[P, Q] \subseteq M$) für alle $P, Q \in M$. Geraden und Ebenen sind konvex. Ist g eine Gerade und $<$ eine Anordnung, die sich ergibt, wenn man g als Zahlengerade betrachtet, so sind zu jedem $p \in g$ die folgenden offendn bzw. abgeschlossenen *Halbstrahlen* konvex

$$\{r \in g \mid p < r\},\ \{r \in g \mid p \leq r\},\ \{r \in g \mid r < p\},\ \{r \in g \mid r \leq p\}$$

Ist g eine Gerade in der Ebene ε so sind die folgenden offenen *Halbebenen* konvex: Wähle $O_1, O_2 \in \varepsilon$ mit $g \cap [O_1, O_2] = \emptyset$ (gibt's die?)

$$\{P \in \varepsilon \mid g \cap [P, O_2] = \emptyset\},\ \ \{P \in \varepsilon \mid g \cap [P, O_1] = \emptyset\}$$

Entsprechend hat man zu einer Ebene ε im Raum und $\varepsilon \cap [Q_1, O_2] = \emptyset$ die offenen *Halbräume*

$$\{P \mid g \cap [P, O_2] = \emptyset\},\ \ \{P \mid g \cap [P, O_1] = \emptyset\}$$

8.2 Konvexe Hülle

Lemma 8.1 *Für Mengen $M \subseteq C$ von Punkten sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent*

(i) C ist kleinste M enthaltende konvexe Menge, d.h. C ist konvex und $C \subseteq C'$ für jede konvexe Menge $C' \supseteq M$

(ii) Man erhält C aus M durch den folgenden Abschließungs- *oder* Erzeugungsprozess

Start *Starte mit der Gesamtheit aller Punkten von M*

Schleife *Nimm zu allen Punkten P, Q, die schon erzeugt sind, alle Punkte von $]P, Q[$ hinzu*

Weg *Durchlaufe die Schleife unendlich oft.*

Ziel *Die dann erzeugte Punktmenge ist C*

Die Menge C aus (i) bzw, (ii) ist durch M eindeutig bestimmt (und existiert) und heißt die konvexe Hülle *$KH(M)$ von M.*

Etwas formaler beschreibt man den Erzeugungprozess rekursiv so

- $M_0 := M$
- $M_{n+1} = \bigcup_{P,Q \in M_n} [P, Q]\ = \{R \mid \text{es gibt } P, Q \in M_n \text{ mit } R \in [P, Q]\}$
- $KH(M) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n\ = \{P \mid \text{es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } P \in M_n\}$

Beweis. Setze $C = KH(M)$. Dann ist C konvex: sind $P, Q \in C$, so $P \in M_k$ und $Q \in M_m$ für passende $k, m \in \mathbb{N}$, also $P, Q \in M_n$ mit $n = \max\{k, m\}$. Nach Defintion $[P, Q] \subseteq M_{n+1}$, für alle $R \in [P, Q]$ folgt $R \in M_{n+1}$ und somit $R \in KH(M)$. Ist andererseits $C' \supseteq M$ konvex, so folgt $M_n \subseteq C'$ durch Induktion über n: $M_0 = M \subseteq C'$ ist vorausgesetzt. Hat man nun die Induktionsvoraussetzung $M_n \subseteq C'$, so gilt für alle $P, Q \in M_n$ auch $P, Q \in C'$, also $[P, Q] \subseteq C'$ wegen der Konvexität von C'. Ist nun $R \in M_{n+1}$ so $R \in [P, Q]$ für passende $P, Q \in M_n$,also $R \in C'$. Somit $M_{n+1} \subseteq C'$. Damit ist $(ii) \Rightarrow (i)$ gezeigt.

Gelte umgekehrt (i) für C. Dann $C \subseteq C' = KH(M)$, weil $KH(M) \supseteq M$ konvex, wie gerade gezeigt. Andererseits haben wir gerade auch $KH(M) \subseteq C$ gezeigt, also $C = KH(M)$. □ Die abstrakte Sicht der Dinge beruht auf Folgendem.

- *Sind die Mengen M_i, $(i \in I)$ konvex, so auch ihr Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} M_i$*

In der Tat, sind $P, Q \in \bigcap_{i \in I} M_i$, so $P, Q \in M_i$ für alle $i \in I$, also $[P, Q] \subseteq M_i$, da M_i konvex ist. Somit $[P, Q] \subseteq \bigcap_{i \in I} M_i$. □ Dann hat man die Existenz von C aus (i) als Durchschnitt aller konvexen Obermengen von M:

$$C = \bigcap_{C' \supseteq M \text{ konvex}} C'$$

8.3 Konvexe Hüllen endlicher Mengen

Lemma 8.2 *Die konvexe Hülle der Punktmenge $M = \{P_1, \ldots, P_m\}$ ist*

$$KH(M) = \{r_2\vec{v}_2 + \ldots + r_m\vec{v}_m + P_1 \mid 0 \leq r_i \text{ und } r_2 + \ldots + r_m \leq 1\}$$

wobei $\vec{v}_i = \overrightarrow{P_1P_i}$. Wählt man einen Punkt O und $\vec{p}_i = \overrightarrow{OP_i}$, so gilt

$$KH(M) = \{r_1\vec{p}_1 + \ldots + r_m\vec{v}_m + O \mid 0 \leq r_i \text{ und } r_1 + \ldots + r_m = 1\}$$

Es gilt $KH(M) \subseteq M_{m-1}$, falls M höchstens m Punkte enthält.

Sind in 3 Punkte nicht kollinear, so ist die konvexe Hülle das von ihnen *aufgespannte Dreieck*. Sind 4 Punkte nicht komplanar, so ist die konvexe Hülle das von ihnen *aufgespannte Tetraeder*. Beweis. Dass die erste und die zweite Menge übereinstimmen sieht man so: $\vec{p}_i = \vec{v}_i + \vec{p}_1$, $P_1 = \vec{p}_1 + O$, $\vec{v}_1 = \vec{0}$ und somit

$$r_1\vec{p}_1 + r_2\vec{p}_2 + \ldots + r_m\vec{p}_n + O = (r_1 + \ldots + r_m)\vec{v}_1 + r_1\vec{v}_1 + \ldots + r_n\vec{v}_m + O$$
$$= r_2\vec{v}_2 + \ldots r_n\vec{v}_m + P_1$$

falls $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = 1$. Die Konvexität sieht man nun so: Ist $P = \sum_i r_i\vec{p}_i + O$ und $Q = \sum_i s_i\vec{p}_i + O$ mit $\sum_i r_i = \sum_i s_i = 1$, so gilt für $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ und $0 \leq r \leq 1$ dass

$$r\vec{v} + P = r\sum_i (s_i - r_i)\vec{p}_i + \sum_i r_i\vec{p}_i + O = \sum_i (rs_i + (1-r)r_i)\vec{p}_i + O$$

und

$$\sum_i (rs_i + (1-r)r_i) = r\sum_i s_i + (1-r)\sum_i r_i = r + (1-r)1 = 1$$

Durch Induktion zeigen wir schließlich

$KH(\{P_1, \ldots, P_m\}) = \{P \mid P \in [P_m, Q]$ für ein $Q \in KH(\{P_1, \ldots, P_{m-1}\}) \subseteq M_{m-1}$

Der Fall $m = 1$ ist trivial. Im Induktiosnschritt setze $O = P_{m+1}$, Dann

$KH(\{P_1, \ldots, P_m, O\}) = \{r_1\vec{v}_1 + \ldots + r_m\vec{v}_m + O \mid 0 \leq r_i,\ r_1 + \ldots + r_m \leq 1\}$

nach der ersten Beschreibung. Sind alle $r_i = 0$ so sind wir wieder im Fall $m = 1$. Andernfalls sei $s = (r_1 + \ldots + r_m)^{-1}$, also $s \geq 1$. Dann ist

$$Q = sr_1\vec{v}_1 + \ldots + sr_m\vec{v}_m + O \in KH(\{P_1, \ldots, P_m\})$$

nach der zweiten Beschreibung also

$$Q \in KH(\{P_1, \ldots, P_m\}) \subseteq M_{m-2}$$

Induktionsannahme. Aber

$$P = \frac{1}{s}\overrightarrow{OQ} + Q,\quad) \leq s \leq 1$$

und somit $P \in [O, Q] \subseteq M_{m-1}$. $\square$

8.4 Satz von Caratheodory

Satz 8.3 *Liegen alle Punkte von M in einem d-dimensionalen affinen Teilraum,*

$$KH(M) = M_d = \bigcup_{P_1,\ldots P_{d+1} \in M} KH(\{P_1, \ldots, P_{d+1}\})$$

d.h. man braucht nur d Iterationen im Erzeugungsprozess.

Der Beweis beruht auf den folgenden Aussagen

(1) Zu jedem n und $P \in M_n$ gibt es ein endliches $X \subset M$ mit $P \in X_n$.

(2) Ist $P = r_1\vec{p}_1 + \ldots + r_m\vec{p}_m + O$ mit $0 \leq r_i$ und $r_1 + \ldots + r_m = 1$, ist $\vec{v}_i = \vec{p}_i - \vec{p}_1$ und sind die $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ linear abhängig, so kann man aus $\{\vec{p}_1 + O, \ldots, \vec{p}_m + O\}$ eine höchstens $m-1$-elementige Teilmenge X auswählen mit $P \in KH(X)$.

Sei nämlich $P \in KH(M)$. Dann nach Definition $P \in M_n$ für ein n, also nach (1) $P \in KH(\{P_1, \ldots, P_m\})$ für passendes m und $P_i \in M$. Insbsondere haben wir eine Darstellung $P = r_1\vec{p}_1 + \ldots + r_m\vec{p}_m + O$ wie in (2). Wähle m minimal, insbesondere alle $r_i > 0$. Ist $m \leq d+1$, so sind wir fertig und haben insbesondere $P \in M_d$ nach Lemma 8.2. Sei also $m > d+1$, d.h $m-2 > d$. Da mehr als d Vektoren linear abhängig sein müssen, können wir (2) anwenden und erhalten P in der konvexen Hülle von weniger als m Punkten aus M. Widerspruch. Es folgt $KH(M) \subseteq M_d$, also gilt Gleichheit.

Beweis von (1) durch Induktion über n. Trivial für $n = 0$. Ist $P \in M_{n+1}$, so gibt es nach Definition $P_1, P_2 \in M_n$ mit $P \in [P_1, P_2]$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es endliche $X_i \subseteq M$ mit $P_i \in KH(X_i)$. Dann $P \in KH(X_1 \cup X_2)$.

Beweis von (2). Nach Voraussetzung gibt es s_i nicht alle ≤ 0 mit

$$s_2\vec{v}_2 + \ldots + s_m\vec{v}_m = \vec{0}$$

Setze

$$s_1 = -(s_2 + \ldots + s_m)$$

Dann

$$r_1 + \ldots + r_m = 1, \quad s_1 + \ldots + s_m = 0$$

$$s_1\vec{p}_1\vec{p}_2 + \ldots + s_m\vec{p}_m = \vec{0}$$

Da nicht alle $s_i \leq 0$ sind, gibt es ein $s_i > 0$ und nach Umnummerierung haben wir $s_m > 0$ und $\frac{r_m}{s_m}$ minimal unter den $\frac{r_i}{s_i}$ mit $s_i > 0$. Setze

$$t_i = r_i - \frac{r_m}{s_m} s_i$$

Es folgt

$$t_1\vec{p}_1 + \ldots + t_m\vec{p}_m + O = \sum_i r_i\vec{p}_i - \frac{r_m}{s_m}\sum_i s_i\vec{p}_i + O = \sum_i r_i\vec{p}_i - \vec{0} + O = P$$

$$t_i \geq 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, m, \quad t_1 + \ldots + t_{m-1} = \sum_i r_i - \frac{r_m}{s_m}\sum_i s_i = \sum_i r_i - 0 = 1$$

aber auch $t_m = 0$, d.h. $P \in KH(\{P_1, \ldots, P_{m-1}\})$.

9 Archimediziät und Vollständigkeit

Die Erweiterung der Axiomatik für die Anordnung erfolgt in 2 Schritten. Erstens das Axiom von Eudoxos. Dessen metrische Form besagt, dass man mit jedem Messstab jede noch so große Länge ausmessen kann, wenn man ihn nur oft genug anlegt. Archimedes hat das bei Flächenberechnungen benutzt. Es hat bewiesen, dass beim Kreis sich Umfang zu Durchmesser stets wie Inhalt zu Quadrat des Radius verhält und diese Konstante π mit großer Genauigkeit approximiert. Das Axiom von Eudoxos garaniert, dass es höchstens eine Konstante gibt, die dieser Approximation genügt.

Andererseits gehört π wie $\sqrt{2}$ zu den geometrischen Grössen, die nicht rational sind. Um deren Existenz auch axiomatisch einzufange, muss ein weiters "Vollständigkeitsaxiom" hinzukommen, das garantiert, dass die Approximation auch einen tatsächlichen Wert hat, also in unserem Kontext einen Skalar.

