Lineare Algebra für Physiker, TUD WS 1

Inhaltsverzeichnis

Index

1 Vektoren und affine Geometrie

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Grundlagen der Vektorrechnung im Hinblick auf Anwendung in Geometrie und Mechanik bereitzustellen. Darauf wird später das koordinatenweise Rechnen mit Vektoren aufgebaut. Dies ist ein Beispiel für den Übergang von der Empirie über eine abstrakte begriffliche Struktur zur numerischen Beschreibung. Der empirische Gegenstand ist hier der Raum $\mathcal{R}$ der unmittelbaren Erfahrung und Anschauung, genauer: die Punkte und Vektoren in diesem Raum und ihre Verknüpfungen. Wir werden die grundlegenden Regeln für das Rechnen mit Vektoren formulieren und anschaulich aus der Elementargeometrie heraus motivieren. Danach werden wir uns aber nur auf diese Regeln stützen.

1.1 Elementargeometrie

Die Vektorrechnung gründet auf der Geometrie der Baumeister, Mechaniker und Landvermesser. Letztere begnügten sich (zumindest im Flachland) lange mit einer Ebene bzw. einem Teil dieser Ebene - der Erdscheibe. Daher die Bezeichnung 'Geometrie'. Sammlung und Systematisierung des geometrischen Wissens seiner Zeit verdanken wir Euklid (Alexandria, -300) im Monumentalwerk der 'Elemente'. Daher spricht man auch von der *Euklidischen Geometrie*. Nach R. Penrose war das die erste erfolgreiche physikalische Theorie.

Was sind nun die Grundbegriffe dieser Geometrie? Für uns von Interesse sind zunächst

- Punkte $P, Q, \ldots$, Geraden $g, h, \ldots$, Ebenen $\varepsilon, \delta, \ldots$
- die Inzidenz-Relationen 'liegt auf/in': P auf g, P in ε, g in ε
- die Parallelitäts-Relationen: $g \parallel h$, $g \parallel \varepsilon$, $\varepsilon \parallel \delta$
- die Zwischen-Relation : R liegt zwischen P und Q

Die unmittelbaren und durch Erfahrung bestätigten Einsichten über die Zusammenhänge zwischen diesen Grundbegriffen wurden in *Axiomen* festgehalten - aus diesen waren dann die komplexeren Aussagen zu beweisen. Wir wollen hier die geometrische Axiomatik nicht explizit entwickeln, nur ein Axiom sei erwähnt:

- Durch zwei voneinander verschiedene Punkte P, Q geht genau eine Gerade $P \vee Q$

1.2 Pfeile

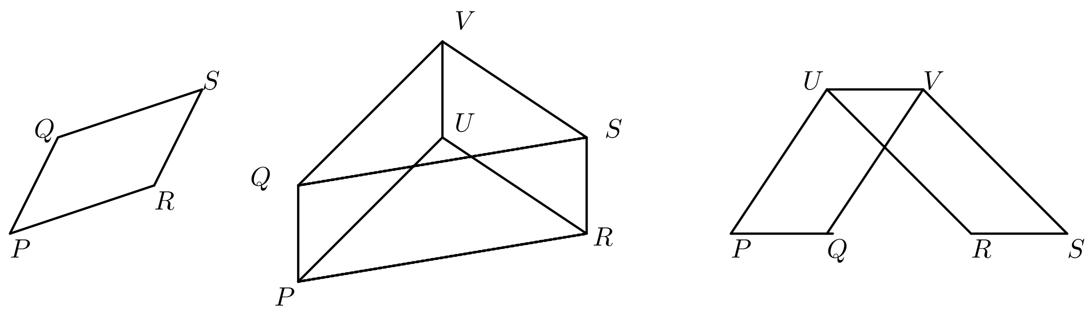
Während wir Punkte $P, Q, \ldots$ als geometrische Gegebenheiten akzeptieren, müssen wir den Begriff des Vektors erst erarbeiten. Die Motivation für Vektoren kommt natürlich aus der Physik z.B. Kraft- und Geschwindigkeitsvektoren (wie schon bei Galilei und Newton nachzulesen)

- Eine vektorielle Grösse wird angegeben durch Betrag/Länge und Richtung

Als geometrisches Objekt ist ein Vektor demnach eindeutig bestimmt durch Länge und Richtung. Insbesondere ist die Gleichheit von Vektoren die Gleichheit nach Länge und Richtung. Was aber ist damit gemeint?

Die einfachste Art, eine Länge anzugeben, ist es, eine Strecke dieser Länge anzugeben. Die einfachste Art, eine Richtung anzugeben, ist es, in diese Richtung zu zeigen. Fasst man das zusammen, so kommt man zu einem *Pfeil*, einem Punktepaar $PQ = (P, Q)$ bestehend aus Anfangspunkt P und Endpunkt Q des 'Pfeils'. Wir haben damit einen neuen Typ von geometrischen Objekten. Für zwei Pfeile, die nicht auf einer Geraden liegen, definieren wir die Relation 'äquivalent', wenn die zugehörigen ein Parallelogramm wie in der Skizze bilden

$$PQ \sim RS \;\Leftrightarrow\; P \vee Q \parallel R \vee S \;\text{ und } P \vee R \parallel Q \vee S$$



Theorem 1.1 *(Desargues 1593-1662). Liegen P, Q, R, S nicht auf einer Geraden und gilt $PQ \sim UV$ und $UV \sim RS$, so gilt auch $PQ \sim RS$.*

Für zwei Pfeile, die auf derselben Geraden g liegen, definieren wir

$$PQ \sim RS \;\Leftrightarrow\; \text{ es gibt } UV \text{ nicht in } g \text{ mit } PQ \sim UV \text{ und } UV \sim RS$$

dabei kann man U sogar beliebig (ausserhalb g) vorgeben. Festzuhalten ist, dass diese Relation mittels zweier Geodreiecke überprüft werden kann. Zwei solche Pfeile haben dann gewiss gleiche Länge und Richtung - wie auch immer diese Begriffe präzisiert werden. Anders ausgedrückt

> $PQ \sim RS$ genau dann, wenn man den Pfeil PQ durch Parallelverschiebung in den Pfeil RS überführen kann.

Elementargeometrisch kann man ebenfalls zeigen: Zu den Punkten P, Q, R gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt S mit $PQ \sim RS$, d.h. Ergänzung zum Parallelogramm.

Die Abbildung, die zu festem PQ den Punkt R jeweils auf den Punkt S abbildet, ist die zum Pfeil PQ gehörige Parallelverschiebung. Somit

> $PQ \sim RS$ genau dann, wenn die Pfeile PQ und RS dieselbe Parallelverschiebung definieren.

1.3 Axiome

Wir betrachten eine Menge, deren Elemente ‘Punkte’ heissen sollen, und eine binäre Relation $\sim$ auf der Menge aller Punktepaare (‘Pfeile’) - wie oben motiviert. Wir gehen von den folgenden Axiomen aus

(P1) Aus $PQ \sim RS$ folgt $PR \sim QS$ (*Parallelogramm*)

(P2) Zu P, Q, R gibt es genau ein S mit $PQ \sim RS$ (*Ergänzung*)

(P3) $PQ \sim PQ$ (*Reflexivität*)

(P4) Aus $PQ \sim RS$ folgt $RS \sim PQ$ (*Symmetrie*)

(P5) Aus $PQ \sim UV$ und $UV \sim RS$ folgt $PQ \sim RS$ (*Transitivität*)

(P3-5) besagt: Die Relation $\sim$ ist eine *Äquivalenzrelation* auf der Menge aller Pfeile, d.h. erfüllt die Mindestanforderungen an eine ‘Gleichheitsrelation’. Diese Axiome kann man, wie oben schon angedeutet aus der Elementargeometrie begründen. Bei (P5) geht wesentlich der Satz von Desargues ein.

1.4 Vektoren

Durch ‘Abstraktion’ nach dieser Äquivalenzrelation erhalten wir den Begriff des Vektors:

- Vektoren sind Grössen, die durch Pfeile repräsentiert werden
- Jeder Pfeil PQ repräsentiert genau einen Vektor $\overrightarrow{PQ}$
- $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ genau dann, wenn $PQ \sim RS$

Die Gesamtheit der Vektoren bezeichnen wir mit $\mathcal{V}$, Variablen bzw. Konstanten für Vektoren mit $\vec{x}$, $\vec{v}$ etc.

Lemma 1.2 *Es gilt für beliebige Punkte P, Q, R, S*

$$(*)\ \ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS} \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{SR} \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{SQ}$$

Dabei ist $\Leftrightarrow$ eine Kurzschreibweise für genau dann, wenn. Beweis. Gelte $PQ \sim RS$. Mit (P1) folgt $PR \sim QS$, mit (P4) $QS \sim PR$ und $QP \sim SR$ wieder mit (P1). Die weiteren Schlüsse durch Ersetzen der Buchstaben. $\square$

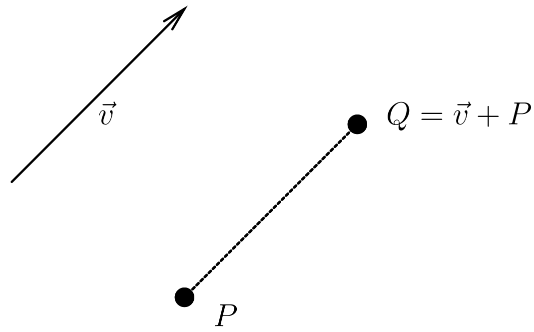
1.5 Affiner Raum

Der Begriff des *affinen Raums* fasst das Zusammenspiel zwischen Punkten und Vektoren. Zunächst stellen wir fest

(A1) Zu jedem Punkt P und Vektor $\vec{v}$ gibt es genau einen Punkt Q mit $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.
Wir schreiben

$$Q = \vec{v} + P.$$

(A2) Zu je zwei Punkten P, Q gibt es genau einen Vektor $\vec{v}$ mit $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$
gleichwertig: mit $Q = \vec{v} + P$



Ist nämlich $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ so erhält man $Q = \vec{v} + P$, indem man A, B, P nach (P2) zum Parallelogramm ergänzt und Q ist dadurch eindeutig bestimmt. In der zweiten Aussage steckt die Tatsache, dass wir Vektoren durch Abstraktion der Menge der Pfeile eingeführt haben. Wir haben somit eine wohldefinierte Abbildung $+$, die Vektoren mit Punkten zu Punkten verknüpft.

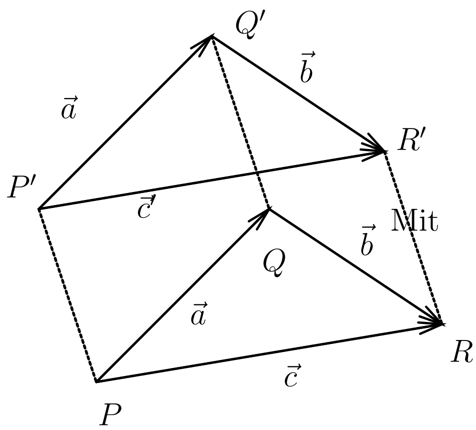
1.6 Vektoraddition

Lemma 1.3 *Zu je zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ gibt es höchstens einen Vektor $\vec{c}$ so, dass*

$$\exists P. \exists Q. \exists R.\ \vec{a} = \overrightarrow{PQ} \text{ und } \vec{b} = \overrightarrow{QR} \text{ und } \vec{c} = \overrightarrow{PR}$$

$\exists$ ist dabei eine Kurzschreibweise für es gibt.

Beweis. Gelte auch $\vec{a} = \overrightarrow{P'Q'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{Q'R'}$ und $\vec{c}' = \overrightarrow{P'R'}$. Nach $(*)$ $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{RR'}$ und wieder mit $(*)$ $\vec{c} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{P'R'} = \vec{c}'$. □



Mit dem Lemma und (A1), (A2) folgt

Satz 1.4 *Es gibt eine wohldefinierte Operation, die wir auch mit $+$ bezeichen dürfen, auf $\mathcal{V}$ mit*

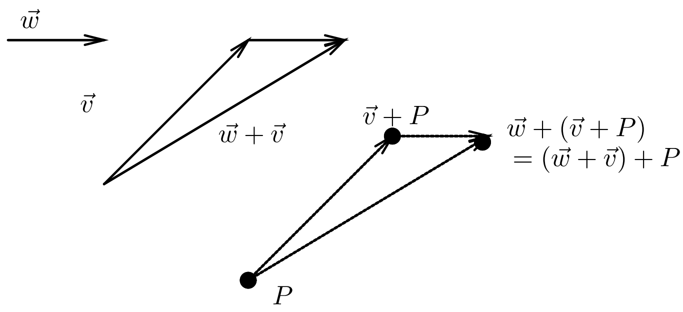
$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad &\Leftrightarrow \exists P. \exists Q. \exists R.\ \vec{a} = \overrightarrow{PQ} \text{ und } \vec{b} = \overrightarrow{QR} \text{ und } \vec{c} = \overrightarrow{PR} \\ &\Leftrightarrow \forall P. \forall Q. \forall R.\ \vec{a} = \overrightarrow{PQ} \text{ und } \vec{b} = \overrightarrow{QR} \Rightarrow \vec{c} = \overrightarrow{PR} \end{aligned}$$

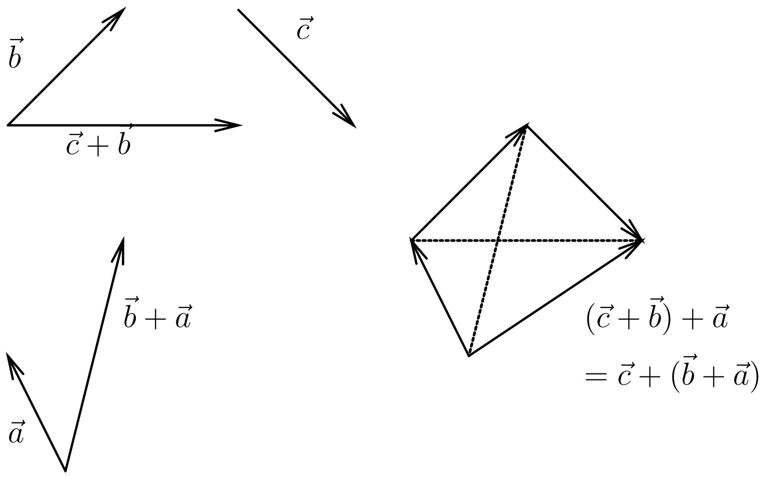
Korollar 1.5

(A3) $(\vec{w}+\vec{v})+P=\vec{w}+(\vec{v}+P)$

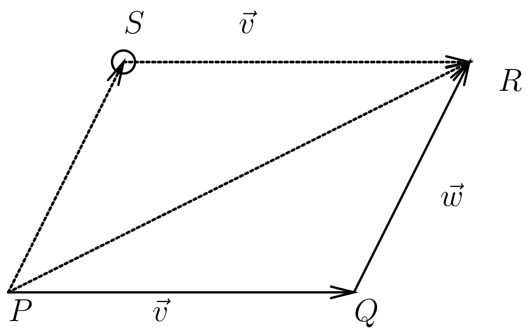
(V1) $(\vec{w}+\vec{v})+\vec{u}=\vec{w}+(\vec{v}+\vec{u})$

(V2) $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$





Beweis. (A3) und (V1) sind trivial. Zu (V2): Sei $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}$ und $\vec{w}=\overrightarrow{QR}$. Sei S nach (P2) so bestimmt, dass $QP\sim RS$. Dann nach $(*)$ auch $\vec{v}=\overrightarrow{SR}$ und $\vec{w}=\overrightarrow{PS}$ und somit $\vec{w}+\vec{v}=\overrightarrow{PR}=\vec{v}+\vec{w}$. □



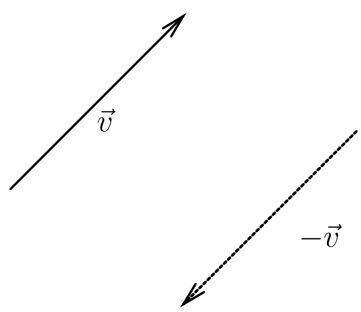
1.7 Nullvektor und umgekehrter Vektor

Alle Pfeile PP repräsentieren denselben Vektor $\vec{0}$ und es gilt

(A4) $\vec{0}+P=P$ (V3) $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$

Nach $(*)$ gibt es zu jedem Vektor $\vec{a}$ höchstens einen Vektor $\vec{b}$ so, dass $\exists P.\exists Q,\ \vec{a}=\overrightarrow{PQ}$ und $\vec{b}=\overrightarrow{QP}$. Somit erhalten wir eine wohldefinierte Operation $-$ auf $\mathcal{V}$ mit

$$-\vec{a}=\overrightarrow{QP}\Leftrightarrow\vec{a}=\overrightarrow{PQ}$$



und es gilt trivialerweise (V4) $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$.

2 Zahlbereiche

Die Arithmetik gründet auf dem Prinzip des Weiterzählens und erscheint eng mit der Zeitvorstellung verbunden. Wir wollen nur skizzieren, wie man durch Unterteilung und Approximation zu einem kontinuierlichen Zeit- bzw. Zahlbegriff kommt - den reellen Zahlen.

2.1 Natürliche Zahlen

Die Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots$ der natürlichen Zahlen ist auch für Mathematiker ein Geschenk des Himmels. Die relevante Struktur ist das ausgezeichnete Element 0 und die Nachfolgeroperation $n \mapsto n' = n + 1$. Sie wird charakterisiert durch die folgenden Axiome

- 0 ist kein Nachfolger
- Aus $n' = m'$ folgt $n = m$
- **Induktionsprinzip:** Ist $A(x)$ ein Aussage so, dass $A(0)$ gilt (Verankerung) und $A(n')$ stets aus $A(n)$ folgt (Induktionsschritt), so gilt $A(n)$ für all n

Durch rekursive Definition kann man dann die Addition und Multiplikation einführen

$$m + 0 = m, \ m + n' = (m + n)', \ \ m \cdot 0 = 0, \ m \cdot n' = m \cdot n + m$$

Für die Addition gilt wie für Vektoren

$$(x + y) + z = x + (y + z), \ x + 0 = x = 0 + x, \ x + y = y + x$$

2.2 Ganze Zahlen

Um auch die Umkehrung $x \mapsto -x$ stets ausführbar zu machen, muss man negative Zahlen als rote einführen (Buchhalter) oder als Differenz (Physiker), wobei

$$a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = c + b$$

(d.h. man hat auf den Paaren ganzer Zahlen eine Äquivalenzrelation mit $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$). Insgesamt erhält man bzgl. der Addition die *Gruppe* $\mathbb{Z}$ *der ganzen Zahlen* mit

$$a - b + c - d = (a + c) - (b + d), \ \ -(a - b) = b - a, \ \ 0 = a - a$$

Die natürlichen Zahlen und die negativen sind dann

$$n = n - 0 \ \text{ bzw. } \ -n = 0 - n$$

2.3 Gruppen

Eine *Gruppe* kann angegeben werden durch eine (Grund)Menge G, eine zweistellige Operation $(x,y) \mapsto xy$ auf G, eine einstellige Operation $x \mapsto x^{-1}$ auf G und ein ausgezeichnetes Element (Konstante) 1 von G derart, dass

$$(G1) \quad \text{für alle } x,y,z \text{ in } G \text{ gilt } x(yz) = (xy)z$$

$$(G2) \quad \text{für alle } x \text{ in } G \text{ gilt } 1x = x = x1$$

$$(G3) \quad \text{für alle } x \text{ in } G \text{ gilt } xx^{-1} = 1 = x^{-1}x.$$

Die zweistellige Operation heisst auch die *Multiplikation* der Gruppe und man schreibt auch, der Deutlichkeit halber, $xy = x \cdot y$. Das Element x^{-1} heisst das *Inverse* von x und 1 das *neutrale* oder *Einselement* der Gruppe. Man bezeichnet die Gruppe kurz mit G oder mit $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$. Statt der verwendeten Zeichen kann man natürlich auch ganz andere benutzen, z.B. H statt G, e statt 1 und $*$ statt $\cdot$.

Die Gruppe heisst *kommutativ* oder *abelsch*, wenn

$$(G4) \quad \text{für alle } x,y \text{ in } G \text{ gilt } xy = yx\,.$$

Ein kommutative Gruppe A schreibt man häufig auch *additiv*, d.h. mit $+$, 0 und $-$. Hauptbeispiel ist die Gruppe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

Korollar 2.1 *Die Menge $\mathcal{V}$ der Vektoren bildet bzgl. der Addition $+$, der Umkehrung $-$ und dem Nullvektor $\vec{0}$ eine kommutative Gruppe.*

Für eine Gruppe sind Einselement und Inversion schon eindeutig durch die Multiplikation bestimmt (Beweis als Übung). Dies rechtfertigt die folgende *alternative Definition:* Eine Gruppe kann angegeben werden durch eine (Grund)Menge G und eine zweistellige Operation $(x,y) \mapsto xy$ auf G derart, dass (G1) und

$$\begin{array}{lll} (G2+3) & \text{es gibt ein Element } e \text{ von } G \text{ mit} & \\ & (a) & \text{für alle } x \text{ in } G \text{ gilt } ex = x = xe \\ & (b) & \text{für alle } x \text{ in } G \text{ gibt es ein } y \text{ in } G \text{ mit } xy = e = yx. \end{array}$$

2.4 Ringe

Betrachtet man Addition und Multiplikation ganzer Zahlen, so wird $\mathbb{Z}$ zum kommutativen Ring. Dazu die Definition: Ein *Ring mit Eins* kann angegeben werden durch eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe R (d.h. es gelten (G1-4) auch als (R1-4) notiert), eine zweistellige Operation $(x,y) \mapsto xy = x \cdot y$ auf R und eine Konstante $1 \neq 0$ von R derart, dass

$$(R5) \quad \text{für alle } x,y,z \text{ in } R \text{ gilt } x(yz) = (xy)z\,,$$

$$(R6) \quad \text{für alle } x \text{ in } R \text{ gilt } x1 = x = 1x\,,$$

$$(R7) \quad \text{für alle } x,y,z \text{ in } R \text{ gilt } x(y+z) = xy + xz\,,$$

$$(R8) \quad \text{für alle } x,y,z \text{ in } R \text{ gilt } (y+z)x = yx + zx\,.$$

R ist *kommutativ*, wenn

$$(R9) \quad \text{für alle } x,y \text{ in } R \text{ gilt } xy = yx\,.$$

2.5 Rationale Zahlen

Die rationalen Zahlen entstehen als ganzzahlige Vielfache von Bruchteilen oder aus Zahlverhältnissen, d.h. sie werden durch Quotienten $\frac{z}{w}$ mit ganzen z, w und $w \neq 0$ repräsentiert und es gilt (analog dem Fall der Differenzen)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = cb$$

Addition und Multiplikation werden nach den hoffentlich bekannten Gesetzen der Bruchrechnung ausgeführt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}, \ -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}, \ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

und die ganzen Zahlen kann man auch darin wiederfinden

$$a = \frac{a}{1}$$

Man erhält so einen kommutativen Ring $\mathbb{Q}$, der den Ring $\mathbb{Z}$ enthält. Die rationalen Zahlen $\neq 0$ bilden nun aber auch bzgl. der Multiplikation eine Gruppe

$$(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a} \quad \text{für } a, b, \neq 0$$

und somit einen Körper. Dazu die Definition: Ein kommutativer Ring K ist ein *Körper*, wenn die Menge $K^{\times} = \{r \in K \mid r \neq 0\}$ bzgl. der Multiplikation eine Gruppe bildet, d.h. wenn gilt

(K10) Zu jedem $r \neq 0$ gibt es s mit $rs = 1$

2.6 Anordnung

Die Anordnung der natürlichen Zahlen ist rekursiv definiert

$$n < 0 \text{ für kein } n, \quad m < n + 1 \Leftrightarrow m < n \text{ oder } m = n$$

Die Anordnung der ganzen Zahlen ergibt sich durch

$$-n < -m \Leftrightarrow m < n \quad \text{und } -m < n \text{ für } m \neq 0$$

Die Anordnung kann man auf $\mathbb{Q}$ übertragen durch

$$\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow ab > 0, \quad r > s \Leftrightarrow r - s > 0$$

Dadurch wird $\mathbb{Q}$ zu einem *angeordneten Körper*, d.h. es gelten die folgenden Axiome (wie man mit etwas Fleiss beweist)

(O1) $x < x$ für kein x *Irreflexivität*

(O2) Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$ *Transitivität*

(O3) $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$ *Totalität*

(O4) Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$

(O5) Aus $x < y$ und $0 < z$ folgt $xz < yz$

Satz 2.2 *In jedem angeordneten Körper ist* $\mathbb{Q}$ *auf natürliche Weise enthalten*

$$\frac{n}{m} \hat{=} (\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n}) \cdot (\underbrace{1 + \ldots + 1}_{m})^{-1}$$

2.7 Reelle Zahlen

In einem frühen physikalischen Experiment unter der Leitung von Zeno gelang es Achilles, die Schildkröte zu überholen. Die Theoretiker schlossen daraus, dass es einen Zeitpunkt geben müsse, an denen beide gleichauf lagen. Die Vorgaben im Experiment waren die folgenden: Beim Start hat die Schildkröte einen Vorsprung von einem Stadion; sie benötigt eine Stunde, um ein Stadion zurückzulegen; Achilles ist dagegen so schnell, dass in einer Stunde hundertmal über die Diagonale eines quadratischen Stadions laufen kann. Nach einem Satz von Sokrates kann dann aber der genannte Zeitpunkt nicht als rationales Vielfaches einer Stunde angegeben werden. Somit führt eine kontinuierliche Zeitvorstellung zur Erweiterung des Bereiches der rationalen Zahlen um weitere Zahlen, die sich durch Annäherung ergeben.

Um genauer formulieren zu können: Wir schreiben $a \leq b$ falls $a < b$ oder $a = b$. Eine *Intervallschachtelung* auf einem angeordneten Körper K wird gegeben durch zwei Folgen $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ und $(b_n \mid n \in \mathbb{N})$ von Elementen von K so, dass gilt

- $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$ für alle $n \leq m$
- Zu jedem $k > 0$ in $\mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n - a_n \leq \frac{1}{k}$

d.h. die a_n liefern eine aufsteigende untere Begrenzung, die b_n eine absteigende obere Begrenzung und die Grenzen kommen sich immer näher.

> Ein angeordneter Körper K heisse *vollständig* bzw. *archimedisch*, wenn es zu jeder Intervallschachtelung a_n, b_n mindestens bzw. höchstens ein dadurch *approximiertes* $c \in K$ gibt mit $a_n \leq c \leq b_n$ für alle n.

Theorem 2.3 *(i) Es gibt bis auf Strukturgleichheit (Isomorphie) genau einen vollständigen archimedisch angeordneten Körper* $\mathbb{R}$ *- den der* reellen Zahlen.

(ii) Jedes Element von $\mathbb{R}$ *ist durch (mindestens) eine Intervallschachtelung auf* $\mathbb{Q}$ *approximiert.*

(iii) Zwei Intervallschachtelungen a_n, b_n *und* a'_n, b'_n *auf* $\mathbb{R}$ *approximieren genau dann dasselbe Element von* $\mathbb{R}$*, wenn* $a_n \leq b'_m$ *und* $a'_n \leq b_m$ *für alle* n, m.

Wie der Satz nahelegt, kann man $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ z.B. durch Abstraktion nach der in (iii) beschriebenen Äquivalenzrelation auf der Menge aller Intervallschachtelungen auf $\mathbb{Q}$ konstruieren.

Die Forderung der Eindeutigkeit des durch eine Intervallschachtelung bestimmten Elements schliesst die Existenz unendlich kleiner oder grosser Zahlen aus. Damit soll keinem Physiker das Denken in infinitesimalen Grössen verboten werden - der korrekte Umgang mit diesen erfordert jedoch grosse Erfahrung oder einen stringenten logischen Rahmen.

3 Vektorraum

Hauptziel ist es, die Wirkung der Zahl- bzw. Skalarbereiche auf dem Raum der Vektoren zu beschreiben.

3.1 Moduln

Ein *Modul* über einem Ring R (kurz R-Modul) kann angegeben werden durch eine (Grund)Menge V, eine additiv geschriebene abelsche Gruppe auf V (deren Elemente wir der Deutlichkeit halber als $\vec{v}$ schreiben) und eine Abbildung $(r, \vec{v}) \mapsto r\vec{v}$, die jedem Paar (r, v) mit r in R und $\vec{v}$ in V ein $r\vec{v}$ in V zuordnet, derart, dass

$$(V5) \quad \text{für alle } r \text{ in } R \text{ und } \vec{v}, \vec{w} \text{ in } V \text{ gilt } r(\vec{v} + \vec{w}) = r\vec{v} + r\vec{w}$$

$$(V6) \quad \text{für alle } \vec{v} \text{ in } V \text{ gilt } 1\vec{v} = \vec{v}$$

$$(V7) \quad \text{für alle } r, s \text{ in } R \text{ und } \vec{v} \text{ in } V \text{ gilt } (r + s)\vec{v} = r\vec{v} + s\vec{v}$$

$$(V8) \quad \text{für alle } r, s \text{ in } R \text{ und } \vec{v} \text{ in } V \text{ gilt } r(s\vec{v}) = (rs)\vec{v}\,.$$

Ist R ein Körper, so spricht man von einem *R-Vektorraum.*

Der Ring R ist integraler Bestandteil des Begriffs, seine Elemente heissen *Skalare*, die von V *Vektoren.* $r\vec{v}$ heisst die *Streckung* des Vektors $\vec{v}$ um den Skalar r oder das *Produkt* des Skalars r mit dem Vektor $\vec{v}$.

3.2 $\mathbb{Z}$-Moduln und ganzzahlige Vielfache von Vektoren

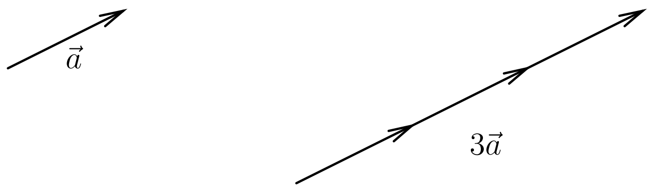
Satz 3.1 *Jede kommutative Gruppe wird zum Modul über dem Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen durch die (rekursive) Definition*

$$0\vec{v} = 0, \quad (n + 1)\vec{v} = n\vec{v} + \vec{v}, \quad (-n)\vec{v} = -(n\vec{v})$$

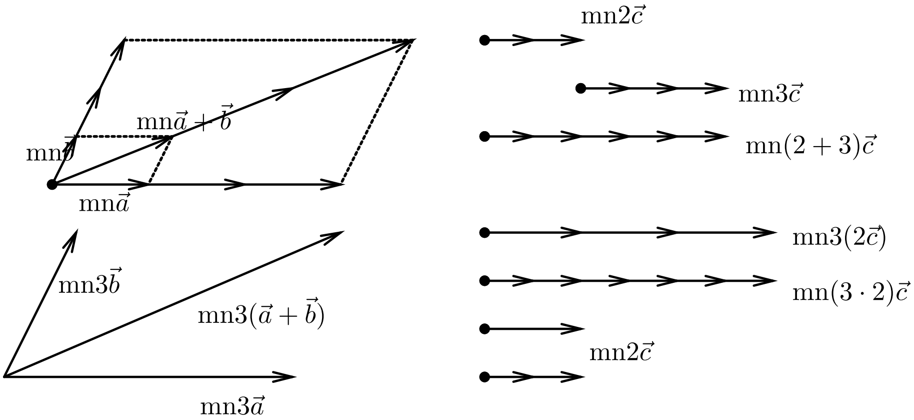
Der Beweis ist eine Fleissaufgabe.

Korollar 3.2 *Die Vektoren bilden einen $\mathbb{Z}$-Modul $\mathcal{V}$ mit*

$$n\vec{a} = \underbrace{\vec{a} + \ldots + \vec{a}}_{n}, \quad (-n)\vec{a} = -(n\vec{a})$$



Zur Illustration der Modulgesetze



3.3 Kürzungregel

Wir wollen zunächst einsehen, dass die Vektoren einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum bilden. Dazu ist es unvermeidlich, neue auf die Geometrie gegründete Axiome einzuführen.

(V9) $n\vec{a} \neq \vec{0}$ falls $n > 0$ in $\mathbb{N}$ und $\vec{a} \neq \vec{0}$

Motivation: Für $n > 1$ und festen Punkt$P$ liegt $(n-1)\vec{a}+P$ zwischen P und $n\vec{a}+P$. Wäre also $n\vec{a} = \vec{0}$, so $P = n\vec{a} + P$ und damit auch $P = (n-1)\vec{a} + P$ also schon $(n-1)\vec{a} = \vec{0}$. Also folgt $n\vec{a} \neq \vec{0}$ mit Induktion. Mit den Modulgesetzen folgt sofort

- Aus $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $z\vec{a} = \vec{0}$ folgt $z = 0$ für $z \in \mathbb{Z}$.

  $z\vec{a} = u\vec{a} \;\Leftrightarrow\; z = u$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $u, z \in \mathbb{Z}$ *Kürzungregel*

3.4 Teilung von Vektoren

(V10) Zu jedem Vektor $\vec{a}$ und jeder natürlichen Zahl $n > 0$ gibt es einen Vektor $\vec{b}$ mit

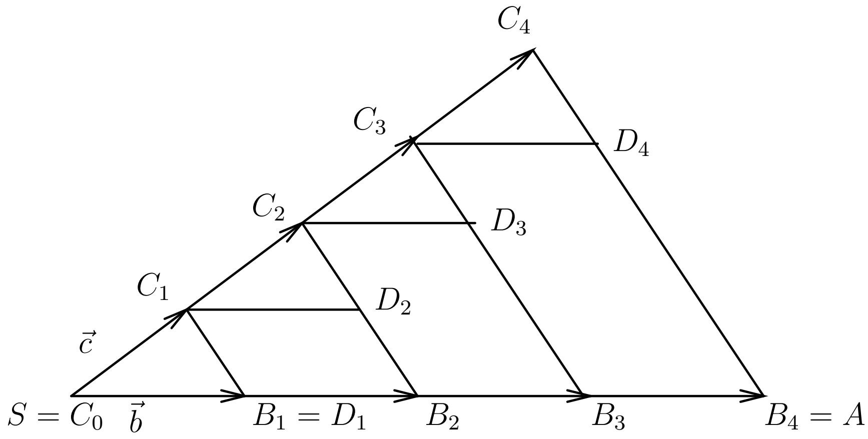
$$n\vec{b} = \vec{a}$$

Nach der Kürzungsregel ist $\vec{b}$ eindeutig bestimmt und wir schreiben

$$\vec{b} = \frac{1}{n}\vec{a}.$$

Konstruktion. Sei $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$. Wähle $C_0 = S$, C_1 nicht auf der Geraden g durch SA. Sei $\vec{c} = \overrightarrow{SC_1}$ und C_k auf der Geraden h durch SC_1 so, dass $\overrightarrow{S, C_k} = k\vec{c}$. Sei $B_n = A$

und B_k der Schnittpunkt von g mit der Parallelen zu C_nB_n durch C_k. Sei D_{k+1} der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Parallelen zu g durch C_k und $D_1 = B_1$. Bestimme D_{i+1} als Parallelogrammergänzung zu C_i, D_i, C_{i+1}. Damit $\overrightarrow{C_iD_{i+1}} = \vec{b} = \overrightarrow{B_iB_{i+1}}$ für alle i und somit $\vec{a} = n\vec{b}$.



3.5 Rationale Vielfache

Ein $\mathbb{Z}$-Modul V heisst *torsionsfrei*, wenn (V9) gilt, d.h. wenn aus $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $n\vec{a} = 0$ schon $n = 0$ folgt - dann gilt auch die Kürzungsregel. Er heisst *teilbar*, wenn (V10) gilt, d.h. wenn es zu jedem $\vec{a} \in V$ und $n > 0$ ein $\vec{b} \in V$ mit $n\vec{a} = \vec{b}$ gibt.

Satz 3.3 *In einem torsionsfreien teilbaren $\mathbb{Z}$-Modul V gibt es zu jedem $\vec{a} \in V$ und $z \neq 0$ in $\mathbb{Z}$ ein eindeutig bestimmtes*

$$\vec{b} = \frac{1}{z}\vec{a} \quad \textit{mit } z\vec{b} = \vec{a}$$

und V wird zum $\mathbb{Q}$-Vektorraum durch

$$\frac{w}{z}\vec{a} = \frac{1}{z}(w\vec{a}) \quad \textit{d.h. } \frac{w}{z}\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow z\vec{b} = w\vec{a}$$

Beweis. Die Existenz von $\vec{b}$ ist für $z \geq 0$ direkt verlangt, für $z < 0$ betrachte man $-\vec{a}$. Die Eindeutigkeit folgt aus der Kürzungsregel. Wir zeigen nun, dass $r\vec{a}$ für rationale r wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Darstellung von r als Bruch abhängt. Sei

$$r = \frac{w}{z} = \frac{w'}{z'} \text{ d.h. } wz' = zw' \text{ und } z\vec{b} = w\vec{a},\ z'\vec{b'} = w'\vec{a}$$

Es folgt durch Multiplikation mit z' bzw. z und der Kürzungsregel

$$z'z\vec{b} = z'w\vec{a} = zw'\vec{a} = zz'\vec{b'} = z'z\vec{b'} \text{ also } \vec{b} = \vec{b'}$$

Der Rest als Fleissaufgabe. $\square$

Korollar 3.4 *Die Vektoren bilden einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum.*

3.6 Geraden

Seien zwei Punkte O, E bzw. Punkt O und Vektor $\vec{e} \neq \vec{0}$ gegeben (mit $E = \vec{e} + O$). Wir wollen die Gerade g durch O und E als Zahlengerade mit Nullpunkt O und Einheitspunkt E verstehen. Dazu stellen wir zunächst fest, dass in der anschaulichen Geometrie gilt

- Die Punkte $r\vec{e} + O$ ($r \in \mathbb{Q}$) liegen auf g
- Für $r, s, t \in \mathbb{Q}$ liegt der Punkt $t\vec{e} + O$ liegt zwischen den Punkten $r\vec{e} + O$ und $s\vec{e} + O$ genau dann, wenn $r \leq t \leq s$ oder $s \leq t \leq r$
- Ist r_n, s_n eine Intervallschachtelung auf $\mathbb{Q}$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt P auf g, der für jedes n zwischen $r_n\vec{e} + O$ und $s_n\vec{e} + O$ liegt.
- Zu jedem Punkt P auf g gibt es mindestens eine solche Intervallschachtelung.

Damit erhalten wir eine umkehrbar eindeutige (d.h. bijektive) Entsprechung $r \mapsto P(r) = P(r, O, \vec{e})$ zwischen reellen Zahlen und Punkten auf g so, dass

- $P(r) = r\vec{e} + O$ falls $r \in \mathbb{Q}$
- $P(t)$ zwischen $P(r)$ und $P(s)$ genau dann, wenn $r \leq t \leq s$ oder $s \leq t \leq r$
- Es gibt eine eindeutig bestimmte Anordnung $\leq$ auf g so, dass $O < E$ und R zwischen P und Q genau dann, wenn $P \leq R \leq Q$ oder $Q \leq R \leq P$.

3.7 Reelle Vielfache

Um die Streckung um einen reellen Faktor auch für Vektoren erklären zu können, benötigen wir noch, dass die Zwischenrelation mit Verschiebungen verträglich ist

- Aus $PQ \sim RS$, $PU \sim RV$ und U zischen P und Q folgt V zwischen R und S

Dann übertragen sich auch die Approximationen durch Intervallschachtelung bei Verschiebung und es gilt für alle O, O', $\vec{e} \neq \vec{0}$ und $r \in \mathbb{R}$

$$P(r, O', \vec{e}) = \overrightarrow{OO'} + P(r, O, \vec{e})$$

Korollar 3.5 *Man erhält eine wohldefinierte Multiplikation von reellen Zahlen mit Vektoren durch*

$$r\vec{a} + O = P(r, O, \vec{a})$$

und für diese gelten die Gesetze (V6-8) und damit auch

$$r\vec{a} = 0 \;\Leftrightarrow\; r = 0 \textit{ oder } \vec{a} = \vec{0}$$

Die Geraden sind genau die Mengen der Form

$$\{r\vec{a} + P \mid r \in \mathbb{R}\} \quad \textit{mit } \text{Richtung(svektor) } \vec{a} \neq \vec{0}$$

Beweis. Dabei ergeben sich (V6-8) leicht aus den entsprechenden Gesetzen für rationale r. durch Approximation. Daraus auch $0\vec{v} = (0 + 0)\vec{v} = 0\vec{v} + 0\vec{v}$ und nun $\vec{0} = 0\vec{v}$ durch Addition von $-0\vec{v}$ auf beiden Seiten. Nun $r\vec{0} = r(0\vec{0}) = (r \cdot 0)\vec{0} = 0\vec{0} = \vec{0}$. Ist $r \neq 0$, aber $r\vec{a} = \vec{0}$, so $\vec{a} = 1\vec{a} = (r^{-1}r)\vec{a} = r^{-1}(r\vec{a}) = r^{-1}\vec{0} = \vec{0}$. □

3.8 Unabhängigkeit

Aus dem Vorangehenden ergibt sich: Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ sind äquivalent

(a) $\vec{a} = \vec{0}$ oder es gibt $t \in \mathbb{R}$ mit $\vec{b} = t\vec{a}$

(b) Für einen/jeden Punkt O liegen $O, \vec{a} + O$ und $\vec{b} + O$ auf einer Geraden

(c) Es gibt $r, s \in \mathbb{R}$, nicht beide $= 0$, sodass $r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0}$

Beweis. Gilt (a), so auch (c) mit $r = 1, s = 0$ falls $\vec{a} = \vec{0}$ bzw. $s = 1$, $r = t = 0$ bzw. $s = -r = t \neq 0$. Gilt (c) und $s \neq 0$ so $\vec{b} = (s^{-1}r)\vec{a}$. Gilt jedoch $s = 0$, so $r\vec{a} = \vec{0}$ und $r \neq 0$ nach Voraussetzung, also $\vec{a} = \vec{0}$. □

In diesem Falle sind die beiden Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ *linear abhängig* - genauer geht es um die Zweierliste, wobei es hier aber auf die Reihenfolge nicht ankommt.

Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ sind genau dann Richtungsvektoren zueinander paralleler Geraden, wenn sie linear abhängig sind.

Ist $\vec{a}, \vec{b}$ nicht linear abhängig, so spricht man von *linear unabhängig*. Somit hat man die Äquivalenz folgender Aufsagen

- $\vec{a}, \vec{b}$ ist linear unabhängig
- Aus $r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0}$ folgt stets $r = s = 0$
- Für einen/jeden Punkt O liegen $O, \vec{a} + O, \vec{b} + O$ nicht auf einer Geraden

Insbesondere also $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$.

3.9 Strahlensatz und Distributivgesetz

In einer kommutativen Gruppe, d.i. einem $\mathbb{Z}$-Modul schreiben wir abkürzend

$$\vec{c} - \vec{a} = \vec{c} + (-\vec{a}) = \vec{c} + (-1)\vec{a}$$

Wir stellen zunächst fest, dass - auf der Grundlage der schon festgestellten Tatsachen - das Distributivgesetz (V5) zu folgender Version des Strahlensatzes äquivalent ist

- Zu allen Vektoren $\vec{a}, \vec{c}$ und Skalaren $r \in \mathbb{R}$ gibt es $x \in \mathbb{R}$ mit $r\vec{a} + x(\vec{c} - \vec{a}) = r\vec{c}$

Gilt nämlich (V5) so wähle einfach $x = r$. Wollen wir umgekehrt (V5) herleiten, so erhalten wir mit $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ein $x \in \mathbb{R}$ mit $r\vec{a} + x\vec{b} = r\vec{c}$ und, symmetrisch, ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y\vec{a} + r\vec{b} = r\vec{c}$. Es folgt

$$(r - y)\vec{a} + (x - r)\vec{b} = \vec{0} \text{ also } r - y = x - r = 0$$

und somit $x = r$ falls $\vec{a}, \vec{b}$ unabhängig. Den Fall, dass $\vec{a}, \vec{b}$ abhängig sind, lassen wir als Übung. □

Um den Strahlensatz zu erhalten, stützen wir uns auf die folgende geometrische Tatsache und ihre Konsequenz:

- Liegen die Punkte P, Q, R nicht auf einer Geraden und die Gerade g in der durch P, Q, R aufgespannten Ebene und schneidet g die Strecke PQ (d.h. g enthält einen Punkt zwischen P und Q - P und Q eingeschlossen), so schneidet g (mindestens) eine der Strecken PR und RQ.

- Ist in einer Ebene eine Gerade zu einer Dreiecksseite parallel, so schneidet sie die anderen beiden Seiten entweder beide in Inneren oder beide im Äusseren.

Seien nun $\vec{a}, \vec{c}$ und r gegeben und ein Punkt O gewählt. Sei $X = r\vec{a} + O$, g die Gerade durch X mit Richtung $\vec{c} - \vec{a}$ und Y der Schnittpunkt von g mit der Geraden h durch O mit Richtung $\vec{c}$. Insbesondere gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $Y = x(\vec{c} - \vec{a}) + r\vec{a} + O$. Es gibt eine Intervallschachtelung $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$ für r, d.h. X liegt echt zwischen $r_n\vec{a} + O$ und $s_n\vec{a} + O$. Ausserdem wissen wir, dass die Vektoren $\vec{c} - \vec{a}$ und $s_n\vec{c} - s_n\vec{a}$ linear abhängig sind - mit (V5) für rationale Skalare. Daher ist g zur Geraden durch $s_n\vec{a} + O$ und $s_n\vec{c} + O$ parallel, also muss Y zwischen O und $s_n\vec{c} + O$ liegen. Analog erhält man, dass $r_n\vec{c} + O$ zwischen O und Y liegt. Damit liegt Y zwischen $r_n\vec{c} + O$ und $s_n\vec{c} + O$ für alle n, was aber gerade $Y = r\vec{c}$ bedeutet und den Strahlensatz beweist. □

3.10 Resumee

Theorem 3.6 *Die Vektoren bilden hinsichtlich der oben eingeführten Multiplikation mit reellen Skalaren einen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{V}$, d.h. es gelten (V1-8). Durch die Wirkung $\vec{x} \mapsto \vec{x} + P$ von $\mathcal{V}$ wird der Punktraum zum affinen Raum, d.h. es es gelten (A1-3). Die (affinen) Geraden g sind genau die Punktmengen*

$$\{r\vec{a} + P \mid r \in \mathbb{R}\} \quad \textit{mit Richtungsvektor } \vec{a} \neq \vec{0}$$

Zu gegeben g wählt man P und $R \neq S$ auf g beliebig und dann $\vec{a} = \overrightarrow{RS}$. Geraden sind parallel genau dann, wenn ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind und gleich, wenn sie zusätzlich noch einen gemeinsamen Punkt haben. Die Zwischenrelation ergibt sich aus der Anordnung von $\mathbb{R}$

$$t\vec{a} + P \textit{ zwischen } r\vec{a} + P \textit{ und } s\vec{a} + P \quad \Leftrightarrow \quad r \leq t \leq s \textit{ oder } s \leq t \leq r$$

Umgekehrt sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V gegeben und eine Wirkung auf einer Punktmenge $\mathcal{P}$ so, dass (A1-3) gilt. Die Geraden definieren wir dann als die Teilmengen $\{r\vec{a} + P \mid r \in \mathbb{R}\}$ und parallel sind sie, falls ihre Richtungsvektoren abhängig sind. Die Zwischenrelation wird so eingeführt, wie im Theorem suggeriert - und dann passt alles (wenn es mindestens zwei unabhängige Vektoren gibt): der Raum der Vektoren ist ein zu V isomorpher $\mathbb{R}$-Vektorraum vermöge

$$\overrightarrow{PQ} \mapsto \vec{x} \in V \quad \Leftrightarrow \quad Q = \vec{x} + P$$

3.11 Diskussion

Um nachzuweisen, dass Vektoren und Punkte einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum und affinen Raum bilden, waren die Axiome (P1-5) ausreichend. Um zum $\mathbb{R}$-Vektorraum zu kommen, mussten wir auf die Elementargeometrie zurückgreifen, nämlich die Begriffe Gerade, Inzidenz und Anordnung mit den zugehörigen Axiomen und den Axiomen der Stetigkeit. Nicht benutzt haben wir die Begriffe von Längen- oder Winkelgleichheit und die zugehörigen Kongruenzaxiome. Damit haben wir noch die Option, andere als die kanonischen Metriken einzuführen - insbesondere solche, die dem relativistischen Bild der Raumzeit entsprechen.

Eine Alternative besteht darin, die Skalare als geometrische Objekte einzuführen, d.h. als Verhältnisse paralleler Vektoren analog der Einführung rationaler Zahlen. Dann kann man Körper- und Vektorraumeigenschaften allein aufgrund geeigneter Inzidenzaxiome nachweisen - und hat auch jeden Vektorraum als Modell. Die Axiome der Anordnung bedeuten dann, dass der Skalarenkörper angeordnet ist. Kommt Stetigkeit hinzu, so muss es sich um einen zu $\mathbb{R}$ isomorphen Körper handeln. Dieser Weg ist viel aufwendiger, entspricht aber besser der historischen Entwicklung des Konzepts der reellen Zahlen. Welcher Weg wissenschaftstheoretisch angemessener ist, bleibt zu diskutieren.

Zu beachten ist, dass Koordinatensysteme bis jetzt keinerlei Rolle gespielt haben. Wir werden sie später als ein Hilfsmittel zur numerischen Beschreibung geometrischer Sachverhalte benutzen. Sie können jedoch geometrische und algebraische Begrifflichkeit nicht ersetzen. Unreflektiertes Verwenden von Koordinaten ist meist das grösste Hindernis für Verständnis.

3.12 Exkurs: Geschwindigkeit nach Galilei

Eine Bewegung eines Massenpunktes im Raum kann man durch eine Abbildung der reellen Zeitachse in den Punktraum beschreiben

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}, \quad t \mapsto P(t) = \phi(t)$$

Hat man einen Ursprung O ausgezeichnet, so kann man die Bewegung auch durch Ortsvektoren beschreiben

$$t \mapsto P(t) = \vec{x}(t) + O$$

Die Bewegung ϕ ist *gleichförmig*, wenn zu gleichen Zeitdifferenzen h äquivalente Pfeile gehören, d.h. wenn es nur von h abhängige Vektoren $\vec{d}(h)$ gibt mit

$$P(t+h) = \vec{d}(h) + P(t) \quad \text{für alle } t, h \in \mathbb{R}$$

und wenn der Bewegungsablauf geradlinig und mit dem zeitlichen Ablauf gleichgerichtet ist, d.h. wenn gilt

$$P(t) \text{ zwischen } P(r) \text{ und } P(s) \quad \text{für alle } r \leq t \leq s \text{ in } \mathbb{R}$$

In diesem Falle ist die Annahme, das $P(t)$ für alle t definiert sein soll, bequem und akzeptabel.

Satz 3.7 *Die Abbildung $h \mapsto \vec{d}(h)$ ist verträglich mit Addition und Streckung von Zeitintervallen*

$$\vec{d}(h+h') = \vec{d}(h) + \vec{d}(h'), \quad \vec{d}(rh) = r\vec{d}(h) \quad \textit{für alle } h, h', r \in \mathbb{R}$$

und es gibt einen eindeutig bestimmten Vektor $\vec{v}$, den Geschwindigkeitsvektor, *mit*

$$P(t+h) = h\vec{v} + P(t) \quad \textit{für alle } t, h \in \mathbb{R}$$

Beweis. $\vec{d}(h+h') + P(t) = P(t+h+h') = \vec{d}(h') + P(t+h) = \vec{d}(h') + \vec{d}(h) + P(t)$, also $\vec{d}(h+h') = \vec{d}(h) + \vec{d}(h')$. Es folgt $\vec{d}(0) = \vec{d}(0+0) = \vec{d}(0) + \vec{d}(0)$, also $\vec{d}(0) = \vec{0}$. Weiterhin mit Induktion $\vec{d}((n+1)h) = \vec{d}(nh+h) = \vec{d}(nh) + \vec{d}(h) = n\vec{d}(h) + \vec{d}(h) = (n+1)\vec{d}(h)$. Nun $m\vec{d}(\frac{n}{m}h) = \vec{d}(m\frac{n}{m}h) = \vec{d}(nh) = n\vec{d}(h)$, also $r\vec{d}(h) = \vec{d}(rh)$ für $r = \frac{n}{m}$ und damit auch $\vec{d}(-rh) + \vec{d}(rh) = \vec{d}(-rh+rh) = \vec{d}(0)$ und $\vec{d}(-rh) = -\vec{d}(rh) = -r\vec{d}(h)$. Damit haben wir die rationalen Streckfaktoren abgehandelt.

Für reelles r benutzen wir eine rationale Intervallschachtelung r_n, s_n und erhalten aus der zweiten Voraussetzung, dass $\vec{d}(rh) + P(t) = P(t+rh)$ zwischen $r_n\vec{d}(h) + P(t) = \vec{d}(r_nh) + P(t) = P(t + r_nh)$ und $s_n\vec{d}(h) + P(t) = \vec{d}(s_nh) + P(t) = P(t + s_nh)$ liegt und somit nach Definition der Streckung von Vektoren $\vec{d}(rh) = r\vec{d}(h)$ gilt. Hat man nun zwei Zeitdifferenzen $h \neq 0$ und h', so gibt es ein $r \in \mathbb{R}$ mit $h' = rh$ und es folgt

$$\frac{1}{h'}\vec{d}(h') = \frac{1}{rh}\vec{d}(rh) = \frac{1}{rh}r\vec{d}(h) = \frac{1}{h}\vec{d}(h) =: \vec{v}$$

Korollar 3.8 *$t_0 \in \mathbb{R}$, $\vec{v}$ ein Vektor und $P(t_0)$ ein Punkt so erhält man eine gleichförmige Bewegung*

$$t \mapsto P(t) = (t - t_0)\vec{v} + P(t_0)$$

mit Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$. Umgekehrt entsteht jede solche Bewegung auf diese Weise und ist durch Vorgabe von $\vec{v}$ und $P(t_0)$ eindeutig bestimmt. Zwei gleichförmige Bewegungen $t \mapsto P(t)$ und $t \mapsto Q(t)$ haben denselben Geschwindigkeitsvektor genau dann, wenn für ein/alle t_0 gilt

$$Q(t) = \overrightarrow{P(t_0)Q(t_0)} + P(t) \quad \textit{für alle } t$$

Der Addition von Geschwindigkeitsvektoren entspricht die die komponentenweise Zusammensetzung von Bewegungen: Sind $t \mapsto Q(t)$ und $t \mapsto R(t)$ gleichförmige Bewegungen mit Geschwindigkeitsvektoren $\vec{w}$ und $\vec{u}$ und $Q(t_0) = R(t_0) =: O$, so ist $t \mapsto P(t)$ mit $P(t_0) = O$ eine gleichförmige Bewegung mit Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{u} \;\Leftrightarrow\; OQ(t) \sim R(t)P(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

Die Streckung von Geschwindigkeitsvektoren entspricht der Multiplikation der Geschwindigkeit um einen Faktor: Ist $t \mapsto P(t)$ eine gleichförmige Bewegung mit Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$, so ist $t \mapsto Q(t)$ mit $Q(t_0) = P(t_0) =: O$ eine gleichförmige Bewegung mit Geschwindigkeitsvektor

$$r\vec{v} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{Q(t)O} = r\overrightarrow{P(t)O} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

4 Basen und Koordinaten in der Ebene

4.1 Ebenen

Lemma 4.1 *Ist P ein Punkt und sind $\vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängige Vektoren, so sind P, $\vec{a}+P$ und $\vec{b}+P$ 3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen und die von ihnen aufgespannte Ebene ε besteht genau aus den Punkten Q mit der* Parameterdarstellung

$$Q = \rho\vec{a} + \lambda\vec{b} + P \quad \textit{mit } \rho, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Parameter ρ und μ sind durch Q eindeutig bestimmt.

/la97/eb2.eepic /la97/eb2.eepic

Beweis. Sei g die Gerade durch $P, \vec{a}+P$ und h die Gerade durch $P, \vec{b}+P$. Dann $g, h \subseteq \varepsilon$ und Q liegt auf der Parallelen k zu g durch $\lambda\vec{b}+P \in h$. Die Ebene δ durch g und k hat mit ε die 3 Punkte P, $\vec{a}+P$ und $\vec{b}+P$ gemeinsam, also $\delta = \varepsilon$ und somit $Q \in \varepsilon$.

Ist umgekehrt $Q \in \varepsilon$ gegeben, so seien k und l die Parallelen durch Q zu g bzw. h. Diese liegen in ε und $k \nparallel h$, $l \nparallel g$, da $g \nparallel h$. Folglich gibt es Schnittpunkte $R = g \cap l$ und $S = h \cap k$. Wegen Thm.3.6 gibt es Skalare ρ und μ mit $R = \rho\vec{a}+P$ und $S = \mu\vec{b}+P$. Nach Konstruktion bilden $PSRQ$ ein Parallelogramm, also $Q = \rho\vec{a}+\mu\vec{b}+P$ nach Def. der Addition.

Aus $Q = \rho\vec{a}+\mu\vec{b}+P = \lambda\vec{a}+\nu\vec{b}+P$ folgt $\rho\vec{a}+\mu\vec{b} = \lambda\vec{a}+\nu\vec{b}$ nach (A2) und somit $\rho = \lambda$, $\mu = \nu$ nach Absch.3.8. □

4.2 Vektorebenen

Sei ε eine Ebene und sei

$$\mathcal{V}_\varepsilon = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in \varepsilon\}.$$

Dann gilt

- $\vec{0} \in \mathcal{V}_\varepsilon$
- $\vec{a} \in \mathcal{V}_\varepsilon$ und $\vec{b} \in \mathcal{V}_\varepsilon \;\Rightarrow \vec{a}+\vec{b} \in \mathcal{V}_\varepsilon$
- $\vec{a} \in \mathcal{V}_\varepsilon \Rightarrow -\vec{a} \in \mathcal{V}_\varepsilon$
- $\vec{a} \in \mathcal{V}_\varepsilon$ und $\rho \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho\vec{a} \in \mathcal{V}_\varepsilon$
- $\vec{a} \in \mathcal{V}_\varepsilon$ und $P \in \varepsilon \Rightarrow \vec{a}+P \in \varepsilon$

Wir sprechen auch von der zu der(affinen) Ebene ε gehörigen *vektoriellen Ebene* $\mathcal{V}_\varepsilon$.

Lemma 4.2 **a** *Zu jeder Ebene ε gibt es unabhängige $\vec{u}, \vec{v}$ in $\mathcal{V}_\varepsilon$*

b *Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ Vektoren in $\mathcal{V}_\varepsilon$. Dann sind äquivalent*

1 *$\vec{a}, \vec{b}$ sind linear unabhängig*

2 $\rho\vec{a}+\lambda\vec{b} = \vec{0} \;\Rightarrow \rho = \lambda = 0$ - *für alle ρ, λ*

3 *Jedes* $\vec{v} \in \mathcal{V}_\varepsilon$ *hat höchstens eine Darstellung* $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

4 *Jedes* $\vec{v} \in \mathcal{V}_\varepsilon$ *hat mindestens eine Darstellung* $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

Beweis. a) Wähle 3 Punkte P, Q, R auf ε, die nicht auf einer Geraden liegen und $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$. Dann sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig.

b) Die Äquivalenz von 1-3 und $1 \rightsquigarrow 4$ ergibt sich sofort aus Abschn. "Unabhängigkeit". Gelte 4. Angenommen, $\vec{a}, \vec{b}$ ist linear abhängig. Dann o.B.d.A. $\vec{b} = \rho\vec{a}$. Für jedes $\vec{v} \in \mathcal{V}_\varepsilon$ haben wir nach 4, dass $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \lambda\vec{a} + \mu\rho\vec{a} = (\lambda + \mu\rho)\vec{a}$. Damit wären alle Vektoren ($\neq \vec{0}$) in $\mathcal{V}_\varepsilon$ parallel, im Widerspruch zu a. □

4.3 Basen und Koordinaten für Vektoren der Ebene

Definition 4.3 *Ein Paar* $\vec{\alpha} : \vec{a}_1, \vec{a}_2$ *unabhängiger Vektoren von* $\mathcal{V}_\varepsilon$ *heisst eine* Basis *von* $\mathcal{V}_\varepsilon$. *Die eindeutig bestimmten Skalare* x^1 *und* x^2 *mit* $\vec{x} = x^1\vec{a}_1 + x^2\vec{a}_2$ *heissen die* Koordinaten *von* $\vec{x}$ *bzgl.* $\vec{\alpha}$ *und wir schreiben*

$$\vec{x}^{\,\vec{\alpha}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

/la97/eb3.eepic /la97/eb3.eepic
/la95fig/eb5.eepic /la95fig/eb5.eepic

Lemma 4.4 *Ist* $\vec{\alpha}$ *eine Basis von* $\mathcal{V}_\varepsilon$, *so gilt für* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}_\varepsilon$ *und* $r \in \mathbb{R}$

$$(\vec{x} + \vec{y})^{\,\vec{\alpha}} = \vec{x}^{\,\vec{\alpha}} + \vec{y}^{\,\vec{\alpha}}, \quad (r\vec{x})^{\,\vec{\alpha}} = r(\vec{x}^{\,\vec{\alpha}})$$

Dabei ist für Spalten von Skalaren definiert

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \quad r\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx^1 \\ rx^2 \end{pmatrix}, \quad -\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^1 \\ -x^2 \end{pmatrix}$$

Beweis. Sei

$$\vec{x}^{\,\vec{\alpha}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}^{\,\vec{\alpha}} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

also

$$\vec{x} = x^1\vec{a}_1 + x^2\vec{a}_2, \quad \vec{y} = y^1\vec{a}_1 + y^2\vec{a}_2$$

$$\vec{x} + \vec{y} = x^1\vec{a}_1 + x^2\vec{a}_2 + y^1\vec{a}_1 + y^2\vec{a}_2 = (x^1 + y^1)\vec{a}_1 + (x^2 + y^2)\vec{a}_2$$

$$r\vec{x} = r(x^1\vec{a}_1 + x^2\vec{a}_2) = rx^1\vec{a}_1 + rx^2\vec{a}_2 \qquad \square$$

4.4 Ortsvektoren

Zeichnet man einen Punkt O aus, so hat man nach (A1-2) eine bijektive Entsprechung zwischen Punkten und Vektoren

$$\vec{v} \leftrightarrow P \;\Leftrightarrow\; \vec{v} = \overrightarrow{OP} \;\Leftrightarrow\; P = \vec{v} + O$$

bzw. den Pfeilen OP. Man spricht dann von *Ortsvektoren* bezüglich des *Ursprungs* O und erlaubt sich oft einen etwas lockereren Umgang mit diesen Begriffen - den wir uns aber vorerst noch verkneifen möchten. Denkt man in Ortvektoren, so kann man sich bei $\vec{x} = r\vec{a} + \vec{c}$ $(r \in \mathbb{R})$ bzw. $\vec{x} = r\vec{a} + \mu\vec{b} + \vec{c}$ $(r, \mu \in \mathbb{R})$ die Parameterdarstellung einer Geraden bzw. Ebene denken - mit $P = \vec{c} + O$ und $Q = \vec{x} + O$. Insofern hat man mit den Ortvektoren eine unausgereifte Vorstufe des Begriffs des affinen Raums. Sie liefern jedoch einen Hinweis, wie man Koordinaten für den affinen Raum bzw. Ebene einführen kann.

/la95fig/eb8.eepic /la95fig/eb8.eepic

4.5 Affine Koordinatensysteme der Ebene

Definition 4.5 *Ein* Koordinatensystem α *der Ebene* ε *wird gegeben durch einen Punkt* O_α *(*Ursprung *von* α*) und eine Basis* $\vec{\alpha} : \vec{a}_1, \vec{a}_2$ *von* $\mathcal{V}_\varepsilon$ *(wo kein Missverständnis möglich ist, werden wir auch die Basis mit* α *notieren). Für jeden Punkt* $Q \in \varepsilon$ *gibt es nach Lemma 4.1 eindeutig bestimmte Skalare* q^1, q^2*, die* Koordinaten *von* Q *bzgl.* α*, mit*

$$Q = q^1\vec{a}_1 + q^2\vec{a}_2 + O_\alpha. \text{ Wir schreiben } Q^{\,\alpha} = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix}$$

Wir bemerken

$$Q^{\,\alpha} = \vec{v}^{\,\vec{\alpha}} \;\Leftrightarrow\; Q = \vec{v} + O_\alpha$$

$$\overrightarrow{PQ}^{\,\vec{\alpha}} = Q^{\,\alpha} - P^{\,\alpha}$$

$$Q^\alpha = \vec{v}^{\,\vec{\alpha}} + P^\alpha \Leftrightarrow Q = \vec{v} + P$$

/la97/eb4.eepic /la97/eb4.eepic

4.6 Matrizen

Eine 2×2-*Matrix* ist ein Quadrupel von Skalaren, geschrieben als quadratisches Schema

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt von Matrix und Spalte definieren wir durch

$$\begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^1 x^1 + t_2^1 x^2 \\ t_1^2 x^1 + t_2^2 x^2 \end{pmatrix}$$

/la95fig/eb6.eepic /la95fig/eb6.eepic

4.7 Basistransformation

Gegeben seien zwei Basen von $\mathcal{V}_\varepsilon$: die alte $\vec{\alpha} : \vec{a}_1, \vec{a}_2$ und die neue $\vec{\beta} : \vec{b}_1, \vec{b}_2$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Skalare t_{ij}, die die neue Basis in der alten ausdrücken

$$\vec{b}_1 = \begin{cases} & t_1^1\vec{a}_1 \\ + & t_1^2\vec{a}_2 \end{cases} \qquad \vec{b}_2 = \begin{cases} & t_2^1\vec{a}_1 \\ + & t_2^2\vec{a}_2 \end{cases}$$

Die *Transformationsmatrix* ${}_{\vec\alpha}T_{\vec\beta}$ ist

$${}_{\vec\alpha}T_{\vec\beta} = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{pmatrix}$$

In den Spalten der Transformationsmatrix stehen die Koordinaten der Vektoren der neuen Basis bzgl. der alten Basis

Lemma 4.6 $\vec v^{\,\vec\alpha} = {}_{\vec\alpha}T_{\vec\beta}\,\vec v^{\,\vec\beta}$

Beweis. Sei $\vec v = \lambda_1 \vec b_1 + \lambda_2 \vec b_2$. Dann

$$\vec v = \lambda_1(t_1^1\vec a_1 + t_1^2\vec a_1) + \lambda_2(t_2^1\vec a_1 + t_2^2\vec a_1) = (\lambda_1 t_1^1 + \lambda_2 t_1^2)\vec a_1 + (\lambda_1 t_2^1 + \lambda_2 t_2^2)\vec a_2. \quad \square$$

/la95fig/eb7.eepic /la95fig/eb7.eepic

4.8 Koordinatentransformation

Lemma 4.7 *Gegeben seien zwei Koordinatensysteme α und β der Ebene. Dann*

$$P^\alpha = {}_{\vec\alpha}T_{\vec\beta}\,P^\beta + (O_\beta)^\alpha = {}_{\vec\alpha}T_{\vec\beta}\,P^\beta + \vec v^{\,\vec\alpha} \text{ wobei } \vec v = \overrightarrow{O_\alpha O_\beta}.$$

Beweis. Sei

$$P = \vec x + O_\alpha = \vec y + O_\beta.$$

Dann

$$\vec y^{\,\vec\alpha} = {}_{\vec\alpha}T_{\vec\beta}\,\vec y^{\,\vec\beta}, \quad \vec v^{\,\vec\alpha} = (O_\beta)^\alpha$$

$$\vec x = \vec y + \vec v, \quad P^\alpha = \vec x^{\,\vec\alpha} = \vec y^{\,\vec\alpha} + \vec v^{\,\vec\alpha} \qquad \square$$

4.9 Basen im Raum

Lemma 4.8 *Für Vektoren $\vec a, \vec b, \vec c$ des Raumes $\mathcal V$ des Raumes und eine gegeben Ursprung O sind die folgenden Aussagen äquivalent*

1 *Geeignete Repräsentanten von $\vec a, \vec b, \vec c$ liegen in einer Ebene, d.h. $\vec a, \vec b, \vec c$ liegen in einer vektoriellen Ebene.*

2 *Die Punkte $\vec a + P, \vec b + P, \vec c + P, P$ liegen in einer Ebene.*

3 *Es gibt Skalare r, s, t, nicht alle 0, mit $r\vec a + s\vec b + t\vec c = \vec 0$, d.h. die Vektoren $\vec a, \vec b, \vec c$ sind* linear abhängig

4 *Sind $\vec a, \vec b$ nicht parallel, so kann man noch hinzufügen: $\vec c = r\vec a + s\vec b$ für passende r, s*

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar. Ist $\vec{a} \parallel \vec{b}$, so liegen $\vec{A}+P, \vec{b}+P, P$ schon auf einer Geraden und man kann in (3) $t = 0$ nehmen. Andernfalls hat man in (3) $t \neq 0$ also $\vec{c} = T^{-1}r\vec{a} + t^{-1}s\vec{b}$ und somit $\vec{c}+P$ in der von $\vec{a}+P, \vec{b}+P, P$ aufgespannten Ebene. Liegt umgekehrt $\vec{c}+P$ in dieser Ebene, so $\vec{c}+P = r\vec{a}+s\vec{b}+P$ mit passenden r, s, also $r\vec{a} + s\vec{b} + (-1)\vec{c} = \vec{0}$. □

Die Dreidimensionalität des Raumes drückt sich nun so aus: Ist eine Liste α dreier unabhängiger Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gegeben (und solche gibt es!), so hat jeder Vektor $\vec{x}$ eine Darstellung

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3 \text{ mit Skalaren } x^1, x^2, x^3. \text{ Wir schreiben } \vec{x}^\alpha = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Die *Koordinaten* x^i sind eindeutig bestimmt: Aus $\vec{x} = y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + y^3\vec{e}_3$ folgt $\vec{0} = (x^1 - y^1)\vec{e}_1 + (x^2 - y^2)\vec{e}_2 + (x^3 - y^3)\vec{e}_3$, also $y^1 = x^1, y^2 = x^2, y^3 = x^3$ wegen der Unabhängigkeit von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Daher bilden $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ eine *Basis* α des Raumes. Aus den Vektorraumaxiomen folgt sofort, dass man mit Koordinaten komponentenweise rechnet:

$$(\vec{x}+\vec{y})^\alpha = \begin{pmatrix} x^1+y^1 \\ x^2+y^2 \\ x^3+y^3 \end{pmatrix}, \quad (r\vec{x})^\alpha = \begin{pmatrix} rx^1 \\ rx^2 \\ rx^3 \end{pmatrix} \quad \text{für } \vec{x}^\alpha = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}^\alpha = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}.$$

Die Regeln für Koordinatentransformation gelten ganz entsprechend. Die Transformationsmatrix ist hier eine 3×3-Matrix mit

$$\vec{x}^\alpha = {}^\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$$

/la97/eb9.eepic /la97/eb9.eepic Dabei ist für eine Matrix T und Spalte $\boldsymbol{x}$

$$T = \begin{pmatrix} t^1_1 & t^1_2 & t^1_3 \\ t^2_1 & t^2_2 & t^2_3 \\ t^3_1 & t^3_2 & t^3_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = (\, x^1 \quad x^2 \quad x^3 \,)$$

definiert

$$T\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t^1_1x^1 + t^1_2x^2 + t^1_3x^3 \\ t^2_1x^1 + t^2_2x^2 + t^2_3x^3 \\ t^3_1x^1 + t^3_2x^2 + t^3_3x^3 \end{pmatrix}$$

5 Struktur der Vektorräume

5.1 Spalten- und Funktionenraum

Ist X eine Menge, so bildet die Menge K^X aller Abbildungen von X in K einen K-Vektorraum mit

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ 0(x) = 0,\ (rf)(x) = r \cdot f(x) \quad \forall x \in X$$

Ist $X = \{1, \ldots, n\}$, so kann man die Funktion $f : X \to K$ mit dem n-Tupel $(x^1, \ldots, x^n)$ über K identifizieren, falls $f(i) = x^i$ für $i = 1, \ldots, x^n$. Man erhält somit den K-Vektorraum K^n der n-Tupel, die wir bevorzugt als Spalten notieren wollen. Somit ist K^n der Vektorraum der n-Spalten über K mit komponentenweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ \vdots \\ x^n + y^n \end{pmatrix}, \quad r \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx^1 \\ \vdots \\ rx^n \end{pmatrix}$$

Ist X das reelle Intervall $[a, b]$, so erhalten wir mit $\mathbb{R}^{[a,b]}$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum der auf dem Intervall $[a, b]$ definierten reellen Funktionen

5.2 Untervektorräume

Eine Teilmenge U eines K-Vektorraums V ist ein *(K)-Untervektorraum* oder *linearer Teilraum*, wenn sie unter den Operationen von V abgeschlossen ist, d.h. wenn

$$\vec{0} \text{ in } U,\ \vec{u} + \vec{v} \text{ in } U,\ r\vec{u} \text{ in } U \text{ für alle } \vec{u}, \vec{v} \text{ in } U, r \text{ in } K.$$

U ist dann mit den von V geerbten Operationen selbst ein K-Vektorraum.

Beispiele.

- V und $\vec{0}$ (für Pedanten $\{\vec{0}\}$) sind die *trivialen* Untervektorräume von V.
- Vektorielle Ebenen und Geraden im vektoriellen Anschauungsraum.
- Ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^X$ heisst ein *Funktionenraum*
  - Die stetigen Funktionen bilden einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[a,b]}$
  - Die differenzierbaren Funktionen bilden einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[a,b]}$

Lemma 5.1 *Sind die U_i, $i \in I$ K-Untervektorräume von V, so auch*

$$\bigcap_{i \in I} U_i = \{\vec{x} \mid \forall i \in I.\ \vec{x} \in U_i\}$$

Beweis. $\vec{0} \in U_i$ für alle i, also $\vec{0} \in U = \bigcap_i U_i$. Seien $\vec{u}, \vec{v} \in U_i$ für alle i. Dann auch $r\vec{u} \in U_i$ und $\vec{u} + \vec{v} \in U_i$, da U_i Untervektorraum. Somit $r\vec{u} \in U$ und $\vec{u} + \vec{v} \in U$. □

5.3 Erzeugen

Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ im Vektorraum V gegeben, so ist

$$r^1\vec{v}_1 + \ldots + r^n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{m} r^i\vec{v}_i \text{ mit } r^1, \ldots, r^n \text{ in } K$$

eine *Linearkombination* der $\vec{v}_i$ und

$$\sum_{i=1}^{n} K\vec{v}_i = K\vec{v}_1 + \ldots + K\vec{v}_n := \{\sum_{i=1}^{m} r^i\vec{v}_i \mid r^i \in K\}$$

das *Erzeugnis* der $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Für $m = 0$, d.h. die leere Liste, sei $\vec{0}$ das Erzeugnis.

Lemma 5.2 *$\sum_{i=1}^{n} K\vec{v}_i$ ist der kleinste K-Untervektorraum von V, der $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ enthält.*

Man spricht auch von dem von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ *erzeugten* oder *aufgespannten* Untervektorraum. Beispiele: Parameterdarstellung vektorieller Geraden und Ebenen.

Beweis: Die angegebene Menge von Linearkombinationen bildet einen Untervektorraum:

$$\sum_i r^i\vec{v}_i + \sum_i s^i\vec{v}_i = \sum_i (r^i + s^i)\vec{v}_i, \quad r\sum_i r^i\vec{v}_i = \sum_i (rr^i)\vec{v}_i$$

Andererseits muss jeder Untervektorraum, der $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ enthält, auch alle diese Linearkombinationen enthalten. □

Korollar 5.3 *Sind die $\vec{w}_j$ Linearkombinationen der $\vec{v}_i$, so ist jede Linearkombination $\vec{u}$ der $\vec{w}_j$ eine Linearkombination der $\vec{v}_i$ und somit $\sum_j K\vec{w}_j \subseteq \sum_i K\vec{v}_i$*

Beweis. Das ist klar, wir können es aber auch rechnen.

$$\vec{u} = \sum_j s_j\vec{w}_j, \quad \vec{w}_j = \sum_i r^{ij}\vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \sum_{i,j} s_j r^{ij}\vec{v}_i = \sum_i (\sum_j s_j r^{ij})\vec{v}_i \qquad \square$$

5.4 Unabhängigkeit und Basis

Lemma 5.4 *Sei U der von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ erzeugte Untervektorraum des K-Vektorraums V. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

(1) *Die Darstellung der Elemente von U als Linearkombinationen der $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ ist eindeutig.*

(2) *$r^1\vec{v}_1 + \ldots + r^n\vec{v}_n = \vec{0}$ ist nur in der trivialen Weise $r^1 = \ldots = r^n = 0$ möglich.*

(3) *Für kein j ist $\vec{v}_j$ Linearkombination der $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, \ldots, \vec{v}_n$.*

(4) *$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ ist ein minimales Erzeugendensystem von U, d.h. für kein j wird U von den $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, \ldots, \vec{v}_n$ erzeugt.*

Beweis. (1)⇒(2) trivial. (2)⇒(1): Aus $\sum r^i\vec{v}_i = \sum s^i\vec{v}_i$ folgt $\sum(r^i - s^i)\vec{v}_i = \vec{0}$, also $r^i - s^i = 0$ für alle i. (2) ⇔ (3): $\sum r^i\vec{v}_i = 0$ mit festem $r^j \neq 0$ ist gleichbedeutend mit $\vec{v}_j = \sum_{i\neq j}(r^j)^{-1}r^i\vec{v}_i$. (3)⇒(4) trivial. (4)⇒(3) mit Korollar 5.3. □

Trifft eine der Aussagen zu, so sind die $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ (linear) *unabhängig* und bilden eine *Basis* α des von ihnen erzeugten Untervektorraums U. Der Raum $\vec{0}$ hat die leere Basis.

Beispiele. Je drei Vektoren des Anschauungsraumes, die nicht in einer Ebene liegen, bilden eine Basis.
Eine $m \times n$-Matrix (a_{ij}) ist *untere Stufenmatrix*, wenn es $1 \leq i_1 < i_2 < i_k \leq m$ gibt so, dass

$$a_{i_j j} \neq 0, \quad a_{ij} = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, k \text{ und } i < i_j$$

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für } j > k$$

Die Nicht-Null-Spalten einer solchen Matrix sind unabhängig im Vektorraum K^m der m-Spalten über K. Insbesondere bilden die Einheitspalten

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \boldsymbol{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

die *kanonische* Basis des Spaltenraums K^m.

Bemerkung 5.5 *Sind $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ unabhängig, so kommt unter ihnen $\vec{0}$ nicht vor, und auch kein Vektor mehr als einmal. Bei der Unabhängigkeit und beim Erzeugen kommt es auf die Anordnung nicht an und man könnte auch von unabhängigen bzw. erzeugenden Mengen von Vektoren sprechen. Beim Begriff der Basis ist die Anordnung aber für fast alle Anwendungen wesentlich: Durch Vertauschen der Reihenfolge erhält man wieder eine Basis desselben Raums, aber eine andere.*

5.5 Elementare Umformungen

Lemma 5.6 *Die folgenden* elementaren *Umformungen ändern nichts am Erzeugnis bzw. der Unabhängigkeit einer Liste von Vektoren*

- *Addition eines Vielfachen eines Vektors zu einem anderen*
- *Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar $\neq 0$*
- *Vertauschen zweier Vektoren*

Beweis: Die Vektoren der neuen Liste ergeben sich als Linearkombinationen aus der alten, liegen also im Erzeugnis. Jeder der Umformungsschritte kann durch einen entsprechenden Umformungsschritt wieder rückgängig gemacht werden: Subtraktion des Vielfachen, Multiplikation mit dem inversen Skalar, nochmaliges Vertauschen. Also liegen auch die Vektoren der alten Liste im Erzeugnis der neuen.

Die Länge der Listen bleibt gleich. Ist also die eine unabhängig, d.h. ein minimales Erzeugendensystem für den von ihr erzeugten Untervektorraum, so auch die andere. □

Korollar 5.7 *Eine Liste von Vektoren ist linear unabhängig, wenn sich ihre Koordinatenspalten (bzgl. einer Basis) durch elementare Umformungen in die Spalten einer unteren Stufenmatrix ohne Nullspalten umformen lassen. Die Liste ist abhängig, wenn sich durch elementare Umformungen eine Nullspalte erzeugen lässt.*

5.6 Basisauswahl- und Ergänzung

Lemma 5.8 *Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ in V unabhängig, so gilt für jedes $\vec{v} \in V$*

entweder $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n, \vec{v}$ *unabhängig*
oder $\vec{v}$ *Linearkombination der* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$

Beweis. Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n+1} = \vec{v}$ linear abhängig, so gibt es r^i nicht alle 0 mit $\vec{0} = r^1\vec{v}_1 + \ldots r^n\vec{v}_n + r^{n+1}\vec{v}_{n+1}$. Da $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ unabhängig sind, muss $r^{n+1} \neq 0$ sein, also $\vec{v}_{n+1} = (r^{n+1})^{-1}r^1\vec{v}_1 + \ldots + (r^{n+1})^{-1}r^n\vec{v}_n$. □

Satz 5.9 *Sei $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ ein Erzeugendensystem des K-Vektorraums U. Dann gilt*

- *Jede maximal unabhängige Teilliste ist eine Basis von U*
- *Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ unabhängig, so kann man sie durch passende Auswahl aus den $\vec{v}_{k+1}, \ldots \vec{v}_n$ zu einer Basis von U ergänzen.*

Beweis. Nach Umsortieren sei $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ maximal unabhängige Teilliste, d.h. $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}_j$ linear abhängig für jedes $j > m$. Dann ist nach dem Lemma jedes $\vec{v}_j$ Linearkombination der $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ und diese somit nach Korollar 5.3 ein Erzeugendensystem von U. Theoretisch können wir also eine gegebene unabhängige Teilliste zu einer maximalen und damit einer Basis ergänzen. □

5.7 Dimension

Satz 5.10 *Hat ein K-Vektorraum V eine Basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, dann*

(a) *besteht jede Basis von V aus n Vektoren*

(b) *ist n die Maximallänge von unabhängigen Listen von Vektoren in V*

(c) *ist n die minimale Elementanzahl von Erzeugendensystemen von V*

(d) *bilden je n unabhängige Vektoren eine Basis*

Im Fall des Satzes heisst $n = \dim_K V = \dim V$ die *Dimension* von V. Wir schreiben $\dim V < \infty$, falls V eine endliche Basis hat. Insbesondere $\dim K^n = n$.