9.1 Archimedische Anordnung

Axiom 9.1 ($Z5$) Eudoxos: *Zu paarweise veschiedenen Punkten O, P, Q auf einer Geraden g gibt es $n \in \mathbb{N}$ so, das Q zwischen O und $n\vec{v} + O$ liegt mit $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$.*

Anders ausgedrückt, auf jeder Zahlengeraden $g, 0, 1$ und für Skalare s und $0 < r$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ so, dass $s < nr$, d.h. der Skalarenkörper is *archimedisch angeordnet*, wenn man das Axiom von Eudoxos voraussetzt.

Durch das Axiom von Eudoxos wird die Existenz unendlich kleiner und unendlich grosser Skalare ausgeschlossen. Diese *infinitesimalen* Zahlen haben für die Entwicklung der Differential- und Integralrechnung eine grosse Rolle gespielt und sind in der Notation z.B. als dx noch präsent - insbesondere in den Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik. Seit ca. 150 Jahren hat sich jedoch die archimedische Sichtweise durchgesetzt, weil man in ihr eher zu einer präzisen Darstellung kommt. Dennoch ist der Gebrauch infinitesimaler Grössen legitim, wenn er sich auf eine verlässliche Intuition oder ein entsprechend entwickeltes logisches Instrumentarium stützt.

9.2 Archimedisch angeordnete Körper

Die folgenden, auf Eudoxos und Archimedes zurückgehenden Postulate an einen angeordnetem Körper K sind alle äquivalent (wir fassen $\mathbb{Q}$ als Teil von K auf):

(3) Ist $x \in K$ und gilt $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$ in $\mathbb{N}$, so ist $x = 0$.

(3') Ist $x > 0$ in K, so gibt es ein $n \geq 1$ in $\mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < x$

(4) Zu jedem $x \in K$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $z \in \mathbb{Z}$ mit $z \leq x < z + 1$

(5) Sind $a, b \in K$ und $a > 0$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $b \leq ma$

(6) Zu allen $a < b$ in K gibt es $q \in \mathbb{Q}$ mit $a < q < b$

(7) Jede Intervallschachtelung approximiert höchstens ein Element von K

Ein angeordneter Körper, in dem (3)-(7) gelten, heisst *archimedisch*.

Die Bedeutung von (3,3') bzw. (4,5) ist, dass es in K keine unendlich kleinen bzw. grossen Zahlen gibt. (5) kann man auch so formulieren: Mit einem Maßstab, sei er auch noch so klein, kann man durch hinreichend oft wiederholtes Anlegen jede Länge übertreffen. (6) liest man auch so: $\mathbb{Q}$ *liegt dicht* in K. Aus (3) folgt sofort (7). Umgekehrt folgt (3) aus (7) (mit $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$).

(3') ist äquivalent zu (3), da $x \not\leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < x$. Der Rest ist nämlich reine Logik: "Wenn Student x alle Übungen bearbeitet hat, so besteht er die Klausur" bedeutet dasselbe wie "Wenn Student x die Klausur nicht besteht, so hat er mindestens eine Übung nicht bearbeitet".

Aus (3) folgt (4), daraus (5) und aus diesem wieder (3') d.h. sie sind alle äquivalent: Hat man $x > 0$, so auch $\frac{1}{x} > 0$ und es gibt nach (3') ein n mit $\frac{1}{n} < \frac{1}{x}$, also $x < n$. Wähle das kleinste solche n und setze $z = n - 1$. Ist $x < 0$, so bestimmen wir $m \in \mathbb{N}$ mit $m - 1 < -x \leq m$ und wählen $z = -m$. Die Eindeutigkeit von z folgt mit elementarer Arithmetik. Hat man $a, b > 0$, so bestimme nach (4) ein z mit $z \leq x = \frac{b}{a} < z + 1$. Dann $0 < x$ also $m = z + 1 \in \mathbb{N}$ und $b \leq ma$. Ist $0 < x$, so gibt es nach (5) ein m mit $\frac{1}{x} \leq m \cdot 1$, also $\frac{1}{m+1} < x$.

Zu (6): Sei nun $0 \leq a < b$. Nach (3') gibt es n mit $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}(b-a)$ und nach (5) ein m mit $a \leq m\frac{1}{n}$. Wählt man das kleinste solche m, so gilt $a < \frac{m+1}{n} < b$. Ist $b \leq 0$, so wähle man $r \in \mathbb{Q}$ mit $-b < r < -a$ und setze $q = -r$. Umgekehrt hat man nach (6) zu $x > 0$ ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $0 < q < x$, also $q = \frac{m}{n}$ und $0 < \frac{1}{n} \leq q < x$.

9.3 Intervallschachtelung

Eine *Intervallschachtelung* auf der Zahlengeraden $g, 0, 1$ wird gegeben durch zwei Folgen $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ und $(b_n \mid n \in \mathbb{N})$ von Skalaren so, dass gilt

- $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$ für alle $n \leq m$
- Zu jedem $k > 0$ in $\mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n - a_n \leq \frac{1}{k}$

d.h. die a_n liefern eine aufsteigende untere Begrenzung, die b_n eine absteigende obere Begrenzung und die Grenzen kommen sich immer näher. Die Intervallschachtelung ist *rational.* wenn alle a_n, b_n rational sind. Wir sagen, c wird durch die Intervallschachtelung *approximiert*, wenn $a_n \leq c \leq b_n$ für alle n.

Lemma 9.2 *Gelten die Axiome* $(Z1-5)$, *so kann jeder Skalar durch eine rationale Intervallschachtelung approximiert werden und jede Intervallschachtelung approximiert höchstens einen Skalar.*

Das Vorgehen um zu r im archimedisch angeordneten Körper K eine approxierende rationale Intervallschachtelung zu finden, ist die *fortlaufende Halbierung*:

- Bestimme $z_0 \in \mathbb{Z}$ mit $z_0 \leq r < z_0 + 1$
- Setze $a_0 = z_0$ und $b_0 = z_0 + 1$
- induktiv $a_n = z_0 + z_1 2^{-1} + ... + z_n 2^{-n} \leq r < b_n = a_n$ und $0 \leq b_n - a_n \leq 2^{-n}$
- Rekursionschritt
  - entweder $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2 \leq r < b_{n+1} = b_n$ und $z_{n+1} = 0$
  - oder $a_{n+1} = a_n \leq r < b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ und $z_{n+1} = 1$

Dass es höchstens ein approximiertes Element in K geben kann, folgt mit (3): gilt $a_n \leq x, y \leq b_n$ für alle n, so gibt es zu jedem k ein n mit $|x - y| \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{k}$, also $|x - y| = 0$ und $x = y$. $\square$

9.4 Vollständigkeit

Axiom 9.3 ($Z6$). Vollständigkeit *Zu jeder rationalen Intervallschachtelung auf einer Zahlengeraden gibt es einen Skalar, der durch diese approximiert wird.*

Korollar 9.4 *Gelten die Axiome* ($Z1-6$)*, so approximiert jede Intervallschachtelung genau einen Skalar.*

Auf diese Weise hat schon Archimedes den Umfang bzw. Inhalt eines Kreises mit Hilfe einbeschriebener von unten, umbeschriebener regelmässiger n-Ecke von oben approximiert.

Ist Teilmenge X einer geordneten Menge M und $b \in M$, so ist b eine *obere Schranke* von X, falls $x \leq b$ für alle $x \in X$ und *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* von X, man schreibt $b = \sup X$, falls b obere Schranke von X ist und $b \leq c$ für jede obere Schranke c von X. Ein angeordneter Körper K ist *vollständig angeordnet*, falls es zu jeder nichtleeren nach oben beschränkten Teilmenge X von K ein Supremum gibt.

Satz 9.5 *Ein angeordneter Körper ist vollständig angeordnet genau dann, wenn er archimedisch angeordnet ist und die* ($Z6$) *entsprechende Eigenschaft hat. Bis auf Isomorphie gibt es genau einen solchen Körper.*

“Diesen” Körper nennt man *den Körper* $\mathbb{R}$ *der reellen Zahlen.*

Korollar 9.6 *Der Skalarenkörper der Anschauungsgeometrie ist isomorph zum Körper der reellen Zahlen.*

9.5 Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$

Gegeben eine Intervallschachtelung a_n, b_n. Gilt

$$a_n \leq a'_n \leq b'_n \leq b_n \quad \text{für alle } n$$

so ist a'_n, b'_n auch eine Intervallschachtelung und eine *Verfeinerung* von a_n, b_n,

Wir sahen, dass aus dem Archimedischen Axiom schon die Approximation durch rationale Intervallschachtelungen folgt. Dies erlaubt uns, eine jede Intervallschachtelung a_n, b_n, bei der nicht schon eines der a_n oder b_n selbst approximiert wird (weil $a_k = a_n$ für alle $k \geq n$ bzw. $b_k = b_n$ für alle $k \geq n$) , durch eine rationale Intervallschachtelung a'_n, b'_n zu verfeinern, für die zusätzlich gilt

$$\text{für alle } n \text{ gibt es } k \text{ mit } a'_n \leq a_k \leq b_k \leq b'_n$$

Sind nämlich $a'_0, \ldots, a'_n$ und $b'_0, \ldots, b'_n$ schon definiert, so gibt es nach Voraussetzung $m \geq k > n$ mit

$$a'_n \leq a_k < a_m \leq b_m < b_k \leq b'_n$$

"Wähle" nach (6) (und dem Prinzip ist der bedingten Auswahl) rationale a'_{n+1} und b'_{n+1} mit

$$a_{n+1} \leq a_k \leq a'_{n+1} \leq a_m \leq b_m \leq b'_{n+1} \leq b_k \leq b_{n+1}$$

Ein vollständig angeordneter Körper lässt sich nun aus der Menge der Intervallschachtelungen von $\mathbb{Q}$ durch Abstraktion konstruieren, wobei zwei Intervallschachtelungen identifiziert werden, wenn sie eine gemeinsame rationale Verfeinerung haben.

9.6 Beweisskizze für die Isomoprhie

Seien K und K' archimedisch und vollständig angeordnet. Dann gibt es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung $r \mapsto r'$ zwischen K und K' so, dass

$$(r+s)' = r' + s', \quad (rs)' = r's', \quad r' < s' \Leftrightarrow r < s$$

Wir dürfen annehmen, dass $\mathbb{Q}$ in K und K' enthalten ist und definieren

> $r \mapsto r'$ genau dann, wenn es eine rationale Intervallschachtelung gibt, die r in K und r' in K' approximiert.

Wir zeigen nur, dass diese Zuordnung wohldefiniert ist. Seien a_n, b_n und c_n, d_n rationale Intervallschachtelngen, die beide r in K approximieren, und in K' die erste r', die zweite r''. Dann ist $\max\{a_n, c_n\}, \min\{b_n, d_n\}$ eine gemeinsame rationale Verfeinerung, die r in K approximiert und ein $s \in K'$. Also approximieren sowohl a_n, b_n als auch c_n, d_n dieses s in K'. Wegen der Eindeutigkeit (ii) gilt $r' = s$ und $r'' = s$, also $r' = r''$. $\square$

9.7 Zum Beweis von Satz 9.5

Ersetzt man in der Definition des Supremun überall $\leq$ durch $\geq$, so erhält man die Definiton von *Infimum.*

Lemma 9.7 *Für einen angeordneten Körper K sind die folgenden Aussagen äquivalent*

(i) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Supremum

(ii) Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Infimum

- *Sind X und Y nichtleere Teilmenen von K so, dass $x \leq y$ für alle $x \in X, y \in Y$ so gibt es ein $z \in K$ mit $x \leq z \leq y$ für alle $x \in X, y \in Y$.*

Ein solcher Körper heißt *vollständig angeordnet.* (iii) wurde von Dedekind (Was sind und was sollen die Zahlen, Braunschweig, 1887) zur Konstruktion von $\mathbb{R}$ durch *Schnitte* in $\mathbb{Q}$ benutzt: Paare (X, Y) nichtleerer Mengen rationaler Zahlen mit $x \leq y$ für alle $x \in X, y \in Y$. Jeder solche Schnitt bestimmt dann genau eine reelle Zahl.