Beweis. Sei $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ eine weitere Basis. Indem wir den Ergänzungssatz auf

$$\vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$$

anwenden und umsortieren erhalten wir eine Basis

$$\vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m, \vec{v}_{11}, \ldots, \vec{v}_{1k_1} \quad \text{mit } \vec{v}_{1j} \in \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

Indem wir den Ergänzungssatz auf

$$\vec{w}_3, \ldots, \vec{w}_n, \vec{v}_{11}, \ldots, \vec{v}_{1k_1}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$$

anwenden und umsortieren erhalten wir eine Basis

$$\vec{w}_3, \ldots, \vec{w}_n, \vec{v}_{11}, \ldots, \vec{v}_{1k_1}, \vec{v}_{21}, \ldots, \vec{v}_{2k_2} \quad \text{mit } \vec{v}_{ij} \in \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$$

usw.. Wegen der Minimalitätseigenschaft einer Basis ist stets $k_i > 0$ und, da kein Vektor in einer Basis zweimal auftreten darf, ist man nach spätestens m Schritten am Ende - also $m \leq n$. Durch Vertauschen der Rollen folgt $n \leq m$ und damit $n = m$.

(b) folgt nun sofort mit dem Ergänzungssatz. Hätte man ein Erzeugendensystem mit weniger als n Elementen, so auch ein minimales, also eine Basis mit $m < n$ Elementen. Dann hätte man aber für diese Basis einen Widerspruch zu (a). Hat man n unabhängige Vektoren $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$, so sind nach (b) für jedes $\vec{v}$ die $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m, \vec{v}$ linear abhängig, also nach dem Lemma 5.8 $\vec{v}$ Linearkombination der $\vec{w}_i$. □

Korollar 5.11 *Für Untervektorräume U, W eines Vektorraums gilt*

- *W endlich erzeugt* $\Rightarrow \quad \dim W < \infty$
- $U \subseteq W \quad \Rightarrow \quad \dim U \leq \dim W$
- $U \subseteq W$ *und* $\dim U = \dim W < \infty \;\Rightarrow\; U = W$

6 Affine Räume

6.1 Axiome

In Analogie zum Anschauungsraum sagen wir, dass ein *affiner Raum* gegeben wird durch eine 'Punktmenge' $\mathcal{P}$, einen Vektorraum V und eine Abbildung von $V \times \mathcal{P}$ nach V

$$(\vec{v}, P) \mapsto \vec{v} + P \in \mathcal{P}$$

so, dass die Axiome (A2-4) gelten

(A2) Zu (je zwei) Punkten P, Q gibt es genau einen Vektor $\vec{v}$ mit $Q = \vec{v} + P$

(A3) $(\vec{w} + \vec{v}) + P = \vec{w} + (\vec{v} + P)$

(A4) $\vec{0} + P = P$

(A3-4) besagen, dass man eine *Wirkung* der Gruppe V auf $\mathcal{P}$ hat und es folgt $\vec{-v} + \vec{v} + P = P$, d.h. die *Verschiebungen (Translationen)* $P \mapsto \vec{v} + P$ sind bijektive Abbildungen von $\mathcal{P}$.

(A2) besagt, dass die Wirkung von V *scharf transitiv* ist und wir schreiben den durch P und Q eindeutig bestimmten Vektor $\vec{v}$ als

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} \;\Leftrightarrow\; Q = \vec{v} + P$$

Es folgt, dass die Wirkung auch *treu* ist: verschiedene Vektoren bewirken verschiedene Verschiebungen.

6.2 Affine Teilräume

Ein affiner Teilraum eines affinen Raums ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}$ der Gestalt

$$U + P = \{\vec{u} + P \mid \vec{u} \in U\}$$

mit einem Untervektorraum U von V und Punkt $P \in \mathcal{P}$. Dabei ist U eindeutig bestimmt und

$$U + P = U + Q \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{PQ} \in U$$

Also kann man $\dim U$ als *Dimension* von $U + P$ definieren. Die leere Menge soll auch als affiner Teilraum gelten. Beispiele sind Punkte, Geraden, Ebenen des Anschauungsraums mit Dimension $0, 1, 2$.

Beweis. Aus $U + P = W + Q$ folgt $P = \vec{w} + Q$ für ein $\vec{w} \in W$ und ebenso $Q = \vec{u} + P$ mit $\vec{u} \in U$. Dann $P = \vec{w} + \vec{u} + P$, also $\vec{u} = -\vec{w}$. □

Geraden und *Ebenen* eines affinen Raums sind die 1- bzw. 2-dimensionalen affinen Teilräume. Man kann dann zeigen (Übung!), dass es zu je 2 Punkten $P_1 \neq P_2$ genau eine sie enthaltende Gerade gibt und zu je drei Punkten P_1, P_2, P_3, von denen keine zwei auf einer Geraden liegen, genau eine sie enthaltende Ebene. Schliesslich ist $X \subseteq \mathcal{P}$ genau dann affiner Teilraum, wenn mit den P_i auch die durch sie bestimmte Gerade bzw. Ebene in X liegt (ist $1 + 1 \neq 0$ so genügt es, die Geraden zu betrachten).

6.3 Affine Struktur eines Vektorraums

Jeden Vektorraum V kann man als affinen Raum mit Punktmenge $\mathcal{P} = V$ auffassen:

$$(\vec{v}, \vec{p}) \mapsto \vec{v} + \vec{p}$$

d.h. man versteht die Elemente von V einerseits als Vektoren, andererseits als Ortsvektoren. Damit kann man auch von *affinen Teilräumen* eines Vektorraums sprechen. Sie sind von der Form

$$U + \vec{p} = \{\vec{u} + \vec{p} \mid \vec{u} \in U\}$$

mit festem Untervektorraum U und (Orts)Vektor $\vec{p}$.

7 Koordinaten

7.1 Lineare Abbildung

Sind V, W zwei K-Vektorräume, so ist eine Abbildung $\phi : V \to W$ *linear* (genauer: K-linear), wenn folgende *Linearitäts*bedingungen gelten

$$\phi(\vec{x} + \vec{y}) = \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y}), \;\; \phi(r\vec{x}) = r\phi(\vec{x}) \;\text{ für alle } \vec{x}, \vec{y} \text{ in } V,\; r \text{ in } K.$$

Lemma 7.1 *Ist $\phi : V \to W$ linear, so gilt*

$$\phi(\vec{0}) = \vec{0} \;\; \phi(\sum_i r^i \vec{v}_i) = \sum_i r^i \phi(\vec{v}_i)$$

Beweis. $\phi(\vec{0}_V) = \phi(0\vec{0}_V) = 0\phi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ Die zweite Behauptung folgt leicht mit Induktion über n (und der Wohldefiniertheit von ϕ):

$$\phi(\sum_{i=1}^{n} r^i\vec{v}_i) = \phi(\sum_{i=1}^{n-1} r^i\vec{v}_i) + \phi(r^n\vec{v}_n) = \sum_{i=1}^{n-1} r^i\phi(\vec{v}_i) + r^n\phi(\vec{v}_n) = \sum_{i=1}^{n} r^i\phi\vec{v}_i \quad \square$$

Lemma 7.2 *Seien V, W Vektorräume über K, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ eine Basis von V und $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ Vektoren in W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ mit $\phi(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ für $i = 1, \ldots, n$.*

Beweis. Definiere

$$\phi(\sum_i r^i\vec{v}_i) = \sum_i r^i\vec{w}_i) \qquad \text{für jede Wahl von } r^i \in K$$

Die Wohldefiniertheit folgt sofort aus der Eindeutigkeit der Darstellung $\sum_i r^i\vec{v}_i$ in V. Zur Linearität:

$$\begin{array}{l} \phi(\sum_i r^i\vec{v}_i + \sum_i s^i\vec{v}_i) = \phi(\sum_i(r^i + s^i)\vec{v}_i) = \sum_i(r^i + s^i)\phi(\vec{v}_i) \\ = \sum_i r^i\phi(\vec{v}_i + \sum_i s^i\phi(\vec{v}_i) = \phi(\sum_i r^i\vec{v}_i) + \phi(\sum_i s^i\vec{v}_i) \\ \phi(s\sum_i r^i\vec{v}_i) = \phi(\sum_i sr^i\vec{v}_i) = \sum_i sr^i\phi(\vec{v}_i) = s\sum_i r^i\phi(\vec{v}_i) = s\phi(\sum_i r^i\vec{v}_i) \end{array}$$

Die Eindeutigkeit von ϕ folgt aus dem vorangehenden Lemma. $\square$

7.2 Isomorphie

Eine bijektive lineare Abbildung $\phi : V \to W$ heisst auch ein *Isomorphismus*. Gibt es einen Isomorphismus von V auf W, so heissen V und W isomorph und man schreibt $V \cong W$. Insbesondere ist dann ϕ^{-1} ein Isomorphismus von W auf V.

Bespiele: Der Anschauungsraum ist isomorph zu $\mathbb{R}^3$. Der Zeilenraum K^{n*} ist isomorph zum Spaltenraum K^n. Ist σ eine Permutation von $\{1, \ldots, m\}$, so erhält man einen Isomorphismus von K^m auf K^m durch

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^{\sigma 1} \\ \vdots \\ x^{\sigma m} \end{pmatrix}.$$

Korollar 7.3 *Sei $\phi : V \to W$ ein Isomorphismus. Dann gilt für $\vec{v}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ in V und $U \subseteq V$*

$\vec{v} = \vec{0}$	$\Leftrightarrow$	$\phi(\vec{v}) = \vec{0}$
$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ *unabhängig in* V	$\Leftrightarrow$	$\phi(\vec{v}_1), \ldots, \phi(\vec{v}_n)$ *unabhängig in* W
U *Untervektorraum von* V	$\Leftrightarrow$	$\phi(U)$ *Untervektorraum von* W
U *erzeugt von* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$	$\Leftrightarrow$	$\phi(U)$ *erzeugt von* $\phi(\vec{v}_1), \ldots, \phi(\vec{v}_n)$
$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ *Basis von* V	$\Leftrightarrow$	$\phi(\vec{v}_1), \ldots, \phi(\vec{v}_n)$ *Basis von* W

$$\dim V = \dim W \quad \textit{und} \ \dim U = \dim \phi(U) \ \textit{für jeden Untervektorraum } U \textit{ von } V$$

Bei einem Isomorphimus übertragen sich alle Eigenschaften analog auf die Bilder.

Korollar 7.4 *Seien V, W Vektorräume über K, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ eine Basis von V und $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ eine Basis von W. Dann gibt es genau einen Isomorphismus $\phi : V \to W$ mit $\phi(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ für $i = 1, \ldots, n$.*

Beweis. Wir wissen schon ,dass es eine lineare Abbildung ϕ gibt. Ist $w \in W$ so hat man eine Darstellung $\vec{w} = \sum_i r^i \vec{w}_i$ also $\vec{w} = \phi(\sum_i r^i \vec{v}_i)$. Also ist $\phi : V \to W$ surjektiv. Gelte $\phi(\vec{v}) = \phi(\vec{v}')$. Da die $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ erzeugen, hat man Linearkombinationen $\vec{v} =$ und $\vec{v}' = \sum_i r'^i \vec{v}_i$, und es folgt $\sum_i r^i \vec{w}_i = \phi(\vec{w}) = \phi(\vec{w}') = \sum_i r'^i \vec{w}_i$. Dann $r^i = r'^i$, da die $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ unabhängig sind. Das ergibt $\vec{v} = \vec{v}'$ und die Injektivität von ϕ. □

Korollar 7.5 *Sind V, W K-Vektorräume und* $\dim V < \infty$ *so*

$$\boxed{V \cong W \quad \Leftrightarrow \quad \dim V = \dim W, \quad \dim V = n < \infty \Rightarrow V \cong K^n}$$

Korollar 7.6 $K^n \cong K^m \quad \Leftrightarrow \quad n = m.$

7.3 Koordinaten

Korollar 7.7 *Ist $\alpha : \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ Basis des K-Vektorraumes V, so hat man den (*Koordinaten-*) Isomorphismus κ von V auf K^m*

$$\vec{x} = \sum x^i \vec{v}_i \mapsto \kappa(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix} = \vec{x}^\alpha \quad \vec{v}_i \mapsto \boldsymbol{e}_i$$

- *Vektoren $\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_n$ sind unabhängig genau dann, wenn ihre Koordinatenspalten $\vec{x}_1^\alpha, \ldots, \vec{x}_n^\alpha$ unabhängig sind.*
- *$\vec{x}$ ist im Erzeugnis der $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ genau dann, wenn $\vec{x}^\alpha$ im Erzeugnis der $\vec{x}_1^\alpha, \ldots \vec{x}_n^\alpha$ ist*
- *$\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_n$ ist Basis von V genau dann, wenn $n = m = \dim V$ und $\vec{x}_1^\alpha, \ldots \vec{x}_n^\alpha$ Basis von K^m*

7.4 Affine Koordinaten

Ein *Koordinatensystem* α eines affinen Raums besteht aus einem ausgezeichneten Punkt (*Ursprung*) O_α und einer Basis $\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_n$ des Vektorraums V. Dann hat jeder Punkt $P \in \mathcal{P}$ eine eindeutige Darstellung

$$P = \sum_{i=1}^n r^i \vec{a}_i + O_\alpha$$

und die r^i sind die Koordinaten des 'Ortsvektors' $\overrightarrow{O_\alpha P}$ bzgl. der Basis $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, die wir auch mit $\vec{\alpha}$ notieren. Wir schreiben die *Koordinaten* als

$$P^\alpha = \begin{pmatrix} r^1 \\ \vdots \\ r^n \end{pmatrix} = \overrightarrow{O_\alpha P}^{\vec{\alpha}}$$

8 Matrizen und Koordinatentransformation

8.1 Matrizen

Definition. Eine $m \times n$-*Matrix*

$$A = (a^i_j) = (a^i_j)_{m \times n} = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a^m_1 & \dots & a^m_n \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

über K wird angegeben durch ein (rechteckiges) Schema von Zahlen (*Koeffizienten, Einträgen*) a^i_j aus K, wobei $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$. Oder eine mit den Paaren ij indizierte Liste. Die Einträge $a^i_1, \dots, a^i_n$ bilden die i-te *Zeile*, die Einträge $a^1_j, \dots, a^m_j$ die j-te *Spalte*. Zeilen bzw. Spalten können demnach als Spezialfälle von Matrizen aufgefasst werden. Man lese: m kreuz n Matrix.

8.2 Addition

Matrizen kann man mit Skalaren multiplizieren

$$rA = (ra^i_j)_{m \times n}$$

und Matrizen gleichen Formats kann man addieren

$$A + B = (a^i_j + b^i_j)_{m \times n}$$

Die *Nullmatrix* hat nur Einträge 0 hat und wird mit O ggf. mit $O_{m \times n}$ bezeichnet.

Bemerkung 8.1 *Die $m \times n$-Matrizen über K bilden einen K-Vektorraum*

$$r \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a^m_1 & \dots & a^m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra^1_1 & \dots & ra^1_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ra^m_1 & \dots & ra^m_n \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a^m_1 & \dots & a^m_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1_1 & \dots & b^1_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b^m_1 & \dots & b^m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 + b^1_1 & \dots & a^1_n + b^1_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a^m_1 + b^m_1 & \dots & a^m_n + b^m_n \end{pmatrix}$$

Bezeichnen wir die Spalten von A und B mit $\boldsymbol{a}_j$ und $\boldsymbol{b}_j$, so hat $A + B$ die Spalten $\boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{b}_j$ und rA die Spalten $r\boldsymbol{a}_j$.

8.3 Matrix mal Spalte

Für eine $m \times n$ Matrix $A = (a^i_j)$ über K und eine Spalte $\boldsymbol{b}$ aus K^n wird definiert

$$A\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a^m_1 & \dots & a^m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 b^1 + \dots + a^1_n b^n \\ \vdots \\ a^m_1 b^1 + \dots + a^m_n b^n \end{pmatrix} \text{ in } K^m$$

d.h. die i-te Komponente von $A\boldsymbol{b}$ erhält man, indem man die i-te Zeile von A komponentenweise mit $\boldsymbol{b}$ multipliziert und dann aufaddiert. Daher müssen die Zeilen von A genauso lang sein wie die Spalten $\boldsymbol{b}$.

b^1	$\ldots$	b^n	
a_1^1	$\ldots$	a_n^1	$a_1^1 b^1 + \ldots + a_n^1 b^n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_1^m	$\ldots$	a_n^m	$a_1^m b^1 + \ldots + a_n^m b^n$

Aus den Regeln (K1-10) für das Rechnen in Körpern erhält man sofort

$$A(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = A\boldsymbol{b} + A\boldsymbol{c} \quad A(r\boldsymbol{b}) = r(A\boldsymbol{b}), \quad A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}, \quad (A+B)\boldsymbol{c} = A\boldsymbol{c} + B\boldsymbol{c}$$

Bemerkung. Für das zweite Gesetz braucht man das Kommutativgesetz (K10). Das könnte man vermeiden, indem man Matrizen und Skalare auf verschiedene Seiten schreibt, z.B. $A\boldsymbol{b}r$ oder, wenn man von links nach rechts schreibt, $r\boldsymbol{b}A$ mit $\boldsymbol{b}$ als Zeile. Dabei erkennt man, dass es nur um das Assoziativgesetz (K5) geht.

8.4 Matrizenprodukt

Die $n \times n$-*Einheitsmatrix* E_n hat Diagonale $e_i^i = 1$ und sonst überall Null

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Das Produkt einer $l \times m$-Matrix A mit einer $m \times n$-Matrix B über K ist die $l \times n$-Matrix $C = AB$

$$(a_j^i)_{l\times m}(b_k^j)_{m\times n} = (c_k^i)_{l\times n} = (a_1^i b_k^1 + \ldots + a_m^i b_k^m)_{l\times n}$$

$$A(\boldsymbol{b}_1 \ldots \boldsymbol{b}_n) = (A\boldsymbol{b}_1 \ldots A\boldsymbol{b}_n)$$

D.h. man rechnet i-te Zeile von A komponentenweise mal k-te Spalte von B und addiert auf, um c_k^i zu erhalten. Manche mögen's so

			b_1^1	$\ldots$	b_n^1
			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
			b_1^m	$\ldots$	b_n^m
a_1^1	$\ldots$	a_m^1	$a_1^1 b_1^1 + \ldots + a_m^1 b_1^m$	$\ldots$	$a_1^1 b_n^1 + \ldots + a_m^1 b_n^m$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_1^l	$\ldots$	a_m^l	$a_1^l b_1^1 + \ldots + a_m^l b_1^m$	$\ldots$	$a_1^l b_n^1 + \ldots + a_m^l b_n^m$

Proposition 8.2 *Es gelten dann die folgenden Regeln, soweit die Operationen für die Matrizen überhaupt ausführbar sind*

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC$$

$$(rA)B = r(AB) = A(rB), \quad A(BC) = (AB)C$$
$$E_m A = A = AE_n.$$

*Für festes n bilden die (*quadratischen*) $n \times n$-Matrizen einen Ring mit Eins.*

Beweis. Wir beweisen nur die Assoziativität - alles andere folgt sofort aus den Gesetzen für 'Matrix mal Spalte'. Auch dabei können wir annehmen, dass $C = \boldsymbol{c}$ eine Spalte ist. Wir rechnen

$$A(B\boldsymbol{c}) = A \begin{pmatrix} b_1^1 c_1 + \ldots + b_n^1 c_n \\ \vdots \\ b_1^m c_1 + \ldots + b_n^m c_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1^1(b_1^1 c_1 + \ldots + b_n^1 c_n) + \ldots + a_m^1(b_1^m c_1 + \ldots + b_n^m c_n) \\ \vdots \\ a_1^l(b_1^1 c_1 + \ldots + b_n^1 c_n) + \ldots + a_m^l(b_1^m c_1 + \ldots + b_n^m c_n) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (a_1^1 b_1^1 + \ldots + a_m^1 b_1^m)c_1 + \ldots + (a_1^1 b_n^1 + \ldots + a_m^1 b_n^m)c_n \\ \vdots \\ (a_1^l b_1^1 + \ldots + a_m^l b_1^m)c_1 + \ldots + (a_1^l b_n^1 + \ldots + a_m^l b_n^m)c_n \end{pmatrix}$$
$$= (AB)\boldsymbol{c}$$

Warnend sei vermerkt, dass für Matrizen im Allgemeinen $AB \neq BA$, und dass man aus $AB = O$ nicht auf $A = O$ oder $B = O$ schliessen kann.

8.5 Matrixalgebra

Ist K ein kommutativer Körper, so ist eine (assoziative) K-*Algebra* (mit Eins) ein K-Vektorraum V und gleichzeitig ein Ring mit Eins, beides bezüglich derselben Addition, und es wird noch verlangt, dass

$$\forall r \in K. \forall v \in V. \forall w \in V.\ r(v \cdot w) = (rv) \cdot w = v \cdot (rw)$$

Somit gilt

Die $n \times n$-Matrizen über dem Körper K bilden eine K-Algebra $K^{n \times n}$

8.6 Invertierbare Matrizen

Eine $n \times n$-Matrix A heisst *invertierbar* oder *regulär*, wenn es eine Matrix B gibt mit

$$AB = BA = E$$

B ist dabei eindeutig bestimmt: aus $AC = E$ folgt $B = BAC = EC = C$. Wir dürfen daher schreiben

$$B = A^{-1}$$

Es folgt für invertierbare A, B

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

Korollar 8.3 *Die invertierbaren Matrizen in* $K^{n\times n}$ *bilden eine Gruppe* $\mathsf{GL}(n,K)$ *bzgl. der Multiplikation.*

Später werden wir zeigen, dass A schon dann invertierbar ist, wenn das Gleichungssystem $AX=E$ aus n^2 Gleichungen lösbar ist - und dann $X=A^{-1}$.

8.7 Koordinatentransformation

Seien $\alpha:\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_m$ und $\beta:\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_m$ zwei Basen des K-Vektorraums V. Wie rechnet man die Koordinaten $\vec{x}^\alpha$ und $\vec{x}^\beta$ ineinander um? Es sei $S={}_\alpha T_\beta$ die *Transformationsmatrix* mit den Koordinatenspalten $\vec{w}_j^\alpha$ der $\vec{w}_j$ bzgl α als Spalten, also

$$S={}_\alpha T_\beta=(\vec{w}_1^\alpha\ldots\vec{w}_m^\alpha),\quad \vec{w}_j=s_j^1\vec{v}_1+\ldots+s_j^m\vec{v}_m$$

Dann ist S invertierbar und es gilt:

$$\boxed{\vec{x}^\alpha={}^\alpha T_\beta\vec{x}^\beta\ ,\quad \vec{x}^\beta={}^\beta T_\alpha\vec{x}^\alpha\ \text{ mit }\ {}^\beta T_\alpha={}^\alpha T_\beta^{-1}}$$

Die Transformationsmatrix $S={}^\alpha T_\beta$ leistet die Koordinatenumrechnung von der 'neuen' Basis β in die 'alte' Basis α. In ihren Spalten stehen die Koordinaten der neuen Basisvektoren bzgl. der alten Basis. Für die Umrechnung von 'alt' auf 'neu' benutzt man die inverse Matrix $S^{-1}={}^\beta T_\alpha$

Beweis.
$$\vec{x}=\sum_j y^j\vec{w}_j=\sum_j y^j\sum_i s_j^i\vec{v}_i=\sum_{i,j}s_j^i y^j\vec{v}_i=\sum_i(\sum_j s_j^i y^j)\vec{v}_i$$
Also $\vec{x}^\alpha={}^\alpha T_\beta\vec{x}^\beta$. Durch Vertauschen der Rollen $\vec{x}^\beta={}^\beta T_\alpha\vec{x}^\alpha$, also $\vec{x}^\alpha={}^\alpha T_\beta\,{}^\beta T_\alpha\vec{x}^\alpha$. Das gilt insbesondere für die $\vec{x}^\alpha=\boldsymbol{e}_j$, also $E={}^\alpha T_\beta\,{}^\beta T_\alpha E$. □

Ist eine Basis α des m-dimensionalen K-Vektorraums V gegeben, so kann man jede invertierbare $m\times m$-Matrix S auf genau eine Weise als Transformationsmatrix $S={}^\alpha T_\beta$ auffassen, nämlich mit der Basis β deren Koordinaten bzgl. α durch die Spalten von S gegeben sind.

8.8 Affine Koordinatentransformation

Lemma 8.4 *Gegeben seien zwei Koordinatensysteme α und β eines affinen Raums und ${}^{\vec{\alpha}}T_{\vec{\beta}}$ die Transformationsmatrix für die Basen $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. Dann*

$$P^\alpha={}^{\vec{\alpha}}T_{\vec{\beta}}\,P^\beta+(O_\beta)^\alpha={}^{\vec{\alpha}}T_{\vec{\beta}}\,P^\beta+\vec{v}^{\,\vec{\alpha}}\ \textit{ wobei }\vec{v}=\overrightarrow{O_\alpha O_\beta}.$$
$$P^\alpha=P^\beta+\overrightarrow{O_\alpha O_\beta}^\alpha\quad \textit{falls }\vec{\alpha}=\vec{\beta}$$

Beweis wie für die Anschauungsebene. Sei

$$P=\vec{x}+O_\alpha=\vec{y}+O_\beta.$$

Dann

$$\vec{y}^{\,\vec{\alpha}}={}^{\vec{\alpha}}T_{\vec{\beta}}\,\vec{y}^{\,\vec{\beta}},\quad \vec{v}^{\,\vec{\alpha}}=(O_\beta)^\alpha$$
$$\vec{x}=\vec{y}+\vec{v},\ \ P^\alpha=\vec{x}^{\,\vec{\alpha}}=\vec{y}^{\,\vec{\alpha}}+\vec{v}^{\,\vec{\alpha}}\qquad □$$

8.9 Elementarmatrizen

Eine elementare Umformung der Spalten einer $m \times n$-Matrix A ergibt eine neue Matrix AS wobei S eine $n \times n$-*Elementarmatrix* ist - sie ensteht aus E durch die entsprechende elementare Umformung. Die 2×2 Elementarmatrizen sind

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen, hat man die entsprechenden Einträge in den Positionen $s_i^i, s_j^i, s_i^j, s_j^j$, wenn die i-te und j-te Spalte betroffen sind, ansonsten 1 auf der Diagonalen, 0 ausserhalb.

Die Elementarmatrizen sind invertierbar (weil die Umformungschritte rückgängig gemacht werden können. Bei den 2×2-Matrizen haben wir die Inversen

$$\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8.10 Verfahren zur Matrixinversion

Lemma 8.5 *Sei A eine $n \times n$-Matrix und E die $n \times n$-Einheitsmatrix. Kann man durch elementare Umformungen*

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix}$$

erreichen, so ist B die Inverse von A.

Beweis. Wir haben nach Voraussetzung

$$\begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \cdot S \quad \text{mit } S = S_1 \cdots S_k$$

und elementaren, also invertierbaren S_i. Also sind auch S invertierbar und

$$E = A \cdot S, \;\; B = E \cdot S = S$$

Es folgt

$$S^{-1} = ES^{-1} = ASS^{-1}AE = A, \quad A^{-1} = S$$

9 Unitäre und euklidische Räume

9.1 Inneres Produkt in der Elementargeometrie

Wir setzen voraus, dass wir eine Längenmessung haben, d.h. dass zu je zwei Punkten P, Q einen Abstand $d(P, Q)$ so, dass die Aussagen der Kongruenzgeometrie erfüllt sind. Insbesondere sind also gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms gleich lang und wir können die Länge von Vektoren als die Länge repräsentierender Pfeile definieren

$$|\overrightarrow{PQ}| = d(P, Q)$$

Den Zusammenhang zwischen Skalaren und Längen müssen wir aber in die geometrische Axiomatik einbauen

$$|r\vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$$

Den Begriff des rechten Winkels können wir nun definieren

- $\angle QPR$ ist recht genau dann, wenn $P = Q$ oder wenn es Q' auf der Geraden durch PQ gibt mit $d(P, Q) = d(P, Q'),\ \ d(R, Q) = d(R, Q')$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow$ ein/alle $\angle QPR$ mit $\overrightarrow{PQ} = \vec{a},\ \overrightarrow{PR} = \vec{b}$ sind recht

Wir müssen aber wieder auf die Elementargeometrie zurückgreifen, um Folgendes behaupten zu können

- $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow r\vec{a} \perp s\vec{b}$
- Zu jeder Geraden g mit Richtungsvektor $\vec{a}$ und Punkt Q gibt es genau einen Punkt $R \in g$ (den *Fusspunkt des Lotes* von Q auf g) so, dass $\overrightarrow{RQ} \perp \vec{a}$

Damit können wir nun den auch physikalisch grundlegenden Begriff der *Komponente* $\vec{c}$ eines Vektor $\vec{b}$ in der durch einen Vektor $\vec{a}$ gegebenen Richtung definieren durch die Bedingungen (Fig. 1)

$$\vec{c} \in \mathbb{R}\vec{a},\ \ (\vec{b} - \vec{c}) \perp \vec{a}$$

In der Tat, ist $\vec{a} \neq \vec{0}$, so wähle man einen Punkt O und g als die Gerade durch O mit Richtungsvektor $\vec{a}$ und $Q = \vec{b} + O$. Dann ergibt sich $\vec{c}$ eindeutig als $\vec{c} = \overrightarrow{OR}$ mit R dem Fusspunkt des Lotes von Q auf g. Ist $\vec{a} = \vec{0}$, so auch $\vec{c} = \vec{0}$.

/la97/fig/eu3.eepic /la97/fig/eu3.eepic

Das *skalare* oder *innere Produkt* $\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle$ ist nun mithilfe der Komponente $\vec{c}$ definiert durch

$$\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } \vec{a} = \vec{0} \\ \frac{r}{|\vec{a}|^2} & \text{falls } \vec{c} = r\vec{a} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Die wichtigste andere Schreibweise für $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle$ ist $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Insbesondere ist $\langle \vec{a} \mid \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2$ und es gilt $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = 0$ genau dann, wenn $\vec{a} \perp \vec{b}$. Geometrische Überlegungen führen zu den Regeln (E wie Euklid)

$(E1-3)$ $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = \langle \vec{b} \mid \vec{a} \rangle,\ \ \langle s\vec{a} \mid \vec{b} \rangle = s\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = \langle \vec{a} \mid s\vec{b} \rangle,\ \ \langle \vec{a} \mid \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle + \langle \vec{a} \mid \vec{c} \rangle,$

$$(E4) \quad \langle \vec{a} \mid \vec{a} \rangle > 0 \text{ für } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ und } |\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a} \mid \vec{a} \rangle}.$$

Beweis. (Fig. 2) Zu (E2). Für $s\vec{a} \neq \vec{0}$ anstelle von $\vec{a}$ haben wir dieselbe Komponente

$$\vec{c} = \frac{\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{s\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle}{s^2|\vec{a}|^2}s\vec{a} = \frac{s\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle}{|s\vec{a}|^2}s\vec{a}$$

also $\langle s\vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle = s\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle$ nach Definition. Für $s\vec{b}$ anstelle von $\vec{b}$ haben wir $s\vec{b} - s\vec{c} = s(\vec{b} - \vec{c}) \perp \vec{a}$, also die Komponente

$$s\vec{c} = \frac{s\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

und damit $\langle \vec{a} \,|\, s\vec{b} \rangle = s\langle \vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle$.

/la97/fig/eu4.eepic /la97/fig/eu4.eepic /la97/fig/eu5.eepic /la97/fig/eu5.eepic

Zu (E3): Den Beweis für den Fall $|\vec{a}| = 1$ entnimmt man der Zeichnung. Für $\vec{a} = \vec{0}$ ist (E3) trivial. Andernfalls hat man $\vec{a} = s\vec{a}'$ mit $s = |\vec{a}|$ und $\vec{a}' = \frac{1}{s}\vec{a}$, also $|\vec{a}'| = \frac{1}{s}|\vec{a}| = 1$. Mit (E2) und dem bekannten Fall: $\langle \vec{a} \mid, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle s\vec{a}' \mid \vec{b} + \vec{c} \rangle = s\langle \vec{a}' \mid \vec{b} + \vec{c} \rangle = s(\langle \vec{a}' \mid \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}' \mid \vec{c} \rangle) = s\langle \vec{a}' \mid \vec{b} \rangle + s\langle \vec{a}' \mid \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle + \langle \vec{a} \mid \vec{c} \rangle$. Nach dem gleichen Muster geht die Reduktion von (E1) auf den Fall $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ und dieser folgt entsprechend der Zeichnung.

/la97/fig/eu6.eepic /la97/fig/eu6.eepic

Satz 9.1 *(Pythagoras) Für ein Dreieck PQR gilt*

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 + |\overrightarrow{PR}|^2 = |\overrightarrow{RQ}|^2 \textit{ genau dann, wenn } \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PR}.$$

Beweis. Sei $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$. Dann ist $\overrightarrow{RQ} = \vec{a} - \vec{b}$. Nun gilt $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \langle \vec{a} + (-1)\vec{b} \mid \vec{a} + (-1)\vec{b} \rangle =_{(E3)} \langle \vec{a} \mid \vec{a} \rangle + \langle \vec{a} \mid (-1)\vec{b} \rangle + \langle (-1)\vec{b} \mid \vec{a} \rangle + \langle \vec{b} \mid \vec{b} \rangle =_{(E1,2,4)} |\vec{a}|^2 - 2\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle + |\vec{b}|^2$. Somit gilt $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}^2 + |\vec{b}|^2$ genau dann, wenn $2\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = 0$, d.h. wenn $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = 0$. Man kann sich natürlich darum streiten, welchen Sinn die Herleitung des Pythagoras aus (E1-4) macht, steckt doch in der Begründung dieser und der vorangegangenen Regeln ein Quantum an Geometrie, das das für den Pythagoras benötigte weit übersteigt.

9.2 Komplexe Zahlen

Skalarprodukte behandelt man am besten gleich so, dass komplexe Vektorräume mit eingeschlossen sind. Wir geben daher eine knappe Einführung der komplexen Zahlen - eine ausführliche Diskussion folgt später.

Die Elemente des Körpers $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen* haben eine eindeutige Darstellung der Form

$$a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

wobei i ein ausgezeichnetes Element von $\mathbb{C}$ ist mit der Eigenschaft

$$i^2 = -1$$

und $\mathbb{R}$ als ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ aufgefasst wird (d.h. Addition und Multiplikation reeller Zahlen wie gehabt). Damit ist auch das Rechnen in $\mathbb{C}$ eindeutig festgelegt. Es bleibt nur die Frage der Existenz, die wir bis auf weiteres den Dogmatikern überlassen. Wichtiger ist uns die Operation des *Konjugierens*

$$z = a + bi \mapsto \overline{z} = a - bi$$

Diese ist mit Addition und Multiplikation verträglich, trivial auf $\mathbb{R}$ und ihre eigene Umkehrung

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad \overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}, \quad \overline{\overline{z}} = z$$

Insbesondere ist

$$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{für } z = a + bi$$

und wir können den *Betrag* definieren durch

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

und haben sofort

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

9.3 Skalarprodukte

Sei $K = \mathbb{C}$ bzw. $K = \mathbb{R}$ und V ein K-Vektorraum (wer sich dabei wohler fühlt, darf sich auf $K = \mathbb{R}$ und $\overline{\lambda} = \lambda$ beschränken). Ein *Skalarprodukt* auf V ist eine Abbildung $\Phi : V \times V \to K$, wir schreiben

$$\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$$

derart dass für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{array}{lllllll}
\langle \vec{x} + \vec{z} \,|\, \vec{y} \rangle & = & \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle + \langle \vec{z} \,|\, \vec{y} \rangle, & \langle \lambda\vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle & = & \overline{\lambda}\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle & \text{semilinear im ersten Argument} \\
\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} + \vec{z} \rangle & = & \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} \,|\, \vec{z} \rangle, & \langle \vec{x} \,|\, \lambda\vec{y} \rangle & = & \lambda\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle & \text{linear im zweiten Argument} \\
\langle \vec{y} \,|\, \vec{x} \rangle & = & \overline{\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle} & & & & \text{hermitesch bzw. symmetrisch} \\
\langle \vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle & \geq & 0, & \langle \vec{x} \,|\, \vec{x} \rangle = 0 & \Leftrightarrow & \vec{x} = \vec{0} & \text{positiv definit}
\end{array}$$

(manche Autoren vertauschen die Rollen der Argumente, aber so ist's praktischer). V zusammen mit dem Skalarprodukt heisst auch ein *unitärer* und im reellen Fall ein *euklidischer (Vektor) Raum*. Beispiele sind die Skalarprodukte auf dem Raum der Vektoren und das *kanonische Skalarprodukt*

$$\langle \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_i x^i y^i \quad \text{auf } \mathbb{R}^n$$

$$\langle \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_i \overline{x}_i y^i \quad \text{auf } \mathbb{C}^n$$

Allgemeiner gilt: ist $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ Basis des reellen bzw. komplexen Vektorraums V und sind die $\lambda_i > 0$ in $\mathbb{R}$, so erhält man ein Skalarprodukt auf V durch

$$\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_i \lambda_i \overline{x}_i y^i \quad \text{für } \vec{x} = \sum_i x^i \vec{v}_i, \ \vec{y} = \sum_i y^i \vec{v}_i$$

Wir werden zeigen, dass sich jedes Skalarprodukt auf einem endlichdimensionalen Raum bzgl. einer passenden Basis so beschreiben lässt (und zwar mit $\lambda_i = 1$ - d.h. dass man stets eine 'Orthonormalbasis' hat. Weiterhin werden wir zeigen, das wenn man zwei Skalarprodukte $\langle \, | \, \rangle$ und Φ auf V hat, man bzgl. des 'metrischen' Skalarprodukts $\langle \, | \, \rangle$ eine Orthonormalbasis finden kann, sodass Φ wie oben beschrieben wird - das ist der für die Mechanik wichtigste Fall der 'Hauptachsentransformation'.

Weitere Beispiele sind die Räume der quadratisch summierbaren Folgen $\boldsymbol{x} = (v_k | k = 0, 1, \ldots)$ reeller bzw. komplexer Zahlen (d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^2 < \infty$) mit

$$< \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} >= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{v}_k w_k$$

und die Räume von integrierbaren Funktionen $\psi(t)$ vom reellen Intervall $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, die $\int |\psi(t)|^2 dt < \infty$ erfüllen (z.B. die stetigen ψ auf kompaktem $[a, b]$), mit

$$< \psi(t) | \phi(t) >= \int_a^b \overline{\psi(t)} \phi(t) dt.$$

9.4 Cauchy-Schwarz

$$|\langle \vec{v} \, | \, \vec{w} \rangle| \leq |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \quad \text{Cauchy-Schwarz}$$

Beweis. Für $\vec{v} = \vec{0}$ oder $\vec{w} = \vec{0}$ ist die Behauptung trivial. Andernfalls können wir $|\vec{w}| = 1$ annehmen. Setze $r = \langle \vec{w} \, | \, \vec{v} \rangle$ Dann $0 \leq |\vec{v} - r\vec{w}|^2 = \langle \vec{v} - r\vec{w} \, | \, \vec{v} - r\vec{w} \rangle = \langle \vec{v} \, | \, \vec{v} \rangle - r \langle \vec{v} \, | \, \vec{w} \rangle - \overline{r} \langle \vec{w} \, | \, \vec{v} \rangle + \overline{r} r \langle \vec{w} \, | \, \vec{w} \rangle = |\vec{v}|^2 - r\overline{r} - \overline{r} r + \overline{r} r = |\vec{v}|^2 - |r|^2$, also $|r| \leq |\vec{v}|$.

9.5 Norm

Da $\langle \vec{x} \, | \, \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (wegen der hermitischen Eigenschaft) kann man die *Länge* oder *Norm* eines Vektors definieren als

$$|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x} \, | \, \vec{x} \rangle}$$

Häufig wird auch $\|\vec{x}\|$ geschrieben. Es gelten dann die von einer Norm verlangten Eigenschaften

$$|\vec{x}| \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad |\vec{x}| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

$$|r\vec{x}| = |r||\vec{x}| \text{ für alle } r \in K$$

$$|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}| \quad \text{Dreiecksungleichung.}$$

Beweis. $|\vec{v}+\vec{w}|^2 = \langle\vec{v}\,|\,\vec{v}\rangle+\langle\vec{v}\,|\,\vec{w}\rangle+\langle\vec{w}\,|\,\vec{v}\rangle+\langle\vec{w}\,|\,\vec{w}\rangle \leq |\vec{v}|^2+2|\vec{v}||\vec{w}|+|\vec{w}|^2 = (|\vec{v}|+|\vec{w}|)^2$.

Ein Vektor von Länge 1 ist ein *Einheitsvektor* oder *normiert*. Ist $\vec{x} \neq \vec{0}$, so erhält man durch Normieren den Einheitvektor

$$\frac{1}{|\vec{x}|}\vec{x}$$

9.6 Metrischer affiner Raum

Hat man einen affinen Raum mit Punktmenge $\mathcal{P}$ und euklidischem oder unitärem Vektorraum V, so kann man den Abstand zwischen zwei Punkten so definieren

$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}|$$

Damit wird $\mathcal{P}$ zum *metrischen Raum* - es gilt

$$d(P,Q) = d(Q,P) \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$$

$$d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$$

Aber: Es gibt auch andere Metriken auf affinen Räumen, z.B. die 1-Metrik $d(P,Q) = \sum_i |x^i|$ mit $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{PQ}^{\alpha}$ bzgl. eine Basis α - für die reelle Ebene ist das die "Taximetrik" in einer Stadt mit Strassennetz bestehend aus 2 Parallelscharen.

9.7 Orthogonalität

Zwei Vektoren stehen aufeinander *senkrecht*

$$\vec{x} \perp \vec{y} \text{ genau dann wenn } \langle\vec{x}\,|\,\vec{y}\rangle = 0.$$

Es gilt $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{y} \perp \vec{x}$ und der Satz von Pythagoras

$$|\vec{v}+\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{w}.$$

In reellen Fall ist der *Winkel* ϕ zwischen zwei (von $\vec{0}$ verschiedenen) Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gegeben (bis auf Vielfache von π) durch

$$\cos\phi = \frac{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}{|\vec{v}||\vec{w}|}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

9.8 Orthogonalraum

Für $X \subseteq V$ erhalten wir einen Untervektorraum, den *zu* X *orthogonalen*

$$X^{\perp} = \{\vec{y} \in V \mid \forall\vec{x} \in X.\ \vec{x} \perp \vec{y}\}$$

$$\boxed{X \cap X^{\perp} = \{\vec{0}\}. \text{ Wird } U \text{ von } X \text{ erzeugt, so } U^{\perp} = X^{\perp}}$$

Beweis. Trivialerweise $U^{\perp} \subseteq X^{\perp}$. Ist $\vec{y} \in X^{\perp}$ und $\vec{u} \in U$, so $u = \sum r^i\vec{x}_i$ mit $\vec{x}_i \in X$, also $\langle\vec{y}\,|\,\vec{u}\rangle = \sum r^i\langle\vec{y}\,|\,\vec{x}_i\rangle = 0$. Also $\vec{y} \in U^{\perp}$.

9.9 Normalengleichung

Einen $n-1$-dimensionalen affinen Teilraum T in einem n-dimensionalen metrischen affinen Raum (z.B. eine Gerade g in der Ebene bzw. Ebene E in Raum) kann man bei ausgezeichnetem Ursprung O auch durch eine *Normalengleichung* beschreiben:

$$T = \{P \in \mathcal{P} \mid \langle \vec{n} \,|\, \overrightarrow{PQ} \rangle = d\}$$

Dabei ist $\vec{n}$ ein *Normalenvektor*, der auf T senkrecht steht, und d eine reelle Zahl. Ist $\vec{n}$ und ein Punkt $P \in T$ bekannt, so ergibt sich $d = \langle \vec{n} \mid \overrightarrow{OP} \rangle$ und man hat

$$T = \{\vec{n}\}^{\perp} + P$$

Durch Multiplikation mit $\pm|\vec{n}|^{-1}$ kann man die Gleichung in *Hessesche Normalform* überführen, d.h. erreichen, dass $|\vec{n}| = 1$ und $d \geq 0$. Dann bedeutet d den Abstand von T vom Ursprung und $\vec{n}$ zeigt von O in Richtung auf T. Sind T_1 und T_2 beide in dieser Form gegeben, so ergibt sich der Abstand als

$$d = |d_1 - d_2|$$

/la97/fig/eu8.eepic /la97/fig/eu8.eepic
/la97/fig/eu9.eepic /la97/fig/eu9.eepic
/la97/fig/eu10.eepic /la97/fig/eu10.eepic

9.10 Orthonormalbasen

Ein System $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ von Vektoren ist *orthogonal*, falls $\vec{v}_i \perp \vec{v}_j$ für alle $i < j$, und *orthonormal*, falls auch $|\vec{v}_i| = 1$ für alle i. Für ein Orthonormalsystem gilt (Fig.3)

$$\vec{x} = x^1\vec{v}_1 + \ldots + x^m\vec{v}_m \;\Rightarrow\; x^i = \langle \vec{v}_i \,|\, \vec{x} \rangle$$

also ist es insbesondere unabhängig und damit *Orthonormalbasis* , kurz ON-Basis, des von ihm erzeugten Untervektorraums. Die kanonischen Basen von $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{R}^n$ sind offensichtlich ON-Basen bzgl. des kanonischen Skalarprodukts.

/la97/fig/eu7.eepic /la97/fig/eu7.eepic

/la97/fig/eu11.eepic /la97/fig/eu11.eepic

Ist $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ eine ON-Basis von V, so berechnet sich auch das skalare Produkt aus den Koordinaten :

$$\langle x^1\vec{e}_1 + \ldots + x^n\vec{e}_n \,|\, y^1\vec{e}_1 + \ldots + y^n\vec{e}_n \rangle = \overline{r}_1 y^1 + \ldots + \overline{r}_n y^n$$

Beweis. $\langle \sum_i x^i\vec{e}_i \mid \sum_j y^j\vec{e}_j \rangle = \sum_i \langle x^i\vec{e}_i \mid \sum_j y^j\vec{e}_j \rangle = \sum_i \sum_j \langle x^i\vec{e}_i \,|\, y^j\vec{e}_j \rangle = \sum_i \sum_j x^i y^j \langle \vec{e}_i \,|\, \vec{e}_j \rangle = \sum_i x^i y^j$. $\square$ Es folgt

$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle \vec{e}_i \,|\, \vec{x} \rangle} \cdot \langle \vec{e}_i \,|\, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{e}_i \,|\, \vec{y} \rangle \cdot \langle \vec{x} \,|\, \vec{e}_i \rangle \quad \textit{Parseval}$$

$$|\vec{x}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle \vec{e}_i \,|\, \vec{x} \rangle|^2 \quad \textit{Plancherel}$$

Durch die Festlegung einer ON-Basis α geht der n-dimensionale euklidische bzw. unitäre Vektorraum V isomorph und isometrisch in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt über - via $\vec{x} \mapsto \vec{x}^\alpha$

Ein affines Koordinatensystem, das durch Ursprung und ON-Basis gegeben ist, heisst im Volksmund auch ein *kartesisches Koordinatensystem.* Legt man ein kartesisches Koordinatensystem α fest, so geht eine Normalengleichung (bzgl. des Ursprungs O_α) über in eine *Koordinatengleichung*

$$T := \{P \in \mathcal{P} \mid P^\alpha = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad n_1 x^1 + n_2 x^2 + \ldots + n_n x^n = d\}.$$

9.11 Orthonormalisierung

Bilden $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ ein ON-System, s0 erhält man zu jedem $\vec{x}$ einen auf den $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ senkrechten Vektor, d.h. ein Lot auf den von diesen ausgespannten Untervektorraum W, durch

$$\vec{y} = \vec{x} - \sum_{i=1}^{m}, \langle \vec{w}_i, \vec{x} \,|\, \vec{\rangle} w_i \neq \vec{0} \text{ falls } \vec{x} \notin W$$

In der Tat $\langle \vec{w}_j \,|\, \vec{y} \rangle = \langle \vec{w}_j \,|\, \vec{x} \rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{w}_i, \vec{x} \,|\, \langle \rangle \,|\, \vec{w}_i \rangle \vec{w}_i = \langle \vec{w}_j \,|\, \vec{x} \rangle - \langle \vec{w}_j \,|\, \vec{x} \rangle \cdot 1 = 0.$

Dies liefert ein Verfahren (*Gram-Schmidt*) um aus einem Erzeugendensystem $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ eines Untervektorraums U von V eine Orthonormalbasis $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_d$ von U herzuleiten:

- Bestimme k minimal mit $\vec{v}_k \neq 0$. Setze $d_k = 1$ und $\vec{w}_1 := \frac{1}{|\vec{v}_k|} \vec{v}_k$.
- $\vec{v}'_{k+1} = \vec{v}_{k+1} - (\langle \vec{w}_1 \,|\, \vec{v}_{k+1} \rangle \vec{w}_1 + \ldots + \langle \vec{w}_{d_k} \,|\, \vec{v}_{k+1} \rangle \vec{w}_{d_k})$,
  - Falls $\vec{v}'_{k+1} \neq \vec{0}$, so $d_{k+1} := d_k + 1$ und $\vec{w}_{d_{k+1}} := \vec{v}_{k+1} := \frac{1}{|\vec{v}'_{k+1}|} \vec{v}'_{k+1}$
  - Sonst $d_{k+1} := d_k$ und $\vec{v}_{k+1} := \vec{0}$
- $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_d$ mit $d = d_n$ ist ON-Basis von $\sum_{i=1}^{n} K \vec{v}_i$

Mit dem Basisergänzungssatz erhält man

Korollar 9.2 *Jeder Untervektorraum U eines endlichdimensionalen unitären bzw. euklidischen Raums V hat eine ON-Basis und jede ON Basis von U lässt sich zu einer ON-Basis von V ergänzen.*

9.12 Orthogonale Projektion

Lemma 9.3 *Zu jedem endlichdimensionalen Untervektorraum U eines unitären bzw. euklidischen Vektorraums V gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung π_U mit*

$$(1)\ \pi_U(\vec{x}) \in U, \quad \vec{x} \in U \Rightarrow \pi_U(\vec{x}) = \vec{x}, \quad \pi_U(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} \in U^\perp$$

Für jede ON-Basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ von U gilt

$$(2)\ \pi_U(\vec{x}) = \langle \vec{v}_1 \,|\, \vec{x}\rangle \vec{v}_1 + \ldots + \langle \vec{v}_m \,|\, \vec{x}\rangle \vec{v}_m.$$

Weiterhin für alle $\vec{x} \in V$

$$(3)\ \vec{x} - \pi_U(\vec{x}) \in U^\perp \ \ \textit{und}\ |\vec{x} - \pi_U(\vec{x})| = \min_{\vec{u} \in U} |\vec{x} - \vec{u}|.$$

Die Abbildung π_U heisst die *Orthogonalprojektion* von V auf U.

Beweis. Nach Gram-Schmidt hat U mindestens eine ON-Basis. Definiert man π_U nach (2) so ist die Linearität klar und es gilt (1). Nämlich $\pi_U(\vec{x}) = \vec{0}$ genau dann, wenn $\langle \vec{v}_i \,|\, \vec{x}\rangle = 0$ für $i = 1, \ldots, m$ genau dann, wenn $\vec{x} \in U^\perp$.

Sei nun π_U mit (1) gegeben. Dann $\pi_U(\vec{x} - \pi_U(\vec{x})) = \pi_U(\vec{x}) - \pi_U(\pi_U(\vec{x})) = \vec{0}$ also $\vec{x} - \pi_U(\vec{x}) \in U^\perp$. Ist nun $\vec{u} \in U$ so $\pi_U(\vec{x}) - \vec{u} \in U$ und nach Pythagoras $|\vec{x} - \pi_U(\vec{x})|^2 \leq |\vec{x} - \pi_U(\vec{x})|^2 + |\pi_U(\vec{x}) - \vec{u}|^2 = |(\vec{x} - \pi_U(\vec{x})) + (\pi_U(\vec{x}) - \vec{u})|^2 = |\vec{x} - \vec{u}|^2$.

Indem man π_U durch (2) definiert folgt: $\vec{x} - \sum_i \langle \vec{v}_i \,|\, \vec{x}\rangle \vec{v}_i \in U^\perp$. Die Linearität ergibt für jedes π_U mit (1), dass (und somit (2) und Eindeutigkeit)

$$\vec{0} = \pi_U(\vec{x} - \sum_i \langle \vec{v}_i \,|\, \vec{x}\rangle \vec{v}_i) = \pi_U(\vec{x}) - \sum_i \langle \vec{v}_i \,|\, \vec{x}\rangle \pi_U(\vec{v}_i) = \pi_U(\vec{x}) - \sum_i \langle \vec{v}_i \,|\, \vec{x}\rangle \vec{v}_i$$

9.13 Orthogonale Zerlegung

Korollar 9.4 *Jedes $\vec{v} \in V$ hat eindeutige Darstellung $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ mit $\vec{u} \in U, \vec{w} \in U^\perp$ Wir schreiben $V = U \oplus U^\perp$ und haben* $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

Beweis. Haben wir auch $\vec{v} = \vec{u}' + \vec{w}'$, so $\vec{u} - \vec{u}' = \vec{w} - \vec{w}' \in U \cap U^\perp$, also $= \vec{0}$. Zur Existenz: $\vec{v} = \pi_U(\vec{v}) + (\vec{v} - \pi_U(\vec{v}))$. Eine Basis von V erhält man nun als Vereinigung von Basen von U und $U^\perp$. □ Wir definieren

$$X \perp Y \ \text{ genau dann, wenn } \vec{x} \perp \vec{y} \text{ für alle } \vec{x} \in X,\ \vec{y} \in Y.$$

Seien $U_1, \ldots, U_k$ Untervektorräume von V mit $U_i \perp U_j$ für alle $i \neq j$. Dann ist für

$$U = U_1 + \ldots + U_k = \{u_1 + \ldots + u_k \,|\, u_i \in U_i \text{ für } i + 1, \ldots, k\}.$$

die Darstellung eindeutig und wir schreiben

$$U = U_1 \oplus^\perp \ldots \oplus^\perp U_k$$

und sprechen von einer *orthogonalen Zerlegung* von U. Beachte $U \cap U_i^\perp = \sum_{j \neq i} U_j$.

9.14 Transponierte Matrix

Zu einer $m \times n$-Matrix $A = (a^i_j)_{m \times n}$ erhält man die *transponierte* $n \times m$-Matrix A^t, indem man die Einträge an der Diagonalen 'spiegelt':

$$A^t = (a^{tk}_l)_{n \times m} \text{ mit } a^{tk}_l = a^l_k.$$

Es gelten dann die Regeln

$$A^{tt} = A, \ (A+B)^t = A^t + B^t, \ (rA)^t = rA^t, \ (AB)^t = B^t A^t, \ E^t = E.$$

$$A \text{ invertierbar } \Rightarrow A^t \text{ invertierbar } (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

Beweis. $(A\boldsymbol{b})^t = \boldsymbol{b}^t A^t$ und $A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = E^t = E$ □

9.15 Adjungierte Matrix

Die Matrix $\overline{A} = (\overline{a}^i_j)$ erhält man durch Konjugieren der Einträge. Aus den Isomorphieeigenschaften des Konjugierens folgt

$$\overline{\overline{A}} = A, \ \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}, \ \overline{(}rA) = \overline{r}\overline{A}, \ \overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \ \overline{E} = E.$$

$$A \text{ invertierbar } \Rightarrow \overline{A} \text{ invertierbar } \overline{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$$

A ist reell, genau dann, wenn $A = \overline{A}$.

Die *adjungierte* zu einer komplexen Matrix $A = (a^i_j)$

$$A^* = \overline{A}^t$$

Es gilt analog

$$A^{**} = A, \ (A+B)^* = A^* + B^*, \ (rA)^* = rA^*, \ (AB)^* = B^* A^*, \ E^* = E.$$

$$A \text{ invertierbar } \Rightarrow A^* \text{ invertierbar } (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

A ist reell, genau dann, wenn $A^* = A^t$.

Korollar 9.5 *Das kanonische Skalarprodukt auf K^n kann man so schreiben*

$$\langle \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^* \cdot \boldsymbol{y}$$

9.16 Bestapproximierende Lösung

Ist ein Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ unlösbar, so kann man nach *bestapproximierenden* 'Lösungen' $\tilde{\boldsymbol{x}}$ suchen, für die $|A\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}|$ minimal wird. Die Gauss'sche 'Methode der kleinsten Fehlerquadrate' können wir wie folgt fassen - und erhalten die Existenz eines $\tilde{x}$ mit der Orthogonalprojektion.

Bemerkung 9.6 *Folgende Aussagen sind äquivalent*

- *$\tilde{\boldsymbol{x}}$ bestapproximierend für $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$*
- *$A\tilde{\boldsymbol{x}} = \pi_U(\boldsymbol{b})$, U Spaltenraum von A*
- *$A^*A\tilde{\boldsymbol{x}} = A^*\boldsymbol{b}$*

Beweis. $\{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in K^n\}$ ist gerade der Spaltenraum U von A also $1 \Leftrightarrow 2$ nach Lemma 9.3. Und $A^*A\tilde{\boldsymbol{x}} = A^*\boldsymbol{b} \Leftrightarrow EA^*(A\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow (A\boldsymbol{y})^*(A\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{y}^*A^*(A\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$ für alle $\boldsymbol{y} \Leftrightarrow A\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b} \in U^\perp \Leftrightarrow A\tilde{\boldsymbol{x}} = \pi_U(\boldsymbol{b})$

Ausgleichsrechnung: Gegeben seien Messwerte $f(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Die Idee ist, dass es sich um fehlerbehaftete Messungen der Werte einer reellen affinen Funktion $f(t) = at + b$ handelt. Deren Graph ist die *Ausgleichgsgerade*. Also ist für das Gleichungssystem

$$f(t_i) = at_i + b \quad (i = 1, \ldots, n)$$

die bestapproximierende Lösung a, b zu bestimmen. In Matrixform

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \boldsymbol{f} \quad \text{mit } \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{pmatrix} \quad \text{und } A = \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_n & 1 \end{pmatrix}$$

Dies führt zu der "Normalengleichung"

$$\begin{pmatrix} \sum t_i^2 & \sum t_i \\ \sum t_i & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum t_i f(t_i) \\ \sum f(t_i) \end{pmatrix}$$

9.17 Unitäre und Orthogonale Matrizen

Eine Matrix $S \in K^{n\times n}$ heisst *unitär* bzw. *orthogonal*, wenn $K = \mathbb{C}$ bzw. $K = \mathbb{R}$ und die Spalten eine ON-Basis von K^n bilden. Insbesondere sind die reellen unitären Matrizen genau die orthogonalen.

Korollar 9.7 *Sei* $\dim V = n$, *α ON-Basis von V und $S \in K^{n\times n}$. Dann sind äquivalent*

- *S ist unitär/orthogonal*
- *$S = {}^{\alpha}T_{\beta}$ mit einer ON-Basis β.*

Insbesondere sind unitäre/orthogonale Matrizen invertierbar.

Beweis: V geht via α-Koordinaten isomorph und isometrisch in K^n über. □ Insbesondere sind die Permutationsmatrizen $T_{\alpha\beta}$ orthogonal, wobei β aus denselben Vektoren wie α, aber in möglicherweise anderer Reihenfolge besteht - d.h. eine Permutationsmatrix hat in jeder Zeile bzw. Spalte genau eine 1, sonst 0.

Korollar 9.8 *Folgende Aussagen sind äquivalent*

- *S ist unitär/orthogonal*

- $S^*S = E$
- $S^* = S^{-1}$
- $SS^* = E$
- *Die Zeilen von S bilden ON-Basis des Zeilenraums K^{n*}*

Beweis. 1 und 2 nur verschieden Schreibweisen. Ist S unitär, so invertierbar und $S^* = S^*SS^{-1} = ES^{-1} = S^{-1}$. Also sind 1,2,3 äquivalent. Wenn man alles mit Zeilen statt Spalten macht und die Reihenfolge von Matrixprodukten umdreht, sieht man, dass 3,4,5 äquivalent sind.

Korollar 9.9 *Die unitären bzw. orthogonalen Matrizen bilden bzgl. der Multiplikation eine Gruppe $\mathsf{U}(n)$ bzw. $\mathsf{O}(n)$.*

9.18 Orthogonale Koordinatentransformation

Im Raum sei die Orthonormalbasis $\alpha : \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ mit Ursprung O und ein weitere Orthonormalbasis $\beta : \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ mit Ursprung Q gegeben. Für einen Punkt P seien x^1, x^2, x^3 die Koordinaten des Ortsvektors $\vec{x} = \vec{OP}$ bezüglich der ersten Basis und x'^1, x'^2, x'^3 die Koordinaten von $\vec{x}' = \vec{QP}$ bezüglich der zweiten Basis. Wie erhält man die x'^i aus den x^i? Das geht jetzt viel einfacher als bei schiefen Koordinaten. Bezüglich des ersten Basis seien v^1, v^2, v^3 die Koordinaten des *Verschiebungsvektors* $\vec{v} = \vec{OQ}$ und f_j^1, f_{2j}, f_{3j} die Koordinaten von $\vec{f}_j$, d.h.

$$\vec{v} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3, \quad \vec{f}_j = f_j^1\vec{e}_1 + f_{2j}\vec{e}_2 + f_{3j}\vec{e}_3$$

$$(T1) \quad x^i = f_1^i x'^1 + f_{i2}x'^2 + f_{i3}x'^3 + v^i$$

Dann gilt $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}$ also

$$(T2) \;\; x'^i = \langle \vec{f}_i \mid \vec{x} - \vec{v} \rangle = f_{1i}(x^1 - v^1) + f_{2i}(x^2 - v^2) + f_{3i}(x^3 - v^3).$$

Geht es um Vektoren, nicht um Ortsvektoren, so kann man natürlich immer mit dem Verschiebungsvektor $\vec{v} = \vec{0}$ arbeiten. Wie erhält man die Koordinaten e_j^1, e_{2j}, e_{3j} des Vektors $\vec{e}_j$ aus der alten Basis bzgl. der neuen Basis? Ganz einfach nach (T2) mit Verschiebungsvektor $\vec{v} = \vec{0}$:

$$(T3) \quad e_j^i = \langle \vec{f}_i \mid \vec{e}_j \rangle = f_i^j.$$

Scholion. *Hat man eine Ebene E durch die Koordinatengleichung $n_1x^1 + n_2x^2 + n_3x^3 = d$ gegeben, so erhält man eine Koordinatengleichung für die neuen Koordinaten x'^i, indem man x^i nach (T1) einsetzt. Ist umgekehrt E durch die Koordinatengleichung $n'_1x'^1 + n'_2x'^2 + n'_3x'^3 = d'$ für die neuen Koordinaten gegeben, so erhält man eine Gleichung in den alten Koordinaten x^i, indem man die x'^i nach (T2) einsetzt.*

Die Beziehungen zwischen den Koordinaten des Normalenvektors $\vec{n}$ der Ebene E sind wie folgt

$$\vec{n}^\alpha = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^1 n'_1 + f_2^1 n'_2 + f_3^1 n'_3 \\ f_1^2 n'_1 + f_2^2 n'_2 + f_3^2 n'_3 \\ f_1^3 n'_1 + f_2^3 n'_2 + f_3^3 n'_3 \end{pmatrix} = {}^\alpha T_{be} \vec{n}^\beta$$

$$\vec{n}^\beta = \begin{pmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ n'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^1 n_1 + f_1^2 n_2 + f_1^3 n_3 \\ f_2^1 n_1 + f_2^2 n_2 + f_2^3 n_3 \\ f_3^1 n_1 + f_3^2 n_2 + f_3^3 n_3 \end{pmatrix} = {}^\alpha T_\beta^t \vec{n}^\alpha = {}^\alpha T_\beta^{-1} \vec{n}^\alpha$$

Die Physiker sagen: Normalengleichungen transformieren sich *kovariant* oder *kogredient.*

Beweis. Man erhält die Gleichungen $(f_1^1 n_1 + f_1^2 n_2 + f_1^3 n_3)x'^1 + (f_2^1 n_1 + f_2^2 n_2 + f_2^3 n_3)x'^2 + (f_3^1 n_1 + f_3^2 n_2 + f_3^3 n_3)x'^1 = d - (v^1 n_1 + v^2 n_2 + v^3 n_3)$ bzw. $(f_1^1 n'_1 + f_2^1 n'_2 + f_3^1 n'_3)x^1 + (f_1^2 n'_1 + f_2^2 n'_2 + f_3^2 n'_3)x^2 + (f_1^3 n'_1 + f_2^3 n'_2 + f_3^3 n'_3)x^3 = d' + [(f_1^1 v^1 + f_1^2 v^2 + f_1^3 v^3)n'_1 + (f_2^1 v^1 + f_2^2 v^2 + f_2^3 v^3)n'_2 + (f_3^1 v^1 + f_3^2 v^2 + f_3^3 v^3)n'_1]$.

Das folgende Beispiel ist der Einfachheit halber in der Ebene mit orthonormalem Koordinatensystem $\alpha : \vec{e}_1, \vec{e}_2, O$. Sei

$$\vec{f_1} \hat{=}^\alpha \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \quad \vec{f_2} \hat{=}^\alpha \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad \vec{OQ} = \vec{v} \hat{=}^\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{OP} = \vec{x} \hat{=}^\alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dann hat der Punkt P im Koordinatensystem $\vec{f_1}, \vec{f_2}, Q$ die Koordinaten $x'^1 = 3, x'^2 = 1$. Der Vektor $\vec{x}$ hat bzgl. der Basis $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ die Koordinaten $\frac{22}{5}$ und -1. Die Gerade mit Gleichung $g:\ 3x^1 + 4x^2 = 5$ im System α hat im Koordinatensystem $\vec{f_1}, \vec{f_2}, O$ die Koordinatengleichung $g:\ x'^1 = 1$. (Fig. 5) Die Verallgemeinerung folgt auf dem Fuss.

9.19 Kontravariante Transformation

Die Indizes von Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis $\alpha : \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ schreiben wir oben

$$\vec{x}^\alpha = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \sum_{i=1}^n x^i \vec{e}_i =: x^i \vec{e}_i$$

nach der Einsteinschen Summenkonvention: *taucht ein Index je genau einmal oben und unten auf, so ist der Ausdruck über diesen Index zu summieren.*

Sind $\alpha : \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ und $\beta : \vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n$ zwei Basen des Vektorraums V, so haben wir die Transformationsmatrix so definiert

$${}^\alpha T_\beta = (t_j^i) \quad \text{mit } \vec{e}_j{}' = t_j^1 \vec{e}_1 + \ldots + t_{nj} \vec{e}_n$$

also für $\vec{x} = x'^1 \vec{e}_1{}' + \ldots + x'^n \vec{e}_n{}'$

$$\vec{x} = \sum_j x'^j \sum_i t_j^i \vec{e}_i = \sum_i (\sum_j x'^j t_j^i) \vec{e}_i = x^1 \vec{e}_1 + \ldots + x^n \vec{e}_n \quad \text{mit } x^i = \sum_j x'^j t_i^j$$

$$\vec{x}^\alpha = {}^\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$$

Die neuen Koordinaten eines Vektors ergeben sich also aus den alten nicht mit der Matrix ${}^\alpha T_\beta$, die den Übergang von den alten Basisvektoren zu den neuen beschreibt, sondern mit der inversen, also 'gegenläufig,' man sagt *kontravariant*

$$\boxed{\vec{x}^\beta = {}^\alpha T_\beta^{-1} \vec{x}^\alpha \quad \text{kontravariant}}$$

9.20 Linearformen und kovariante Transformation

Eine *Linearform* auf einem K-Vektorraum ist eine lineare Abbildung $f : V \to K$. Bzgl. einer Basis $\alpha : \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ von V wird sie beschrieben durch

$$f(\vec{x}) = \sum_i a_i x^i = f^\alpha \cdot \vec{x}^\alpha \text{ mit } f^\alpha = (a_1, \ldots, a_n),\ a_i = f(\vec{e}_i)$$

In einem euklidischen oder unitären Raum hat man die Beispiele

$$f(\vec{x}) = \langle \vec{n} \,|\, \vec{x} \rangle \quad \vec{n} \text{ mit } |\vec{n}| = 1 \text{ fest}$$

und jedes Beispiel sieht so aus - mit eindeutig bestimmtem $\vec{n}$ mit $\vec{n}^\alpha = f^{\alpha t}$ bzgl. ON-Basis α.

Die Menge aller Linearformen auf dem K-Vektorraum V ist der *Dualraum*

$$V^* = \{f \mid f : V \to K \text{ linear}\}$$

Das ist selbst wieder ein Vektorraum - das wollen wir aber jetzt nicht thematisieren. Eine Linearform f sieht ihren Lebenszweck also darin, Vektoren zu fressen und dafür Skalare auszugeben - die angemessene Vorstellung ist also, je nach Geschmack: black box, Vektoren-Messgerät, vektörlifressende Nachtigall.

Ist für V eine Basis α bekannt, so kann man die Linearform f schon erkennungsdienstlich behandeln, indem man ihr die Basisvektoren $\vec{e}_i$ zu fressen gibt und die Ergebnisse $a_i = f(\vec{e}_i)$ notiert. Nämlich wegen der Linearität

$$f(\vec{x}) = \sum_i x^i f(\vec{e}_i) = (a_1, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \qquad \text{für } \vec{x} = \sum_i x^i \vec{e}_i$$

Folglich kann man die a_i als Koordinaten von f bzgl. α ansehen und schreiben

$$f_\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \quad \text{ mit } a_i = f(\vec{e}_i)$$

und hat dann die bequeme Matrixschreibweise

$$f(\vec{x}) = f_\alpha \cdot \vec{x}^\alpha$$

Will man nun die Koordinaten von f in der neuen Basis β angeben, so geht das ganz einfach, eben *kovariant* mit derselben Matrix, die den Übergang der Basen beschreibt

$$f(\vec{x}) = \sum_j x'^j f(\vec{e}_j{}') = \sum_j x'^j \sum_i t^i_j f(\vec{e}_i) = \sum_j x'^j a'_j \quad \text{ mit } a'_j = \sum_i t^i_j a_i$$

$$f_\beta = (a'_1, \ldots, a'_n) = (a_1, \ldots, a_n)(t^i_j) = f_\alpha \, {}^\alpha T_\beta$$

$$\boxed{f_\beta = f_\alpha\,{}^\alpha T_\beta \;\text{ kovariant}}$$

Das folgt auch direkt mit der Matrixbeschreibung und der 'Substitution' $\vec{x}^\alpha = {}^\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$ aus

$$f(\vec{x}) = f_\alpha \cdot \vec{x}^\alpha = f_\alpha \cdot {}^\alpha T_\beta \cdot \vec{x}^\beta$$

9.21 Hyperebenen

Die 'homogene Gleichung' $f(\vec{x}) = 0$ beschreibt den Untervektorraum

$$U = \{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = 0\}$$

Hat man einen affinen Raum $\mathcal{P}$ mit Vektorraum V, so beschreibt die 'inhomogene Gleichung' $f(\vec{x}) = c$ bzgl. des Ursprungs O den affinen Teilraum

$$\mathcal{H} = \{\vec{x} + O \mid f(\vec{x}) = c\} \;= P + U \text{ falls } f(\overrightarrow{OP}) = c$$

Dieser hat, falls nichtleer (d.h. falls nicht $f = 0$ und $c \neq 0$) die Dimension $\dim V - 1$ und ist somit eine *Hyperebene*. Bzgl. eines Koordinatensystems $\alpha : O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ wird dieser affine Teilraum beschrieben durch die Gleichung

$$f^\alpha X^\alpha = \sum_i a_i x_i = c$$

Für einen neuen Ursprung $O' = \vec{v} + O$ ergibt sich (über $\vec{y} = \vec{x} - \vec{v}$)

$$\mathcal{H} = \{\vec{y} + O' \mid f(\vec{y}) = c'\} \quad \text{mit } c' = c - f(\vec{v})$$

und für ein neues Koordinatensystem $\beta : O', \vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_n$ die Gleichung

$$f^\beta Y^\beta = c' \quad \text{mit } f^\beta = f^\alpha\,{}^\alpha T_\beta,\; c' = c - f^\alpha O'^\alpha$$

9.22 Integrale als Linearformen

Sei $X \subseteq \mathcal{P}$ ein kompaktes Volumen des Anschauungsraums, z.B. ein Voll-Quader. In der Analysis lernt man, wann eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf X das bestimmte Integral

$$\int f(P)\,\mathrm{d}V = \int f(\vec{x} + O)\,\mathrm{d}\vec{x}$$

besitzt, dass die integrierbaren Funktionen einen Untervektorraum des Funktionenraum $\mathbb{R}^V$ bilden, und dass die Abbildung

$$f \mapsto \int f(P)\,\mathrm{d}V$$

eine Linearform auf diesem ist, d.h. dass gilt

$$\int (f+g)(P)\,\mathrm{d}V = \int (f(P) + g(P))\,\mathrm{d}V = \int f(P)\,\mathrm{d}V + \int g(P)\,\mathrm{d}V$$

$$\int (rf)(P)\,\mathrm{d}V = \int rf(P)\,\mathrm{d}V = r\int f(P)\,\mathrm{d}V$$

Ausserdem ist das Produkt $P \mapsto f(P)\cdot g(P)$ integrierbarer Funktionen f, g intergrierbar. Als Physiker darf man sich $\mathrm{d}V = \mathrm{d}\vec{x}$ als klitzekleinen Würfel mit Mittelpunkt $P = \vec{x}+O$ denken, und das Integral als die Summe der Zahlen $f(P)\cdot|\mathrm{d}V|$ genommen über eine Zerlegung von X in solche Würfelchen. Hat man eine ON-Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, so kann man das Integral über den Quader X, der von den Kanten $a_i\vec{e}_i+O$ aufgespannt wird, als Mehrfachintegral schreiben und vielleicht sogar ausrechnen

$$\int f(P)\,\mathrm{d}V = \int_0^{a_3}(\int_0^{a_2}(\int_0^{a_1}\tilde{f}(x^1,x^2,x^3)\,\mathrm{d}x^1)\,\mathrm{d}x^2)\,\mathrm{d}x^3 \quad \text{wobei } \tilde{f}(x^1,x^2,x^3) = f(\sum_i x^i\vec{e}_i+O)$$

Für das Folgende ist es bequemer, wenn man die nur auf X definierte Funktion f zu einer auf dem ganzen Raum $\mathcal{P}$ definierten Funktion fortsetzt, indem man setzt

$$f(P) = 0 \quad \text{für } P \notin X$$

9.23 Schwerpunkt

Ein physikalischer Körper sei durch seine Massendichte $P \mapsto m(P)$ angegeben (die ausserhalb eines Quaders $= 0$ ist). Wir gehen davon aus, dass diese Funktion integrierbar ist. Die Gesamtmasse ergibt sich dann als

$$M = \int m(P)\,\mathrm{d}V$$

Bezüglich einer durch Aufpunkt O und Richtungsvektor $\vec{a}$ gegebenen orientierten Geraden g betrachtet man das Integral

$$f_O(\vec{a}) = \int \langle\vec{a}\,|\,\vec{x}\rangle\cdot m(\vec{x}+O)\,\mathrm{d}V$$

und nennt O einen *Schwerpunkt* bzgl. dieser Geraden, wenn dieses Integral 0 ergibt. Ist $|\vec{a}| = 1$, so spricht man vom *Massenmoment erster Ordnung*. Aus den Linearitätseigenschaften von Integral und Skalarprodukt folgt sofort

> f_O ist eine Linearform auf dem Raum der Vektoren.
> Ist $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ eine Basis, so
>
> $$f_O(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{3} a^i f_O(\vec{e}_i) \quad \text{für } \vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i$$

Dabei sind sowohl die Massendichte m wie der Aufpunkt O konstituierend für die Form f_O - man denke sich die Masse ersetzt durch den in O gelagerten Hebel g mit der Massendichte

$$\tilde{m}(P) = \int_{\vec{a}^\perp+P} m(\vec{x}+O)\,\mathrm{d}A \quad (P\in g)$$

d.h. man summiert über die Ebene durch P senkrecht zu g und bestimmt nun das Moment zu

$$f_O(\vec{a}) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot \tilde{m}(x\vec{a} + O)\,\mathrm{d}x$$

Wie sind nun diese Formen bei fester Massenverteilung m aber unterschiedlichen Ursprüngen miteinander verbunden: Aus dieser physikalischen Überlegung oder noch einfacher durch Rechnung erhält man

$$f_{\vec{v}+O}(\vec{a}) = f_O(\vec{a}) - \langle \vec{a} \,|\, \vec{v} \rangle M$$

Nämlich $f_{\vec{v}+O}(\vec{a}) = \int \langle \vec{a} \,|\, \vec{y} \rangle m(\vec{y} + \vec{v} + O)\,\mathrm{d}V = \int \langle \vec{a} \,|\, \vec{x} - \vec{v} \rangle m(\vec{x} + O)\,\mathrm{d}V$
$= \int (\langle \vec{a} \,|\, \vec{x} \rangle m(\vec{x} + O)\,\mathrm{d}V - \langle \vec{a} \,|\, \vec{v} \rangle) \int m(\vec{x} + O)\,\mathrm{d}V = f_O(\vec{a}) - \langle \vec{a} \,|\, \vec{v} \rangle M$. □

S heisst *Schwerpunkt* der Massenverteilung m, wenn $f_S(\vec{a}) = 0$ für alle $\vec{a}$, d.h. wenn S Schwerpunkt für alle Geraden durch S ist.

Satz 9.10 *Ist S Schwerpunkt bzgl. dreier nicht in einer Ebene liegenden Geraden, so ist es der Schwerpunkt der Massenverteilung. Jede Massenverteilung hat einen eindeutig bestimmten Schwerpunkt; dieser wird bzgl. einer ON-Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ und Ursprungs O bestimmt durch*

$$S = \sum_i s^i \vec{e}_i + O \quad \textit{mit } s^i = \frac{1}{M} \int \langle \vec{e}_i \,|\, \vec{x} \rangle m(\vec{x} + O)\,\mathrm{d}V,\ M = \textit{ Gesamtmasse}$$

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus der Linearität von f_S. Somit ist $S = \sum_i s^i \vec{e}_i + O$ Schwerpunkt genau dann, wenn $f_S(\vec{e}_i) = 0$ für $i = 1, 2, 3$. Wir haben aber

$$f_S(\vec{e}_i) = f_O(\vec{e}_i) - \langle \vec{e}_i \,|\, \sum_j s^j \vec{e}_j \rangle M = f_0(\vec{e}_i) - s^i M$$

also $f_S(\vec{e}_i) = 0$ genau dann, wenn $f_O(\vec{e}_i) = s^i M$. □

10 Orientierte Flächen, Vektor- und Spatprodukt

10.1 Orientierung

Naive Mathematiker orientieren eine Ebene, indem sie ihre Uhr drauflegen und mit 'positiver Orientierung' meinen 'gegen den Uhrzeigersinn'. Im Klartext: Eine *Orientierung* der Ebene ist eine Abbildung, die jedem Paar nichtparalleler und von $\vec{0}$ verschiedener Vektoren ein $o(\vec{x}, \vec{y}) \in \{1, -1\}$ zuordnet so, dass

- $o(\vec{y}, \vec{x}) = -o(\vec{x}, \vec{y}) = o(-\vec{x}, \vec{y})$
- $o(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = o(\vec{x}, \vec{y})$ für $\lambda > 0$
- $o(\vec{x}, \vec{z}) = o(\vec{x}, \vec{y})$ genau dann, wenn $\vec{z}$ zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ oder $\vec{y}$ zwischen $\vec{x}$ und $\vec{z}$, und dann $o(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = o(\vec{x}, \vec{y})$.

Dabei liegt $\vec{z}$ zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$, falls für ein/alle P es ein $\lambda > 0$ gibt so, dass /la97/fig/det6.eepic /la97/fig/det6.eepic $\lambda\vec{z} + P$ zwischen $\vec{x} + P$ und $\vec{y} + P$ liegt

Zu einer Orientierung o ist $-o$ mit $(-o)(\vec{x}, \vec{y}) = -o(\vec{x}, \vec{y})$ die *entgegengesetzte* Orientierung.