Beweis. $(i) \Rightarrow (iii)$: Sei $x \leq y$ für alle $x \in X, y \in Y$. Da $Y \neq \emptyset$ gibt es nach (i) $z = \sup X$, und nach Defintion des sup gilt $x \leq z \leq y$ für alle $x \in X, y \in Y$. $(iii) \Rightarrow (i)$. Sei $X \neq \emptyset$ nach oben beschränkt. Dann ist die Menge Y aller oberen Schranken von X nicht leer und nach (iii) gibt es ein z mit $x \leq z \leq y$ für alle $x \in X, y \in Y$. Dann $z = \sup X$ nach Definition des sup. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) geht analog. □

Beweis von Satz 9.5. Sei K vollständig angeordnet. Sind $0 < a$ und b gegeben, so haben wir zu zeigen, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $b \leq ma$, also $b < ma + a = (m+1)a$. Angeommen, das ist nicht der Fall. Dann $na \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $n = n \cdot 1_K \leq c = ba^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. D.h. die Teilmenge $\mathbb{N}$ von K ist nach oben beschränkt und hat nach Voraussetzung (i) ein Supremum $s = \sup \mathbb{N}$. Dann ist $s - 1 < s$. Da s die kleinste obere Schrankte ist, ist $s-1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ und es gibt somit ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s - 1 < n$. Dann aber $s = s - 1 + 1 < n + 1 \in \mathbb{N}$, also ist s doch keine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Widerspruch. Ist eine rationale Intervallschachtelung $a_n \leq b_n$ gegeben, so gibt es nach (iii) ein $z \in K$, das durch diese approximiert wird - wähle $X = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $Y = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Umgekehrt sei K archimedisch angeordnet und jede rationale Intervallschachtelung approximiere mindestens ein Element von K. Wie oben bemerkt, können wir dann jede Intervallschachtelung durch eine rationale verfeinern und diese (und somit auch die zuerst gegebene) approximiert nach Voraussetzung mindestens ein Element von K. Sei nun $X \neq 0$ mit oberer Schranke b gegeben. Wähle $a_0 \in X$ und $b_0 = b$. Nun geht es rekursiv weiter, d.h. es seien $a_0 \leq \ldots \leq a_n$ in X und $b_n \leq \ldots \leq b_0$ obere Schranken von X. Ist $a_n = b_n$, so $a_n = b_n = \max X = \sup X$. Andernfalls sei $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, d.h. das arithmetische Mittel von a_n und b_n.

- Wir setzen $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = c_n$ falls c_n obere Schranke von X ist,
- andernfalls wählen wir $a_{n+1} \geq c_n$ in X und setzen $b_{n+1} = b_n$.

Damit erhalten wir eine Intervallschachtelung so, dass $a_n \in X$ und b_n obere Schranke von X. Wie bemerkt, approximiert die mindestens ein Element s von K, wegen (7) also genau eines. Insbesondere $a_n \leq s \leq b_n$ für alle n. Angenomme, es gibt $x \in X$ mit $s < x$. Wähle (mit Archimedes) n mit $\frac{3}{n} < x - s$. Nun $b_n \geq x$ und $b_n - a_n \leq \frac{1}{n}$, also $a_n > s$, Widerspruch. Also ist s obere Schranke von X. Angeommen, es gibt obere Schranke c von X mit $c < s$. Wähle (mit Archimedes) n mit $\frac{3}{n} < s - c$. Nun $a_n \leq c$ und $b_n - a_n \leq \frac{1}{n}$, also $b_n < s$. Widerspruch. Somit $s = \sup X$. □

9.8 Diskussion: Skalarenkörper

Wir haben zunächst jede beliebige Gerade durch Auszeichnung zweier Pukte 0 und 1 zur Zahlengeraden gemacht und Addition, Multiplikation und Anordnung ihrer Elemente, wie auch deren Multiplikation mit Vektoren, durch die Geometrie definiert und auf der Grundlage geeigneter geometrischer Axiome gezeigt, dass wir zunächst einen Körper, dann einen angeordneten Körper und schließlich einen archimedisch und vollständig angeordneten Körper erhalten. Ein abstrakter algebraischer Satz besagt, dass ein solcher vollständig angeordneter Körper bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

Mindestens ebenso wichtig ist aber der Umstand, das die Definition der Struktur auf der Zahlengeraden nicht von den gewählten Hilfspunkten und Geraden abhängt und dass der isomorphe Übergang von einer Zahlengeraden g zur anderen, g', konkret in der Geometrie gegeben (auch ohne die Voraussetzung der Vollständigkeit) und durch die Zuordnung $0 \mapsto 0'$, $1 \mapsto 1'$ eindeutig bestimmt ist. Diese Isomorphie der Zahlengeraden innerhalb einer gegebenen Geometrie erlaubt den Begriff des *Skalars* zu bilden:

> unter der Isomorpie $r \mapsto r'$ einander entsprechende Punkte verschiedener Zahlengeraden bestimmen denselben Skalar

Bei dieser Entsprechung bleiben die folgenden Relationen invariant

$$r + s = t,\ rs = t,\ r < s,\ r\vec{v} = \vec{w}$$

d.h. hat man die Entsprechungen $r \leftrightarrow r'$, $s \leftrightarrow s'$ und $t \leftrightarrow t'$ so folgt

$$r + s = t \Leftrightarrow r' +' s' = t',\ \ r \cdot s = t \Leftrightarrow r' \cdot' s' = t',\ \ r \leq s \Leftrightarrow r' \leq' s'$$

$$r\vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow r'\vec{v} = \vec{w}$$

Damit erhält man mit dem Körper K der Skalare und der Gruppe V der Vektoren einen K-Vektorraum und die Möglichkeit, die Methoden der Analytischen Geometrie einzusetzen. d.h. Koordinatensysteme einzuführen und durch Beziehungen zwischen Koordinaten geometrische Sachverhalte auszudrücken.

Mit den Grundbegriffen: Punkt, Geraden, Ebene, inzidiert, zwischen und ihren Axiomen haben wir somit die Begründung der affinen und vektoriellen Geometrie des Anschauungsraums - noch nicht fassbar sind dabei Begriffe wie: Länge, Winkel, Fläche, Volumen, Orientierung. Für diese sind weitere Grundbegriffe und Axiome erforderlich.

8.5 Caratheodory geometrisch

Wir wollen den Satz von Caratheodory in der Ebene geometrisch beweisen. Dazu

(1) Ist $P \in KH(M)$ so $P \in KH(M')$ für eine passende endliche Teilmenge von M

(3) $KH(M \cup \{A\}) = Z(M \cup \{A\})$ falls M konvex

(4) $KH(\{A, B, C\}) = Z(\{[B, C] \cup \{A\})$

(5) Sind $D \in KH(\{A, B, C\})$ und $S \notin KH(\{A, B, C\})$ so gibt es für jedes $P \in [D, S] \setminus KH(\{A, B, C\})$ ein $Q \in Z(\{A, B, C\})$ mit $P \in [Q, S]$

(6) Zu $P \neq Q$ gibt es $R \in]P, Q[$.

Beweis. (1) ist der triviale Teil des Beweises, (3) ist Aufgabe 5.1 der 6.Übung, (4) folgt daraus sofort.
Zu (5). Ist $D \in Z(\{A, B, C\})$ so sind wir fertig. Anderfalls haben wir nach (4) z.B. $D \in]C, F[$ mit $F \in]A, B[$. Dann gibt es nach Pasch für BCF ein $Q \in g = D \vee S$ mit $Q \in Z(\{A, B, C\})$. Bzgl. der durch $D < S$ gegebenen Anordnung kann nicht $P < Q$ gelten, da sonst $P \in KH(\{A, B, C\})$. Also $P \in [Q, S]$.
Zu (6). Nach (Z0) und (Z3) gibt es Punkte $B \in]A, C[$. Sei g eine Gerade, die $B \vee C$ in A schneidet - nach (E1-3) gibt es das. Dann gibt es nach Pasch für jedes $Q \neq A$ auf g ein $R \in]A, Q[$ - den Schnittpunkt der Parallelen durch B zu $Q \vee C$. Sei h parallel zu einem solchen g und $P \neq Q$ auf h. Sei Q' der Schnitt mit g der Parallelen durch Q zu $P \vee A$. Auf g haben wir $R' \in]A, Q'[$, also $R \in]P, Q[$ als Schnitt mit h der Parallelen durch R' zu $P \vee A$. Mit demselben Argument können wir nun die Behauptung für alle Geraden und alle ihre Punkte nachweisen. □

Lemma 8.8 *(i) Zu $n \geq 2$ Punkten $Q_1, \ldots, Q_n$ auf einer Geraden gibt es stets einen von allen Q_i verschiedenen Punkt R so, dass eine der Halbgeraden zu R genau einen der Punkte Q_i enthält.*

(ii) Zu $n \geq 2$ Punkten $P_1, \ldots, P_n$ in der Ebene gibt es stets eine Gerade, die keinen der Punkte P_i enthält und so, dass eine der Halbebenen genau einen der Punkte P_i enthält.

Beweis. Zu (i). O.B.d.A. hat man eine Anordnung $Q_1 < \ldots < Q_n$ und nach (7) kann man $R \in]Q_1, Q_2[$ wählen.
Zu(ii). Da jede Gerade wegen (6) unendlich viele Punkte hat, gibt es nach Satz 2.8 eine Gerade g, die keinen der Punkte $P_1, \ldots, P_n$ trifft. Wenns die nicht schon tut, wähle man $h \nparallel g$ und $\nparallel P_i \vee P_j$ alle $(i \neq j)$. $P_i \in H = h_i \parallel h$ und $Q_i = g \cap h_i$. Wähle $R \in g$ nach (1) zu den Q_i und $R \in k \parallel h_1$. Ist nun $R_{ij} = k \cap P_i \vee P_j$, so gilt nach Lemma 7.2 $R_{ij} \in]P_i, P_j[\Leftrightarrow R \in]Q_i, Q_j[$. Also liegt P_1 in der einen, die $P_2, \ldots, P_n$ in der anderen Halbebene bzgl. g. □

Satz 8.9 *In der Ebene gilt: Ist $P \in KH(M)$ so gibt es $A, B, C \in M$ mit $P \in KH(\{A, B, C\})$*

Beweis. Sei $P \in KH(M)$. Nach (1) o.B.d.A. M endlich. Daher können wir mit Induktion über die Elementanzahl m von M vorgehen. Der Fall $m \leq 3$ ist trivial. Sei also als Induktionsannahme vorausgesetzt

- für alle N mit $|N| = m - 1$ und alle $P \in KH(N)$ gibt es $A, B, C \in N$ mit $P \in KH(\{A, B, C\})$

Sei nun $|M| = m$ und $P \in KH(M)$ gegeben. Nach dem Lemma gibt es eine Gerade g die keinen Punkt aus $M \cup \{P\}$ enthält, aber eine der beiden Halbebenen H_1 und H_2 enthält genau einen, z.B. H_1. Das kann nicht der Punkt P sein weil sonst $M \subseteq KH(M) \subseteq H_2$ also $P \notin KH(M)$. Also $\{S\} = M \cap H_1$ und $M_2 = M \cap H_2$ hat $m - 1$ Elemente. Nach (3) gibt es

$$D \in KH(M_2) \text{ mit } P \in [S, D]$$

Nach Induktionsannahme gibt es

$$A, B, C \in M_2 \text{ mit } D \in KH(\{A, B, C\})$$

Nach (5) gibt es $Q \in Z(\{A, B, C\})$ mit $P \in [Q, S]$, also z.B. $Q \in [A, B]$ und somit $P \in KH(\{S, A, B\})$ mit $\{S, A, B\} \subseteq M$. $\square$

10 Kongruenz

Wir setzen nun die Axiome (E0), (E1), (E3) der Inzidenzgeometrie der Ebene voraus sowie die Axiome der Zwischenbeziehung. Das Parallelenaxiom (E2) wird zunächst nicht vorausgesetzt, aber das Lemma 7.7. - damit haben wir die Aussagen über die Anordnung auf Geraden.

10.1 Halbgeraden und Winkel

Zu zwei Punkten OP ist die *Halbgerade* bzw. der *Strahl* $O\overrightarrow{\vee}P$ definiert als

$$\sigma = O\overrightarrow{\vee}P = \{X \mid O, P, X \text{ kollinear}, O \notin]X, P[\,\} \setminus \{O\} = \{X \in g \mid O < X\}$$

bzgl. der durch $O < P$ bestimmten Anordnung. Insbesondere ist σ ist konvex und es gilt

$$O\overrightarrow{\vee}P = O\overrightarrow{\vee}X \text{ für alle } X \in O\overrightarrow{\vee}P$$

Der *Scheitelpunkt* $O = O_\sigma$ ist durch die Menge σ eindeutig bestimmt: Sind $P \neq Q$ in σ, so $O \in P \vee Q$, $O \notin]X, Y[$ für alle $Y, Y \in \sigma$

Die Menge

$$O\overleftarrow{\vee}P = (O \vee P) \setminus (O\overrightarrow{\vee}P \cup \{O\} = \{X \in O \vee P \mid X < O\}$$

ist entweder leer oder die *entgegengesetzte Halbgerade* und dann $= \overrightarrow{O\vee Q}$ für jedes ihrer Elemente Q. Es gilt

$$O \in]Y, X[,\ O \notin]X, Z[\text{ für alle } Y \in \overleftarrow{O\vee P},\ X, Z \in \overrightarrow{O\vee P}$$

Ein *Winkel* ist ein Paar (σ, τ) von Halbgeraden, notiert als $\angle\sigma\tau$, mit demseblen Scheitelpunkt $O = O_\sigma = O_\tau$. Wir schreiben auch

$$\angle AOB = \angle \overrightarrow{O\vee A}, \overrightarrow{O\vee B}$$

- insbesondere ist AOB ein Dreieck. Also

$$\angle AOB = \angle A'O'B' \Leftrightarrow\ O = O',\ \overrightarrow{O\vee A} = \overrightarrow{O\vee A'} \text{ und } \overrightarrow{O\vee B} = \overrightarrow{O\vee B'}$$

Die Gerade g *trennt* die Punkte P und Q wenn $P \neq Q$ und $(P\vee Q) \cap g \in]P, Q[$.