10.2 Flächenmaße in der Ebene

Ein *Flächenmaß* M für Parallelogramme ordnet jedem Paar nicht paralleler und von $\vec{0}$ verschiedener Vektoren der Ebene einen Skalar $M(\vec{x}, \vec{y})$ so, dass gilt

- $M(\vec{x}, \vec{y}) > 0$
- $M(\vec{y}, \vec{x}) = M(\vec{x}, \vec{y}) = M(-\vec{x}, \vec{y})$
- $M(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda M(\vec{x}, \vec{y})$ für $\lambda > 0$
- $M(\vec{x}, \vec{y} + \lambda\vec{x}) = M(\vec{x}, \vec{y})$,
- $M(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = M(\vec{x}, \vec{y}) + M(\vec{x}, \vec{z})$ falls $o(\vec{x}, \vec{y}) = o\vec{x}, \vec{z})$,
- $M(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = M(\vec{x}, \vec{y}) - M(\vec{x}, \vec{z})$ falls $o(\vec{x}, \vec{y}) = -o(\vec{x}, \vec{z}) = -o(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z})$.

/la97/fig/det1.eepic /la97/fig/det1.eepic /la97/fig/det2.eepic /la97/fig/det2.eepic

/la97/fig/det3.eepic /la97/fig/det3.eepic /la97/fig/det4.eepic /la97/fig/det4.eepic

/la97/fig/det5.eepic /la97/fig/det5.eepic /la97/fig/det4a.eepic /la97/fig/det4a.eepic

$M(\vec{x}, \vec{y})$ verstehen wir als die Fläche des von den Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ an einer beliebigen Ecke P aufgespannten Parallelogramms, d.h. des von den Punkten $P, \vec{x}+P, \vec{y}+P, \vec{x}+\vec{y}+P$ aufgespannten konvexen Polygons. Die Verschiebungsinvarianz des Flächenmaßes haben wir also mitpostuliert.

10.3 Orientierte Flächen und Determinanten

Handlich wird das Ganze erst, wenn wir Orientierung und Flächenmaß kombinieren zu Determinanten. Eine *Determinantenform* F auf der Ebene ordnet jedem Paar $(\vec{a}, \vec{b})$ von Vektoren einen Skalar $F(\vec{a}, \vec{b})$ derart zu , dass für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ der Ebene und Skalare λ

$$\begin{array}{lll} (D1) & F(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}) = F(\vec{a}, \vec{b}) + F(\vec{c}, \vec{b}) & F(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda F(\vec{a}, \vec{b}) \\ (D2) & F(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = F(\vec{a}, \vec{b}) + F(\vec{a}, \vec{c}) & F(\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda F(\vec{a}, \vec{b}) \end{array}$$

$$(D3)\quad F(\vec{a}, \vec{a}) = 0$$

$$(D4)\quad \text{Es gibt } \vec{a}, \vec{b} \text{ mit } F(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$$

Lemma 10.1 *Gelten (D1-2) so sind äquivalent*

1. $F(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ *für alle* $\vec{x}$
2. $F(\vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{y}) = F(\vec{x}, \vec{y})$ *für alle* $\vec{x}, \vec{y}$ *und* λ
3. $F(\vec{x}, \vec{y} + \lambda\vec{x}) = F(\vec{x}, \vec{y})$ *für alle* $\vec{x}, \vec{y}$ *und* λ
4. $F(\vec{x}, \vec{y}) = -F(\vec{y}, \vec{x})$ *für alle* $\vec{x}, \vec{y}$

Beweis. Gelte 1. Dann

$$F(\vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{y}) = F(\vec{x}, \vec{y}) + F(\lambda\vec{y}, \vec{y}) = F(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda F(\vec{y}, \vec{y}) = F(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda \cdot 0 = F(\vec{x}, \vec{y}).$$

Gelte 2. Dann

$$F(\vec{x}, \vec{x}) = F(\vec{x} - \vec{x}, \vec{x}) = F(0 \cdot \vec{0}, \vec{x}) = 0 \cdot F(\vec{0}, \vec{x}) = 0.$$

Also ist 1 zu 2 äquivalent. Ebenso ist 1 zu 3 äquivalent. Gilt nun 1 so

$$F(\vec{x}, \vec{y}) + F(\vec{y}, \vec{x}) = F(\vec{x} + \vec{y}, \vec{y}) + F(\vec{y} + \vec{x}, \vec{x}) = F(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = 0.$$

Gilt umgekehrt 4 so $F(\vec{x}, \vec{x}) = -F(\vec{x}, \vec{x})$ also $2F(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ und somit $F(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ solange $2 \neq 0$. □ Gelten (D1-3) so ist F eine *alternierende Bilinearform.*

Satz 10.2 *Eine bijektive Beziehung zwischen Paaren* (M, o) *von Flächenmaßen und Orientierungen einerseits, Determinantenformen* F *andererseits wird hergestellt durch*

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} 0 & \textit{falls } \vec{x} = \vec{0} \vee \vec{y} = \vec{0} \vee \vec{x} \parallel \vec{y} \\ o(\vec{x}, \vec{y}) \cdot M(\vec{x}, \vec{y}) & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$M(\vec{x}, \vec{y}) = |F(\vec{x}, \vec{y})|, \quad o(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } F(\vec{x}, \vec{y}) > 0 \\ -1 & \textit{falls } F(\vec{x}, \vec{y}) < 0 \end{cases}$$

10.4 Existenz und Eindeutigkeit

Wählt man eine Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ der Ebene, so kann man $F(\vec{a}, \vec{b})$ durch $F(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ausdrücken

$$(*) \;\; F(\vec{a}, \vec{b}) = (a^1 b^2 - a^2 b^1) \cdot F(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

nämlich $F(a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2, b^1\vec{e}_1 + b^2\vec{e}_2) = F(a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2, b^1\vec{e}_1) + F(a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2, b^2\vec{e}_2) = F(a^1\vec{e}_1, b^1\vec{e}_1) + F(a^2\vec{e}_2, b^1\vec{e}_1) + F(a^1\vec{e}_1, b^2\vec{e}_2) + F(a^2\vec{e}_2, b^2\vec{e}_2) = 0 + a^2 b^1 F(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + a^1 b^2 F(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + 0$. Insbesondere ist also $C = F(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \neq 0$ und F bis auf den 'Skalierungsfaktor' C eindeutig bestimmt. Umgekehrt rechnet man leicht nach, dass durch (*) eine Determinantenform definiert wird.

Korollar 10.3 *Die Ebene hat genau zwei Orientierungen. Zu jedem (echten) Parallelogramm gibt es genau ein Flächenmaß so, dass dieses Parallelogramm die Fläche 1 hat.*

Orientierung bzw. Flächenmaß können wir also durch eine Basis festlegen, die positiv orientiert sein soll bzw. ein Parallelogramm von Fläche 1 aufspannen soll.

Beweis. Wie eben bemerkt, gibt es eine Determinantenform F_1. Dann werden durch F_1 und $(-1)F_1$ zwei entgegengesetzte Orientierungen o_1 und $-o_1$ definiert. Außerdem ist $|F_1|$ ein Flächenmaß. Ist o_2 eine weitere Orientierung, so kommt sie von einer Determinantenform F_2 und es gibt $\lambda \neq 0$ mit $F_2 = \lambda F_1$. Also sind o_1 und o_2 gleich oder entgegensetzt je nachdem ob $\lambda > 0$ oder $\lambda < 0$.

Das gegebene Parallelogramm werde von $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ aufgespannt. Wie eben bemerkt, kann man F_1 so wählen, dass $M_1(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = F_1(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 1$ für $M_1 = |F_1|$. Ist M_2 ein weiteres Flächenmaß mit $M_2(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 1$, so kommt M_2 von einer Determinantenfunktion F_2 und $F_2 = \lambda F_1$ mit $|\lambda| = 1$. Also $M_2 = M_1$.

Korollar 10.4 *Ist eine Längeneinheit mit zugehörigem Skalarprodukt gegeben und ist M ein Flächenmaß so, dass ein Quadrat von Seitenlänge 1 die Fläche 1 hat, so ergeben sich die Parallelogrammflächen als: Grundseite $\times$ Höhe*

$$M(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}| \cdot |\vec{y} - \frac{\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle}{|\vec{x}|^2} \vec{x}|$$ */la97/fig/det7.eepic* */la97/fig/det7.eepic*

Ist zusätzlich eine Orientierung gegeben, so gibt es genau eine Determinantenform det *so, dass*

$$\det(\vec{x}, \vec{y}) = 1 \text{ für jede/eine positiv orientierte ON-Basis}$$

Wir sprechen dann von det als 'der *Determinante*' - bzgl. der gegebenen Längeneinheit und Orientierung. Bzgl. einer positiv orientierten ON-Basis berechnet sie sich so aus den Koordinaten

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = a^1 b^2 - a^2 b^1$$

Beweis. Zu zeigen ist für eine Determinantenform F: wenn $F(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$ für eine gegebene ON-Basis dann $|F(\vec{a}, \vec{b})| = 1$ für jede ON-Basis $\vec{a}, \vec{b}$. Das können wir jetzt zu Fuß rechnen oder später nebenbei erhalten.

10.5 Winkelmessung *

Wie wir schon früher bemerkt haben, kann die Betragsgleichheit von Winkeln über das Skalarprodukt, die Orientierungsgleichheit über die Determinante ausgedrückt werden. Genauer: ist ein kanonisches Skalarprodukt und eine Orientierung gegeben, so definiere Abbildungen ($\mathcal{V}_\varepsilon^+ = \mathcal{V}_\varepsilon \setminus \{\vec{0}\}$)

$$c : \mathcal{V}_\varepsilon^+ \times \mathcal{V}_\varepsilon^+ \to [-1, 1], \quad s : \mathcal{V}_\varepsilon^+ \times \mathcal{V}_\varepsilon^+ \to [-1, 1]$$

$$c(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle}{|\vec{x}||\vec{y}|}, \quad s(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\det(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

Für jede positiv orientierte ON-Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ gilt dann

$$\forall \vec{x}.\ |\vec{x}| = 1 \Leftrightarrow \vec{x} = c(\vec{e}_1, \vec{x})\vec{e}_1 + s(\vec{e}_1, \vec{x})\vec{e}_2$$

$$\forall \kappa \in [-1,1]. \forall \sigma \in [-1,1]. \kappa^2 + \sigma^2 = 1 \Rightarrow \exists! \vec{x}.\ |\vec{x}| = 1 \wedge c(\vec{e}, \vec{x}) = \kappa \wedge s(\vec{e}, \vec{x}) = \sigma$$

Zudem sind die orientierten Winkel $\angle \vec{x}, \vec{y}$ und $\angle \vec{u}, \vec{v}$ gleich genau dann, wenn

$$c(\vec{x}, \vec{y}) = c(\vec{u}, \vec{v}) \wedge s(\vec{x}, \vec{y}) = s(\vec{u}, \vec{v})$$

Damit kann man Winkel durch ein Paar von Maßzahlen bestimmen, aber es fehlen wünschenswerte Eigenschaften wie etwa die Additivität.

Satz 10.5 *Es gibt eine Zahl $\pi > 0$ in $\mathbb{R}$ und surjektive Abbildung*

$$\angle_o : \mathcal{V}_\varepsilon^+ \times \mathcal{V}_\varepsilon^+ \to [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}$$

so, dass für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}_\varepsilon^+$

- $\angle_o(\vec{x}, \vec{y}) = \angle_o(\vec{u}, \vec{v}) \quad \Leftrightarrow \quad c(\vec{x}, \vec{y}) = c(\vec{u}, \vec{v}) \wedge s(\vec{x}, \vec{y}) = s(\vec{u}, \vec{v})$
- $\angle_o(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} \angle_o(\vec{x}, \vec{z}) + \angle_o(\vec{z}, \vec{y}) & \text{falls } \exists \lambda > 0.\ \vec{z} = \lambda \vec{x} \vee \vec{y} = \lambda \vec{z} \text{ oder} \\ & o(\vec{x}, \vec{z}) = 1 \wedge \exists \vec{u}.\ c(\vec{x}, \vec{u}) = c(\vec{x}, \vec{y}) \wedge o(\vec{x}, \vec{u}) = 1 \\ \angle_o(\vec{x}, \vec{z}) + \angle_o(\vec{z}, \vec{y}) - 2\pi & \text{sonst} \end{cases}$
- $\angle_o(\vec{x}, \vec{y}) \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \exists \lambda > 0.\ \vec{y} = \lambda \vec{x} \\ \frac{1}{2}\pi & \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y} \wedge o(\vec{x}, \vec{y}) = 1 \\ \pi & \Leftrightarrow \exists \lambda < 0.\ \vec{y} = \lambda \vec{x} \\ \frac{3}{2}\pi & \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y} \wedge o(\vec{x}, \vec{y}) = -1 \end{cases}$
- $0 < \angle_o(\vec{x}, \vec{y}) < \pi \Leftrightarrow o(\vec{x}, \vec{y}) = 1 \qquad \pi < \angle_o(\vec{x}, \vec{y}) < 2\pi \Leftrightarrow o(\vec{x}, \vec{y}) = -1$

Man kann nun Funktionen

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1], \quad \sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

definieren so, dass für $k \in \mathbb{Z}$

$$\cos(\omega + 2k\pi) = c(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \sin(\omega + 2k\pi) = s(\vec{x}, \vec{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \angle_o(\vec{x}, \vec{y}) = \omega$$

Wenn wir von einem *Winkel* ω und seinem Cosinus und Sinus sprechen, ist das in diesem Sinne zu verstehen. Man kann nun alles beweisen, was man so braucht. Insbesondere hat man zu gegebener positiv orientierter ON-Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

$$|\vec{x}| = 1 \Leftrightarrow \exists \omega.\ \vec{x} = \cos \omega\, \vec{e}_1 + \sin \omega\, \vec{e}_2$$

und ω ist dabei bis auf Addition von $2k\pi$ eindeutig bestimmt und man hat bijektive Abbildungen

$$\cos : [0, \pi] \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow [-1, 1], \quad \sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow [-1, 1]$$

Zum Beweis: Mithilfe der Winkelaxiome sehen wir, dass man zu jedem Winkel $\angle\vec{u},\vec{v}$ einen eindeutig bestimmten betrags- und orientierungsgleichen Winkel $\angle\vec{e}_1,\vec{x}$ mit $|\vec{x}| = 1$ findet. Wir definieren nun im Falle $o(\vec{u},\vec{v}) = 1$ das Winkelmaß als die Bogenlänge des Kreisbogens

$$\angle_o(\vec{u},\vec{v}) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}| \mid \vec{x}_0 = \vec{e}_1,\ \vec{x}_n = \vec{x},\ |\vec{x}_i| = 1 \wedge o(\vec{x}_{i-1},\vec{x}_i) = 1 \text{ für } i = 1,\ldots,n\}$$

$$\angle_o(\vec{u},\vec{v}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \exists\lambda > 0.\ \vec{v} = \lambda\vec{u} \\ \pi & \text{falls } \exists\lambda < 0.\ \vec{v} = \lambda\vec{u} \\ \angle_o(\vec{u},-\vec{v}) + \pi & \text{falls } o(\vec{u},\vec{v}) = -1 \end{cases}$$

Elementare Alternative: Approximation von Winkeln durch ‘fortlaufende Halbierung’. d.h. durch Summen von Winkeln der Grösse $2\pi/2^k$.

10.6 Vektorprodukt

Reichlich naiv definieren wir mal: Ein Tripel unabhängiger Vektoren bildet ein *Rechtssystem* im Raum, wenn ihre Richtungen (in der gegebenen Reihenfolge) mit den Richtungen von gestrecktem Daumen und Zeigefinger und abgewinkeltem Mittelfinger der rechten Hand identifiziert werden können - Beweglichkeit des Daumens bis zu 180^o gegenüber dem Zeigefinger vorausgesetzt. Entsprechend hat man *Linkssysteme* für die linke Hand. Jedes unabhängige Tripel von Vektoren bildet entweder ein Rechts- oder ein Linkssystem . Welche Hand die rechte ist, ist mathematisch gesehen jedoch eine Frage der Definition: es wird irgendein unabhängiges Tripel zum Rechtssystem deklariert und dadurch die *Orientierung* festgelegt. Alle anderen Rechtssysteme ergeben sich hieraus durch Drehung des Tripels insgesamt und stetigen Scherungen eines der Vektoren gegen die beiden anderen, bei denen die drei Vektoren in keinem Stadium in eine gemeinsame Ebene zu liegen kommen. Wir definieren nun das *Vektor-* oder *äußere Produkt* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ durch die Bedingungen

$$|\vec{c}| = |\det(\vec{a},\vec{b})|,\ \vec{c} \perp \vec{a},\vec{b} \ \text{ und } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ Rechtssystem oder abhängig.}$$

Die wichtigsten Rechenregeln sind

$$(G1-3)\ \ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b} \text{ parallel },\ \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},\ r(\vec{a} \times \vec{b}) = (r\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r\vec{b})$$

$$(G4)\ \ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},\ \ (\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}.$$

Zum Beweis des ersten Distributivgesetzes dürfen wir zunächst annehmen, dass $|\vec{a}| = 1$. Die Grundfläche ändert sich weder nach Betrag noch nach Vorzeichen, wenn man $\vec{b}$ längs einer Parallelen zu $\vec{a}$ schert, , also darf man $\vec{b} \perp \vec{a}$ annehmen, ebenso $\vec{c} \perp \vec{a}$. Dann liegen $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in einer Ebene mit Normale $\vec{a}$ und man erhält $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$ in dieser Ebene, indem man b, $\vec{c}$ und $\vec{b} + \vec{c}$ jeweils um 90^0 dreht.

Eine typische Anwendung des Vektorprodukts ist es, aus zwei nicht parallelen Richtungsvektoren $\vec{b},\vec{c}$ einer Ebene einen Normalenvektor $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$ zu berechnen. Wählt man als Koordinatensystem des Raumes eine Orthonormalbasis $\alpha : \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, die Rechtssystem ist, so hat man

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3,\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1,\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

und die Koordinatendarstellung

$$\vec{a} \times \vec{b} = a^1b^2\vec{e}_3 + b^1a^3\vec{e}_2 + a^2b^3\vec{e}_1 - a^3b^2\vec{e}_1 - b^3a^1\vec{e}_2 - a^2b^1\vec{e}_3$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})^\alpha = \begin{pmatrix} a^2b^3 - a^3b^2 \\ a^3b^1 - a^1b^3 \\ a^1b^2 - a^2b^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad \text{für } \vec{a}^\alpha = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \vec{b}^\alpha = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}.$$

10.7 Grassmannscher Entwicklungssatz

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a}.$$

Beweis. Wegen der Linearitätseigenschaften von Skalar- und Vektorprodukt bleibt die Gültigkeit der Formel beim Übergang zu Linearkombinationen erhalten: gelten z.B. $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a}$ und $(\vec{a}'\times\vec{b})\times\vec{c} = \langle \vec{a}' \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a}'$ für gegebene Vektoren $\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{c}$, so gelten auch $(r\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = r\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle r\vec{a}$ und $((\vec{a} + \vec{a}') \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a}+\vec{a}' \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle (\vec{a}+\vec{a}')$. Man rechnet nämlich nach, dass $(r\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (r(\vec{a}\times\vec{b}))\times\vec{c} = r((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}) = r(\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a}) = r\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - r\langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a} = r\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle (r\vec{a}) = \langle r\vec{a} \,|\, \vec{b} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle r\vec{a}$ und $((\vec{a} + \vec{a}') \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a}' \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{a}' \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a} + \langle \vec{a}' \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle \vec{a}' = (\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle + \langle \vec{a}' \,|\, \vec{c} \rangle)\vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle (\vec{a} + \vec{a}') = \langle \vec{a} + \vec{a}' \,|\, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle (\vec{a} + \vec{a}')$. Entsprechend verfährt man bei Linearkombinationen von $\vec{b}$'s bzw. $\vec{c}$'s . Also genügt es, den Fall zu betrachten, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Vektoren aus einer Orthonormalbasis sind. Ist $\vec{b} = \vec{a}$, so $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, also $LS = \vec{0} = RS$. Sei also $\vec{a} \neq \vec{b}$. Dann ist $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}$ eine positiv orientierte ON-Basis und $\vec{c} = \vec{a}$, $\vec{c} = \vec{b}$ oder $\vec{c} = \pm\vec{a}\times\vec{b}$. Ist $\vec{c} = \vec{a}$, so $LS = \vec{b}$, da $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}$ positiv orientiert (zyklische Vertauschung!), und $RS = \vec{b}$, da $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 1, \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$. Ist $\vec{c} = \vec{b}$ so $LS = -\vec{a}$, da $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}, \vec{a}$ negativ orientiert, und $RS = -\vec{a}$, da $\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle = 0, \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle = 1$. Ist $\vec{c} = \pm\vec{a} \times \vec{b}$, so $LS = \vec{0}$ und $\langle \vec{a} \,|\, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b} \,|\, \vec{c} \rangle = 0$, also auch $RS = \vec{0}$. Es folgt

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0} \quad \textit{Lagrange Identitaet}$$

10.8 Spatprodukt und Volumen

Nachdem das Volumen des Einheitswürfels als 1 festgelegt ist, ergibt sich das Volumen eines Spats zu "Grundfläche mal Höhe". Wir definieren nun die *Determinante* oder das *Spatprodukt* als

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \langle \vec{a} \times \vec{b} \mid \vec{c} \rangle = \epsilon V,$$

wobei V das Volumen des von (den Ortsvektoren) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spats ist und $\epsilon = 1$, falls $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Rechtssystem, $\epsilon = -1$, andernfalls. Man erhält so eine alternierende Trilinearform, d.h. die Regeln (D1-3) gelten entsprechend, z.B. $\det(r\vec{a} + s\vec{a}', \vec{b}, \vec{c})) = r\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + s\det(\vec{a}', \vec{b}, \vec{c})$ d.h. Linearität in der ersten Spalte und entsprechend in den anderen Spalten, und $\det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ d.h. Vorzeichenwechsel bei Vertauschung zweier Spalten. Eine positive orientierte ON-Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ hat Determinante 1 und es gilt für die Koordinaten

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = a^1b^2c^3 + b^1c^2a^3 + c^1a^2b^3 - a^3b^2c^1 - b^3c^2a^1 - c^3a^2b^1.$$

Ersetzt man hier c^i durch $\vec{e}_i$, so erhält man das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ und damit das Entwickeln nach der letzten Spalte

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = c^1 \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix} - c^2 \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix} + c^3 \begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

Mit Grassmann und Determinante beweist man

$$\langle \vec{a} \times \vec{b} \mid \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a} \mid \vec{c} \rangle \langle \vec{b} \mid \vec{d} \rangle - \langle \vec{b} \mid \vec{c} \rangle \langle \vec{a} \mid \vec{d} \rangle \ \textit{Lagrange}.$$

Beweis. $\langle \vec{a} \times \vec{b} \mid \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{c} \times \vec{d} \mid \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \det(\vec{c}, \vec{d}, \vec{a} \times \vec{b}) = \det(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = (\langle (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \mid \vec{d} \rangle = \langle \langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle \vec{c} - \langle \vec{b} \mid \vec{c} \rangle \vec{a} \mid \vec{d} \rangle = \langle \vec{a} \mid \vec{c} \rangle \langle \vec{b} \mid \vec{d} \rangle - \langle b \mid c \rangle \langle \vec{a} \mid \vec{d} \rangle$.

Preisaufgabe: Entwickle auch für den Raum eine einigermaßen konsistente Theorie von Orientierung, Vektor- und Spatprodukt und Volumen.

10.9 Übersicht über die diversen Produkte

Skalar mal Vektor ergibt Vektor: $r\vec{a}$. Man könnte auch $\vec{a}r = r\vec{a}$ definieren. Dann gelten alle Rechenregeln, es kann aber in einem Produkt nur ein Vektor auftreten und dividieren darf man durch Vektoren auch nicht. Aber man darf kürzen: Aus $r\vec{a} = r\vec{b}$ folgt $\vec{a} = \vec{b}$ falls $r \neq 0$; aus $r\vec{a} = s\vec{a}$ folgt $r = s$ falls $\vec{a} \neq \vec{0}$.
Das skalare Produkt zweier Vektoren ist ein Skalar: $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle$. Das Assoziativgesetz für drei Vektoren: $\vec{a}\langle \vec{b} \mid \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle \vec{c}$ gilt nur, wenn $\vec{a}$ und $\vec{c}$ parallel sind. Kürzen darf man Vektoren auch nicht (und erst recht nicht durch Vektoren dividieren): Aus $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = \langle \vec{a} \mid \vec{c} \rangle$ folgt nur, dass $\vec{a}$ auf $\vec{b} - \vec{c}$ senkrecht steht. Immerhin hat man noch Kommutativität und Distributivität; und Assoziativität soweit nur zwei Vektoren beteiligt sind.
Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist ein Vektor: $\vec{a} \times \vec{b}$ im Raum. Statt Kommutativität haben wir Antikommutativität, statt Assoziativität den Grassmann. Immerhin gilt noch das Distributivgesetz, und man kann Skalare herausziehen. Aus $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ folgt nur, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig sind.
Die Determinante dreier (zweier) Vektoren ist ein Skalar. Dabei muss eine Orientierung des Raums (der Ebene) vorgegeben sein. Man hat die Linearitätseigenschaft in jeder Spalte. Aus $det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ folgt nur, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig sind.

10.10 Schlussbemerkung zum Anschauungsraum

Unsere Vorstellung vom Raum V unserer Anschauung und Erfahrung (d.h. des idealisierten physikalische Raums) mit Skalarenbereich K, Skalarprodukt $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$ bzw. Längenmessung $\vec{x} \mapsto |\vec{x}|$ und Orientierung haben wir so präzisiert: V ist Vektorraum über dem Körper K, d.h. (V1-8) und (K1-10) gelten. V ist dreidimensional, d.h. je 3 unabhängige Vektoren bilden eine Basis - und es gibt solche. K ist ein archimedischer und vollständiger angeordneter Körper. Das Skalarprodukt genügt (E1-4) und ist bis auf Skalierung (Wahl der Längeneinheit) eindeutig bestimmt (es ist nämlich vorgegeben, welche Strecken gleichlang sind) . Es beschreibt die Orthogonalprojektion einer Vektors $\vec{b}$ auf die Richtung $\vec{a}$ und ermögliche Längenmessung. Es gibt genau 2 Orientierungen. Durch die "Rechte-Hand-Regel" wird erklärt, wann eine Basis positiv orientiert ist. Flächen bzw. Volumen können durch den Betrag der Determinante gemessen werden, wenn man ihre Einheiten entsprechend der Längeneinheit festgelegt. Über Skalarprodukt und Determinante kann man Winkel messen.

10.11 Steinerscher Satz

Zu festem Punkt O ist das Trägheitsmoment bzgl. der durch den Punkt O und die normierte Richtung $\vec{a}$ gegebene Achse

$$J_O(\vec{a}) = \int |\vec{a} \times \vec{y}|^2 m(\vec{y} + O)\, \mathrm{d}V = \int \langle \vec{a} \times \vec{y} \mid \vec{a} \times \vec{y} \rangle m(\vec{y} + O)\, \mathrm{d}V$$

es ist nämlich $|\vec{a} \times \vec{y}$ der Abstand des Punktes $\vec{y} + O$ von der Achse. Für die Trägheitsmomente gilt nach Huygens und Steiner

Satz 10.6 *Ist S der Schwerpunkt des Körpers mit Masse M, so gilt*

$$J_O(\vec{a}) = J_S(\vec{a}) + |\vec{a} \times \overrightarrow{OS}|^2 \cdot M \quad \textit{falls } |\vec{a}| = 1$$

Beweis. Sei $\vec{v} = \overrightarrow{OS}$ d.h. $S = \vec{v} + O,\ \ P = \vec{y} + O = \vec{x} + S$ mit $\vec{y} = \vec{x} + \vec{v}$. Dann gilt

$$J_O(\vec{a}) = \int \langle \vec{a} \times \vec{y} \mid \vec{a} \times \vec{y} \rangle m(\vec{y} + O)\, \mathrm{d}V = \int (|\vec{a} \times \vec{x}|^2 + |\vec{a} \times \vec{v}|^2 + 2\langle \vec{a} \times \vec{x} \mid \vec{a} \times \vec{v} \rangle) m(P)\, \mathrm{d}V$$

$$= \int (|\vec{a} \times \vec{x}|^2 m(\vec{x} + S)\, \mathrm{d}V + |\vec{a} \times \vec{v}|^2 \int m(P)\, \mathrm{d}V + 2 \int (\langle \vec{a} \mid \vec{a} \rangle \langle \vec{v} \mid \vec{x} \rangle - \langle \vec{v} \mid \vec{a} \rangle \langle \vec{a} \mid \vec{x} \rangle) m(P)\, \mathrm{d}V$$

$$= J_S(\vec{a}) + |\vec{a} \times \overrightarrow{OS}|^2 M + 2|\vec{a}| \int \langle \vec{v} \mid \vec{x} \rangle m(\vec{x} + S)\, \mathrm{d}V - 2\langle \vec{v} \mid \vec{a} \rangle \int \langle \vec{a} \mid \vec{x} \rangle m(\vec{x} + S)\, \mathrm{d}V$$

$$= J_S(\vec{a}) + |\vec{a} \times \overrightarrow{OS}|^2 M + 2|\vec{a}|^2 f_S(\vec{v}) - 2\langle \vec{v} \mid \vec{a} \rangle f_S(\vec{a}) = J_S(\vec{a}) + |\overrightarrow{OS}|^2 M$$

da das auf den Schwerpunkt bezogene Massenmoment f_S konstant 0 ist. □

11 Determinanten

Wir betrachten nun wieder beliebige Körper und Vektorräume. Die Determinante ist eine Invariante, aus der man Eigenschaften einer $n \times n$-Matrix $A = (a^i_j)$ bzw. der durch sie definierten Bilinearform oder linearen Abbildung ablesen kann. In euklidischen Vektorräumen gibt sie Volumina an. Insbesondere hat man im Falle $K = \mathbf{R}^n, n = 2, 3$ die Übereinstimmung mit der im vorigen Paragraphen betrachteten Determinante. Auch in $\mathbf{R}^n, n > 3$ kann $|\det A|$ als Volumen des von $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ aufgespannten n-dimensionalen Parallelflachs angesehen werden und der Begriff der positiven Orientierung durch $\det A > 0$ eingeführt werden.

11.1 Regeln

Seien ein Körper K und eine natürliche Zahl n gegeben. Eine (normierte) *Determinantenform* ist eine Abbildung det, die jeder $n \times n$-Matrix A

$$A = (\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_n)$$

über K einen Skalar

$$|A| = \det A = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

aus K zuordnet so, dass die folgenden Regeln gelten:

$$(D1) \;\; \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{b}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

$$(D2) \;\; \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, r\boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = r \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

d.h. det ist linear in jeder Spalte. Eine Determinante mit zwei benachbarten gleichen Spalten ist Null:

$$(D3) \;\; \det(\ldots, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \ldots) = 0.$$

$$(D4) \;\; \det E_n = 1.$$

Ob's sowas gibt, wissen wir vorerst nicht, ziehen aber munter unsere Folgerungen über "die Determinante".

Eine Determinante mit zwei gleichen Spalten ist Null:

$$(D3^+) \;\; \det(\ldots, \boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{a}, \ldots) = 0.$$

(D5) *Die Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen addiert*;
(D6) *Die Determinante ändert das Vorzeichen, d.h. man muss mit* -1 *multiplizieren, wenn man zwei Spalten vertauscht.*
Beweis: Wir zeigen zunächst (D5) und (D6) fúr den Fall, dass die j-te und k-te Spalte benachbart sind.
$\det(\ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, r\boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}_k, \ldots) =_{(D1)} \det(\ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, r\boldsymbol{a}_j, \ldots) + \det(\ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots)$
$=_{(D2)} r\det(\ldots.\boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots) + \det(\ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots) =_{(D3)} 0 + \det(\ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots).$
$\det(\ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots) + \det(\ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots)$

$=_{(D5)} \det(\ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}_k, \ldots) + \det(\ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_j, \ldots)$
$=_{(D1)} \det(\ldots, \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_j, \ldots) =_{(D3)} 0.$
Hat man (D6) für benachbarte Spalten, so folgt $(D3^*)$ aus (D3) durch Induktion über den Abstand der zwei gleichen Spalten

$$\det(\ldots \boldsymbol{a} \ldots \boldsymbol{b}\, \boldsymbol{a} \ldots) = -\det(\ldots \boldsymbol{a} \ldots \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{b} \ldots) = 0$$

Und dann folgen (D5) und (D6) mit obigem Beweis allgemein. □

11.2 Eindeutigkeit und Berechnung

Eine *obere (untere) Dreiecksmatrix* hat unter (über) der Diagonalen nur Nullen.

Satz 11.1 *Zu gegebenem n und K gibt es höchstens eine normierte Determinantenform. Man berechnet* $\det A$ *durch Umformen nach (D5) und (D6) auf Dreiecksform (mit Berücksichtigung der Vorzeichenwechsel) und dann Produkt über die Diagonale. Es gilt* $\det A \neq 0$ *genau dann, wenn A invertierbar ist. Es gilt sogar*

Zu $c \in K$ gibt es höchstens eine Abbildung mit (D1-3) und $\det E_n = c$

Beweis. Durch elementare Spaltenumformungen nach (D5) und (D6) kann man A in eine Matrix A' in unterer Stufenform mit $\det A' = \det A$ oder $\det A' = -\det A$ überführen - und man weis, welcher Fall vorliegt. Hat A' eine Spalte $\mathbf{0}$, so $\det A' = 0$ nach (D2). Andernfalls handelt es sich wegen der Stufenform um eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $a_i'^i \neq 0$ und man hat nach (D2) $\det A' = a_1'^1 \cdot \ldots \cdot a_n'^n \det A''$, wobei A'' untere Dreicksmatrix mit Diagonaleinträgen 1 ist. Weitere Umformung nach (D5) überführt A'' in E_n, also $\det A'' = \det E_n = c$.

Nun ist A genau dann invertierbar, wenn es eine Transformationsmatrix ist, d.h. wenn die Spalten eine Basis von K^n bilden. Und diese Eigenschaft bleibt bei elementaren Umformungen erhalten. Also: A invertierbar genau dann, wenn A' keine Spalte $\mathbf{0}$ enthält.

11.3 Cramersche Regel

Ist A invertierbar, so erhält man die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ durch

$$x^j = \det(\boldsymbol{a}_1 \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)/\det A.$$

Beweis. $\boldsymbol{b} = \Sigma x^i \boldsymbol{a}_i$, also nach (D5) durch Subtraktion der $x^i \boldsymbol{a}_i$, $i \neq j$,
$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, x^j \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = x^j \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n).$

11.4 Produktsatz.

$$\det(AB) = \det A\ \det B$$

Beweis. Sei A fest, B variabel. Die Abbildung $\boldsymbol{b} \mapsto A\boldsymbol{b}$ ist linear, also erfüllen beide Abbildungen

$$B \mapsto \det AB \quad \text{ und } B \mapsto \det A \cdot \det B$$

die Bedingungen (D1-3) und $E_n \mapsto \det A$. Daher stimmen sie überein. □

Wir vermerken die wichtigen Spezialfälle

$$\det(rA) = r^n \det A,\ \ \det A^{-1} = \frac{1}{\det A},\ \ \det(S^{-1}AS) = \det(A).$$

Korollar 11.2 *Sind $A, B \in K^{n\times n}$ mit $AB = E$, so sind sie invertierbar und zueinander invers.*

Beweis: $\det A \cdot \det B = \det AB = \det E = 1$, also $\det A \neq 0$ und $\det B \neq 0$ und somit A, B invertierbar. Es folgt $A^{-1} = A^{-1}E = A^{-1}AB = EB = B$. □

11.5 Transponieren und Zeilenumformungen

Satz 11.3 $\det A = \det A^t$ *und die Regeln (D1)- (D6) gelten entsprechend für Zeilenumformungen*

Beweis. Ist A nicht invertierbar, so auch A^t und $\det A^t = 0 \det A$. Ist A eine Elementarmatrix, die aus E_n durch Addition des r-fachen einer Spalte zu einer anderen entsteht, so $\det A = \det E_n = 1$. Da A^t vom selben Typ ist, hat man $\det A = 1 = \det A^t$. Für die beiden andern Typen von Elementarmatrizen gilt $A = A^t$.

Ist A eine beliebige invertierbare Matrix, so können wir A mit Gauss-Jordan mit elementaren Umformungen in E_n überführen. Wir zeigen nun die Behauptung durch Induktion über die Anzahl der benötigten Schritte. D.h. wir haben $A = E_n$ oder eine Elementarmatrix S so, dass wir $\det(AS)^t = \det AS$ schon wissen. Nun folgt $\det A = \det A^t$ aus

$$\det A \det S = \det AS = \det(AS)^t = \det S^t A^t = \det S^t \det A^t = \det S \cdot \det A^t \quad \square$$

Korollar 11.4 *Ist A orthogonal oder unitär, so* $|\det A| = 1$.

Also: Einheitwürfel haben Volumen 1. Beweis. Wird A durch Umformungsschritte (D5) und (D6) in die untere Dreicksmatrix B überführt mithilfe der Elementarmatrizen S_i, so $\overline{A}$ mithilfe der $\overline{S}_i$ in $\overline{B}$ und $\det A = \varepsilon \det B$, $\det \overline{A} = \varepsilon \det \overline{B}$ mit $\varepsilon = \pm 1$. Also $\det \overline{A} = \varepsilon \prod \overline{b}_i^i = \overline{\varepsilon \prod b_i^i} = \overline{\det A}$. Es folgt

$$\det A^* = \det \overline{A}^t = \det \overline{A} = \overline{\det A}$$

und für unitäres A: $|\det A|^2 = \det A \cdot \overline{\det A} = \det A \cdot \det A^* = \det AA^* = \det E = 1$. □

11.6 Permutationen

Ist σ eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$, d.h. eine bijektive Abbildung dieser Menge in sich, so ist die Permutationsmatrix $P_\sigma \in K^{n\times n}$ dadurch definiert, dass in AP_σ die j-te Spalte von A durch die $\sigma(j)$-te ersetzt wird. Also entsteht AP_σ aus A, indem die $\sigma(\tau((j))$-te Spalte in die Position $\tau(j)$ rückt, und daraus $AP_\sigma P_\tau$, indem die Spalte von der Position $\tau(j)$ in die Position j weiterrückt. Somit

$$P_{\sigma\circ\tau} = P_\sigma \cdot P_\tau$$

Proposition 11.5 *Jede Permutationsmatrix P hat* $\det P = \pm 1$ *und ist Produkt elementarer Vertauschungsmatrizen.* $\det P = 1$ *bedeutet, dass die Anzahl der Faktoren in einer/jeder solchen Darstellung gerade ist.*

Beweis. Dass P Permutationsmatrix ist, bedeutet dass in jeder Zeile und Spalte genau eine 1, sonst 0 steht. Also werden im Gauss-Jordan-Algorithmus nur Vertauschungen benötigt und man erhält stets wieder Permutationsmatrizen. Insbesondere ist E die Stufenform von P. Weiterhin wegen Alternation $\det T = -1$ für eine Vertauschungsmatrix T. Rest mit Produktsatz. □
Wir schreiben $\mathsf{sign}\,\sigma = \det P_\sigma$, wenn P_σ die Permutationsmatrix zu der Permutation σ ist und nennen σ *gerade* bzw. *ungerade* je nachdem ob $\mathsf{sign}\sigma = 1$ bzw. -1

Korollar 11.6 *Jede Permutation ist ein Produkt von Transpositionen (=Vertauschungen zweier Werte). Die Anzahl der Faktoren in einer solchen Darstellung ist gerade genau dann, wenn* $\mathsf{sign}\,\sigma = 1$.

Eine Permutation σ von $\{1, \dots, n\}$ ist *zyklisch* von Länge $l > 1$, wenn es ein k gibt so, dass

$$\begin{array}{ll} \sigma^l(k) = k & \\ |M| = l & \text{für } M = \{k, \sigma(k), \sigma^2(k), \dots, \sigma^{l-1}(k)\} \\ \sigma(j) = j & \text{für } j \notin M \end{array}$$

d.h. man kann σ so notieren $k \mapsto \sigma(k) \mapsto \dots \mapsto \sigma^{l-1}(k) \mapsto k$

Bemerkung 11.7 *Für einen Zyklus der Länge l gilt* $\quad \mathsf{sign}\,\sigma = (-1)^{l-1}$

Beweis. Induktion, Produktsatz und

$$\sigma = [k \mapsto \sigma(k) \mapsto \dots \mapsto \sigma^{l-1}(k) \mapsto k] \circ [\sigma^{l-1}(k) \mapsto \sigma^l(k) \mapsto \sigma^{l-1}(k)]$$

11.7 Explizite Formel

Es gilt

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} (\mathsf{sign}\,\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n}$$

Dabei ist S_n die Menge aller Permutationen von $N = \{1, \dots, n\}$. Für $n = 3$ heisst das die *Sarrus'sche Regel.*

Beweis. Sei N^N die Menge aller Abbildungen von N nach N. Mit (D1,2) erhält man sofort folgende Gleichung und daraus die Behauptung mit (D3).

$$\det A = \sum_{j_1,\ldots,j_n=1,\ldots,n} a^1_{j_1} \cdot \ldots \cdot a^n_{j_n} \det(\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_n}) = \sum_{\phi \in N^N} (\prod_{i+1}^{n} a^i_{\phi i}) \det(\boldsymbol{e}_{\phi 1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\phi n}).$$

Korollar 11.8 *Zu jedem n gibt es ein Polynom $\mathsf{Det}(x^1_1, x^1_2 \ldots, x^n_n)$ in n^2 Variablen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ (sogar in $\{0, 1, -1\}$) so, dass für jeden Körper K und $n \times n$-Matrix*

$$A = (a^i_j) \quad \textit{gilt} \quad \det A = \mathsf{Det}(a^1_1, a^1_2, \ldots, a_{nn})$$

11.8 Abstrakte Determinantenformen

Für einen n-dimensionalen K-Vektorraum V können wir n-Determinantenformen als Abbildungen ϕ definieren, die jedem n-Tupel von Vektoren aus V einen Skalar in K zuordnen so, dass D1-3 gelten und ϕ nicht konstant 0 ist. Dann gilt für jede Basis $e_1, \ldots, e_n$ von V

$$\phi(a_1, \ldots, a_n) = \det A \cdot \phi(e_1, \ldots, e_n)$$

wobei die j-te Spalte von A die Koordinaten von a_j bzgl. der Basis enthält. Umgekehrt erhält man so für jede Basis und Skalar $\phi(e_1, \ldots, e_n) \neq 0$ eine Determinantenform auf V.

11.9 Entwicklung

Als zweckmässige Notation führt man ein: Der *Minor* $A^{k \wedge l}$ ist die $n-1 \times n-1$-Matrix, die man aus A durch Weglassen der k-ten Zeile und l-ten Spalte erhält. Dann hat man die Entwicklung nach der j-ten Spalte bzw. der i-ten Zeile

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a^i_j \det A^{i \wedge j}, \quad \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a^i_j \det A^{i \wedge j}$$

Die Faktoren $(-1)^{i+j}$ merkt man sich am besten nach der 'Schachbrettregel' $\begin{pmatrix} + & - & + & \ldots \\ - & + & - & \ldots \\ + & - & + & \ldots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$

Beweis für Spaltenentwicklung - Zeilen durch Transponieren. Seien $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ die Spalten von A und j fest. Dann $\boldsymbol{a}_j = a^1_j \boldsymbol{e}_1 + \ldots + a^n_j \boldsymbol{e}_j$, also wegen Multilinearität

$$\det A = a^1_j \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + \ldots + a^n_j \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

wobei jeweils die j-te Spalte ersetzt wurde. Durch Subtraktion des a^i_k-fachen der j-ten Spalte von jeweils der k-ten werden alle Einträge der i-ten Zeile 0, ausser der 1 in der j-ten Spalte. Durch $i + j$ Zeilen- bzw. Spaltenvertauschungen bringen wir diese 1 in die linke obere Ecke und haben

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & A^{i \wedge j} \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} \det A^{i \wedge j}.$$

Für den letzten Schluss benutzen wir wieder die Eindeutigkeit, hier für $n-1$ und die Abbildung

$$B \mapsto \det \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}, \quad B \in K^{(n-1)\times(n-1)}$$

11.10 Adjugierte Matrix *

$$(adA)A = (\det A)E_n \quad \text{mit } adA = ((-1)^{i+j} \det A^{i\wedge j})^t$$

Beweis. Die Berechnung des j-ten Diagonalelements von $(adA)A$ entspricht gerade dem Entwickeln nach der j-ten Spalte. Um zu sehen, dass in Position j,k mit $k \neq j$ eine Null steht, betrachte man die Matrix B, die aus A entsteht, wenn man die k-te Spalte durch die j-te ersetzt - und selbige beibehält. Dann ist $A^{i\wedge k}$ gleich $B^{i\wedge j}$ bis auf eine (für alle i gleiche) Vertauschung und man erhält den Eintrag bis auf das Vorzeichen als die Entwicklung von B nach der j-ten Spalte, was aber wegen zweier gleicher Spalten Null ergibt. □

11.11 Orientierung

Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Zwei Basen $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ und $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ heissen *gleichorientiert*, wenn es eine stetige Abbildung $f : [0,1] \to V^n$ gibt

$$f(0) = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n), \quad f(1) = (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)$$

$$f(t) = (\vec{a}_1(t), \ldots, \vec{a}_n(t)) \text{ ist Basis für alle } t \in [0,1]$$

Lemma 11.9 *Die Basen $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ und $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ von V sind gleichorientiert genau dann, wenn für eine/jede Determinantenfunktion* det *auf V gilt*

$$\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \cdot \det(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n) > 0$$

Beweis. Ist f gegeben, so betrachte die Funktion $d(t) = \det(\vec{a}_1(t), \ldots, \vec{a}_n(t))$. Das ist eine stetige Funktion mit $d(t) \neq 0$ für $t \in [0,1]$, also $d(0) \cdot d(1) > 0$.

Umgekehrt gibt es zu jeder Matrix A mit $\det A \neq 0$ eine stetige matrizenwertige Funktion $t \mapsto A(t)$ definiert auf $[0,1]$ so, dass $A(0) = A$, $\det(A(t))\det(A) > 0$ für alle t, und $A(1)$ Diagonalmatrix mit allen Diagonaleinträgen $= 1$, nur der letzte ± 1. Dazu bauen wir in jeden der Gauss-Umformungsschritte einen Zeitparameter ein. Die benötigten Schritte sind Scherung, Vertauschung zweier Spalten mit Vorzeichenänderung in einer, Streckung um Skalar $r > 1$, Streckung um Skalar $0 < r < 1$ und Multiplikation zweier Spalten mit -1. Wir notieren nur die relevanten 2×2-Untermatrizen und passende Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} 1 & tr \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (t \in [0,1]), \quad \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} (\omega \in [0, \frac{\pi}{2}])$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & rt \end{pmatrix} (t \in [\frac{1}{r}, 1]), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r\frac{1}{t} \end{pmatrix} (t \in [r, 1]), \quad \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} (\omega \in [0, \pi])$$

Mit diesen Schritten bekommen wir zuerst Diagonalgestalt mit ± 1 auf der Diagonalen und von da in die behauptete Form. Durch Streckung und Verschiebung können wir die Parameterintervalle zum Parameterintervall $[0,1]$ zusammenbauen. □

Folglich gibt es auf V genau zwei Orientierungen und wir können durch eine Basis festlegen, welche die positive heissen soll.

11.12 Existenz *

Man kann die Funktion det induktiv entsprechend der Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte definieren. Oder man definiert $\det(P_\sigma)$ und dann $\det A$ entsprechend der expliziten Formel. In beiden Fällen hat man (D1-4) nachzuweisen.

Beweis. Im Falle $n=1$ sei $\det A = a_1^1$. Sei nun die Behauptung für n-1 schon erfüllt. Definiere für $n \times n$ Matrizen $\det A$ durch die Entwicklung nach der ersten Zeile. Beim Nachweis von (D1-2) betrachten wir festes j und Matrizen A, B, C mit Spalten $\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{c}_k$ für alle $k \neq j$, also $A^{1\wedge j} = B^{1\wedge j} = C^{1\wedge j}$. Gilt $\boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{b}_j$, so folgt mit Induktion $\det C^{1\wedge k} = \det A^{1\wedge k} + \det B^{1\wedge k}$ für $k \neq j$ und man berechnet

$$\det C = (-1)^{1+j}(a_j^1 + b_j^1)\det C^{1\wedge j} + \Sigma_{k\neq j}(-1)^{1+k}a_k^1 \det C^{1\wedge k}$$

$$= (-1)^{1+j}(a_j^1 \det A^{1\wedge j} + b_j^1 \det B^{1\wedge j}) + \Sigma_{k\neq j}(-1)^{1+k}a_k^1 \det(A^{1\wedge k} + B^{1\wedge k})$$

$$\begin{array}{rl} = & (-1)^{1+j}a_j^1 \det A^{1\wedge j} + \Sigma_{k\neq j}(-1)^{1+k}a_k^1 \det A^{1\wedge k} \\ + & (-1)^{1+j}b_j^1 \det B^{1\wedge j} + \Sigma_{k\neq j}(-1)^{1+k}b_k^1 \det B^{1\wedge k} \end{array}$$

$$= \det A + \det B$$

Gilt $\boldsymbol{c}_j = r\boldsymbol{a}_j$, so gilt nach Induktion $\det C^{1\wedge k} = r \det A^{1\wedge k}$ für $k \neq j$ und somit

$$\det C = (-1)^{1+j} r a_j^1 \det C^{1\wedge j} + \Sigma_{k\neq j}(-1)^{1+k}a_k^1 \det C^{1\wedge k}$$

$$= (-1)^{1+j} r a_j^1 \det A^{1\wedge j} + \Sigma_{k\neq j}(-1)^{1+k}a_k^1 r \det A^{1\wedge k} = r \det A$$

Hat A zwei gleiche Spalten $\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}_l$, $l = k+1$, so gilt das auch für alle $A^{1\wedge j}$ mit $j \neq k, l$, also $\det A^{1\wedge j} = 0$. Die Minoren $A^{1\wedge k}$ und $A^{1\wedge l}$ stimmen überein und treten mit demselben Vorfaktor $a_k^1 = a_1^l$ aber entgegengesetztem Vorzeichen in der Entwicklung auf. Also $\det A = 0$.

Schliesslich $\det E_n = (-1)^2 \det(E_n)^{1\wedge i} + \Sigma_{j\neq i} 0 \det(E_n)^{1\wedge j} = \det E_{n-1} = 1$.

11.13 Geschichte *

Matrizen traten zuerst als Koeffizientenmatrizen linearer Gleichungssysteme auf. Der sog. Gauss-Algorithmus zur Lösung solcher Systeme war in China seit -100 als Fang-Cheng-Regel bekannt. Gauss hat erkannt, dass er genauso in den Körpern $\mathbb{Z}_p$ funktioniert. Da in Europa Gleichungen als Zeilen geschrieben werden, wurde der Algorithmus in der Form von Zeilenumformungen gerechnet. Wir haben uns hier für Spalten entschieden, da Spalten in der herrschenden Tradition die primären Objekte der linearen Algebra sind (sie entsprechen den Vektoren des Raumes) und alle grundlegenden Anwendungen des Verfahrens Spalten betreffen. Die 'Matrizenalgebra' entstand im 19.Jh.

Determinanten, in expliziter Form, wurden von Leibniz und Seki Kowa, für das Publikum von Cramer (1704-52) zur Lösung linearer Gleichungssysteme benutzt. In der Linearen Algebra und ihrer Numerik haben sie, ganz im Gegensatz zum Gauss-Algorithmus, keine praktische Bedeutung mehr. Sie sind jedoch ein unentbehrliches theoretisches und auch praktisches Hilfsmittel der Algebra, Geometrie und Analysis. Letzteres insbesondere deshalb, weil die Determinante einer reellen Matrix, wie wir das im Falle $n = 2$ gesehen haben, als das Volumen des durch die Spalten bestimmten Parallelepipeds verstanden werden kann.

12 Lineare Gleichungssysteme

12.1 Geraden in der Ebene

Hat man in der Ebene ein Koordindatensystem $\alpha : O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ gewählt, so kann man Geraden durch Koordinatengleichungen beschreiben. Sind a_1, a_2, nicht beide 0, und b im Skalarenkörper fest gewählt, so bilden die Punkte

$$X \quad \text{mit } X^\alpha = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_1x^1 + a_2x^2 = b$$

eine Gerade g. Mithilfe des Matrizenprodukts sieht's so aus

$$g = \{X \mid (a_1\, a_2) \cdot X^\alpha = b\}$$

Und jede Gerade g kann man so beschreiben - dabei sind die a_1, a_2, b bis auf einen gemeinsamen Faktor $c \neq 0$ eindeutig bestimmt. Die Geraden durch O sind gerade die mit $b = 0$. Die Gerade g' mit Koordinatengleichung $a'_1x^1 + a'_2x^2 = b'$ ist zu g parallel genau dann, wenn es ein $c \neq 0$ gibt mit $a'_1 = ca_1$ und $a'_2 = ca_2$.

Zum Beweis gehen wir davon aus, dass Geraden durch Parameterdarstellungen beschrieben werden und betrachten zunächst die Ursprungsgeraden mit Parameterdarstellung

$$g = \{X = r\vec{v} + O \mid r \in \mathcal{S}\} \quad \text{mit Richtungsvektor } \vec{v} \neq \vec{0}$$

Mit

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} = \vec{v}^\alpha \quad a_1x^1 + a_2x^2 = 0$$

erhält man eine Koordinatengleichung für g und umgekehrt aus der Koordinatengleichung einen Richtungsvektor. In der Tat

$$X \in g \iff \exists r \in \mathcal{S}.\ X = r\vec{v} + O \iff \exists r \in \mathcal{S}.\ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = X^\alpha = r\vec{v}^\alpha = r\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists r \in \mathcal{S}.\ x^1 = ra_2 \wedge x^2 = -ra_1 \iff a_1x^1 + a_2x^2 = 0$$

In der Tat, ist $a_1x^1 + a_2x^2 = 0$ so wähle man

$$r = -\frac{x^2}{a_1} \text{ falls } a_1 \neq 0, \quad r = -\frac{x^1}{a_2} \text{ falls } a_2 \neq 0$$

- eines von beiden tritt ein, das $\vec{v} \neq \vec{0}$ vorausgesetzt war.

Die Richtungsvektoren von g sind nun gerade die $c\vec{v}$ mit $c \neq 0$, entsprechend den Koordinatengleichungen $ca_1x^1 + ca_2x^2 = 0$.

Die Parallele h zu g durch P hat die Parameterdarstellung

$$h = \{X = r\vec{v} + P \mid r \in \mathcal{S}\}$$

Mit

$$P^\alpha = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \end{pmatrix}, X^\alpha = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{PX}^\alpha = X^\alpha - P^\alpha = \begin{pmatrix} x^1 - p^1 \\ x^2 - p^2 \end{pmatrix}$$

folgt

$$X \in h \iff \exists r \in \mathcal{S}.\ \overrightarrow{PX} = r\vec{v} \iff a_1(x^1 - p^1) = a_2(x^2 - p^2) = 0$$

$$\iff a_1x^1 + x^2x^2 = a_1p^1 + a_2p^2 \iff (a_1\,a_2) \cdot X^\alpha = (a_1\,a_2) \cdot P^\alpha$$

Ist eine Koordinatengleichung gegeben

$$a_1x^2 + a_2x^2 = b \quad \text{und } a_1p^1 + a_2p^2 = b$$

so beschreibt sie diese Gerade. Solche p^1, p^2 kann man immer finden: Ist $a_1 \neq 0$, so wähle man p^2 beliebig und

$$p^1 = \frac{1}{a_1}(b - a_2p^2)$$

12.2 Ebenen im Raum

Entsprechendes gilt für Ebenen ε im Raum: Jede Ebene im Raum wird durch eine, bis auf einen Faktor c eindeutig bestimmte Koordinatengleichung beschrieben

$$X^\alpha \in \varepsilon \Leftrightarrow a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 = b \quad \text{wobei nicht alle } a_i = 0$$

und jede solche Gleichung beschreibt eine Ebene. Ist die Gleichung gegeben, so bestimme man unabhängige Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ und Punkt P mit

$$(a_1\,a_2\,a_3) \cdot \vec{v}^\alpha = 0, \quad (a_1\,a_2\,a_3) \cdot \vec{w}^\alpha = 0, \quad (a_1\,a_2\,a_3) \cdot \vec{P}^\alpha = 0$$

um eine Parameterdarstellung von ε zu erhalten

$$\varepsilon = \{r\vec{v} + s\vec{w} + P \mid r, s \in \mathcal{S}\}$$

Ist z.B. $a_1 \neq 0$, so kann man z.B. v^3, w^2, p^3 beliebig wählen und

$$\vec{v}^\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a_1}a_3v^3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w}^\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a_1}a_2w^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1}(b - a_3p^3) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ist die Parameterdarstellung gegeben, d.h.

$$\vec{v}^\alpha = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}^\alpha = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}, \quad P^\alpha = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}$$

so finde man eine nichtrriviale Lösung a_1, a_2, a_3 des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_1 v^1 + a_2 v^2 + a_3 v^3 &= 0 \\ a_1 w^1 + a_2 w^2 + a_3 w^3 &= 0 \end{aligned}$$

und setze

$$a_1 p^1 + a_2 p^2 + a_3 p^3 = b$$

um die Koordinatengleichung für ε zu erhalten

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 = b$$

12.3 Lösungsraum eines Gleichungssystems

Sei K ein Körper. Ein *lineares Gleichungssystem* von m Gleichungen in n Variablen $x^1, \ldots, x^n$ mit Koeffizienten in K wird angegeben in der Form

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{mit } A \in \mathrm{Mat}(m, n, K),\ \boldsymbol{b} \in K^m$$

Sein *Lösungsraum* ist

$$\{\boldsymbol{x} \in K^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}.$$

Das System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ist *homogen* und heisst auch das zu A (oder $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ gehörige homogene System.

- Der Lösungsraum eines homogenen Systems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ist ein Untervektorraum U von K^n - insbesondere hat man die *triviale Lösung* $\boldsymbol{0}$. Eine Basis $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ von U heisst auch ein *Fundamentalsystem* von Lösungen und man hat die *allgemeine Lösung* in der Form

$$\boldsymbol{x} = r_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + r_k \boldsymbol{v}_k \quad \text{mit } \textit{Parametern } r_i \in K$$

- Der Lösungsraum von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist dann affiner Teilraum von K^n

$$U + \boldsymbol{s} \quad \text{wobei } \boldsymbol{s} \text{ beliebige } \textit{spezielle Lösung} \text{ d.h. } A\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$$

  d.h. die *allgemeine Lösung* von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist von der Form

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_h + \boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{x}_h \text{ allg. Lsg. des homogenen Systems, } \boldsymbol{s} \text{ spezielle Lsg.}$$

was immer man sich bei diesem altertümlichen Gerede denken mag. Beweis. Aus $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ und $A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ folgen $A(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} + vo = \boldsymbol{0}$ und $A(r\boldsymbol{v}) = rA\boldsymbol{v} = r\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.

Gelte $A\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$. Wenn $A\boldsymbol{x}_h = 0$, dann $A(\boldsymbol{x}_h + \boldsymbol{s}) = A\boldsymbol{x}_h + A\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$. Gilt $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dann $A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}) = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

12.4 Umformungen

Die l-Zeilen über K bilden einen Vektorraum $K^{l*} = K^{1\times l}$, der Dimension l - der auf offensichtliche Weise zum Raum K^n der Spalten isomorph ist. Entsprechend den elementaren Umformungen von Listen von Vektoren in diesen Raum hat die elementaren Zeilenumformungen einer $m \times l$-Matrix.

Der *Rang* der Matrix A bzw. des Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist die Dimension des von den Zeilen von A erzeugten Untervektorraums von K^{*m}.

Mit $(A|\boldsymbol{b})$ notieren wir die um die Spalte $\boldsymbol{b}$ erweiterte Matrix A.

Satz 12.1 *Entsteht $(C|\boldsymbol{d})$ aus $(A|\boldsymbol{b})$ durch elementare Zeilenumformungen und Weglassen oder Hinzufügen von Nullzeilen, so haben die Gleichungssysteme $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ und $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ denselben Lösungsraum in K^n und denselbem Rang.*

Beweis. Wegen der Umkehrbarkeit der Umformungen genügt es zu zeigen: Ist $\boldsymbol{v}$ Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ und entsteht $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ durch einen Umformungsschritt, so ist $\boldsymbol{v}$ auch Lösung von $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$. Werde z.B. zur k-ten Zeile $(A_k|b_k)$ das r-fache der l-ten, $(A_l|b_l)$, addiert. Dann

$$(A_k + rA_l)\boldsymbol{v} = A_k\boldsymbol{v} + rA_l\boldsymbol{v} = b_k + rb_l$$

12.5 Beispiel

Beispiel 1 ist homogenes Gleichungssystem, die nächsten beiden Spalten geben die rechten Seiten für Beispiel 2 und 3 an. Man kann die Lösung aus der Stufenform durch Rücksubstitution bestimmen oder aus der ausgeräumten Stufenform direkt ablesen.

Beispiel 1. Die letzten beiden Gleichungen der Stufenform können weggelassen werden und man kann $x^5 = r$ frei wählen. Aus der dritten Gleichung folgt dann $x^4 = r$ und aus der zweiten weiterhin $x^3 = \frac{7}{2}r$. Man kann nun $x^2 = s$ ebenfalls frei wählen und erhält aus der ersten Gleichung $x^1 = -\frac{3}{2}r - 2s$. Wir haben also unendlich viele Lösungen mit zwei 'Freiheitsgraden', hier ausgedrückt durch die beiden freien Parameter $x^5 = r$, $x^4 = s$. In Spaltenform hat man

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}r - 2s \\ s \\ \frac{7}{2}r \\ r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}r \\ 0 \\ \frac{7}{2}r \\ r \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also allgemeine Lösung

$$\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w}, \quad r, s \text{ in } K \quad \text{mit } \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{rrrrrl|r|r||rrrrr}
x^1 & +2x^2 & -x^3 & +2x^4 & +3x^5 & =0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\
2x^1 & +4x^2 & -2x^3 & +5x^4 & +5x^5 & =0 & 1 & 3 & 2 & 4 & -2 & 5 & 5 \\
-x^1 & -2x^2 & -x^3 & +x^4 & +x^5 & =0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\
2x^1 & +4x^2 & & +2x^4 & +x^5 & =0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 2 & 1 \\
3x^1 & +6x^2 & -3x^3 & +7x^4 & +8x^5 & =0 & 1 & 4 & 3 & 6 & -3 & 7 & 8
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrl|r|r||rrrrr}
x^1 & +2x^2 & -x^3 & +2x^4 & +3x^5 & =0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\
 & & & x^4 & -x^5 & =0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & & -2x^3 & +3x^4 & +4x^5 & =0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \\
 & & 2x^3 & -2x^4 & -5x^5 & =0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -5 \\
 & & & x^4 & -x^5 & =0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrl|r|r||rrrrr}
x^1 & +2x^2 & -x^3 & +2x^4 & +3x^5 & =0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\
 & & -2x^3 & +3x^4 & +4x^5 & =0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \\
 & & & x^4 & -x^5 & =0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & & 2x^3 & -2x^4 & -5x^5 & =0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -5 \\
 & & & x^4 & -x^5 & =0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrl|r|r||rrrrr}
x^1 & +2x^2 & -x^3 & +2x^4 & +3x^5 & =0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\
 & & -2x^3 & +3x^4 & +4x^5 & =0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \\
 & & & x^4 & -x^5 & =0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & & & x^4 & -x^5 & =0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & & & x^4 & -x^5 & =0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrl|r|r||rrrrr}
x^1 & +2x^2 & -x^3 & +2x^4 & +3x^5 & =0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\
 & & -2x^3 & +3x^4 & +4x^5 & =0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \\
 & & & x^4 & -x^5 & =0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & & & & 0 & =0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & =0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrl|r|r||rrrrr}
x^1 & +2x^2 & -x^3 & +0x^4 & +5x^5 & =0 & 3 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 5 \\
 & & -2x^3 & +0x^4 & +7x^5 & =0 & 5 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 7 \\
 & & & x^4 & -x^5 & =0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & & & & 0 & =0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & =0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrl|r|r||rrrrr}
x^1 & +2x^2 & +0x^3 & +0x^4 & +\frac{3}{2}x^5 & =0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\
 & & x^3 & +0x^4 & -\frac{7}{2}x^5 & =0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} \\
 & & & x^4 & -x^5 & =0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & & & & 0 & =0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & =0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Beispiel 2. keine Lösung wegen Gleichung $0 = 2$.
Beispiel 3. Im umgeformten System sind die letzten beiden Gleichungen von der Form $0 = 0$, können also weggelassen werden. Wie in Beispiel 1 können wir $x^5 = r$ frei wählen und erhalten dann aus der dritten Gleichung $x^4 = 1 + r$. Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt sich $x^3 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}r$. Nun ist $x^2 = s$ wieder frei wählbar und $x^1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}r - 2s$ aus der ersten Gleichung. In Spaltenform

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}r - 2s \\ s \\ \frac{1}{2} + \frac{7}{2}r \\ 1 + r \\ r \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} + r\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w} \text{ mit } \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ aus Beispiel 1. Der Lösungsraum des Gleichungssystems bzw. die allgemeine Lösung lässt sich also so angeben:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + r\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w} \text{ mit } r, s \text{ in } K.$$

12.6 Stufenform

Ein Gleichungssystem in (oberer) *Stufenform* ist von der Gestalt

$$\begin{array}{cccccccccc}
a_{1j_1}x^{j_1}+ & \dots & a_{1j_2}x^{j_2}+ & \dots & a_{1j_i}x^{j_i}+ & \dots & a_{1j_\rho}x^{j_\rho}+ & \dots & +a_{1n}x^n = & b_1 \\
 & & a_{2j_2}x^{j_2}+ & \dots & a_{2j_i}x^{j_i}+ & \dots & a_{2j_\rho}x^{j_\rho}+ & \dots & +a_{2n}x^n = & b_2 \\
 & & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & a_{ij_i}x^{j_i}+ & \dots & a_{ij_\rho}x^{j_\rho}+ & \dots & +a_{in}x^n = & b_i \\
 & & & & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & a_{rj_\rho}x^{j_\rho}+ & \dots & +a_{rn}x^n = & b_\rho \\
 & & & & & & & & 0 = & b_{\rho+1} \\
 & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & 0 = & 0
\end{array}$$

mit Zahlen $a_{ij_i} \neq 0$ rechts neben den Stufenkanten, den *Pivots*. Die entsprechenden Variablen x^{j_i} heissen *Pivotvariable*, die anderen Variablen x^j heissen *Parametervariable* und wir schreiben $j \in Par$. Die Zahl ρ ist der *Rang* des Systems. Für $\rho = m$ hat man keine Gleichungen $0 = b_l$. Bei *ausgeräumter* Stufenform hat man für alle Pivots

$$a_{ij_i} = 1, \quad a_{kj_i} = 0 \text{ für } k \neq i$$

Die entsprechenden Begriffe für Zeilen einer Matrix A ergeben sich, wenn man sie als Koeffizientenmatrix eine homogenen Systems auffasst. Man spricht dann von *unterer Stufenform* oder *Zeilen-Stufenform*.

12.7 Fang-Cheng alias Gauss-Algorithmus

Gegeben eine Matrix A, sei $n_0 \geq 0$ maximal so, dass die ersten n_0 Spalten von A eine Stufenmatrix bilden mit den Pivotstellen $j_i, i \leq p$. Die Matrixumformung $A \rightsquigarrow A'$

heisst nun ein *Gauss-Schritt*, wenn $n_0 < n$ und einer der folgenden Fälle vorliegt

$$\begin{array}{llll} Z(p+1) \leftrightarrow Zl], & l > p+1, & a_{p+1,n_0+1} = 0, & a_{l,n_0+1} \neq 0 \\ Zk := Zk + (-rs^{-1})Z(p+1), & k > p+1, & a_{p+1,n_0+1} = s \neq 0, & a_{k,n_0+1} = r \neq 0 \end{array}$$

Dabei steht Zl für die l-te Zeile; also werden entweder die Zl und $Z(p+1)$ vertauscht oder zu Zk ein Vielfaches von $Z(p+1)$ addiert. Das kann man durch Multiplikation mit einer Elementarmatrix T beschreiben: $A' = TA$.

Eine Anwendung des *Gauss-Algorithmus* mit t-Schritten auf eine Matrix A besteht in einer Folge $A_1 = T_1A, \ldots, A_t = T_tA_{t-1}$ von Gauss-Schritten. Sie *terminiert* mit A_t, wenn A_t keinen weiteren Gauss-Schritt zulässt.

Satz 12.2 *Jede Anwendung des Gauss-Algorithmus auf eine $m \times n$-Matrix terminiert nach höchstens $q(m - \frac{1}{2}(q+1))$, $q = \min\{n, m\}$ Schritten mit einer Stufenmatrix.*

Beweis. Induktion über Anzahl der Zeilen von A. Sei eine Anwendung $A_1 = T_1A, \ldots, A_t = T_tA_{t-1}$ des Gauss-Algorithmus mit mehr als $q(m - \frac{1}{2}(q+1))$ Schritten gegeben. Nach $h \leq m-1$ Schritten erhält man dabei eine Matrix $A' = A_h$ mit $a'_{i1} = 0$ für alle $i > 1$. Ist $a'_{11} \neq 0$, so lasse man in A_h und den T_i, $i > h$ die erste Zeile und Spalte weg: man erhält eine Anwendung des Gauss-Algorithmus für $m-1 \times n-1$-Matrizen und einen Widerspruch zur nach Induktionsannahme maximal möglichen Schrittzahl. Ist $a'_{11} = 0$, so $h = 0$ und $A' = A$ und man erhält ebenso einen Widerspruch durch Weglassen der ersten Spalte. □

Rechnet man in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$, so nimmt man aus numerischen Gründen zusätzliche Vertauschungen vor, muss also auf andere Art das Terminieren sichern.

Korollar 12.3 *Jede Matrix kann durch elementare Zeilenumformungen in eine ausgeräumte Stufenmatrix überführt werden. (Die ist sogar eindeutig bestimmt.)*

Korollar 12.4 *Der Rang einer $m \times n$-Matrix A ist die Dimension (*Spalten-Rang*) des von den Spalten von A erzeugten Untervektorraums von K^n (*Spaltenraum*) .*

Beweis. Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Spalten ändert sich bei Zeilenumformungen nicht, also auch nicht der Spaltenrang. Und für eine ausgeräumte Stufenform wird der Spaltenraum gerade von den Pivotspalten erzeugt. □

12.8 Scholia

Satz 12.5 *Für $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ in ausgeräumter Stufenform gilt*

- *Das homogene System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ hat die allgemeine Lösung $\boldsymbol{x}_h$ mit*

$$\begin{array}{lcll} x^j & = & r^j & \textit{Parameter, falls } j \in Par \\ x^{j_i} & = & -\sum_{j_i < j \in Par} a_{ij} r^j & \textit{falls } j_i \textit{ Pivot} \end{array}$$

- *Ein System* $\boldsymbol{v}_t, t \in Par$ *von* $n - \rho$ *Fundamentallösungen für* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *erhält man, indem man jeweils einen Parameter* $= 1$ *setzt, alle anderen* $= 0$*. Also hat man einen* $n - \rho$*-dimensionalen Lösungsraum.*

$$(\boldsymbol{v}_t)_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = t \\ -a_{it} & \text{falls } j = j_i < t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- *Das System* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *ist unlösbar, genau dann, wenn* $b_{\rho+1} \neq 0$*. Ist* $b_{\rho+1} = 0$ *so hat man die allgemeine Lösung*

$$\begin{array}{lcll} x^j & = & r^j & \text{Parameter, falls } j \in Par \\ x^{j_i} & = & b_i - \sum_{j_i < j \in Par} a_{ij} r^j & \text{falls } j_i \text{ Pivot} \end{array}$$

Beweis. Zu zeigen ist nur, dass man durch die angegebenen Spalten $\boldsymbol{v}_j$, $j \in Par$, in der Tat eine Basis des Lösungsraums von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ erhält. Fasst man die $n - \rho$ Spalten zu einer Matrix zusammen, so hat man eine Untermatrix $E_{n-\rho}$, also lineare Unabhängigkeit. Und $\boldsymbol{x} = \sum_{t \in Par} r^t \boldsymbol{v}_t$

Satz 12.6

- *Die Dimension des Lösungsraums eines homogenen Systems* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *in* n*-Variablen ist* $n - Rang\ A$

- *Ein homogenes System* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *hat genau dann nur die triviale Lösung, wenn* A *invertierbar ist.*

- *Ein System* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *ist genau dann eindeutig lösbar, wenn* A *invertierbar ist - die Lösung ist dann* $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$

- *Das System* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *ist lösbar genau dann, wenn* $\boldsymbol{b}$ *Linearkombination der Spalten von* A *ist, d.h. wenn* $Rang\,A = Rang(A|\boldsymbol{b})$

- *Für eine invertierbare Matrix* Q*, z.B. eine Permutationsmatrix gilt*

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad AQ\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \ \wedge \ \boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y}$$

- *Gilt* $PAQ = LR$ *mit invertierbaren* P, Q, L *so*

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad R\boldsymbol{y} = L^{-1}P\boldsymbol{b} \ \wedge \ \boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y}$$

Letzteres besagt, dass Spaltenvertauschungen legitim sind, wenn sie im Ergebnis berücksichtigt werden. Die LR Zerlegung für Gleichungssysteme erfolgt natürlich mit oberer Stufenmatrix R, unter Dreicksmatrix L mit 1-Diagonale (leicht zu invertieren) und Permutationsmatrizen P, Q - Q für eventuelle Spaltenvertauschungen. Die Zerlegung ist von Vorteil, wenn mehrere Gleichungssysteme mit demselben A gelöst werden sollen.

12.9 Numerische Probleme *

Rechnet man mit reellen Zahlen nicht exakt, sondern mit numerischen Näherungswerten, so ist das Verfahren zu modifizieren, um sinnvolle Ergebnisse zu erhalten. Bei der Auswahl der Pivots: man wähle diese betragsmässig möglichst gross, eventuell sogar unter Vertauschung von Variablen (was man natürlich bei der Darstellung des Ergebnisses berücksichtigen muss). Der Grund: man muss ja durch die Pivots dividieren, und bei betragsmässig kleinen Zahlen wirken sich auch kleine Rundungs- oder Messfehler gravierend im Kehrwert aus. Beispiel:

$$(I)\ 0.0001x + y = 1,\quad (II)\ x + y = 1.9999$$

Die exakte Lösung ist $x = 1, y = 0.9999$. Rechnet man aber $(II') = (II) - 10000(I)$ und daraus $y \approx 1$, so erhält man $x \approx 0$, also eine deutliche Abweichung von der richtigen Lösung. Vertauscht man die Gleichungen, $(I') = (II)$ und $(II') = (I)$ und rechnet dann $(II'') = (II') - 0.0001(I')$ so erhält man näherungsweise $y \approx 1$ und dann aus (I') auch $x \approx 1$.

Es gibt aber auch (schlecht konditionierte) Probleme, bei denen das nicht hilft, z.B. die Bestimmung des Schnittpunkts zweier Geraden mit annähernd gleicher Steigung in der Ebene (schleifender Schnitt). Beispiel

$$(I)\ x + y = 2,\quad (II)\ x + 1.0001y = 2.0001$$

Die exakte Lösung ist $y = 1, x = 1$. Eine leichte Störung der Daten kann jedoch das Ergebnis dramatisch verändern. Ersetzt man (II) durch $x + 1.0001y = 2.0002$, so ist die exakte Lösung $y = 2, x = 0$. Ersetzt man (II) durch $x + y = 2.0001$, so gibt es überhaupt keine Lösung. Ersetzt man (II) durch $x+y = 2$, so gibt es unendlich viele Lösungen.

12.10 Dualraum und duale Basis

Ein *Tensor erster Stufe* oder *Linearform* auf einem K-Vektorraum V ist eine K-lineare Abbildung ϕ von V in den K-Vektorraum K, d.h. es ϕ ist ein Vektörlifresser und es gilt für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und $r \in K$

$$\phi(\vec{v} + \vec{w}) = \phi(\vec{v}) = \phi(\vec{w}),\quad \phi(r\vec{v}) = r\phi(\vec{v})$$

Die Linearformen bilden einen Untervektorraum des Funktionenraums K^V und damit einen K-Vektorraum V^*, den *Dualraum* zu V:

$$(\phi + \psi)(\vec{v}) = \phi(\vec{v}) + \psi(\vec{v}),\quad (r\phi)(\vec{v}) = r(\phi(\vec{v}))\ \ \omega(\vec{v}) = \vec{0}$$

Sei nun $\alpha : \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ eine Basis von V. Dann gibt es zu jeder Linearform ϕ auf V eindeutig bestimmte $a_1, \ldots, a_n$ in K so, dass

$$\phi(x^1\vec{e}_1 + \ldots + x^n\vec{e}_n) = a_1x^1 + \ldots + a_nx^n \text{ für alle } x = x^1\vec{e}_1 + \ldots + x^n\vec{e}_n \text{ in } V.$$

Nämlich $a_j = \phi(\vec{e}_j)$. Umgekehrt wird durch gegebene $a_1, \ldots, a_n$ in K auf diese Weise auch eine Linearform definiert. Somit erhält man einen Isomorphismus zwischen V^* und dem Zeilen-Vektorraum K^{n*}

$$\phi \mapsto \phi_\alpha = (\phi(\vec{e}_1), \ldots, \phi(\vec{e}_n))$$

$$\phi(\vec{x})^\alpha = \phi_\alpha \vec{x}^\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Die Entsprechung zwischen der Basis α von V und der kanonischen Basis von K^n

$$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$$

wird dabei ergänzt durch die Entsprechung zwischen der zu α *dualen Basis* α^* von V^* und der kanonischen Basis von K^{n*}

$$\vec{e}_1^*, \ldots, \vec{e}_n^* \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{e}_1^*, \ldots, \boldsymbol{e}_n^*$$

wobei $\vec{e}_j^*$ die j-te Koordinatenform bzgl. α ist

$$\vec{e}_j^*(\sum_i x^i \vec{e}_i) = x^j$$

Somit: Die zu der Basis $\alpha : \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ von V *duale* Basis $\alpha^* : \vec{e}_1^*, \ldots, \vec{e}_n^*$ (auch als $\vec{e}^1, \ldots, \vec{e}^n$ notiert) ist bestimmt durch die Bedingungen

$$\vec{e}_j^*(\vec{e}_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Sei nun $\beta : \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ eine weitere Basis von V und ${}^\alpha T_\beta$ die Transformationsmatrix mit $\vec{x}^\alpha = {}^\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$. Für die Koordinaten ϕ_α und ϕ_β der Tensoren $\phi \in V^*$ bzgl. der dualen Basen α^* und β^* erhält man aus

$$\phi(\vec{x}) = \phi_\alpha \vec{x}^\alpha = \phi_\alpha {}^\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$$

$$\boxed{\phi_\beta = \phi_\alpha {}^\alpha T_\beta}$$

also $\phi_\alpha = \phi_\beta^{-1}$. Anders ausgedrückt:

$$\boxed{\text{Die Koordinaten von } \beta^* \text{ bzgl. } \alpha^* \text{ stehen in den Zeilen von } {}^\alpha T_\beta^{-1}}$$

Das kann man auch so einsehen: Ist $A = {}^\alpha T_\beta$, d.h. stehen in den Spalten von A die Koordinaten der Vektoren $\vec{a}_j$ aus β, und in den Zeilen von B die Koordinaten der $\vec{a}_i^*$, so folgt $BA = E$ sofort aus den Dualitätsbedingungen

$$\vec{a}_i^*(\vec{a}_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

12.11 Reziproke Basis

Für den Raum $\mathcal{V}$ der Vektoren sei Längeneinheit und Orientierung festgelegt und dadurch Skalar-, Vektor- und Spat-Produkt definiert. Für ein unabhängiges Tripel $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ von Vektoren ist das *reziproke* (in der Physik: *duale*) Tripel definiert durch

$$\vec{a}_1{}' = \frac{1}{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)} \vec{a}_2 \times \vec{a}_3, \quad \vec{a}_2{}' = \frac{1}{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)} \vec{a}_3 \times \vec{a}_1. \quad \vec{a}_3{}' = \frac{1}{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)} \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$$

Ist durch die Basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ein (Kristall)Gitter $\{\sum_i z^i \vec{a}_i \mid z_i \in \mathbb{Z}\}$ gegeben, so stehen steht der Vektor $\vec{a}_j{}'$ auf der Gitterebenenschar senkrecht, die die beiden anderen Basisvektoren $\vec{a}_i, \vec{a}_k$ als Richtungsvektoren hat. Der Abstand benachbarter Gitterebenen dieser Schar ist die Höhe der primitiven Zelle (Spat), also Volumen/Grundfläche $= 1/|\vec{a}_j{}'|$.