10.2 Kongruenzaxiome

Als neuen Grundbegriff führen wir die *Kongruenz* $PQ \equiv RS$ von Pfeilen ein - wir sagen auch die *Strecken* PQ und RS sind *kongruent*. Vorausgesetzt werden dann die folgenden Axiome

Axiom 10.1 $(K1)$ $\equiv$ *ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Pfeile*

$(K2)$ $AB \equiv BA$

$(K3)$ *Aus* $AA \equiv BC$ *folgt* $B = C$

$(K4)$ *Zu Punkten* $A \neq B$ *und* C *und Gerade* g *durch* C *gibt es genau 2 Punkte* D, D' *mit* $AB \equiv CD \equiv CD'$

$(K5)$ *Sind* A, B, C *3 kollineare Punkte mit* $AB \equiv AC$ *so* $A \in]B, C[$

$(K6)$ *Sind* A, B, C *bzw.* A', B', C' *jeweils 3 kollineare Punkte mit* $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ *und* $B \in]A, C[\Leftrightarrow B' \in]A', C'[$, *so gilt* $AC \equiv A'C'$

$(K7)$ *Zu jedem Dreieck* ABC *und Punkten* A', B' *mit* $AB \equiv A'B'$ *gibt es 2 Punkte* C', C'' *mit* $AC \equiv A'C' \equiv A'C''$ *und* $BC \equiv B'C' \equiv B'C''$

$(K8)$ *Für jedes Dreieck* ABC *und Punkte* D, A', B', C, D' *mit* $D \in A \vee C$, $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $AC \equiv A'C'$, $AD \equiv A'D'$ *und* $BD \equiv B'D'$ *gilt* $CD \equiv C'D'$

$(K9)$ *Sind 4 Punkte mit* $AC \equiv AC'$ *und* $BC = BC'$ *gegeben, so trennt die Gerade* $A\vee B$ *die Punkte* C *und* C'

Es folgt:

- Für alle $O \neq P$ ist $\overleftarrow{O\vee P}$ nichtleer und es git Y mit $O \in]Y, P[$.

Beweis. Nach (K4) gibt es genau 2 Punkte X, Y auf $O\vee P$ mit $OX \equiv OY \equiv OP$ und nach (K5) $O \in]X, Y[$. O.B.d.A. $X = P$ und dann $Y \in \overleftarrow{\emptyset\vee P}$. $\square$
Wir schreiben $A_1 \ldots A_n \equiv A'_1 \ldots A'_n$ falls $A_iA_j \equiv A'_iA'_j$ für alle i, j

10.3 Kongruenz auf Geraden

(0) Sind A, B, C 3 kollineare Punkte und gilt $AC \equiv AC'$ und $BC \equiv BC'$ so gilt $C = C'$

Beweis. Angenommen $C \neq C'$. Nach (K9) gibt es $P = (A \vee B) \cap (C \vee C') \in]C, C'[$. Es gilt $P = C$, da C auf beiden Geraden liegt. Also $C \in]C, C'[$, Widerspruch. □

(1) Seien $A \neq B$ und $C \neq D$ Punkte. Dann gibt es jeweils genau ein $B' \in A\overset{\rightarrow}{\vee}B$ und $B'' \in A\overset{\leftarrow}{\vee}B$ mit $CD \equiv AB' \equiv AB''$

Beweis. Nach (K4) gibt es genau 2 Punkte X, Y auf $A \vee B$ mit $AX \equiv AY \equiv CD$. □

(2) Seien A, B, C 3 kollineare Punkte und $A'B' \equiv AB$. Dann gibt es genau einen Punkt $C' \in A' \vee B'$ mit $A'C' \equiv AC$, $B'C' \equiv BC$ und für diesen gilt $A \in]B, C[\Leftrightarrow A' \in]B', C'[$.

Beweis. Nach (1) gibt es eindeutig bestimmte $X \in A'\overset{\rightarrow}{\vee}B'$ und $Y \in A'\overset{\leftarrow}{\vee}B'$ mit $A'X \equiv A'Y \equiv AC$. Nun $A' \in]Y, B'[$ und $A' \notin]X, B'[$, also kann man $C' \in \{X, Y\}$ eindeutig so wählen, dass $A \in]B, C[\Leftrightarrow A' \in]B', C'[$ und $A'C' \equiv AC$. Mit (K6) folgt $B'C' \equiv BC$. Die Eindeutigkeit folgt aus (0). □

(3) Seien A, B, C 3 kollineare Punkte und $ABC \equiv A'B'C'$. Dann sind auch $A'B'C'$ kollinear und $A \in]B, C[\Leftrightarrow]A' \in]B'C'[$.

Beweis. Nach (2) gibt es $C'' \in g = A' \vee B'$ mit $A'C'' \equiv A'C' \equiv AC$, $BC'' \equiv B'C' \equiv BC$ und $A \in]B, C[\Leftrightarrow A' \in]B', C'[$. Nach (0) folgt $C' = C''$. □

10.4 Kongruenz von Winkeln

Lemma 10.2 *Für Winkel $\angle\sigma\tau$ und $\angle\sigma'\tau'$ mit Scheitel O bzw. O' sind die folgenden Aussagen äquivalent*

(*i*) *Es gibt $A \in \sigma$, $B \in \tau$, $A' \in \sigma'$ und $B' \in \tau'$ mit $OA \equiv OB \equiv O'A' \equiv O'B'$ und $AB \equiv A'B'$*

(*ii*) *Für alle $A \in \sigma$, $B \in \tau$, $A' \in \sigma'$ und $B' \in \tau'$ mit $OA \equiv OB \equiv O'A' \equiv O'B'$ gilt auch $AB \equiv A'B'$*

Definition 10.3 *Die Winkel $\angle\sigma\tau$ und $\angle\sigma'\tau'$ sind* kongruent*, man schreibt $\angle\sigma\tau \equiv \angle\sigma'\tau'$, wenn (i) bzw. (ii) gilt*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$. Seien $A_0 \in \sigma$, $B_0 \in \tau$, $A'_0 \in \sigma'$ und $B'_0 \in \tau'$ mit $OA_0 \equiv OB_0 \equiv O'A'_0 \equiv O'B'_0$ und $A_0B_0 \equiv A'_0B'_0$ gegeben. Seien $A \in \sigma$, $B \in \tau$, $A' \in \sigma'$ und $B' \in \tau'$ mit $OA \equiv OB \equiv O'A' \equiv O'B'$. Nach (2) gibt es $B_1 \in \tau$, $A'_1 \in \sigma'$ und $B'_1 \in \tau'$ mit

$$OA \equiv OB_1 \equiv O'A'_1 \equiv O'B'_1$$

$$A \in]O, A_0[\;\Leftrightarrow\; B_1 \in]O, B_0[\;\Leftrightarrow\; A_1' \in]O', A_0'[\;\Leftrightarrow\; B_1' \in]O', B_0'[$$

Mit (K6) folgt

$$AA_0 \equiv B_1B_0 \equiv A_1'A_0' \equiv B_1'B_0'$$

und mit (0)

$$B_1 = B,\ A_1' = A',\ B_1' = B'$$

Durch zweimaliges Anwenden von (K8) erhalten wir

$$AB_0 \equiv A'B_0' \quad \text{und dann} \quad AB \equiv A'B'$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Wähle $A \in \sigma$. Nach (1) gibt es jeweils $B \in \tau$, $A' \in \sigma'$ und $B' \in \tau'$ mit $OA \equiv OB \equiv OA' \equiv OB'$. Nach Annahme (ii) gilt dann auch $AB \equiv A'B'$. □

(4) Die Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Winkel und es gilt $\angle AOB \equiv \angle BOA$.

Beweis: (K1) und (K2). □

(5) Sei O, A, B ein Dreieck, $A' \neq O$ und $\angle AOB = \angle A'OB$, Dann gilt $\overrightarrow{O \vee A} = \overrightarrow{O \vee A'}$ oder $(O \vee B)$ trennt A und A'.

Beweis. Nach Voraussetzung o.B.d.A. $OA \equiv OB \equiv OA'$ und $AB \equiv A'B$ mit 4 verschiedenen Punkten. Mit (K9) folgt die Behauptung. □

10.5 Kongruente Dreiecke

Für ein Dreieck ABC notieren wir die Winkel wie üblich als

$$\alpha = \angle CAB, \quad \beta = \angle ABC, \quad \gamma = \angle BCA$$

Satz 10.4 *Für zwei Dreiecke A, B, C und A', B', C' sind die folgenden Aussagen äquivalent*

(SSS) $(A, B, C) \equiv (A', B', C')$

(SWS) $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ *und* $\alpha = \alpha'$

(WSW) $AB \equiv A'B'$, $\alpha \equiv \alpha'$ *und* $\beta \equiv \beta'$

Definition 10.5 *Dreiecke wie im Satz sind* kongruent

Beweis. Aus (SSS) folgt (WWW), also (SWS) und (WSW) (Charakterisierung der Winkelkongruenz durch das Lemma). Wie im Beweis des Lemmas, (SSS) aus (SWS) Bleibt zu zeigen. dass (SWS) aus (WSW) folgt. Nach (1) gibt es $C'' \in A' \overrightarrow{\vee} C'$ mit $A'C'' \equiv AC$. Nach dem schon gezeigten $(SWS) \Rightarrow (SSS) \Rightarrow (WWW)$ haben wir $\angle A', B', C'' \cong \beta' \cong \beta$. A' ist der Schnittpunkt von $A' \vee B'$ und $A' \vee C'$ und $A' \notin]C', C''[$ da es Scheitel der Halbgeraden ist. Also kann $A' \vee B'$ nicht die Punkte C' und C'' trennen. Mit (5) folgt $B' \vee C' = B' \vee C''$ und daher Schnittpunkt $C' = C''$ mit $A' \vee C = A' \vee C''$. Somit $A'C' = A'C'' \equiv AC$. □

10.6 Neben- und Scheitelwinkel

Gilt $O \in]A, B[$ so sind die Winkel $\angle AOC$ und COB *Nebenwinkel* von einander. Sind A, O, A' und B, O, B' jeweils kollinear, so sind die Winkel $\angle AOB$ und $\angle A'OB'$ *Scheitelwinkel* voneinander.

Satz 10.6 *Nebenwinkel kongruenter Winkel sind kongruent. Scheitelwinkel sind zueinander kongruent.*

Beweis. Sei $\angle A'O'C'$ und $\angle C'O'B'$ ein weiteres Paaar von Nebenwinkeln und $\angle AOC \equiv \angle A'O'C'$. O.B.d.A.

$$OA \equiv OC \equiv OB \equiv O'A' \equiv O'C' \equiv O'B'$$

und aus der gegebenen Winkelkongruenz folgt $AC \equiv A'C'$. Dann mit (K8) auch $BC \equiv B'C'$, also $\angle BOC \equiv \angle B'O'C'$. Die Aussage über Scheitelwinkel folgt, da $\angle AOC$ und $\angle A_1OC_1$ beide Nebenwinkel von $\angle COA_1$ sind. □

10.7 Orthogonalität

Seien g und h Geraden mit Schnittpunkt O. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

(i) Es gibt P, P' auf g mit $O \in]P, P'[$ und $Q \neq O$ auf h mit $OP \equiv OP'$ und $QP \equiv QP'$

(ii) Für alle P, P' auf g mit $O \in]P, P'[$ und $Q \neq O$ auf h gilt $OP \equiv OP' \Rightarrow QP \equiv QP'$

(iii) Für alle P, P' auf g mit $O \in]P, P'[$ und $Q \neq O$ auf h gilt $QP \equiv QP' \Rightarrow OP \equiv OP'$

(iv) Für alle $P \in g \setminus \{O|$ und $Q \in h \setminus \{O\}$ gilt $\angle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \equiv \angle \overleftarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$

(v) Es gibt $P \in g \setminus \{O|$ und $Q \in h \setminus \{O\}$ mit $\angle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \equiv \angle \overleftarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$

Treffen diese zu, so stehen g und h *senkrecht* oder *orthogonal* zueinander und man schreibt $g \perp h$. Die durch h bestimmten Nebenwinkel $\angle QOP \equiv \angle QOP'$ an g sind *rechte Winkel*.