Satz 12.7 *Sei $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ eine ON-Basis und*

$$F : \mathcal{V}^* \to \mathcal{V}, \quad F(\vec{e}_i^{\,*}) = \vec{e}_i$$

der dadurch gegebene Isomorphismus. Dann gilt

$$\phi(\vec{x}) = \langle F(\phi) \,|\, \vec{x} \rangle \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathcal{V}, \phi \in \mathcal{V}^*$$

Weiterhin gilt für jede Basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ von $\mathcal{V}$

$$F(\vec{a}_i^{\,*}) = \vec{a}_i{}'$$

d.h. die duale Basis wird mit der reziproken Basis identifiziert. Stehen in den Spalten von A die Koordinaten der $\vec{a}_i$, so in $A^{-t} = (A^{-1})^t$ die der $\vec{a}_j{}'$ - bzgl. der Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ und es gilt

$$A^{-t} A = E$$

also

$$\langle \vec{a}_i{}' \,|\, \vec{a}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}, \quad \det(\vec{a}_1{}', \vec{a}_2{}', \vec{a}_3{}') = \frac{1}{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)}$$

Weiterhin $\vec{a}_i{}'' = \vec{a}_i$; sowie $\vec{a}_i{}' = \vec{a}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ genau dann, wenn $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ON-Basis ist.

Beweis. Die erste Gleichung ist linear in allen Argumenten, also genügt es, sie für $\vec{e}_j$ und $\vec{e}_i^{\,*}$ nachzuprüfen

$$\vec{e}_j^{\,*}(\vec{e}_i) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq k \end{array} \right\} = \langle \vec{e}_j \,|\, \vec{e}_i \rangle = \langle F(\vec{e}_j^{\,*}) \,|\, \vec{e}_i \rangle$$

Es folgt

$$\langle F(\vec{a}_j^{\,*}) \,|\, \vec{a}_i \rangle = \vec{a}_j^{\,*}(\vec{a}_i) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq k \end{array} \right\}$$

also $F(\vec{a}_j^{\,*}) = r^j \vec{a}_j{}'$ und dann

$$1 = \langle r^j \vec{a}_j{}' \,|\, \vec{a}_j \rangle = \frac{r^j}{\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)} \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = r^j$$

Die Zeilen von A^{-1} enthalten die Koordinaten der $\vec{a}_j^{\,*}$ und somit der $F(\vec{a}_j^{\,*})$; d.h. die Spalten von A^{-t} enthalten die Koordinaten der $\vec{a}_j{}'$. $\square$

12.12 Affine Teilräume

Einem linearen Gleichungssystem entspricht in Sinne des Dualraums ein System $\Phi(\vec{x}) = \boldsymbol{b}$ von Gleichungen $\phi^i(\vec{x}) = b_i$:

$$\Phi(\vec{x}) = \boldsymbol{b} :\Leftrightarrow \begin{array}{ccc} \phi^1(\vec{x}) & = & b_1 \\ & \vdots & \\ \phi^m(\vec{x}) & = & b_m \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad A\vec{x}^\alpha = \boldsymbol{b} \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} \phi^{1\alpha} \\ \vdots \\ \phi^{m\alpha} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Satz 12.8 *Die Lösungsräume $\{\vec{x} \in V \mid \Phi(\vec{x}) = \boldsymbol{b}\}$ linearer Gleichungssysteme sind gerade die affinen Teilräume von V.*

Beweis. Die eine Richtung ist klar wegen des Isomorphimus' auf K^n. Für die umgekehrte Richtung folgende Prozedur des Rollentauschs

- Sei der affine Teilraum $U + \vec{a}$ gegeben durch $\vec{a}$ und ein Erzeugendensystem $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ von U
- Löse das folgende System von k Gleichungen in den Unbekannten $a_1, \ldots, a_n$ (wenn's der Psyche hilft, so transponiere alles)

$$(a_1, \ldots, a_n)\vec{v}_1^\alpha = 0, \ \ldots \ , (a_1, \ldots, a_n)\vec{v}_k^\alpha = 0$$

- Wähle die $\phi^1, \ldots, \phi^m$ so, dass die Koordinatenzeilen $\phi^1_\alpha, \ldots, \phi^m_\alpha$ ein Fundamentalsystem von Lösungen bilden
- Setze $b_i = \phi^i(\vec{a})$
- Dann $U + \vec{a} = \{\vec{x} \in V \mid \phi^1(\vec{x}) = b_1, \ldots, \phi^m(\vec{x}) = b_m\}$

Sei nun $\beta : \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ eine weitere Basis von V und ${}^\alpha T_\beta$ die Transformationsmatrix mit $\vec{x}^\alpha = {}^\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$. Dann hat man

$$\boxed{A\vec{x}^\alpha = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad A\,{}^\alpha T_\beta \vec{x}^\beta = \boldsymbol{b}}$$

d.h. die Matrix A des Gleichungssystems geht bzgl. der neuen Koordinaten über in $A\,{}^\alpha T_\beta$ während die 'rechte Seite' $\boldsymbol{b}$ unverändert bleibt.

12.13 Dualitäten

Aus etwas abstrakterer Sicht können wir der Verhältnis Zeilenraum zu Spaltenraum bzw. Dualraum zu Vektorraum , so sehen: Wir haben K-Vektorräume W und V und eine binäre Relation $\perp$ zwischen W und V, so dass für alle $\phi, \phi^1, \phi^2 \in W$, $v, v_1, v_2 \in V$ und $r^1, r^2 \in K$

$$\phi^1 \perp v \wedge \phi^2 \perp v \Rightarrow r^1\phi^1 + r^2\phi^2 \perp v, \quad \phi \perp v_1 \wedge \phi \perp v_2 \Rightarrow \phi \perp r^1 v_1 + r^2 v_2$$

In den Beispielen haben wir

$$(a_1, \ldots, a_n) \perp \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \sum_i a_i x^i = 0, \quad \text{bzw. } \phi \perp \vec{v} \Leftrightarrow \phi(\vec{v}) = 0$$

Definieren wir nun für $\Phi \subset W$ und $X \subseteq V$ den jeweiligen *Orthogonalraum* durch

$$\Phi^\perp = \{v \in V \mid \forall \phi \in \Phi.\ \phi \perp v\}, \quad X^\perp = \{\phi \in W \mid \forall v \in X.\ \phi \perp v\}$$

so gilt trivialerweise

$$\Phi \subseteq \Psi \Rightarrow \Psi^\perp \subseteq \Phi^\perp, \quad X \subseteq Y \Rightarrow Y^\perp \subseteq X^\perp, \quad \Phi \subseteq X^\perp \;\Leftrightarrow\; X \subseteq \Phi^\perp$$

und es folgt leicht
$$\begin{array}{ll} \Phi \subseteq \Phi^{\perp\perp} & X \subseteq X^{\perp\perp} \\ \Phi \subseteq \Psi \Rightarrow \Phi^{\perp\perp} \subseteq \Psi^{\perp\perp}, & X \subseteq Y \Rightarrow X^{\perp\perp} \subseteq Y^{\perp\perp} \\ \Phi^{\perp\perp\perp\perp} = \Phi^{\perp\perp} & U^{\perp\perp\perp\perp} = U^{\perp\perp} \end{array}$$

Schliesslich sind $\Phi^\perp$ und $U^\perp$ Untervektorräume von V bzw. W und für Untervektorräume Φ, Ψ von W und X, Y von V gilt

$$(\Phi + \Psi)^\perp = \Phi^\perp \cap \Psi^\perp, \quad (X + Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$$

Unsere Beispiele (und auch die noch anstehenden) haben folgende Eigenschaft

$(*)$ $\infty > \dim W = \dim V = \dim \Phi + \dim \Phi^\perp = \dim U + \dim U^\perp$ für Untervektorräume

Bemerkung 12.9 *Für eine Dualität mit $(*)$ ist $\Phi \mapsto \Phi^\perp$ eine bijektive Abbildung vom System der Untervektorräume von W auf das von V und $U \mapsto U^\perp$ ist die Umkehrabbildung. Insbesondere gilt*

$$\Phi^{\perp\perp} = \Phi, \quad U^{\perp\perp} = U \qquad \text{\textit{für Untervektorräume}}$$

Beweis. Wegen $(*)$ gilt $\dim U = \dim U^{\perp\perp}$. Da $U \subseteq U^{\perp\perp}$ folgt Gleichheit. Entsprechend für die Φ. Damit ist Bijektivität klar.

13 Sesquilineare Formen

13.1 Sesquilineare Formen

Gegeben sei im Folgenden der Körper $K = \mathbb{R}$ mit 'Involution' $x^* = x$ bzw. $K = \mathbb{C}$ mit $x^* = \overline{x}$ und ein K- Vektorraum V. Eine (*sesquilineare*) *Form* auf V ist eine Abbildung

$$\Phi : V \times V \to K \qquad \text{d.h. } \Phi(\vec{v}, \vec{w}) \in K$$

$$\begin{array}{rclrcl} \Phi(\vec{v} + \vec{w}, \vec{u}) & = & \Phi(\vec{v}, \vec{u}) + \Phi(\vec{w}, \vec{u}) & \Phi(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) & = & \Phi(\vec{u}, \vec{v}) + \Phi(\vec{u}, \vec{w}) \\ \Phi(r\vec{v}, \vec{w}) & = & r^*\Phi(\vec{v}, \vec{w}) & \Phi(\vec{v}, r\vec{w}) & = & r\Phi(\vec{v}, \vec{w}) \end{array}$$

Ist dabei $K = \mathbb{R}$ und $x^* = x$ so sprechen wir von einer reellen *Bilinearform* oder einem *kovarianten Tensor 2.Stufe.*

13.2 Beispiele

- ‘das’ kanonische Skalarprodukt $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$ der Ebene oder des Raums
- das Skalarprodukt eines euklidischen bzw. unitären Raumes
- die Determinantenform $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \det(\vec{x}, \vec{y})$ der Ebene
- Jede Matrix $A \in K^{n\times n}$ definiert eine Form auf K^n durch

$$\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{y} = \sum_{ij} a_{ij} x_i^* y_j$$

13.3 Gram-Matrix

Gegeben sei ein ein K- Vektorraum V mit Basis $\alpha : \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Dann gibt es eine bijektive Entsprechung zwischen Formen Φ auf V und Matrizen $A \in K^{n\times n}$ vermöge

$$\boxed{\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}^\alpha)^* A \vec{y}^\alpha, \quad A = (\Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_j))_{n\times n}}$$

$A = \Phi_\alpha$ heisst dann die *(Gram)-Matrix* von Φ bzgl. α.

13.4 Adjungierte Form

Zu einer Form Φ haben wir die *adjungierte Form* Φ^*

$$\Phi^*(\vec{x}, \vec{y}) = (\Phi(\vec{y}, \vec{x}))^*$$

Beweis. $\Phi^*(r\vec{x}, \vec{y}) = (\Phi(\vec{y}, r\vec{x}))^* = (r\Phi(\vec{y}, \vec{x}))^* = r^*(\Phi(\vec{y}, \vec{x}))^* = r^*\Phi^*(\vec{x}, \vec{y})$ und $\Phi^*(\vec{x}, r\vec{y}) = (\Phi(r\vec{y}, \vec{x}))^* = (r^*\Phi(\vec{y}, \vec{x}))^* = r^{**}(\Phi(\vec{x}, \vec{y}))^* = r\Phi^*(\vec{x}, \vec{y})$.

Zur adjungierten Form gehört die adjungierte Matrix (da $(\boldsymbol{y}^* A \boldsymbol{x})^* = \boldsymbol{x}^* A^* \boldsymbol{y}$)

$$\boxed{(\Phi^*)_\alpha = (\Phi_\alpha)^*}$$

13.5 Hermitesche und quadratische Formen

Eine Sesquilinearform Φ auf V heisst *hermitesch* oder *selbstadjungiert*, wenn $\Phi = \Phi^*$

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V. \quad \Phi(\vec{y}, \vec{x}) = \Phi(\vec{x}, \vec{y})^* \text{ d.h. } \Phi^\alpha = (\Phi^\alpha)^* \text{ bzgl. einer/jeder Basis } \alpha$$

Ist $*$ die identische Abbildung von $\mathbb{R}$, so ist Φ eine reelle *symmetrische Bilinearform*. Eine Matrix ist hermitesch bzw. symmetrisch , wenn $A = A^*$ bzw. $A = A^t$.

Die zu einer hermiteschen Sesquilinearform Φ gehörige *quadratische Form* Q ist gegeben durch

$$Q(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{x}^\alpha)^* A \vec{x}^\alpha = \sum_{ij} a_{ij} x_i^* x_j \quad \text{mit } A = \Phi^\alpha, \boldsymbol{x} = \vec{x}^\alpha$$

Q ist durch die Werte auf Vektoren der Länge 1 schon eindeutig bestimmt, da

$$Q(\lambda\vec{x}) = |\lambda|^2 Q(\vec{x})$$

Man Φ aus Q zurückgewinnen

$$\Re\Phi(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}\Re(Q(\vec{x}+\vec{y}) - Q(\vec{x}) - Q(\vec{y}))$$

$$\Im\Phi(\vec{x},\vec{y}) = \Re\Phi(\vec{x},-i\vec{y})$$

Ist Φ symmetrisch, so kann man schreiben

$$Q(\vec{x}) = \sum_i q_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} q_{ij}x_ix_j \quad \text{mit } q_{ii} = a_{ii} \text{ und } q_{ij} = 2a_{ij}$$

und muss dann, wenn man die q_{ij} und die Matrix A angeben will beachten, dass

$$a_{ij} = \begin{cases} q_{ii} & \text{falls } i = j \\ \frac{1}{2}q_{ij} & \text{falls } i < j \text{ bzw. } j < i \end{cases}$$

Eine reelle quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$ ist natürlich eine reelle Funktion in n Variablen und man veranschaulicht sich sie durch Niveau-Hyperflächen, für $n = 2$ also durch Höhenlinien. Jede hinreichend oft partiell differenzierbare reelle Funktion lässt sich nach Taylor in der Nähe eine Stelle $\boldsymbol{x}_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ näherungsweise so darstellen

$$f(x_1, \ldots, x_n) \approx a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - x_{0i}) + Q(x_1 - x_{01}, \ldots, x_n - x_{0n})$$

mit einer quadratischen Form Q. Für das Vorliegen eines Extremwerts ist es notwendig, dass der lineare Anteil verschwindet, d.h. dass $a_i = 0$ für alle i und dann reduziert sich die Frage weitgehend auf die Untersuchung der quadratischen Form Q.

13.6 Trägheitstensor

Bzgl. eines ON-Koordinatensystems seien Punkte $\vec{x}+O$ gegeben durch ihre Ortsvektoren $\vec{x}$ und ein Körper mit Massendichte $m(\vec{x})$, also mit Gesamtmasse $\int m(\vec{x})\,d\vec{x}$. Das *Trägheitsmoment* bezüglich der Achse durch O mit Richtung $\vec{a}$, $|\vec{a}| = 1$ ist definiert als

$$J(\vec{a}) = \int m(\vec{x})\,|\,\vec{x}\times\vec{a}\,|^{\,2}\,d\vec{x}.$$

Es ist nämlich $|\,\vec{x}\times\vec{a}\,|$ die Fläche des von $\vec{x}$ und $\vec{a}$ aufgespannten Parallelogramms, also der Abstand des Punktes $\vec{x}$ von der Achse $\vec{a}$. Für eine punktförmige Masse wäre das Trägheitmoment gerade Masse mal Abstandsquadrat . Nach den Steinerschen Satz kann man die Bestimmung der Momente auf den Fall reduzieren, dass O der Schwerpunkt ist. Bezüglich der Koordinatenachsen $\vec{e}_i$ hat man die Momente

$$J_{x_1x_1} = \int m(\vec{x})(x_2^2+x_3^2)\,d\vec{x},\ J_{x_2x_2} = \int m(\vec{x})(x_1^2+x_3^2)\,d\vec{x}\,,\ J_{x_3x_3} = \int m(\vec{x})(x_1^2+x_2^2)\,d\vec{x}\,.$$

Die *Deviationsmomente* sind definiert als

$$J_{x_ix_j} = \int m(\vec{x})x_ix_j\,d\vec{x}\,.$$

Satz 13.1 *Das Trägheitsmoment ist eine quadratische Form und setzt sich aus den Trägheitsmomenten bzgl. der Koordinatenachsen und den Deviationsmomenten zusammen*

$$J(\vec{a}) = a_1^2 J_{x_1x_1} + a_2^2 J_{x_2x_2} + a_3^2 J_{x_3x_3} - 2a_1a_2J_{x_1x_2} - 2a_1a_3J_{x_1x_3} - 2a_2a_3J_{x_2x_3}\,.$$

Beweis. Durch

$$\Phi(\vec{a},\vec{b}) = \int m(\vec{x})\langle \vec{x}\times\vec{a}\,|\,\vec{x}\times\vec{b}\rangle\, d\vec{x}$$

wird eine symmetrische Bilinearform definiert mit $J(\vec{a}) = \Phi(\vec{a},\vec{a})$. Also

$$\Phi(\vec{a},\vec{a}) = \int m(\vec{x})\langle \vec{x}\times\sum_i a_i\vec{e}_i\,|\,\vec{x}\times\sum_j a_j\vec{e}_j\rangle\, d\vec{x}$$

$$= \sum_{i,j} a_ia_j \int \langle \vec{x}\times\vec{e}_i\,|\,\vec{x}\times e_j\rangle\, d\vec{x} = \sum_{i,j} a_ia_jJ_{x_ix_j}$$

da nach Lagrange

$$\langle \vec{x}\times\vec{e}_i\,|\,\vec{x}\times\vec{e}_j\rangle = \langle\vec{x}\,|\,\vec{x}\rangle\langle\vec{e}_i\,|\,\vec{e}_j\rangle - \langle\vec{e}_i\,|\,\vec{x}\rangle\langle\vec{e}_j\,|\,\vec{x}\rangle = \begin{cases} |\,\vec{x}\,|^2\cdot 1 - x_i^2 & \text{falls } i=j\\ |\,\vec{x}\,|^2\cdot 0 - x_ix_j & \text{sonst}\end{cases}$$

Die zugehörige Bilinearform heisst dann der *Trägheitstensor* . Seine Hauptachsen (was das ist, wird bald gesagt) heissen die *Hauptträgheitsachsen* und die Eigenwerte *Hauptträgheitsmomente* . Die Form ist bei einem rechten Körper positiv definit, also ist die Kennfläche ein Ellipsoid, das *Trägheitsellipsoid* .

13.7 Transformation

Ist β eine weitere Basis, so gilt

$$\boxed{\Phi_\beta = {}^\alpha T_\beta^* \Phi_\alpha\, {}^\alpha T_\beta}$$

Beweis. $\vec{x}^\alpha = {}^\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$, $\vec{y}^\alpha = {}^\alpha T_\beta \vec{y}^\beta$, also

$$(\vec{x}^\beta)^*\, {}^\alpha T_\beta^* \Phi_\alpha\, {}^\alpha T_\beta \vec{y}^\beta = ({}^\alpha T_\beta \vec{x}^\beta)^* \Phi_\alpha \vec{y}^\alpha = (\vec{x}^\alpha)^*\Phi_\alpha\vec{y}^\alpha = \Phi(\vec{x},\vec{y})$$

13.8 Hauptachsenformen

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Raum mit ON-Basis $\alpha : \vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$. Eine Abbildung $Q : V \to K$ heisst *Hauptachsenform* bzgl. des *Hauptachsensystems* α mit *Eigenwerten* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in K$, falls

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1|x_1|^2 + \ldots \lambda_n|x_n|^2 \quad \text{für } \vec{x} = \sum_i x_i\vec{e}_i$$

Ist $V = K^n$ mit der kanonischen Basis, so hat man

$$Q(\boldsymbol{x}) = \lambda_1|x_1|^2 + \dots \lambda_n|x_n|^2$$

d.h. man kann Q als eine reelle bzw. komplexe Funktion in n Variablen auffassen. Um eine solche Funktion zu verstehen, betrachtet man ihren *Graphen*

$$Graph(Q) = \{(x_1, \dots, x_n, z) \mid z = \lambda_1|x_1|^2 + \dots \lambda_n|x_n|^2\}$$

und ihre *Höhenlinien* bzw. *Niveau(hyper)flächen* zu den Niveaux $c \in K$

$$\{\boldsymbol{x} \in K^n \mid \lambda_1|x_1|^2 + \dots \lambda_n|x_n|^2 = c\}$$

Für $c = 1$ spricht man von der *Kennfläche* von Q - ist das die leere Menge, so muss man statt dessen $c = -1$ nehmen. Die zugehörige Gleichung $Q(\boldsymbol{x}) = 1$ bzw. $Q(\boldsymbol{x}) = -1$ heisst auch *Hauptachsengleichung*. Betrachtet man einen affinen Raum mit Ursprung O und ON-Basis α, so ist die Niveauhyperflächen zum Niveau c natürlich die folgende Punktmenge (mit *Mittelpunkt* O)

$$\{\vec{x} + O \mid Q(\vec{x}) = c\}$$

13.9 Kegelschnitte

Sei nun $K = \mathbb{R}$, $n = 2$ und $\lambda_1 \geq \lambda_2$ und $\lambda_1 \geq 0$ und die Kennlinie gegeben durch die Hauptachsengleichung

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1$$

Wir diskutieren die geometrische Bedeutung der Eigenwerte. Setze, sofern definiert,

$$a = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}$$

$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$	Ellipse mit Achsen $a\vec{e}_1$ und $b\vec{e}_2$
$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$	Hyperbel mit Asymptoten $x_2 = \pm\frac{b}{a}x_1$ und Scheitelpunkten $\pm a\vec{e}_1 + O$
$x_1 = \pm a$	Paar paralleler Geraden mit Abstand $2a$

In allen Fällen hat man Spiegelsymmetrie am Mittelpunkt O. Man bemerkt, dass die EW und, ausser im Falle $\lambda_1 = \lambda_2$ auch die Hauptachsen aus der Kennlinie abgelesen werden können.

Für $n = 2$ ergeben sich also neben dem uninteressanten Fall $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, die folgenden Fälle ($c \neq 0$, $\lambda_1 \geq \lambda_2$)

Eigenwerte	Definitheit	Höhenlin	Fläche	offen	lok. Verh.
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	positiv definit	Ellipse	ellipt. Paraboloid	oben	Min.echt
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	negativ definit	Ellipse	ellipt. Paraboloid	unten	Max.echt
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	indefinit	Hyperbel	hyperbol.Parabol.		Sattelpkt
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$	pos.semidef. ausg.	par. Ger.	parabol.Zylinder	oben	Minimum
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$	neg.semidef. ausg.	par. Ger.	parabol.Zylinder	unten	Maximum

Für $c = 0$ hat man Punkt, 2 schneidende Geraden, bzw. Doppelgerade als Höhenlinie.

Aus der Hauptachsenform (und der Parametrisierung des Einheitskreises) ergibt sich sofort die Parameterdarstellung von Ellipsen bzw. Hyperbeln

$$\{a\cos\phi\,\vec{e}_1 + b\sin\phi\,\vec{e}_2 + O \mid \phi \in [0, 2\pi)\}, \quad \{a\cosh\phi\,\vec{e}_1 - b\sinh\phi\,\vec{e}_2 + O \mid \phi \in [0, 2\pi)\}$$

Bei der Diskussion der Planetenbahnen ist folgende Beschreibung durch eine Gleichung in Polarkoordinaten von Nutzen (s. T.M.Apostol, Calculus I, 6.30) mit der *Exzentrizität* ε und dem *Direktrix-Abstand* d

$$r = \varepsilon(d - r\cos\phi)$$

$$\varepsilon^2 \begin{cases} = 1 & \text{Parabel} \\ < 1 & \text{Ellipse} \\ > 1 & \text{Hyperbel} \end{cases}$$

Wir formen in eine Gleichung in kartesischen Koordinaten um

$x = r\cos\phi,\ \ y = r\sin\phi,\ \ r^2 = x^2 + y^2$
$x^2 + y^2 = \varepsilon^2(d - x)^2,\ \ (1 - \varepsilon^2)x^2 + 2\varepsilon^2 dx + y^2 = \varepsilon^2 d^2$
Parabel $2\varepsilon^2 dx + y^2 = \varepsilon^2 d^2$ falls $\varepsilon = 1$
andernfalls gibt es c mit $2(1 - \varepsilon^2)zc + 2\varepsilon^2 dz = 0$ für alle z
Verschiebung $x := z + c$ ergibt $(1 - \varepsilon^2)z^2 + (1 - \varepsilon^2)c^2 + 2\varepsilon^2 dc + y^2 = \varepsilon^2 d^2$
$(1 - \varepsilon^2)z^2 + y^2 = \varepsilon^2 d^2 - (1 - \varepsilon^2)c^2 - 2\varepsilon^2 dc$

Der Name 'Kegelschnitte' rührt daher, dass Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln gerade die Kurven sind, die sich als Schnitte von Ebenen mit Doppel-Kegeln ergeben.

13.10 Formen im Raum

Den Graphen wird man sich hier nicht so gut vorstellen können, eher schon die Funktion selbst, z.B. als Temperaturverteilung oder eine andere skalare Grösse. Daher betrachten wir die Kennflächen. Wenn wir den uninteressanten Fall $Q(\vec{x}) = 0$ für alle $\vec{x}$ ausschliessen, ist O.B.d.A. ist $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 \geq \lambda_3$ und wir haben die Gleichung

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1$$

Wir haben dann folgende Fälle

- $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$: Zwei zur $x_2 - x_3$-Ebene mit Abstand $1/\sqrt{\lambda_1}$ parallele Ebenen
- $\lambda_2 > 0,\ \lambda_3 = 0$: Elliptischer Zylinder um die x_3-Achse
- $\lambda_2 = 0,\ \lambda_3 < 0$: Hyperbolischer Zylinder um die x_2-Achse
- $\lambda_2 > 0,\ \lambda_3 > 0$: Ellipsoid mit Achsenlängen $1/\sqrt{\lambda_i}$
- $\lambda_2 > 0,\ \lambda_3 < 0$: Einschaliges Hyperboloid um x_3-Achse
- $\lambda_2 < 0,\ \lambda_3 < 0$: Zweischaliges Hyperboloid um x_1-Achse

Man merkt es sich am besten so, dass die beiden Hälften des zweischaligen Hyperboloids durch die Ebene $x_1 = 0$ getrennt werden, weil die Gleichung $\lambda_1 0^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1$ keine Lösung hat.

13.11 Eigenvektoren

Wir wollen nun Sesquilinearformen Φ nach Möglichkeit unitär auf eine Hauptachsenform transformieren. Dazu definieren wir: Ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ heisst *Eigenvektor* von Φ, wenn gilt

$$\Phi(\vec{x}, \vec{v}) = \Phi(\vec{v}, \vec{x}) = 0 \quad \text{für alle } \vec{x} \perp \vec{v}$$

Der Skalar

$$\lambda = \frac{1}{|\vec{v}|^2}\Phi(\vec{v}, \vec{v}) = \frac{1}{|\vec{v}|^2}Q(\vec{v})$$

heisst dann der *Eigenwert* zu diesem Eigenvektor. Dann ist auch $r\vec{v}$ ($r \neq 0$) Eigenvektor mit demselben Eigenwert λ. Die Eigenvektoren mit Eigenwert λ bilden zusammen mit $\vec{0}$ den *Eigenraum* E_λ zu λ.

Satz 13.2 *Sei ein unitärer bzw. euklidischer Raum mit ON-Basis α gegeben und eine Sesquilinearform Φ mit Gram-Matrix A bzgl. α. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent*

- *V besitzt eine ON-Basis $\beta : \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, die aus Eigenvektoren von Φ besteht.*
- *Es gibt eine unitäre/orthogonale Matrix S so, dass S^*AS Diagonalmatrix ist.*
- *Φ hat bzgl. einer passenden ON-Basis Hauptachsenform*

Dabei sind die Diagonaleinträge λ_i gerade die Eigenwerte der $\vec{v}_i$.

Beweis. $S = {}^{\alpha}T_{\beta}$. □ Die Basisvektoren $\vec{v}_i$ aus β bzw. die durch sie bestimmten Achsenrichtungen bilden dann ein *Hauptachsensystem* für Φ.

13.12 Hauptachsentransformation

Spektralsatz 13.3 *Eine Sesquilinearform Φ hat genau ein Hauptachsensystem mit reellen Eigenwerten, wenn sie hermitesch ist.*

Beachte, dass die zu einer hermiteschen Form Φ gehörige quadratische Form $Q(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}, \vec{x}) = \Phi^*(\vec{x}, \vec{x})$ nur reelle Werte annimmt.

Korollar 13.4

- *Q hat an $\vec{0}$ ein (striktes) Minimum nämlich 0, genau dann, wenn alle Eigenwerte $\lambda_i \geq 0$ (> 0). Man sagt, Q sei* positiv semidefinit *(*positiv definit*)*
- *Q hat an $\vec{0}$ ein (striktes) Maximum nämlich 0, genau dann, wenn alle Eigenwerte $\lambda_i \leq 0$ (< 0), Man sagt, Q sei* negativ semidefinit *(*negativ definit*)*

Korollar 13.5 *Das Maximum von Q unter der Nebenbedingung $|\vec{x}| = 1$ ist der grösste Eigenwert $\lambda_{\max}$, das Minimum der kleinste Eigenwert $\lambda_{\min}$. Sie werden gerade auf den zugehörigen Eigenräumen angenommen.*

Zusatz 13.6 *Für jede hermitesche Form auf V gilt:*

- *Die Eigenräume sind Untervektorräume*
- *Eigenräume zu veschiedenen Eigenwerten stehen aufeinander senkrecht und ihre Summe ist V*
- *ON-Basen der Eigenräume ergänzen sich zu einem Hauptachsensystem und jedes Hauptachsensystem entsteht so.*
- *Die Hauptachsenform ist bis auf Vertauschung eindeutig bestimmt*

Die Korollare liest man sofort ab. Den Beweis von Satz und Zusatz führen wir über die hermitesche Form Φ und ihre Matrix A. Wir beginnen mit $n = 2$. Sei eine ON-Basis α gegeben. Wir suchen ON-Basis

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \quad \text{mit } \Phi(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0 \quad \text{und somit } \Phi(\vec{v}_2, \vec{v}_1) = \Phi(\vec{v}_1, \vec{v}_2)^* = 0$$

Dazu der Ansatz

$$\vec{v}_1^{\alpha} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2^{\alpha} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix}^* A \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = 0$$

Also

$$(a_{11} - a_{22}) x_1 x_2 - a_{12} x_1^2 + a_{21} x_2^2 = 0$$

$$at^2 + bt - a^* = 0 \quad \text{mit } t = \frac{x_2}{x_1}, \; a = a_{12} = a_{21}^*, \; b = a_{11} - a_{22}$$

$$t_{1/2} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 + a^* a}$$

Daraus x_1 und x_2 und die $\vec{v}_i$ durch Normieren. Hat man $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ so ist der Eigenraum die ganze Ebene und auch λ eindeutig, nämlich $\lambda = Q(\vec{x})$ für alle $\vec{x}$ auf dem Einheitskreis. Andernfalls sind λ_1 und λ_2 als maximaler bzw. minimaler Wert von Q auf dem Einheitskreis bestimmt und werden gerade an den Hauptachsen angenommen - weshalb die auch eindeutig sind.

Nun gehts weiter mit Induktion. Mit analytischem Gelaber folgt, dass es auf der Einheitshyperkugel $|\vec{x}| = 1$ irgendwo am heissesten ist, d.h. es ein $\vec{v}_1$ gibt mit $Q(\vec{v}_1) =: \mu$ maximal. Die darauf orthogonalen Vektoren bilden einen Untervektorraum U und für die Einschränkung von Φ auf U können wir's schon nach Induktionsannahme. d.h. es gibt ON-Basis $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ von U mit

$$\Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j \; i, j > 1$$

Für jedes $i > 1$ haben wir aber den von $\vec{v}_1, \vec{v}_i$ aufgespannten 2-dimensionalen Untervektorraum U_i und da haben wir's ehrlich schon gemacht, sogar mit Zusatz. Weil $Q(\vec{v}_1)$ maximal ist und $\vec{v}_1, \vec{v}_i$ ON-Basis von U_i ist's ein Hauptachsensystem für die Einschränkung von Φ auf U_i, also

$$\Phi(\vec{v}_1, \vec{v}_i) = 0 \quad \text{für } i > 1$$

Das war's für den Satz. Offensichtlich ist μ als Maximum eindeutig bestimmt. Hat man die Eigenvektoren so sortiert, dass gerade die ersten k zu μ gehören, so ist der zugehörige Eigenraum ist

$$E_\mu = \{\vec{v}_{k+1}, \ldots, \vec{v}_n\}^\perp$$

und wird gerade von den $\vec{v}$ mit $|\vec{v}| = 1$ und $Q(\vec{v}) = \mu$ erzeugt. Weil ein $\vec{v}$, das auch Anteile in anderen Achsenrichtungen hat, den Maximalwert nicht annehmen kann. Hat man nun irgendein Hauptachsensystem, so liegen die Achsen zu Eigenwerten $\lambda_i < \mu$ in dem Raum $E_\mu^\perp$ aller zu E_μ orthogonalen Vektoren. Der und die Einschränkung von Φ sind eindeutig bestimmt es folgt alles weitere mit Induktion.

Hat man umgekehrt eine unitäre bzw. orthogonale Matrix S so, dass $S^*AS = D$ reelle Diagonalmatrix ist, so folgt

$$A = SDS^*, \quad A^* = S^{**}D^*S^* = SDS^* = A$$

d.h. die Form ist hermitesch. □

Korollar 13.7 *Eine reelle quadratische Form ist durch ihre Kennhyperfläche eindeutig bestimmt.*

Beweis. Für $n = 2, 3$ liest man aus obiger Klassifikation ab, dass Eigenvektoren und Eigenwerten von Hauptachsenformen durch die Kennhyperfläche bestimmt sind - und das überträgt sich nun auf beliebige reelle quadratische Formen. Für beliebiges n geht's so. O.B.d.A. gibt es ein $\vec{x}$ mit $Q(\vec{x}) > 0$ - sonst nehme man $-Q$ oder man hat $Q = 0$. Nun ist $Q(\vec{x}) = s > 0$ gleichbedeutend zu $Q(\frac{1}{\sqrt{s}}\vec{x}) = 1$. Also ist die Zuordnung $\vec{x} \mapsto Q(\vec{x}) > 0$ schon durch die Kennhyperfläche bestimmt. Man suche nun eine Basis $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ so, dass $Q(\vec{w}_i) > 0$ und $Q(\vec{w}_i + \vec{w}_j) > 0$ für alle i, j. Diese

Werte sind, wie gesagt, schon durch die Kennfläche bestimmt und man erhält aus ihnen die $\Phi(\vec{w}_i, \vec{w}_j)$ und damit alle Werte von Φ. Um so eine Basis zu finden, wähle $\vec{v}_1$ mit $a = Q(\vec{v}_1) > 0$ und ergänze zu Basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Für alle $\vec{v} \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt nun $Q(r\vec{v}_1 + \vec{v}) = r^2 a + 2rb + c = (r\sqrt{a} + \frac{b}{\sqrt{a}})^2 - \frac{b^2}{a} + c$ mit $b = \Phi(\vec{v}_1, \vec{v})$ und $c = Q(\vec{v})$. Lässt man r variieren, so erhält man eine nach oben offene Parabel, hat also ein $r[\vec{v}]$ so, dass $Q(r\vec{v}_1 + \vec{v}) > 0$ für alle $r > r[\vec{v}]$. Wähle nun r grösser als alle $r[\vec{v}_i]$ und $r[\vec{v}_i + \vec{v}_j]$. Dann erhält man mit $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$ und $\vec{w}_i = r\vec{v}_1 + \vec{v}_i$ eine Basis der gewünschten Art. Nämlich $Q(\vec{w}_1 + \vec{w}_j) = Q((r+1)\vec{v}_1 + \vec{v}_j) > 0$ und $Q(\vec{w}_i + \vec{w}_j) = Q(2r\vec{v}_1 + \vec{v}_i + \vec{v}_j) > 0$ da $2r > r[\vec{w}_i + \vec{w}_j]$. $\square$

13.13 Beispiel

Gegeben sei bzgl. einer ON-Basis $\alpha : \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ eines euklidischen Raums die Form

$$Q(\vec{x}) = 2x_2(x_1 + x_3) \qquad \text{für } \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

Gesucht ist unter den Vektoren mit $|\vec{x}| = 1$ einer mit $Q(\vec{x})$ maximal. Bei festem x_2 liegen die $(x_1, x_3)^t$ auf einem Kreis und man hat $x_1 + x_3$ zu maximieren. Aus Symmetriegründen muss dann $x_1 = x_3$ sein. Das gesuchte Maximum ist also $\max 4x_2x_1$ auf dem Kreis $\{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1, x_1 = x_3\}$. Wieder aus Symmetriegründen wird das Maximum bei $x_2 = 1/\sqrt{2}$ angenommen. Ergänzung zu ON-Basis.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1^\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \vec{w}_2^\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3^\alpha = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \Phi(\vec{w}_2, \vec{w}_2) & \Phi(\vec{w}_2, \vec{w}_3) \\ \Phi(\vec{w}_3, \vec{w}_2) & \Phi(\vec{w}_3, \vec{w}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4\sqrt{2}}{12} \end{pmatrix}. \quad t := x_2'/x_3',\ t^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}t - 1 = 0,$$

$$t_1 = \sqrt{2},\ t_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \vec{w}_2 + t_1\vec{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 + t_2\vec{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Hauptachsenrichtungen von $\Phi|(\mathbb{R}\vec{w}_2 + \mathbb{R}\vec{w}_3)$. Die Hauptachsen durch Normierung.

$$\vec{v}_2^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3^\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{EW } \lambda_i = \Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_i),\ \lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -\sqrt{2}.$$

Die Kennfläche ist ein hyperbolischer Zylinder.

13.14 Ausartung

Die symmetrische Bilinearform Φ bzw. die zugehörige quadratische Form Q heisst *ausgeartet*, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt

(1) 0 ist ein Eigenwert

(2) Es gibt $\vec{v} \neq 0$ mit $\Phi(\vec{v}, \vec{x}) = 0$ für alle $\vec{x}$

(3) $\det \Phi_\alpha = 0$ für eine/jede Basis α

Beweis. $1 \Rightarrow 2$: In einem Hauptachsensystem wähle $\vec{v}$ zum Eigenwert 0. $2 \Rightarrow 3$. Bei Basistransformation $\det S^t AS = (\det S)^2 \det A$. $3 \Rightarrow 1$: Für ein Hauptachsensystem β ist $\det \Phi_\beta = \prod_i \lambda_i$. □

Korollar 13.8 *Eine nicht ausgeartete quadratische Form ist pos./neg. definit genau dann, wenn sie pos./neg. semidefinit ist.*

13.15 Zerlegung

Untervektorräume $U_1, \ldots U_k$ von V bilden eine *Zerlegung* der quadratischen Form Q auf V, falls $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ (vgl. Kap.15) und für die zugehörige Bilinearfrom Φ gilt $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ für alle $i \neq j$, $\vec{x} \in U_i$, $\vec{y} \in U_j$.

Satz 13.9 *Zu jeder quadratischen Form Q auf V gibt es eine Zerlegung*

$$V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$$

so, dass $Q|V_+$ positiv definit, $Q|V_-$ negativ definit und $Q|V_0$ ausgeartet ist. Die Dimensionen dieser Teilräume sind eindeutig bestimmt. Die Zerlegung kann orthogonal gewählt werden und so, dass es $\lambda_+ > 0 > \lambda_-$ gibt mit

$$Q(\vec{v}) \geq \lambda_+ |\vec{v}|^2 \ \forall \vec{v} \in V_+, \ \ Q(\vec{v}) \leq \lambda_- |\vec{v}|^2 \ \forall \vec{v} \in V_-, \ Q(\vec{v}) = 0 \ \forall \vec{v} \in V_0$$

Beweis. $V_0 = E_0$ und V_+ bzw. V_- Summe der Eigenräume zu positiven bzw. negativen Eigenwerten. λ_+ der kleinste positive, λ_- der grösste negative Eigenwert. Sind die $\vec{v}_i, (i \in I)$ die Hauptachsenvektoren zu den $\lambda_i > 0$ so

$$Q(\vec{v}) = Q(\sum_{i \in I} x_i \vec{v}_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i^2 \leq \sum_{i \in I} \lambda_+ x_i^2 = \lambda_+ \sum_{i \in I} x_i^2 = \lambda_+ |\vec{v}|^2 \quad \text{für } \vec{v} \in V_+$$

Beachte, dass $V_0 = \{\vec{x} \in V \mid \Phi(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \forall \vec{y} \in V\}$eindeutig bestimmt ist ($V_+$ und V_- nur wenn man Orthogonalität der Zerlegung verlangt). Daher können wir (durch Übergang zu $\tilde{V} = V/V_0$ (sprich V modulo $V - 0$ - die Elemente von V_0 werden einfach wie Nullen behandelt, formal ersetzt V durch die Menge der Nebenklassen (=affinen Teilräume) $\vec{x} + V_0$ und rechnet damit 'repräsentantenweise' - mit der Form $\tilde{\Phi}(\vec{x}+V_0, \vec{y}+V_0) = \Phi(\vec{x}, \vec{y})$) beim Beweis der Eindeutigkeit der Dimensionen o.B.d.A. annehmen, das $V_0 = 0$. Sei nun $V = V_+ + V_- = U_+ + U_-$ mit $Q|V_+$ und $Q|V_+$ positiv aber $Q|V_-$ und $Q|V_-$ negativ definit, so

$$V_+ \cap V_- = V_+ \cap U_- = U_+ \cap U_- = U_+ \cap V_- = 0$$

also nach dem Dimensionssatz

$$\dim V_- = \dim V/V_+ \geq (\dim V_+ + U_-)/V_+ = \dim U_-$$

und analog $\dim U_- \geq \dim V_-$ also $\dim U_- = \dim V_-$ und ebenso $\dim V_+ = \dim U_+$. $\Box$ Die Eindeutigkeit der Dimensionen heisst auch der *Trägheitssatz von Sylvester*. Es gibt auch einen altmodische Version.