Beweis. Aus (i) folgt (v) wegen $(SSS) \Rightarrow (SWS)$. Aus (v) folgt (iv) trivialerweise. Aus (iv) folgen (ii) und (iii) wegen $(SWS) \Rightarrow (SSS)$. Aus (ii) bzw. (iii) folgt (i) indem man vermöge (K4) P und P' mit $OP \equiv OP'$ wählt. □. Da $\angle \overrightarrow{OP}, \overleftarrow{OQ}$ als Scheitelwinkel zu $\angle \overleftarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ kongruent ist, folgt mit Satz 10.6

- $g \perp h \Leftrightarrow h \perp g$

Satz 10.7 *Zu jeden Punkt P und jeder Geraden g gibt es genau eine Gerade h (geschrieben $h = \{P \perp g\}$ mit $P \in h$ und $h \perp g$.*

Beweis. 1. Lot fällen. Sei $P \notin g$. Wähle $A \neq B$ auf g. Nach (K7) gibt es genau ein $P' \neq P$ mit $PAB \equiv P'AB$ und nach (K9) trennt g die Punkte P und P', d.h. es gibt $S \in g$ mit $S \in]P, P'[$. Mit (SWS) folgt $PAS \equiv P'AS$ Also $SP \equiv SP'$. Nach Def. (i) der Orthogonalität gilt $g \perp h = P \vee P' = P \vee S$. Nach Symmetrie $h \perp g$. Der Punkt $S \in g$ für den die Nebenwinkel der Geraden $P \vee S$ mit g kongruent sind, heißt *Fußpunkt des Lotes* von P auf g

2. Lot errichten. Sei $P \in g$. Wähle $Q \notin g$ und fälle das Lot auf g mit Fußpunkt S. Ist $S = P$ so ist man fertig. Andernfalls gibt es nach (K7) $R \neq R'$ mit $PSQ \equiv SPR \equiv SPR'$. Also $\angle SPR \equiv \angle SPR'$ und der zweite ist Scheitelwinkel des Nebenwinkels des ersten, also alle kongruent. Also $P \vee R \perp g$.

Eindeutigkeit. Seien $h, k \perp g$ und $P = g \cap k = g \cap k$. Angenommen $h \neq k$. Wähle $P \neq A \in h$. Nach (K4) gibt es $Q \neq Q'$ auf g mit $PA \equiv PQ \equiv PQ'$ und nach (K5) $P \in]Q, Q'[$. Da $A \notin k$ schneidet k nach Pasch entweder $]A, Q[$ oder $]A, Q'[$. O.B.d.A. $B \in k \cap]A, Q'[$. Wegen $h, k \perp g$ gelten $APQ \equiv APQ'$ und $BPQ \equiv BPQ'$. Daher

$$\angle AQ'P \equiv \angle AQP = \angle BQP \equiv \angle BQ'P.$$

Da nach (Z3) $Q = g \cap A \vee B \notin]A, B[$ trennt g die Punkte A, B nicht, also nach (5) $Q' \vee A = Q' \vee B$ und es folgt $A = A \vee B \cap Q' \vee A = A \vee B Q' \vee B = B \in k$, ein Widerspruch.

Seien $h, k \perp g$ und $P \in h \cap k$, $P \notin g$. Sei $S = h \cap g$ und $T = k \cap g$. Nach (K7) gibt es $P'ST \equiv PST$, $P' \neq P$. Insbesondere $\angle P'ST \equiv \angle PST$. Wähle $U \in g$ mit $S \in]U, T[$. Dann gilt fúr die Nebenwinkel $\angle P'SU \equiv \angle PSU$. Wegen $h \perp g$ gilt $\angle PST \equiv \angle PSU$ und somit $\angle P'ST \equiv \angle P'SU$. Also $h' \perp g$ für $h' = P' \vee S$. Nach dem schon behandelten Fall (für S) folgt $h' = h$, also $h = P \vee P'$. Ebenso $K = P \vee P'$. □.

Korollar 10.8 (*i*) *Aus $g \perp h$ und $g \perp k$ folgt $h \parallel k$*

(*ii*) Existenz von Parallelen. *Zu jeder Geraden g und Punkt P gibt es mindestens eine Parallele durch P zu g*

Beweis zu (i). Angenommen $P \in h \cap k$. Dann $h = k$ wegen der Eindeutigkeit der Senkrechten. □

10.8 Mittelpunkt

$M \in A \vee B$ heisst *Mittelpunkt* von AB wenn $AM \equiv MB$. Die Senkrechte $m = \{M \perp A \vee B\}$ heisst dann *Mittelsenkrechte.*

Satz 10.9 *Zu je 2 Punkten A, B gibt es genau einen Mittelpunkt M und es gilt $M \in]A, B[$. Für die Mittelsenkrechte gilt $m = \{C \mid AC \equiv BC\}$.*

Beweis. Wähle $P \notin g = A \vee B$. Nach (K7) gibt es

$$BAP \equiv ABD \equiv ABD' \text{ also auch } PDA \equiv PDB$$

und g trennt D und D', O.B.d.A. trennt g auch D und P, also gibt es $M \in g \cap]D,P[$. Aus den Dreieckskongruenzen folgen

$$\angle BAD \equiv \angle ABP \text{ und } \angle ADP \equiv \angle BPD$$

also $MAD \equiv MBP$ mit (WSW). Insbesondere $AM = BM$ und $M \in]A,B[$ nach (K5). Die Eindeutigkeit folgt aus (0). □

10.9 Addition von Winkeln

Lemma 10.10 *Es gelte $\angle AOB \equiv \angle A'O'B'$ und $\angle BOC \equiv \angle B'O'C'$ und $O \vee B$ trenne A und C, ebenso trenne $O' \vee B'$ die Punkte A' und C'. Dann gilt $\angle AOC \equiv \angle A'O'C'$.*

Beweis. O.B.d.A. $OB \equiv OB'$. Errichte die Senkrechte g in B zu $O \vee B$ und und g' in B' zu $O' \vee B'$. O.B.d.A. $A \in g$, $C \in g$, $A' \in g'$ und $C' \in g'$. Mit (WSW) folgt $AOB \equiv A'O'B'$ und $COB \equiv C'O'B'$. Mit (K6) dann $AC \equiv A'C'$ und mit (SSS) schließlich $AOC \equiv A'O'C'$. □.

10.10 Stufen- und Wechselwinkel

Seien g, h Geraden und $A = g \cap l$, $B = h \cap l$. Seien $S \in g$ und $T \in h$ in derselben Halbebene bzgl. l und $R \in l$, $R \notin [A,B]$. Dann sind die Winkel $\angle RAS$ und $\angle RBT$ ein Paar von *Stufenwinkeln* - ebenso ihre Paare von Neben- bzw. Scheitelwinkeln. Ein Scheitelwinkel des einen Stufenwinkels aus einem Paar ist *Wechselwinkel* zum anderen. Und nach dem Satz über Neben- und Scheitelwinkel bedeutet Kongruenz der beiden Winkel eines Paares auch die Kongruenz der beiden Winkel jeden anderen Paares.

Lemma 10.11 *Haben g und h ein Paar kongruenter Wechsel- bzw. Stufenwinkel so $g \parallel h$*

Beweis. Seien kongruente Wechselwinkel mit obigen Bezeichnungen gegeben. Gilt $A = B$, so folgt aus der Kongruenz $\angle RAS \equiv \angle RAT$ der Stufenwinkel, dass $g = h$, da S und T nicht durch l getrennt werden ((5) aus 10.4). Ist $l \perp g, h$ so $g \parallel h$ nach Kor.10.8. Sei also $A \neq B$ und o.B.d.A. $l \not\perp h$, Es gibt den Mittelpunkt M von AB und Lot k vom M auf h mit Fußpunkt D. Nach(K4-5) gibt es $C \in k$ mit $MC \equiv MD$ und $M \in]C,D[$. Die Dreiecke BMD und AMC haben kongruenre Scheitelwinkel, sind also nach (SWS) kongruent. Also $\angle CAM \equiv \angle MBD$, Wählt man X auf g in der durch l und C bestimmten Halbebene, so $\angle MBD \equiv \angle XAM$ als Wechselwinkel nach voraussetzung, also $\angle CAM \equiv \angle XAM$ Da l die Pubkte X und X nicht trennt, folgt $C \vee A = g$. Nun ist $\angle ACM$ zu seinem Nebenwinkel and g kongruente, da $k \perp h$ und $\angle ACM \equiv \angle BMD$ nach der bewiesenen Dreieckskongruenz. Also auch $k \perp g$ und somit $g \parallel h$ nach Kor.10.8. □

11 Euklidische Geometrie

Aus den Axiomen (E0), (E1), (E3) der Inzidenzgeometrie der Ebene, den Axiomen (Z0-4) der Zwischenbeziehung, dem als Axiom verstandenen Lemma 7.7 und den Kongruenzaxiomen (K1-9) haben wir gezeigt, dass es zu jeder Geraden g und jedem Punkt P mindestens eine Parallele gibt. Die Forderung der Eindeutigkeit der Parallelen ist jetzt also zum Parallelenaxiom (E3) äquivalent. Diese Axiom werden wir bis auf Weiteres zusätzlich voraussetzen. Wir behandlen zuächst wieder den ebenen Fall.

11.1 Stufen- und Wechselwinkel an Parallelen

Lemma 11.1 *Aus $g \parallel h$ und $k \perp g$ folgt $k \perp h$*

Beweis. Aus $k \perp g$ folgt $k \nparallel g$ also auch $k \nparallel h$. Sei $P = g \cap k$ und $Q = h \cap k$ und l die Senkrechte in Q auf k. Nach Kor.10.8 gilt $l \parallel g$ also $l = h$ wegen der Eindeutigkeit der Parallelen. □

Satz 11.2 *Für 2 Geraden g, h sind äquivalent*

(i) $g \parallel h$

(ii) *g und h haben ein Paar kongruenter Wechsel- bzw, Stufenwinkel*

(iii) *Jedes Paar von Wechsel- bzw. Stufenwinkeln an g, h ist ein Paar kongruenter Winkel*

Beweis. (ii) folgt aus (iii) trivialerweise.
$(ii) \Rightarrow (i)$ ist Lemma 10.11 $(i) \Rightarrow (iii)$. Sei $g \parallel h$. Trage den Winkel $\angle RAS$ in B an die Halbgerade $\overrightarrow{B{\vee}A}$ als Wechselwinkel an. Sei k die Gerade durch den zweiten Schenkel. Nach dem schon Gezeigten $k \parallel g$ und $k = h$ wegen der Eindeutigkeit der Parallelen. Also sind die Wechselwinkel kongruent. □

Korollar 11.3 *In einem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten kongruent: Sind $A{\vee}B \parallel C{\vee}D$ und $A{\vee}C \parallel B{\vee}D$ so gilt $AB \equiv CD$*

Beweis. Wir haben die Kongruenzen $\angle BAD \equiv \angle ADC$ und $\angle ABC \equiv BCD$ von Wechselwinkeln an Parallelen. Also folgt $ABC \equiv DCB$ mit (WSW). □

Lemma 11.4 *(SWW) Aus $AB \equiv A'B'$, $\beta = \angle ABC \equiv \beta' = \angle A'B'C'$ und $\gamma = \angle BCA \equiv \gamma' = \angle B'C'A'$ folgt $ABC \equiv A'B'C'$*

Beweis. Trage β als Wechselwinkel $\beta_1 = \angle BCD$ an CB an. Der zweite Schenkel bestimmt dann die Parallele g durch C zu $A{\vee}B$ und wir haben den Wechselwinkel al_1 zu α. Entsprechend haben wir $\beta_1' = \angle B'C'D'$ und α_1' zum Dreieck $A'B'C'$. Nach Voraussetzung $\beta \equiv \beta'$ und $\gamma \equiv \gamma'$ Als Wechselwinkel $\beta_1 \equiv \beta \equiv \beta' \equiv \beta_1'$ und nach Addition $\angle ABD \equiv \angle A'B'D'$. Also für die Nebenwinkel $\alpha_1 \equiv \alpha_1'$ und dann auch fúr ihre Wechselwinkel $\alpha \equiv \alpha'$. Nun folgt $ABC \equiv A'B'C$ mit (WSW). □

11.2 Kongruenz von Vektoren

Wir setzen nun auch die Axiome von Desargues und Pappus und damit auch einen angeordneten Skalarenkörper K voraus

Archimedizität ist nicht erforderlich. Von der Vollständigkeit setzen wir nur voraus, dass K *quadratisch abgeschlossen* ist

$$\boxed{\text{Zu jedem } r > 0 \text{ in } K \text{ gibt es } s \in K \text{ mit } s^2 = r}$$

Es sind gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms kongruent und wir können nun darüber reden, dass zwei Vektoren kongruent sind

$$\vec{a} \equiv \vec{b} \ \Leftrightarrow \ \vec{a} + P, P \ \equiv \ \vec{b} + Q, Q \text{ für einige/alle Punkte } P, Q$$

Lemma 11.5 $\vec{a} \equiv \vec{b} \Rightarrow r\vec{a} \equiv r\vec{b}$

Beweis. Sei $A = \vec{a} + O$, $B = \vec{b} + O$, $A' = r\vec{a} + O$, $B' = r\vec{b} + O$. Nach dem Strahlensatz gilt $A \vee B \parallel A' \vee B'$. M Mittelpunkt von AB und $g = O \vee M$. Aus der Übung wissen wir, dass g die Winkelhalbierende und die Höhe im gleichschenkligen Dreieck AOB ist. g steht also auch auf $A' \vee B'$ senkrecht. Sei $M' = h \cap A' \vee B'$. Dann $OM'A' \equiv OM'B'$ nach (WSW). Also $OA' \equiv OB'$. $\Box$.

11.3 Orthogonale Vektoren und Richtungskomponente

Insbesondere gilt

$$\vec{a} \equiv \vec{a}\,', \ \vec{b} \equiv \vec{b}\,' \Rightarrow O, \vec{a} + O, \vec{b} + O \equiv O', \vec{a}\,' + O', \vec{b}\,' + O' \text{ für alle } O, O'$$

Daher können wir definieren: $\vec{a}$ *steht auf* $\vec{b}$ *senkrecht*, $\vec{a} \perp \vec{b}$, falls $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ oder $O \vee \vec{a} + O \perp O \vee \vec{b} + O$ für ein/alle O.

Damit können wir nun den auch physikalisch grundlegenden Begriff der *Komponente* $\vec{c}$ eines Vektor $\vec{b}$ in der durch einen Vektor $\vec{a}$ gegebenen Richtung definieren durch die Bedingungen
$\vec{c} = r\vec{a}$ für ein $r \in \mathbb{R}$, $(\vec{b} - \vec{c}) \perp \vec{a}$
In der Tat, ist $\vec{a} \neq \vec{0}$, so wähle man einen Punkt O und g als die Gerade durch O mit Richtungsvektor $\vec{a}$ und $Q = \vec{b} + O$. Dann ergibt sich $\vec{c}$ eindeutig als $\vec{c} = \overrightarrow{OR}$ mit dem Fusspunkt R des Lotes von Q auf g. Ist $\vec{a} = \vec{0}$, so auch $\vec{c} = \vec{0}$.

11.4 Längenmessung

Sei nun zusätzlich eine Längeneinheit festgelegt, z.B. dadurch dass wir einem bestimmten Pfeil OE die Länge 1 zuschreiben. Um die Länge eines beliebigen Vektors $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} \neq \vec{0}$ zu bestimmen, konstruieren wir auf der Geraden g durch $O' = P$ und Q einen Punkt E' mit $O'E' \equiv OE$ und $E' > O'$ bzgl. der Anordnung mit $Q > O'$. Wir setzen nun

$$\|\vec{v} \ = |PQ| = r \quad \text{mit } \vec{v} = r\overrightarrow{O'E'}$$

Offensichtlich ist der Nullvektor $\vec{0}$ ist der einzige Vektor der Länge 0 und es gilt

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| \Leftrightarrow \vec{a} \equiv \vec{b}$$

Wir können auch die *Länge* der Strecke PQ definieren

$$|PQ| = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

und haben

$$PQ \equiv RS \Leftrightarrow |PQ| = |RS|$$

Lemma 11.6 *(i)* $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}| + \|\vec{b}\|$ *genau dann, wenn es P gibt mit* $\vec{a} + P \in]\vec{a} + \vec{b} + P, P[$.

(ii) $\|r\vec{a}\| = |r| \cdot \|\vec{a}\|$, *insbesondere* $\|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}\| = 1$ *falls* $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Beweis. (i) folgt mit 10.3, (ii) sofort aus der Definition.

11.5 Skalarprodukt

Das *skalare* oder *innere Produkt* $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle$ definieren wir zunächst für einen Spezialfall durch folgende Beziehung

$$\langle \vec{e} \mid \vec{b} \rangle \vec{e} \text{ ist die Komponente von } \vec{b} \text{ in Richtung } \vec{e} \text{ falls } \|\vec{e}\| = 1$$

Erwünscht sind für ein allgemein definiertes Skalarprodukt die Regeln

$$\begin{array}{ll} (E1) & \langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = \langle \vec{b} \mid \vec{a} \rangle \\ (E2) & \langle \vec{a} \mid s\vec{b} \rangle = s\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle \\ (E3) & \langle \vec{a} \mid \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle + \langle \vec{a} \mid \vec{c} \rangle \\ (E4) & \langle a \mid a \rangle > 0 \text{ für } \vec{a} \neq 0 \end{array}$$

Lemma 11.7 *(E1-4) gelten, falls $\|\vec{a}\| = 1$ - und in (E1) auch $\|\vec{b}\| = 1$.*

Beweis. Sei $A = \vec{a} + O$, $B = \vec{b} + O$ und P Fußpunkt des Lotes von B auf $O \vee A$. Also nach Definition $\langle \vec{a} \mid \vec{a} \rangle = 1$.
Zu (E1): Sei Q der Fußpunkt des Lotes von A auf $O \vee B$. Dann $AOQ \equiv BOP$ nach (SWW) und somit $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = \langle \vec{b} \mid \vec{a} \rangle$.
Zu (E2): Sei $C = \vec{s} + O$ und Q der Fußpunkt des Lotes von C auf $O \vee A$. Dann sind $C \vee Q$ und $B \vee A$ parallel, also nach dem Strahlensatz $\overrightarrow{OQ} = s\vec{a}$. Nach Defintion $s = \langle \vec{a} \mid s\vec{b} \rangle$.
Zu (E3): Sei $D = \vec{c} + B = \vec{c} + \vec{b} + O$ und g das Lot von C auf $O \vee A$ mit Fußpunkt Q. Sei $h = B \vee \vec{a} + B$ die Parallele zu $O \vee A$ durch B. Dann nach Lemma 11.1 $R = g \cap h$ Fußpunkt des Lotes von C auf h. Also $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BR}$. Die Skalarprdukte erhält man nun durch $\overrightarrow{OP} = r\vec{a}$ und $\overrightarrow{BR} = s\vec{s}$, also $r = \langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle$ und $s = \langle \vec{a} \mid \vec{c} \rangle$. Aber $(s + r)\vec{a} + O = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{OP} + O = \vec{c} + \vec{b} + O$ und somit $\langle \vec{a} \mid \vec{b} + \vec{c} \rangle = r + s$. $\square$

Da wir mit $\vec{e} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$ einen Vektor der Länge 1 erhalten, sind wir wegen (E1-2) gezwungen, das Skalarprodukt so zu definieren

$$\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \langle \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \mid \vec{b} \rangle$$

Lemma 11.8 *(E1-4) gelten für das so definierte Produkt.*

Beweis. Seien $\vec{a} = r\vec{e}$ und und $\vec{b} = t\vec{f}$ mit $\|\vec{e}\| = \|\vec{f}\} = 1$. Dann

$$\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle =_{def} r\langle \vec{e} \,|\, \vec{b} \rangle =_{E2} rt\langle \vec{e} \,|\, \vec{f} \rangle =_{E1} rt\langle \vec{f} \,|\, \vec{e} \rangle =_{E2} t\langle \vec{f} \,|\, \vec{a} \rangle =_{def} \langle \vec{b} \,|\, \vec{a} \rangle$$

$$\langle \vec{a} \,|\, s\vec{b} \rangle =_{E1}=_{def} r\langle \vec{e} \,|\, s\vec{b} \rangle =_{E1} rs\langle \vec{e} \,|\, \vec{b} \rangle =_{def} s\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle$$

$$\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} + \vec{c} \rangle =_{def} r\langle \vec{e} \,|\, \vec{b} + \vec{c} \rangle =_{E3} r(\langle \vec{e} \,|\, \vec{b} \rangle + \langle \vec{e} \,|\, \vec{c} \rangle)$$

$$= r\langle \vec{e} \,|\, \vec{b} \rangle + r\langle \vec{e} \,|\, \vec{c} \rangle =_{def} \langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle$$

$$\langle \vec{a} \,|\, \vec{a} \rangle =_{def} r\langle \vec{e} \,|\, \vec{a} \rangle =_{E1} r\langle \vec{a} \,|\, \vec{e} \rangle = r^2\langle \vec{e} \,|\, \vec{e} \rangle = r^2 \geq 0$$

$$r^2 = 0 \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = r\vec{e} = \vec{0} \quad \square$$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist eine andere Schreibweise für das Skalarprodukt.

11.6 Geometrische Begriffe aus dem Skalarprodukt

(1)

$$\frac{\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} = \langle \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \text{ ist die Komponente von } \vec{b} \text{ in Richtung } \vec{a}$$

(2) $\langle \vec{a} \,|\, \vec{a} \rangle = \|\vec{a}\|^2$,

(3) $\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a} \mid \vec{a} \rangle}$

(4) $\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle = 0$ genau dann, wenn $\vec{a} \perp \vec{b}$

(1) folgt sofort aus der Definition, (2) mit (E2) und (E1). (3) ist dann klar. (4) aus (1).

Wir haben somit eine Charakterisierung von Länge und Orthogonalität in der Begrifflichkeit von Vektorraum und Skalarprodukt - d.h. eines *Inneren-Produktraums*. Ist $K = \mathbb{R}$ so spricht man von *euklidischem Vektorraum*. Die folgenden Herleitungen erfolgen in diesem Rahmen, d.h. für endlichdimensionale Vektorräume über angeordneten quadratisch abgeschlossen Körpern mit Skalarprodukt aus den Axiomen (V1-8) und (E1-4) und dem obigen Charakterisierungen als Definitionen.

Satz 11.9 Pythagoras

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 \;\Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Beweis als Übung.

Beispiel. Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
Beweis. Gegeben Dreieck ABC setze $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Dann die Seitenmittelpunkte von AB, AC bzw. BC gegeben als

$$\frac{1}{2}\vec{b}, \;\; \frac{1}{2}\vec{c}, \;\; \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$$

Sei P der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf AB und AC (den gibts, weil sonst $\vec{AB} \parallel \vec{AC}$). Setze

$$\vec{p} = \overrightarrow{AP},\ \vec{v} = \vec{p} - \frac{1}{2}\vec{b},\ \ \vec{w} = \vec{p} - \frac{1}{2}\vec{c},\ \ \vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{p}$$

$\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind nach Konstruktion Richtungsvektoren für die Mittelsenkrechten auf AB bzw. AC und es gilt

$$\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{w} = \vec{p}$$

Es ist zu zeigen, dass $\vec{u} \perp \vec{c} - \vec{b}$. Dazu rechnet man

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u} \,|\, \vec{c} - \vec{b} \rangle &= \langle \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \,|\, \vec{c} - \vec{b} \rangle - \langle \vec{p} \,|\, \vec{c} - \vec{b} \rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \vec{b} + \vec{c} \,|\, \vec{b} - \vec{c} \rangle - \langle \vec{p} \,|\, \vec{b} \rangle + \langle \vec{p} \,|\, \vec{c} \rangle \\
&= \frac{1}{2}(\langle \vec{b} \,|\, \vec{b} \rangle + \langle \vec{c} \,|\, \vec{b} \rangle - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle - \langle \vec{c} \,|\, \vec{c} \rangle) - \langle \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{v} \,|\, \vec{b} \rangle + \langle \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{w} \,|\, \vec{c} \rangle \\
&= \frac{1}{2}(|\vec{b}| - |\vec{c}|) - \langle \frac{1}{2}\vec{b} \,|\, \vec{b} \rangle - \langle \vec{v} \,|\, \vec{b} \rangle + \langle \frac{1}{2}\vec{c} \,|\, \vec{c} \rangle + \langle \vec{w} \,|\, \vec{c} \rangle \\
&= \frac{1}{2}(|\vec{b}| - |\vec{c}|) - \frac{1}{2}|\vec{b}| + \frac{1}{2}|\vec{c}| = 0
\end{aligned}$$

Hier geht es einfacher durch mehrfache Anwendung von Pythagoras.

11.7 Ungleichungen

Satz 11.10
- $(\vec{b} - \vec{c}) \perp \vec{a}$ *und* $\|\vec{b} - \vec{c}\| = \min\{\|\vec{b} - \lambda\vec{a}\| \mid \lambda \in K\}$ *für* $\vec{c} = \frac{\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}$ — Lot
  $\|\vec{b} - \lambda\vec{a}\| = \|\vec{b} - \vec{c}\|$ *genau dann, wenn* $\lambda\vec{a} = \vec{c}$
- $\|\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle\| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$ — Cauchy-Schwarz
  und Gleichheit genau dann, wenn $\vec{a} \parallel \vec{b}$
- $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ — Dreiecksungleichung
  und Gleichheit genau dann, wenn $\vec{a} = \vec{0}$ *oder* $\vec{b} = r\vec{a}$ *mit* $r \geq 0$

Beweis. Pythagoras: als Übung. Lot: $\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} - \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle = 0$ und nun mit Pythagoras $\|\vec{b}-\vec{c}\|^2 \leq \|\vec{b}-\vec{c}\|^2 + \|\vec{c}-\lambda\vec{a}\|^2 = \|\vec{b}-\vec{c}+\vec{c}-\lambda\vec{a}\|^2 = \|\vec{b}-\lambda\vec{a}\|^2$. Und Gleichheit gilt genau dann, wenn $\|\vec{c} - \lambda\vec{a}\|^2 = 0$.

Cauchy-Schwarz: Ist $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$, so ist die Behauptung trivial. Andernfalls können wir nach der Bilinearität $\|\vec{b}\| = 1$ annehmen. Setze $\rho = \langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle$. Dann $0 \leq \|\vec{a} - \rho\vec{b}\|^2 = \langle \vec{a} - \rho\vec{b} \,|\, \vec{a} - \rho\vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|^2 - \rho\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle - \rho\langle \vec{b} \,|\, \vec{a} \rangle + \rho^2\|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - \rho^2$, also $|\rho| \leq \|\vec{a}\|$. Und es gilt $|\rho| = \|\vec{a}\|$ genau dann, wenn $\|\vec{a} - \rho\vec{b}\| = 0$.

Dreiecksungleichung: $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \langle \vec{a} \,|\, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b} \,|\, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b} \,|\, \vec{b} \rangle \leq \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 = (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$. Da beide Seiten der Dreiecksungleichung ≥ 0 sind, folgt diese durch Wurzelziehen. Gilt die Gleichheit, so folgt $\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$, also nach Cauchy-Schwarz $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = r\vec{a}$. Dann aber $r\|wb\|^2 = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \geq 0$ und somit $r \geq 0$. □

11.8 Orthonormalbasen

Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ des Raumes bilden eine *Orthonormalbasis*, wenn sie Länge 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen, d.h.

$$\langle \vec{e}_i \mid \vec{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Dass sie insbsondere eine Basis α bilden, ist geometrisch klar. Analog für die Ebene. Bilden $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ eine Basis einer Ebene, so erhält man eine ON-Basis mit

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\|\vec{a}_1\|}, \; \vec{e}_2 = \frac{1}{\|\vec{a}_2'\|}\vec{a}_2' \;\text{ wobei } \vec{a}_2' = \vec{a}_2 - \langle \vec{e}_1 \mid \vec{a}_2 \rangle \vec{e}_1$$

Die Koordinaten von Vektoren, Skalarprodukt und Länge berechnen sich nun für $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ und $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$ einfach so

$$\boxed{\begin{array}{lcl} y_i & = & \langle \vec{e}_i \mid \vec{y} \rangle \\ \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle & = & x_1y_1 + x_2y_2 \\ \|\vec{x}\| & = & \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{array}}$$

Das zweite rechnet man einfach nach, das dritte folgt dann sofort, ebenso das este (indem man $\vec{e}_i$ für $\vec{x}$ einsetzt - hier kann man auch geometrisch argumentieren).

$$\langle x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \mid y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 \rangle = \sum_{i,j} \langle x_i\vec{e}_i \mid y_j\vec{e}_j \rangle = \sum_{i,j} x_iy_j \langle \vec{e}_i \mid \vec{e}_j \rangle$$

11.9 Normalenvektoren von Geraden

Sei ein Punkt O der Ebene als Ursprung ausgezeichnet. Zu gegebenem Skalar d und *Normalen-Vektor* $\vec{n} \neq 0$ betrachten wir die Punktmenge

$$g = \{\vec{x} + O \mid \langle x \mid n \rangle = d\}$$

Durch Multiplikation von $\vec{n}$ mit $\pm\frac{1}{\|\vec{n}\|}$ können wir erreichen, dass gilt

$$\|\vec{n}\| = 1, \;\; d \geq 0 \qquad \text{Hessesche Normal(en)form}$$

Dann ist g die Gerade mit Paramterdarstellung

$$r\vec{v} + A \quad \text{wobei } \vec{0} \neq \vec{v} \perp \vec{n}, \;\; \vec{a} = d\vec{n}, \; A = \vec{a} + O$$

In der Tat, $\vec{n}, \vec{v}$ ist eine Basis, d.h. mit der eindeutigen Darstellung $\vec{x} = x_1\vec{n} + x_2\vec{v}$ gilt $\langle \vec{x} \mid \vec{n} \rangle = x_1$ und somit $\langle \vec{x} \mid \vec{n} \rangle = d$ genau dann, wenn $\vec{x} = x_2\vec{v} + \vec{a}$.

Geht man von einer Parameterdarstellung $r\vec{v} + A$ mit $A = \vec{a} + O$ aus, so bestimme man $\vec{0} \neq \vec{v}^{\perp} \perp \vec{v}$ und dann $\vec{n} = \pm\frac{1}{\|\vec{v}^{\perp}\|}\vec{v}^{\perp}$ so, dass $d = \langle \vec{a} \mid \vec{n} \rangle \geq 0$.

d ist der Abstand der Geraden g von Punkt O. Hat man einen Punkt $P = \vec{p} + O$. so ist $\langle \vec{p} \mid \vec{n} \rangle \vec{n} + O$ der Fußpunkt des Lotes von P auf die Gerade durch O mit Richtung $\vec{n}$, also

$$d - \langle \vec{p} \mid \vec{n} \rangle \;\text{ Abstand des Punktes } P = \vec{p} + O \text{ von der Geraden } g$$

Ist zudem eine Orthonormalbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ der Ebene gegeben, so schreibt sich die Häsische Normalenform in Koohrdinaten bzgl. dieser so

$$g = \{x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + O \mid x_1n_1 + x_2n_2 = d\} \quad \text{wobei } \vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2$$

12 Affine Abbildungen

Wir wollen Abbildungen $\phi : \mp \to \mp$ der (euklidischen) affinen Ebene $\mp$ in sich betrachten und unter Zuhilfenahme der Vektorraumstruktur V des Raumes beschreiben. Vieles geht allgemeiner fuer desarguessche affine Ebenen. Für den eukldischen Raum geht alles analog, nur mit 1 Dimension mehr.

12.1 Beispiele

1. Identische Abbildung $\phi = \mathsf{id}_{\mathcal{P}}$ mit $\phi(P) = P$

2. Zu jedem Vektor $\vec{v}$ ist die *Verschiebung* oder *Translation* $\phi = \tau_{\vec{v}}$

$$P \mapsto \tau_{\vec{v}}(P) = \vec{v} + P$$

3. Punktspiegelung an O mit $\phi(\vec{x} + O) = -\vec{x} + O$.

4. Zentrische Streckung an O um r mit $\phi(\vec{x} + O) = r\vec{x} + O$.

5. Spiegelung an Gerade durch O mit Normalensvektor $\vec{n}$

$$\phi(\vec{x} + O) = (\vec{x} - 2\langle \vec{n} \mid \vec{x} \rangle \vec{n}) + O$$

6. Gleitspiegelung: $\phi(\vec{x}+O) = \sigma(\vec{x})+\vec{v}+O$ wobei σ Spiegelung an Gerade durch O mit Richtungsvektor $\vec{v}$

7. Drehung mit Zentrum O um Winkel ω

$$\phi(P) = Q \Leftrightarrow \ |OQ| = |OP|, \ \angle QOP = \omega$$

allerdings braucht man hier noch den Begriff der Orientierung - anschaulich: gegen die Uhr

12.2 Affine Abbildungen

Eine Abbildung $\phi : \mp \to \mp$ heisst *affin* wenn gilt

$$\lambda \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \Rightarrow \lambda \overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)} = \overrightarrow{\phi(R)\phi(S)} \quad \text{für alle } P, Q, R, S \in \mathcal{P}, \ \lambda \in K$$

Korollar 12.1 *Die Hintereinanderausführung von affinen Abbildungen ist affin.*

Satz 12.2 *Eine injektive Abbildung ist affin genau dann, wenn sie Geraden auf Geraden abbildet und erhält Parallelität und Streckungsverhältnisse.*

Beweis. Sei ϕ affin. Sei g die Gerade durch P, Q und h die durch $\phi(P), \phi(Q)$. Liegt R auf g, so gibt es λ mit $\overrightarrow{PR} = \lambda\overrightarrow{PQ}$, also $\overrightarrow{\phi(P)\phi(R)} = \lambda\overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)}$ und somit $\phi(R)$ auf h. Andererseits lässt sich jeder Punkt auf h auf eindeutige Weise so darstellen. Also $h = \phi(g)$. Ist g' parallel zu g, wird g' von Punkten

R, S mit $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PQ}$ aufgespannt, also $\phi(g')$ von $\phi(R), \phi(S)$ und das ist parallel zu h.

Umkehrung: Im Fall $\lambda = 1$ geht es darum, dass Parallelogramme auf Parallelogramme abgebildet werden - was aus der Annahme üner die Abbildung von Geraden folgt. Für allgemeines λ gilt dann die Behauptung wegen Erhaltung der Streckungsverhältnisse. □

Lemma 12.3 *Sei O fest. Jede affine Abbildung lässt sich eindeutig als Hintereinanderausführung einer affinen Abbildung ϕ_O mit Fixpunkt O und einer Translation τ schreiben*

$$\phi = \tau \circ \phi_O, \quad \textit{mit}\ \tau(O) = \phi(O), \quad \phi_O = \tau^{-1} \circ \phi$$

12.3 Lineare Abbildungen

Eine Abbildung $\phi_0 : V \to V$ eines K-Vektorraums in sich ist linear, wenn für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$ und $r \in K$ gilt

$$\phi_0(\vec{x} + \vec{y}) = \phi_0(\vec{x}) + \phi_0(\vec{y}), \;\; \phi_0(r\vec{x}) = r(\phi_0(\vec{x}))$$

Satz 12.4 *Sei $O \in \mathcal{P}$ fest. Die (injektiven) affinen Selbstabbildungen ϕ : $\mp \to \mp$ entsprechen umkehrbar eindeutig den (injektiven) linearen Abbildungen $\phi_0 : V \to V$ vermöge*

$$\phi(\vec{x} + O) = \phi_0(\vec{x}) + \phi(O), \quad \phi_0(\vec{x}) = \overrightarrow{\phi(O)\,\phi(\vec{x} + O)}$$

Die lineare Abbildung ϕ_0 hängt nicht von O ab.

Beweis im injektiven Fall. Sei ϕ gegeben. Nach (A2) ist ϕ_0 wohldefiniert und eindeutig bestimmt. Die Definition von affiner Abbildung ergibt sofort $\phi_0(r\vec{x}) = r\phi_0(\vec{x})$. Anderserseits werden Parallelogramme wieder auf Parallelogramme abgebildet, also das mit Seiten $O, \vec{x} + O$ und $\vec{y} + O, \vec{x} + \vec{y} + O$, auf das mit Seiten $\phi(O), \phi(\vec{x} + O)$ und $\phi(\vec{y} + O), \phi(\vec{x} + \vec{y} + O)$. Es folgt

$$\phi_0(\vec{x} + \vec{y}) + \phi(O) = \phi(\vec{x} + \vec{y} + O) = \phi_0(\vec{x}) + \phi_0(\vec{y}) + \phi(O)$$

$$\text{also} \;\; \phi_0(\vec{x} + \vec{y}) = \phi_0(\vec{x}) + \phi_0(\vec{y}).$$

Sei umgekehrt ϕ_0 linear. Sei $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ usw. und $\lambda(\vec{q} - \vec{p}) = \lambda\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} = \vec{s} - \vec{r}$. Dann

$$\overrightarrow{\phi(R)\phi(S)} = \overrightarrow{\phi(O)\phi(S)} - \overrightarrow{\phi(O)\phi(R)} = \phi_0(\vec{s}) - \phi_0(\vec{r}) = \phi_0(\vec{s} - \vec{r})$$

$$= \phi_0(\lambda(\vec{q} - \vec{p})) = \lambda\phi_0(\vec{q} - \vec{p}) = \lambda\overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)}.$$

Weiterhin

$$\phi(\vec{x} + Q) = \phi(\vec{x} + \vec{v} + O) = \phi_0(\vec{x} + \vec{v}) + O = \phi_0(\vec{x}) + \phi_0(\vec{v}) + O$$

$$= \phi_0(\vec{x}) + \phi(\vec{v} + O) = \phi_0(\vec{x}) + \phi(Q)$$

falls $Q = \vec{v} + O$, was die Unabhängigkeit von der Wahl des Punktes O beweist. □

Korollar 12.5 *Die affinen Abbildungen ϕ mit Fixpunkt O entsprechen umkehrbar eindeutig den linearen Abbildungen ϕ_0 vermöge $\phi(\vec{x}+O) = \phi_0(\vec{x})+O$*

Ist O ein Fixpunkt von ϕ und wählt man diesen als Ursprung, so wird bei der beliebten Identifikation von Punkten mit Ortsvektoren die affine Abbildung ϕ mit der linearen Abbildung ϕ_0 identifiziert.

Korollar 12.6 *Eine affine Abbildung ist injektiv, surjektiv bzw. bijektiv genau dann, wenn es die zugehörige lineare Abbildung ist.*

12.4 Matrixbeschreibung

Matrixbeschreibung affiner Abbildungen der Ebene in homogenen Koordinatem bzgl. affiner Koordinatensysteme erweist sich als ein Spezialfall der Beschreibung linearer Abbildungen im 3-dimensionalen Vektorraum bzgl. der zugehörigen Basen. Insbesondere gelten die aus LA bekannten Transformationsformeln. Hintergrund davon ist, dass man einer affinen Abbildung ϕ der Ebene $\mp$ (mit Richtungsebene U_0) eine lineare Abbildung des $\tilde{\phi}$ des Vektor-Raumes zuordnen kann mit

$$\tilde{\phi}(\vec{x}) + Z \in \mp \text{ für } \vec{x} + Z \in \mp, \quad \tilde{\phi}(\vec{u}) \in U_0 \text{ für } \vec{u} \in U_0$$

Satz 12.7 *Seien $\alpha : O_\alpha, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ und $\beta : O_\beta, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ Koordinatensysteme der Ebene. Dann gibt es 1-1-Entsprechung zwischen affinen Abbildungen $\phi : \mp \to \mp$ und affinen Matrizen $\tilde{A}$ gegeben durch*

$$\phi(P)^{\tilde{\beta}} = \tilde{A}P^{\tilde{\alpha}}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \boldsymbol{t} & A \end{pmatrix} =: {}_{\tilde{\beta}}\phi_{\tilde{\alpha}}$$

Dabei gilt

$$\phi(O_\alpha)^{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix}, \quad A = ((\phi_0(\vec{a}_1)^{\vec{\beta}}\ (\phi_0(\vec{a}_2)^{\vec{\beta}})$$

Im Falle $\alpha = \beta$ sind die Translationen $\tau_{\vec{v}}$ gekennzeichnet durch $A = E$ und $\boldsymbol{t} = \vec{v}^{\vec{\alpha}}$, die Abbildungen mit Fixpunkt O_α durch $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$.

Die nullte Spalte von $\tilde{A}$ enthält die β-Koordinaten des Bildes des Urspungs von α, die Spalten von A enthalten die $\vec{\beta}$-Koordinaten der Bilder der Basisvektoren von $\vec{\alpha}$.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\phi(O_\alpha) = O_\beta$ bzw. $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$. Dann können wir ϕ durch die lineare Abbildung ϕ_0 ersetzen und kennen für diese die Behauptung aus LA I. Die Aussagen im Fall $\alpha = \beta$ sind offensichtlich.

Im allgemeinen Fall einer affinen Abbildung ϕ sei $\vec{v} = \overrightarrow{\phi(O_\alpha)O_\beta}$ und $\psi = \tau_{\vec{v}} \circ \phi$. Dann $\psi(O_\alpha) = O_\beta$ und wir haben die Entsprechung

$$_{\tilde{\beta}}\psi_{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix}$$

Nun $\phi = \tau_{\vec{v}}^{-1} \circ \psi = \tau_{-\vec{v}} \circ \psi$ d.h. wirv haben die Entsprechung

$$_{\tilde{\beta}}(\tau_{-\vec{v}})_{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \boldsymbol{t} & E \end{pmatrix}$$

und die Behauptung folgt mit

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \boldsymbol{t} & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \boldsymbol{t} & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix} \quad \square$$

Korollar 12.8 *Eine injektive affine Abbildung ist auch bijektiv.*

Beweis: Die entsprechende Behauptung gilt für lineare Abbildungen. □

Korollar 12.9 *Zu Dreiecken P_0, P_1, P_2 und Q_0, Q_1, Q_2 gibt es genau eine affine Abbildung ϕ mit $\phi(P_i) = Q_i$ für $i = 0, 1, 2$ und diese ist bijektiv.*

Beweis. Die Dreiecke stehen in 1-1-Entsprechung zu Koordinatensystemen $\alpha : P_0, \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}$ und $\beta : Q_0, \overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}$. Die entsprechende Matrix ist hier die Einheitsmatrix. □

Korollar 12.10 *Komposition und Inverse (bijektiver) affiner Abbildungen sind affin und es gilt*

$$_{\tilde{\gamma}}(\psi \circ \phi)_{\tilde{\alpha}} = {}_{\tilde{\gamma}}\psi_{\tilde{\beta}} \cdot_{\tilde{\beta}} \phi_{\tilde{\alpha}}, \quad {}_{\tilde{\alpha}}\phi^{-1}{}_{\tilde{\alpha}} = ({}_{\tilde{\alpha}}\phi_{\tilde{\alpha}})^{-1}$$

12.5 Transformation der Matrixbeschreibung

Wir wollen jetzt affine Abbildungen nur in der Form

$$\phi_{\tilde{\alpha}} := {}_{\tilde{\alpha}}\phi_{\tilde{\alpha}}$$

beschreiben, also bzgl. jeweils desselbe Koordinatensystems in Ein- und Ausgabe. Dafür betrachten wir den Wechsel von einem Koordinatensystem zu einem anderen zu einer anderen. Hier gilt, wie wir wissen

$$P^{\tilde{\alpha}} = {}_{\alpha}\tilde{T}_{\beta} P^{\tilde{\beta}} \quad \text{wobei } {}_{\alpha}\tilde{T}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \boldsymbol{v} & {}_{\vec{\alpha}}T_{\vec{\beta}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = (O_\beta)^\alpha.$$

Das folgt auch aus der bekannten Formel für lineare Abbildungen und dem Unstand, dass

$${}_{\alpha}\tilde{T}_{\beta} = {}_{\tilde{\alpha}}T_{\tilde{\beta}}$$

die Transformationmatrix für die Basen $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ von V ist. Es folgt

$${}_{\beta}\tilde{T}_{\alpha} = ({}_{\alpha}\tilde{T}_{\beta})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ -\,{}_{\alpha}T_{\beta}^{-1}\boldsymbol{v} & {}_{\alpha}T_{\beta}^{-1} \end{pmatrix}$$

Für eine affine Abbildung $\phi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ haben wir daher

- $\phi_{\tilde{\alpha}} = {}_{\alpha}\tilde{T}_{\beta} \cdot \phi_{\tilde{\beta}} \cdot {}_{\beta}\tilde{T}_{\alpha}$

  $$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \boldsymbol{v} & S \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \boldsymbol{t'} & A' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \boldsymbol{v} & S \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \boldsymbol{v} + S\boldsymbol{t'} - S^{-1}A'S\boldsymbol{v}) & SA'S^{-1} \end{pmatrix}$$

  wobei $S = {}_{\vec{\alpha}}T_{\vec{\beta}}$

13 Bewegungen

13.1 Bewegungen und orthogonale Abbildungen

Eine *Bewegung* ist eine abstandserhaltende Abbildung $\phi : \mp \to \mp$ der euklidischen Ebene oder Raumes in sich

$$|\phi(P)\phi(Q)| = |PQ| \quad \text{für alle } P, Q \in \mp$$

Lemma 13.1 *Die Hintereinanderausführung von Bewegungen ist Bewegung. Translationen sind Bewegungen.*

Lemma 13.2 *Jede Bewegung ist eine affine Abbildung.*

Beweis. Wie wir schon wissen, kann Kollinearität durch Abstände ausgedrückt werdn: Q zwischen P und R genau dann, wenn $|PR| = |PQ| + |QR|$. Somit werden Geraden in Geraden abgebildet. Kongruente Dreiecke werden auf kongruente Dreiecke, also nach dem Satz über Wechselwinkel an Parallelen auch paralle Geraden in parallele Graden abgebildet. Es ist nun zu zeigen, dass eine Beziehung $\overrightarrow{RS} = \lambda\overrightarrow{PQ}$ durch Abstände ausgedrückt werden kann. Bestimme dazu Q' mit $\overrightarrow{PQ'} = \lambda\overrightarrow{PQ}$. Dies bedeutet

- $|PQ'| = |PQ| + |QQ'|$ im Falle $\lambda \geq 1$
- $|PQ| = |PQ'| + |Q'Q|$ im Falle $0 \leq \lambda \leq 1$
- $|QQ'| = |Q'P| + |PQ|$ im Falle $\lambda \leq 0$

□

13.2 Orthogonale Abbildungen

Eine lineare $\phi : V \to V$ eines euklidischen Vektorraumes V ist eine *orthogonale* Abbildung, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen gilt (die Äquivalenz ergibt sich daraus, dass die Länge aus dem Skalarprodukt definiert werden kann und umgekehrt - $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \frac{1}{2}(|\vec{x} + \vec{y}|^2 - |\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2)$

- $\langle \phi(\vec{x}) \mid \phi(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$
- $|\phi(\vec{x})| = |\vec{x}|$ für alle $\vec{x} \in V$

Korollar 13.3 *Eine affine Selbstabbildung $\phi : \mp \to \mp$ der euklidischen Ebene ist genau dann eine Bewegung, wenn die zugehörige lineare Abbildung ϕ_0 orthogonal ist.*

Beweis. $|\vec{x}| = |\overrightarrow{O, \vec{x} + O}|$, $|\phi_0(\vec{x})| = |\overrightarrow{\phi(O)\phi(\vec{x} + O)}|$ und die Behauptung ist klar. □ Beispiele von Bewegungen mit Fixpunkt O sind in der Ebene Drehungen und (senkrechte) Spiegelungen an einer Geraden, sowie Gleitspiegelungen.

13.3 Matrixbeschreibung

Für eine lineare Abbildung $\phi : V \to V$ eines endlichdimensionalen euklidischen Raumes sind äquivalent

(1) ϕ ist orthogonal

(2) Das Bild einer/jeder ON-Basis ist ON-Basis

(3) Bzgl. eines/jedes Paares von ON-Basen ist ${}_{\alpha}\phi_{\beta}$ orthogonal

Beweis.1 $\Rightarrow$ 2 ist trivial. 2 $\Rightarrow$ 3. Die Spalten der Matrix ${}_{\beta}\phi_{\alpha}$ von ϕ bzgl. der ON-Basen α, β sind die Koordinaten der Bilder $\phi(\vec{e}_j)$ der ON-Basis α : $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ also orthonormal, da die $\phi(\vec{e}_j)$ eine ON-Basis bilden. Also ist ${}_{\beta}\phi_{\alpha}$ orthogonal.
3 $\Rightarrow$ 1. Sei $A = {}_{\beta}\phi_{\alpha}$ orthogonal. Dann

$$\langle \phi(\vec{x}) \,|\, \phi(\vec{y}) \rangle = (\phi(\vec{x})^{\beta})^* \phi(\vec{y})^{\beta} = (A\vec{x}^{\alpha})^* A\vec{y}^{\alpha} = (\vec{x}^{\alpha})^* A^* A \vec{y}^{\alpha} = (\vec{x}^{\alpha})^* E \vec{y}^{\alpha} = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$$

Korollar 13.4 *Eine orthogonale Abbildung ist durch die Bilder von* $\dim V - 1$ *unabhängigen Vektoren schon zweideutig bestimmt - eindeutig bei Vorgabe der Orientierung.*

Korollar 13.5 *Eine affine Abbildung der Ebene ist genau dann eine Bewegung, wenn sie bgzl. eines orthonormalen Koordinatenssystens durch eine affine Matrix $\tilde{A}$ mit orthogonaler Matrix A beschrieben wird*

13.4 Determinante

Für eine reelle 2×2-Matrix A definieren wir

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Satz 13.6 $\det E = 1, \quad \det(AB) = \det A \ \det B, \quad \det A = \det A^t$

Beweis. nachrechnen. □ Wir vermerken die wichtigen Spezialfälle

Korollar 13.7

$$\det(rA) = r^n \det A, \ \ \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}, \ \ \det(S^{-1}AS) = \det(A).$$

Korollar 13.8 *Für eine lineare Abbildung ϕ eines 2-dimensioalen Vektorraumes hängt* $\det \phi_{\alpha}$ *nicht von der Basis α ab.*

Wir definieren dies als die *Determiante* $\det \phi$ der Abbildung. Die anschauliche Bedeutung in der Ebene ist die Fläche der Bildes des Einheitsquadrats. Die Determinate ist somit der "Vergrößerungsfaktor". Beweis. Transformationsformel und Kor.13.7.

Korollar 13.9 *Eine injektive affine Abbildung der Ebene ist entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend, d.h. es hilt* $\det \phi > 0$ *oder* $\det \phi < 0$

13.5 Klassifikation ebener orthogonale Abbildungen

Korollar 13.10 *Für Orthonormalbasen α und $\beta : \vec{b}_1, \vec{b}_2$ gilt* $\det \beta = \det(\vec{b}_1 . \vec{b}_2) = \det(\vec{b}_1^\alpha \; \vec{b}_2^\alpha) = \pm 1$

Beweis. $B = (\vec{b}_1^\alpha \; \vec{b}_2^\alpha)$ ist orthogonal, also $B^t = B^{-1}$ und $(\det B)^2 = \det B \det B^t = \det BB^t = \det E = 1$ □

Eine Ortientierung wird durch die Vorgabe einer Orthonormalbasis α festgelegt. Eine Orthonormalbasis β ist dann genau dann *positiv orientiert*, wenn $\det \beta = 1$, andernfalls *negativ orientiert*.

Satz 13.11 *Eine orthogonale Abbildung ϕ im 2-dimensionalen euklidischen Vektorraum gilt entweder* $\det \phi = 1$ *und es handelt sich um eine Drehung oder* $\det \phi = -1$ *und es ist eine Spiegelung an einer Geraden*

Beweis. Wir benutzen wieder mal Ortsvektoren und legen eine positiv orientierte ON-Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ fest. Das Bild $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ ist wieder eine ON-Basis und positiv orientiert, falls $\det \phi = 1$. Die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren bestimmen sich dann laut Drehmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

Ist $\det \phi = -1$, so ist $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ negativ orientiert und somit

$$(*) \quad \angle \vec{e}_1, \vec{b}_2 = \angle \vec{e}_1, \vec{b}_1 - 90^o = \angle \vec{e}_2, \vec{b}_1$$

Andererseits $|\vec{b}_1 - \vec{e}_2| = |\phi(\vec{b}_1) - \vec{b}_2|$, also $\phi(\vec{b}_1) = \vec{e}_1$. Entsprechend $\phi(\vec{b}_2) = \vec{e}_2$. Wegen (*) ist die Winkelhalbierende g zu $\vec{e}_1, \vec{b}_1$ auch die zu $\vec{b}_2, \vec{e}_2$ und es handelt sich somit um die Spiegelung an g - weils für die Basis stimmt.