Satz *Zu jeder hermiteschen Form Φ gibt es eine Basis β so, dass*

$$\Phi^\beta = \begin{pmatrix} E_p & O & O \\ O & -E_q & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

Dabei ist die Signatur p, q *der Form Φ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Mit Diagonalisierung erhält man eine hermitesche Diagonalmatrix T^*AT mit reellen Einträgen d_{ii}. Setze $S = T\tilde{D}P$, wobei $\tilde{D}$ Diagonalmatrix mit Einträgen $\tilde{d}_{ii} = 1/\sqrt{|d_{ii}|}$ bzw. 0 ist und P passende Permutationsmatrix. Natürlich kann auch schon vorher permutiert werden.

Zur Eindeutigkeit genügt es, den Fall zu betrachten, dass $A' = S^*AS$ und A Diagonalmatrizen sind, und die ersten p bzw. k Diagonaleinträge 1, die nächsten q bzw. l -1 und die restlichen 0 sind. $S^*A = A'S^{-1}$ hat offenbar Spaltenrang $p+q$ und Zeilenrang $k+l$, also $r = p+q = k+l$. Mit der Koordinatentransformation $\boldsymbol{y} = S^{-1}\boldsymbol{x}$ gilt

$$|x_1|^2 + \ldots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \ldots |x_r|^2 = \boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{x} = |y_1|^2 + \ldots + |y_k|^2 - |y_{k+1}|^2 - \ldots - |y_r|^2.$$

Angenommen $p > k$. Dann wird durch $x_{p+1} = 0, \ldots, x_n = 0$ und $y_1 = [S^{-1}\boldsymbol{x}]_1 = 0, \ldots, y_k = [S^{-1}\boldsymbol{x}]_k = 0$ ein homogenes lineares Gleichungssystem von weniger als n Gleichungen in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ gegeben, also hat man eine Lösung $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Dann folgt aber $|x_1|^2 + \ldots + |x_p|^2 = -(|y_{k+1}|^2 + \ldots + |y_r|^2) \leq 0$, und damit $x_1 = \ldots x_p = 0$ und doch $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Den Fall $p < k$ schliesst man durch Vertauschen der Rollen von A und A' aus.

13.16 Symmetrischer Gauss *

Die Eigenwerte kann man im wirklichen Leben nur numerisch bestimmen - und auch das ist ziemlich aufwendig. Wir brauchen oft aber nur ihre Vorzeichen und die können wir, dank Sylvester, ablesen, wenn wir SAS^t diagonal haben mit invertierbarem $S = {}^\alpha T_\beta^t$. Um ein S zu finden, erinnern wir uns, dass nach Gauss jede invertierbare Matrix ein Produkt von Elementarmatrizen ist (solchen die die Zeilenumformungen beschreiben). Wir machen also jeweils eine Zeilenumformung gefolgt von der analogen Spaltenunformung, um die Symmetrie zu erhalten, bis wir am Ziel sind.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Gegeben sei symmetrische Matrix A mit Diagonalmatrix D_k

$$A = \begin{pmatrix} D_k & O \\ O & \begin{pmatrix} b_{k+1,k+1} & \dots & b_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,k+1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

- Ist $b_{k+1,k+1} \neq 0$, so bewirke durch Zeilenscherungen, dass die neue $k+1$-te Zeile von 'A' ausserhalb der Diagonalen nur noch Nullen enthält. Ändere die Werte über der Diagonalen von 'A' so, dass wieder eine symmetrische Matrix entsteht

- Ist $b_{k+1,k+1} = 0$ so suche vorher $i > k+1$ mit $b_{i,i} \neq 0$ und vertausche $k+1$-te und i-te Zeile in 'A', ebenso für Spalten von 'A'

- Ist $b_{ii} = 0$ für alle $i > k$, so suche vorher $j > i > k$ mit $b_{ij} \neq 0$ und $b_{ij} + b_{ij} \neq 0$. Addiere in 'A' die j-Zeile zur i-ten und die j-te Spalte zur i-ten. Das ergibt i-ten Diagonaleintrag $b_{ij} + b_{ij} \neq 0$.

- Ist dummerweise immer $b_{ij} + b_{ij} = 0$, so addiere in 'A' das b_{ij}-fache der j-te Zeile zur i-ten Zeile das b_{ij}-fache der j-ten Spalte zur i-ten Spalte. Das ergibt i-ten Diagonaleintrag $2b_{ij}b_{ij} \neq 0$.

- Sind alle $b_{ij} = 0$ für $j > i > k$, so rufe 'Gott sei Dank'

13.17 Definitheitskriterium

Satz 13.10 *Für eine symmetrische Matrix A sind gleichwertig:*

- *A ist positiv definit.*

- *Es gibt eine invertierbare Matrix S mit $A = WW^t$.*

- *Die Hauptminoren $A_{\leq k} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ von A haben* $\det A_{\leq k} > 0$.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar nach dem Trägheitssatz. Also ist für positiv definites A die Determinante $\det A = \det(W^tW) = \det W^t \det W = |\det W|^2 > 0$. Andererseits sind für positiv definites A alle Hauptminoren $A_{\leq k}$ positiv definit: für die durch $A_{\leq k}$ definierte quadratische Form $Q_{\leq k}$ gilt: $Q_{\leq k}(x_1, \dots, x_k) = Q(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) > 0$ falls ein $x_i \neq 0$. Also $\det A_{\leq k} > 0$ für alle k.
Sei nun (3) vorausgesetzt. Nach Induktionsannahme ist Einschränkung $Q|U$ mit $U = \mathbb{R}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \mathbb{R}\boldsymbol{e}_{n-1}$ positiv definit. Angenommen, Q selbst ist nicht positiv definit. Dann gibt es eine Zerlegung $\mathbb{R}^n = V_+ \oplus V_0 \oplus V_-$ mit $W = V_0 + V_- \neq 0$ und es ist die Einschränkung $Q|W$ negativ semidefinit. Wegen der unterschiedlichen Definitheiten gilt $U \cap W = 0$; also $\dim W = 1$ wegen $\dim U = n-1$. Also $\dim V_+ = n-1$. Wählt man nun $n-1$ Basisvektoren in V_+ und einen in W, so gilt für die Matrix $B = S^tAS$ von Q: $\det B = b_{nn} \cdot \det B_{\leq n-1} \leq 0$ also $\det A = (\det S)^{-2} \det B \leq 0$. Widerspruch.
□

13.18 Quadriken *

Wir verallgemeinern den Begriff der Höhenlinie einer quadratischen Form: Gegeben seien ein affiner Raum $\mathcal{P}$ mit euklidischen bzw. unitärem Vektorraum V, eine Sesquilinearform Φ mit quadratischer Form Q, eine Linearform $f : V \to K$ und ein Skalar c. Dann ist bzgl. eines Ursprungs $O \in \mathcal{P}$

$$\mathcal{Q}(O, Q, f, c) = \{\vec{x} + O \,|\, Q(\vec{x}) + f(\vec{x}) = c\}$$

die durch diese Daten gegebene *Quadrik*. Wählt man einen neuen Ursprung $O' = \vec{v} + O$, so erhält man, indem man $\vec{x} = \vec{y} + \vec{v}$ d.h. $\vec{x} + O = \vec{y} + O'$ setzt,

$$\begin{aligned}&\mathcal{Q}(O, Q, f, c) = \{\vec{y} + (\vec{v} + O) \,|\, Q(\vec{y}) + 2\Phi(\vec{v}, \vec{y}) + f(\vec{y}) = c'\} = \mathcal{Q}(O', Q, f', c')\\ &\text{mit } c' = c - [Q(\vec{v}) + f(\vec{v})], \quad f'(\vec{y}) = 2\Phi(\vec{v}, \vec{y}) + f(\vec{y})]\end{aligned}$$

Somit hängt es nicht von der Wahl des Ursprungs ab, ob eine Punktmenge eine Quadrik ist. Eine rein elementargeometrische Charakterisierung der Quadriken ist möglich aber mühsam.

13.19 Koordinatengleichungen von Quadriken *

Bzgl. eines Koordinatensystems $\alpha : O_\alpha, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ hat man durch die Einsetzung von $P = \vec{x} + O_\alpha$, d.h. $\vec{x}^\alpha = P^\alpha$, die *Koordinatengleichung* (wobei $Q_\alpha = \Phi_\alpha$ Gram-Matrix von Q bzgl. α)

$$\mathcal{Q} := \mathcal{Q}(O_\alpha, Q, f, c) = \{P \in \mathcal{P} \,|\, P^{\alpha *} Q_\alpha P^\alpha + f^\alpha P^\alpha = c\}$$

Indem man in der Beschreibung von $\mathcal{Q}$ bzgl. $O_\beta = O_\alpha$ bzw. $Q_\beta = \vec{v} + O_\alpha$ die quadratischen und linearen Formen bzgl. der Basis $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ ausdrückt erhält man die Transformationen

- Fester Ursprung: $O_\beta = O_\alpha$, $S = {}^\alpha T_\beta$

$$\mathcal{Q} = \{P \in \mathcal{P} \,|\, P^{\beta *}(S^* Q_\alpha S) P^\beta + (f^\alpha S) P^\beta = c\}$$

- Verschiebung: $O_\beta = \vec{v} + O_\alpha$, gleiche Basen

$$\mathcal{Q} = \{P \in \mathcal{P} \,|\, P^{\beta *} Q_\alpha P^\beta + (2\vec{v}^{\alpha *} Q_\alpha + f^\alpha) P^\alpha = c'\}$$

- Allgemein: $S = {}^\alpha T_\gamma$, $O_\gamma = \vec{v} + O_\alpha$

$$\mathcal{Q} = \{P \in \mathcal{P} \,|\, P^{\gamma *}(S^* Q_\alpha S) P^\gamma + (2\vec{v}^{\alpha *} Q_\alpha S + f^\alpha S) P^\gamma = c'\}$$

- mit $c' = c - [\vec{v}^{\alpha *} Q_\alpha \vec{v}^\alpha + f^\alpha \vec{v}^\alpha]\}$

13.20 Normalformen für Quadriken *

Satz 13.11 *Jede reelle Quadrik in zwei Variablen hat bzgl. eines geeigneten (wenn man will: kartesisch bzgl. eines gegebenen kanonischen Skalarprodukts) Koordinatensystems $\gamma : O_\gamma, \vec{c_1}, \vec{c_2}$ eine Gleichung (für $P = z_1\vec{c}_1 + z_2\vec{c}_2 + O_\gamma \in \mathcal{Q}$) von einer der Gestalten*

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = \mu \quad \textit{oder} \quad \lambda_1 z_1^2 + \nu z_2 = 0$$

Es handelt sich also um eine Höhenlinie einer quadratischen Form, eine Parabel, eine Gerade, die leere Menge oder die ganze Ebene.

Beweis und Algorithmus.

- Bezüglich eines (kartesischen) Koordinatensystems α sei $\mathcal{Q}$ gegeben durch

$$\mathcal{Q} = \{P \in \mathcal{P} \mid P^{\alpha t} Q_\alpha P^\alpha + f^\alpha P^\alpha = c\}$$

- Ist $Q_\alpha = O$ die Nullmatrix, so wähle $O_\beta = \vec{v} + O_\alpha$ mit $f(\vec{v}) = c$ und $\vec{c}_1$ mit $f(\vec{c}_1) = 0$ und ergänze zu (ON-)Basis. Das ergibt Gleichung $\nu z_2 = 0$.

- Ist $Q_\alpha \neq O$, so transformiere mit $S = {}^\alpha T_\beta$ auf $\beta : O_\alpha, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ so, dass $\lambda_1 \neq 0$ - bei kartesischer Transformation wähle $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ als Hauptachsensystem für Q

$$y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + O_\alpha \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow \ \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 = c$$

- Bestimme t_i so, dass man mit der Substitution $y_i = t_i + z_i$ erhält
  - $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = \mu$ falls $\lambda_2 \neq 0$ oder $\lambda_2 = \mu_2 = 0$.
  - $\lambda_1 z_1^2 + \nu z_2 = 0$ falls $\lambda_2 = 0,\ \mu_2 \neq 0$
  - Beachte $\boxed{2\lambda_i t_i = -\mu_i \text{ falls } \lambda_i \neq 0 \text{ und } t_2 = 0 \text{ falls } \mu_2 = 0}$

- Setze $\vec{v} = t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2$ und $\gamma : \vec{v} + O_\alpha, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ d.h.

$$\boxed{O_\gamma^\alpha = S\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c}_i^{\,\alpha} = \text{i-te Spalte von } S}$$

Analog geht's in mehr Variablen.

14 Affine und lineare Abbildungen

14.1 Beispiele

Wir geben im Folgenden Beispiele affiner Abbildungen $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ zwischen den Punkträumen affiner Räume an. Wenn vorhanden, wählen wir O als Fixpunkt. Für die zugehörige lineare Abbildung $\phi_0 : V \to V$ diskutieren wir Matrixbeschreibung, Eigenräume E_λ, Kern und Bild - bijektiv bedeutet Kern$\phi_0 = 0$ und Bild$\phi_0 = V'$ (insbesondere bei Bewegungen). Ggf. sind euklidische bzw. unitäre Räume zu betrachten. Winkel $\omega \in (O, 2\pi)$ im Bogenmass. Ausser bei 11. gilt $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$

1. Identische Abbildung $\phi = \mathsf{id}_{\mathcal{P}}$ mit $\phi_0 = \mathsf{id}_V$, Matrix E, $E_1 = V$. bijektiv

2. Zu jedem Vektor $\vec{v}$ ist die *Verschiebung* oder *Translation* $\phi = \tau_{\vec{v}}$ eine affine Selbstabbildung

$$P \mapsto \tau_{\vec{v}}(P) = \vec{v} + P$$

$\phi_0 = \mathsf{id}_V$. Sie ist durch das Bild eines einzigen Punktes eindeutig bestimmt:

$$\vec{v} = \overrightarrow{P\phi(P)}, \quad \tau_{\vec{w}} \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{w}+\vec{v}}, \quad \tau_{\vec{v}}^{-1} = \tau_{-\vec{v}}$$

3. Punktspiegelung an O mit $\phi_0(\vec{x}) = -\vec{x}$. Matrix $-E$, $E_{-1} = V$, bijektiv

4. Zentrische Streckung an O um r mit $\phi_0(\vec{x}) = r\vec{x}$. Matrix rE, $E_r = V$, bijektiv falls $r \neq 0$, sonst Bild$= 0$.

5. Parallelprojektion mit Kern K =Kernϕ_0 auf $U + O$ mit U =Bildϕ_0. $E_1 = U$, $E_0 = K$. Bijektiv nur für $r = 0$. Matrix bzgl. Basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ mit $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ Basis von U und $\vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n$ Basis von K.

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

Bei der Orthogonalprojektion ist $K = U^\perp$ und bzgl. ON-Basis gilt

$$\phi_0(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{r} \langle \vec{v}_i \mid \vec{x} \rangle \vec{v}_i$$

Ist dabei U Hyperebene ($r = n - 1$) und $\vec{n} = \vec{v}_n$ Normalenvektor, so

$$\phi_0(\vec{x}) = \vec{x} - 2\langle \vec{n} \mid \vec{x} \rangle \vec{n}$$

6. Spiegelung an Hyperebene $U + O$ wie in 5. Achse=Normale. Bewegung.

$$\phi_0(\vec{x}) = \vec{x} - 2\langle \vec{n} \mid \vec{x} \rangle \vec{n}, \quad \text{Matrix } \begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ O & -1 \end{pmatrix}, \; U = E_1, K\vec{n} = E_{-1}$$

7. Drehung in der reellen Ebene mit Zentrum O um Winkel ω - gegen die Uhr. Bewegung. Bzgl. ON-Basis Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

Keine reellen EV, komplexe EV von Betrag 1 und Argument $\pm\omega$.

8. Drehung im reellen Raum mit Achse $\mathbb{R}\vec{v}_1 + O$ um Winkel ω - positiv im Sinne der Rechten Hand. Bewegung. Bzgl. ON-Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}, \quad E_1 = \mathbb{R}\vec{v}_1, \; E_{-1} = E_1^\perp \Leftrightarrow \omega = \pi$$

9. Drehungspiegelung im reellen Raum mit Achse $\mathbb{R}\vec{v}_1 + O$ um Winkel $\omega \neq \pi$ - positiv im Sinne der Rechten Hand. Bewegung. Bzgl. ON-Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}, \quad E_{-1} = \mathbb{R}\vec{v}_1$$

10. Scherung in der Ebene längs der Achse $K\vec{v}_1 + 0$. Matrix bzgl. Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_1 = K\vec{v}_1$$

11. Zentralprojektion ϕ der Ebene $U + O$ auf die parallele Ebene $U + O'$ des Raumes mit Zentrum $Z \notin U + O \cup U + O'$. Dabei ist $\phi(P)$ der Schnittpunkt der Geraden durch PZ mit der Ebene $U + O'$. Hier $\phi_0 : U \to U$ und mit Normalenvektor $\vec{n}$ von U

$$\phi_0(\vec{x}) = \frac{s}{r}\vec{x} \quad \text{wobei } r\vec{n} + Z \in U + O,\ s\vec{n} + Z \in U + O'$$

14.2 Affine Abbildungen *

Gegeben seien affine Räume $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$ mit K-Vektorräumen V und V'. Eine Abbildung $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ heisst *affin* wenn gilt

$$\lambda\,\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \Rightarrow \lambda\,\overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)} = \overrightarrow{\phi(R)\phi(S)} \quad \text{für alle } P, Q, R, S \in \mathcal{P},\ \lambda \in K$$

Ist dabei $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$, so sprechen wir von einer affinen *Selbstabbildung*. Die Hintereinanderausführung von affinen Abbildungen ist affin.

Lemma 14.1 *Sei* $\dim V \geq 2$. *Eine injektive affine Abbildung bildet Geraden auf Geraden ab und erhält Parallelität und Streckungsverhältnisse.*

Beweis. Sei ϕ affin. Sei g die Gerade durch P, Q und h die durch $\phi(P), \phi(Q)$. Liegt R auf g, so gibt es λ mit $\overrightarrow{PR} = \lambda\overrightarrow{PQ}$, also $\overrightarrow{\phi(P)\phi(R)} = \lambda\overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)}$ und somit $\phi(R)$ auf h. Andererseits lässt sich jeder Punkt auf h auf eindeutige Weise so darstellen. Also $h = \phi(g)$. Ist g' parallel zu g, wird g' von Punkten R, S mit $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PQ}$ aufgespannt, also $\phi(g')$ von $\phi(R), \phi(S)$ und das ist parallel zu h. □

14.3 Lineare Abbildungen

Eine Abbildung $\phi_0 : V \to V'$ haben wir *linear* genannt, wenn

$$\phi_0(\vec{x} + \vec{y}) = \phi_0(\vec{x}) + \phi_0(\vec{y}), \quad \phi_0(r\vec{x}) = r\phi_0(\vec{x}) \quad \text{für alle } \vec{x}, \vec{y} \in V,\ r \in K$$

Ist $V = V'$, so ist ϕ_0 ein *Endomorphismus.*

Satz 14.2 *Sei $O \in \mathcal{P}$ fest. Es gibt eine umkehrbar eindeutige Entsprechung zwischen affinen Abbildungen $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ und linearen Abbildungen $\phi_0 : V \to V'$ so, dass*

$$\phi_0(\vec{x}) + \phi(O) = \phi(\vec{x} + O), \quad \text{d.h. } \phi_0(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{\phi(O)\phi(P)}$$

Die lineare Abbildung ϕ_0 hängt nicht von der Wahl von O ab.

Beweis. Sei ϕ gegeben. Nach dem Axiom (A2) des affinen Raums ist ϕ_0 wohldefiniert und eindeutig bestimmt. Die Definition von affiner Abbildung ergibt sofort $\phi_0(r\vec{x}) = r\phi_0(\vec{x})$ und

$$\phi_0(\vec{x}+\vec{y}) + \phi(O) = \phi(\vec{x}+\vec{y}+O) = \phi_0(\vec{x}) + \phi(\vec{y}+O) = \phi_0(\vec{x}) + \phi_0(\vec{y}) + \phi(O)$$

$$\text{also} \quad \phi_0(\vec{x}+\vec{y}) = \phi_0(\vec{x}) + \phi_0(\vec{y})$$

$$\phi(\vec{x}+Q) = \phi(\vec{x}+\vec{v}+O) = \phi_0(\vec{x}+\vec{v})+O = \phi_0(\vec{x})+\phi_0(\vec{v})+O = \phi_0(\vec{x})+\phi(\vec{v}+O) = \phi_0(\vec{x})+\phi(Q)$$

falls $Q = \vec{v} + O$, was die Unabhängigkeit von der Wahl des Punktes O beweist. Sei umgekehrt ϕ_0 linear. Sei $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ usw. und $\lambda(\vec{q}-\vec{p}) = \lambda\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} = \vec{s}-\vec{r}$. Dann

$$\overrightarrow{\phi(R)\phi(S)} = \overrightarrow{\phi(O)\phi(S)} - \overrightarrow{\phi(O)\phi(R)} = \phi_0(\vec{s}) - \phi_0(\vec{r}) = \phi_0(\vec{s}-\vec{r})$$

$$= \phi_0(\lambda(\vec{q}-\vec{p})) = \lambda\phi_0(\vec{q}-\vec{p}) = \lambda\overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)}.$$

□ Ist $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ und O ein Fixpunkt von ϕ (d.h. $\phi(O) = O$) und wählt man diesen als Ursprung, so wird bei der beliebten Identifikation von Punkten mit Ortsvektoren die affine Abbildung ϕ mit der linearen Abbildung ϕ_0 identifiziert.

Korollar 14.3 *Die affinen Selbstabbildungen ϕ mit Fixpunkt O entsprechen umkehrbar eindeutig den linearen Abbildungen ϕ_0 vermöge $\phi(\vec{x}+O) = \phi_0(\vec{x}) + O$*

Korollar 14.4 *Sei O fest. Jede affine Selbstabbildung lässt sich eindeutig als Hintereinanderausführung einer affinen Abbildung ϕ_O mit Fixpunkt O und einer Translation τ schreiben*

$$\phi = \tau \circ \phi_O, \quad \textit{mit } \tau(O) = \phi(O), \quad \phi_O = \tau^{-1} \circ \phi$$

Korollar 14.5 *Eine affine Abbildung ist injektiv, surjektiv bzw. bijektiv genau dann, wenn es die zugehörige lineare Abbildung ist.*

14.4 Bewegungen und orthogonale Abbildungen

Eine *Bewegung* ist eine abstandserhaltende Abbildung $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ eines euklidischen affinen Raums in sich

$$|\phi(P)\phi(Q)| = |PQ| \quad \text{für alle } P, Q \in \mathcal{P}$$

Lemma 14.6 *Jede Bewegung ist eine affine Abbildung. Die Hintereinanderausführung von Bewegungen ist Bewegung. Translationen sind Bewegungen.*

Beweis. Die Gleichung $\lambda\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ kann äquivalent durch eine Bedingung an λ und die Abstände der Punkte P, Q, R, S ersetzt werden. □

Ein Endomorphismus ϕ eines euklidischen oder unitären Vektorraumes V ist eine *orthogonale* bzw. *unitäre* Abbildung, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen gilt (die Äquivalenz ergibt sich daraus, dass die quadratische Form aus der Sesquilinearform definiert werden kann und umgekehrt)

- $\langle \phi(\vec{x}) \,|\, \phi(\vec{y})) \rangle = \langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$
- $|\phi(\vec{x})| = |\vec{x}|$ für alle $\vec{x} \in V$

Korollar 14.7 *Eine affine Selbstabbildung ϕ eines euklidischen affinen Raumes ist genau dann eine Bewegung, wenn die zugehörige lineare Abbildung ϕ_0 orthogonal ist.*

Beweis. $|\vec{x}| = |\overrightarrow{O, \vec{x}+O}|$, $|\phi_0(\vec{x})| = |\overrightarrow{\phi(O)\phi(\vec{x}+O)}|$ und die Behauptung ist klar. $\square$ Beispiele von Bewegungen mit Fixpunkt O sind in der Ebenen Drehungen und (senkrechte) Spiegelungen an einer Geraden, im Raum Drehungen, Spiegelungen und Drehspiegelungen. Wir werden später zeigen, dass damit alle Fälle erfasst sind.

14.5 Beschreibung durch Matrizen

Satz 14.8 *Seien V, W K-Vektorräume mit Basen $\alpha : \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ bzw. $\beta : \vec{f}_1, \ldots \vec{f}_m$. Dann gibt es eine bijektive Entsprechung zwischen linearen Abbildungen $\phi : V \to W$ und Matrizen $A \in K^{m\times n}$ vermöge*

$$\phi(\vec{x})^\beta = A\vec{x}^\alpha, \quad A = {}^\beta\phi_\alpha \textit{ heisst die } \text{Matrix} \textit{ von } \phi \textit{ bzgl. } \alpha, \beta$$

In den Spalten der Matrix stehen die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren

Ist $V = W$ und betrachten wir nur eine Basis so schreiben wir

$$\phi_\alpha = {}^\alpha\phi_\alpha \quad \text{Matrix von } \phi \text{ bzgl. } \alpha$$

Beweis. Ist ϕ gegeben und soll es ein A geben, so muss es das angegebene sein: man setze $\vec{x} = \vec{e}_j$ ein, d.h. $\vec{e}_j^{\,\alpha} = \boldsymbol{e}_j$ und $A\boldsymbol{e}_j$ ist die j-te Spalte von A. Es folgt

$$\phi(\vec{x})^\beta = \sum_j x^j \phi(\vec{e}_j)^\beta = \sum_j x^j A\boldsymbol{e}_j = A(\sum_j x^j \boldsymbol{e}_j) = A\vec{x}^\alpha \quad \text{für } \vec{x} = \sum_j x^j \vec{e}_j$$

Ist A gegeben, so erhält man die Linearität von ϕ indem man die Isomorphieeigenschaft der Koordinatenzuordnung benutzt

$$\phi(\vec{x}+\vec{y})^\beta = A(\vec{x}+\vec{y})^\beta = A(\vec{x}^\beta + \vec{y}^\beta) = A\vec{x}^\beta + A\vec{y}^\beta = \phi(\vec{x})^\beta + \phi(\vec{y})^\beta = (\phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y}))^\beta$$

$$\text{also } \phi(\vec{x}+\vec{y}) = \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y})$$

$$\phi(r\vec{x})^\beta = A(r\vec{x})^\beta = Ar\vec{x}^\beta = rA\vec{x}^\beta = r\phi(\vec{x})^\beta = (r\phi(\vec{x}))^\beta \quad \text{also } \phi(r\vec{x})) = r\phi(\vec{x})$$

Sind α bzw. β Koordinatensysteme der affinen Räume $\mathcal{P}$ bzw. $\mathcal{P}'$, so hat man für die affine Abbildung $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ die Koordinatenbeschreibung

$$\boxed{\phi(P)^\beta = \phi(O_\alpha)^\beta + {}^\beta\phi_{0\alpha}P^\alpha}$$

Hat man eine Selbstabbildung und $\alpha = \beta$ so heisst

$$\vec{t}_\alpha = \overrightarrow{O_\alpha\phi(0_\alpha)}$$

der zugehörige *Translationsvektor* und man hat

$$\phi(P)^\alpha = \vec{t}_\alpha + {}^\alpha\phi_{0\alpha}P^\alpha$$

14.6 Orthogonale Abbildungen und Matrizen

Für einen Endomorphismus ϕ eines endlichdimensionalen euklidischen bzw. unitären Raumes sind äquivalent

(1) ϕ ist orthogonal bzw. unitär

(2) Das Bild einer/jeder ON-Basis ist ON-Basis

(3) Bzgl. eines/jedes Paares von ON-Basen ist ${}^{\alpha}\phi_{\beta}$ orthogonal bzw. unitär

Beweis.1 $\Rightarrow$ 2 ist trivial. 2 $\Rightarrow$ 3. Die Spalten der Matrix ${}^{\beta}\phi_{\alpha}$ von ϕ bzgl. der ON-Basen α, β sind die Koordinaten der Bilder $\phi(\vec{e}_j)$ der ON-Basis $\alpha : \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ also orthonormal, da die $\phi(\vec{e}_j)$ eine ON-Basis bilden. Also ist ${}^{\beta}\phi_{\alpha}$ unitär.
3 $\Rightarrow$ 1. Sei $A = {}^{\beta}\phi_{\alpha}$ unitär. Dann

$$\langle \phi(\vec{x}) \mid \phi(\vec{y}) \rangle = (\phi(\vec{x})^{\beta})^{*} \phi(\vec{y})^{\beta} == (A\vec{x}^{\alpha})^{*} A\vec{y}^{\alpha} = (\vec{x}^{\alpha})^{*} A^{*} A\vec{y}^{\alpha} = (\vec{x}^{\alpha})^{*} E\vec{y}^{\alpha} = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$$

Korollar 14.9 *Eine orthogonale bzw. unitäre Abbildung ist durch die Bilder von* $\dim V - 1$ *unabhängigen Vektoren schon zweideutig bestimmt - eindeutig bei Vorgabe der Orientierung.*

Korollar 14.10 *Die orthogonalen bzw. unitären Endomorphismen bilden eine zur Gruppe* $\mathsf{O}(n)$ *der orthogonalen bzw.* $\mathsf{U}(n)$ *der unitären Matrizen isomorphe Gruppe. Die Bewegungen eines euklidischen affinen Raumes bilden eine Gruppe.*

14.7 Drehstreckungen und komplexe Zahlen

Für eine lineare Abbildung ϕ der vektoriellen Anschauungsebene $\mathcal{E}$ in sich sind äquivalent

- $\phi = r\chi$ mit χ orthogonal und $r \geq 0$
- Bzgl. einer/jeder ON-Basis α hat ϕ_{α} die Gestalt

$$\phi_{\alpha} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

Dann ist ϕ eine *Drehstreckung.* Eine Drehstreckung ist also entweder bijektiv oder die Nullabbildung 0 mit $0(\vec{x}) = \vec{0}$ für alle $\vec{x}$. Sind ϕ und ψ Drehstreckungen, so auch

$$0,\ \ \phi + \psi,\ -\phi = (-1)\phi,\ \lambda\phi,\ \mathrm{id},\ \psi \circ \phi\ \text{ und } \phi^{-1} \text{ falls } \phi \neq 0$$

Satz 14.11 *Die Drehstreckungen bilden bzgl. der angegebenen Operationen einen kommutativen Körper* $\mathbb{C}$ *mit Einselement* $\mathrm{id} = 1_{\mathbb{C}}$ *sowie einen* $\mathbb{R}$*-Vektorraum und*

$$\lambda(\psi \circ \phi) = \psi \circ (\lambda\phi)$$

$\mathbb{C}$ *enthält einen zum Skalarenkörper* $\mathbb{R}$ *isomorphen Unterkörper* $\{r1_{\mathbb{C}} \mid r \in \mathbb{R}\}$ *und ein Element* i *genannt* imaginäre Einheit *mit*

$$\boxed{i^2 = -1_{\mathbb{C}}}$$

i ist zweideutig bestimmt. Ist es gewählt, so haben die Elemente von $\mathbb{C}$ eine eindeutige Darstellung

$$\boxed{z = a + bi \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}}$$

Beweis. Körper und Vektorraum-Eigenschaft sofort aus den Gesetzen des Vektorraums $\mathcal{E}$ und Übung. $(\psi \circ (\lambda\phi))(\vec{x}) = \psi((\lambda\phi)(\vec{x})) = \psi(\lambda(\phi(\vec{x}))) = \lambda\psi(\phi(\vec{x})) = \lambda((\psi \circ \phi)(\vec{x})) = (\lambda(\psi \circ \phi))(\vec{x})$. Dass $\mathbb{R}$ isomorph zu einem Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist, bedeutet: Die Abbildung $r \mapsto r1_{\mathbb{C}}$ ist bijektiv und

$$r + s \mapsto (r+s)1_C = r1_{\mathbb{C}} + s1_{\mathbb{C}}, \quad 0 \mapsto O = 0_{\mathbb{C}}, \quad -r \mapsto (-r)1_{\mathbb{C}} = -(r1_{\mathbb{C}})$$

$$rs \mapsto (rs)1_{\mathbb{C}} = r1_{\mathbb{C}}s1_{\mathbb{C}}, \quad 1 \mapsto I = 1_{\mathbb{C}}, \quad r^{-1} \mapsto r^{-1}1_{\mathbb{C}} = (r1_{\mathbb{C}})^{-1}$$

Ist eine Orientierung gegeben, so ist i die Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ d.h. bzgl. einer/jeder ON-Basis gilt

$$i_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt sofort Existenz und Eindeutigkeit der Darstellung. □

Aus den Körpergesetzen folgen dann die Rechenregeln

$$\boxed{a + bi + c + di = (a+b)i = (c+d)i, \quad (a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i}$$

$$\boxed{\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}}$$

Häufig ist die *Polardarstellung* vorzuziehen, die sich direkt aus der Definition als Drehstreckung ergibt mit *Betrag* $|z| = r$ und *Argument* ω

$$\boxed{z = r(\cos\omega + i\sin\omega)}$$

Bei der Multiplikation (d.h. der Hintereinanderausführung der Drehstreckungen) multiplizieren sich die Beträge und addieren sich die Argumente

$$\boxed{r_1(\cos\omega_1 + i\sin\omega_1)r_2(\cos\omega_2 + i\sin\omega_2) = r_1r_2(\cos(\omega_1+\omega_2) \ + \ i\sin(\omega_1+\omega_2))}$$

$$\boxed{(r(\cos\omega + i\sin\omega))^{-1} = r^{-1}(\cos -\omega + i\sin -\omega)}$$

Wir definieren die *konjugiert komplexe Zahl* zu z als $\boxed{z = a + bi \mapsto \overline{z} = a - bi}$ und stellen fest

$$\boxed{\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{|z|^2 = a^2 + b^2 = z\overline{z}, \quad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}}$$

Zwecks einer vektoriellen Veranschaulichung sei nun eine positiv orientierte ON-Basis $\vec{a} - 1, \vec{a}_2$ des Ebene gegeben. Dann erhält man eine bijektive, mit Addition und Multiplikation mit Skalaren verträgliche, Abbildung

$$\mathbb{C} \to \mathcal{E} \text{ mit } 1_C \mapsto \vec{a}_1, \ \ i \mapsto \vec{a}_2 \quad \phi = z = a + bi \mapsto \phi(\vec{a}_1) = a\vec{a}_1 + b\vec{a}_2$$

In der Tat, eine Drehstreckung ϕ ist durch das Bild eines einzigen Vektors $\neq \vec{0}$ schon eindeutig bestimmt. Dabei haben wir die Skalare, die Elemente von $\mathbb{R}$, die Vektoren $r\vec{a}_1$ und ggf. die Punkte auf der Ursprungsgeraden mit Richtung $\vec{a}_1$ (der *reellen Achse*) jeweils identifiziert. Die Gerade mit Richtung $\vec{a}_2$ heisst auch *imaginäre Achse*. Jetzt erweist sich $|z|$ als die Länge des zugehörigen Vektors und die Konjugation $z \mapsto \overline{z}$ als Spiegelung an der reellen Achse.

/la95/komp1.eepic /la95/komp1.eepic /la95/komp2.eepic /la95/komp2.eepic
Für $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ erhält man den *Realteil* a und *Imaginärteil* b zu

$$\boxed{\Re(z) = a = \tfrac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \Im(z) = b = \tfrac{1}{2i}(z - \overline{z})}$$

14.8 Transformation

Sind α, β Basen von V und γ, δ Basen von W so gilt

$$\boxed{{}^\delta\phi_\beta = {}^\delta T_\gamma \, {}^\gamma\phi_\alpha \, {}^\alpha T_\beta = {}^\gamma T_\delta^{-1} \, {}^\gamma\phi_\alpha \, {}^\alpha T_\beta}$$

und, falls falls $V = W, \alpha = \gamma, \beta = \delta$,

$$\boxed{{}^\beta\phi_\beta = {}^\alpha T_\beta^{-1} \, {}^\alpha\phi_\alpha \, {}^\alpha T_\beta}$$

Beweis. ${}^\delta\phi_\beta \vec{x}^\beta = (\phi(\vec{x}))^\delta = {}^\delta T_\gamma (\phi(\vec{x}))^\gamma = {}^\delta T_\gamma \, {}^\gamma\phi_\alpha \vec{x}^\alpha = {}^\delta T_\gamma \, {}^\gamma\phi_\alpha \, {}^\alpha T_\beta \vec{x}^\beta$

- Anwendung 1. Sei A' bezüglich einer 'günstigen' Basis β bekannt. Man bestimme Matrix A von ϕ bzgl. der kanonischen Basis.

- Anwendung 2. Die Matrix A von ϕ bezüglich der kanonischen Basis sei bekannt, sagt aber wenig über die Struktur. Man bestimme eine 'günstige' Basis β, sodass man der Matrix A' von ϕ bzgl. β geometrische Eigenschaften von ϕ ansehen kann. Bzw. so, dass man das durch A' gegebene, zu A gleichwertige, (Differential)Gleichungssystem lösen kann. Das ist das Thema der Eigenwerttheorie.

Hat man in einem affinen Raum Koordinatensysteme α und β mit

$$\vec{v} = \overrightarrow{O_\alpha O_\beta}, \ S = {}^\alpha T_\beta \quad \text{d.h. } P^\alpha = \vec{v}^\alpha + SP^\beta \text{ für alle } P$$

so gilt für affine Selbstabbildungen die Transformationsformel

$$\boxed{\vec{t}_\beta = \vec{t}_\alpha - \vec{v} + \phi_0(\vec{v})}$$

$$\phi(P)^\beta = \vec{t}_\beta^\beta + \phi_{0\beta} P^\beta \quad \text{mit } \vec{t}_\beta^\beta = S^{-1}(\vec{t}_\alpha^\alpha - \vec{v}^\alpha + \phi_{0\alpha}\vec{v}^\alpha) \text{ und } \phi_{0\beta} = S^{-1}\phi_{0\alpha}S$$

Beweis: $\phi(O_\beta) = \vec{t}_\alpha + \phi(\vec{v}) + O_\alpha = \vec{t}_\alpha + \phi_0(\vec{v}) - \vec{v} + O_\beta$.

14.9 Fortsetzung

Korollar 14.12 *Seien V, W K-Vektorräume, $\alpha : \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ eine Basis von V und seien $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ in W. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung ϕ von V in W so, dass $\phi(\vec{e}_1) = \vec{w}_1, \ldots, \phi(\vec{e}_n) = \vec{w}_n$.*

Beweis. Wähle Basis β von W und ${}^{\beta}\phi_{\alpha} = (\, \vec{w}_1^{\beta}, \ldots, \vec{w}_n^{\beta}\,)$.

Korollar 14.13 *Seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$ affine Räume mit K-Vektorräumen V und V'. Seien $O, P_1, \ldots, P_n$ Punkte in $\mathcal{P}$ so, dass $\overrightarrow{OP_1}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$ Basis von V ist (d.h. man hat Koordinatensystem von $\mathcal{P}$. Seien $O, P_1', \ldots, P_n'$ in $\mathcal{P}'$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte affine Abbildung $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mit $\phi(O) = O'$, $\phi(P_1) = P_1', \ldots, \phi(P_n) = P_n'$*

14.10 Komposition

Sind V, W, U K-Vektorräume mit endlichen Basen α, β, γ und ϕ lineare Abbildung von V nach W, ψ von W nach U, so ist $\phi \circ \psi$ lineare Abbildung von V nach U und die Matrix ergibt sich als Produkt der Matrizen

$$\boxed{{}^{\gamma}[\psi \circ \phi]_{\alpha} = {}^{\gamma}\psi_{\beta} \cdot {}^{\beta}\phi_{\alpha}}$$

Beweis. $(\psi(\phi(\vec{x})))^{\gamma} = {}^{\gamma}\psi_{\beta}\phi(\vec{x})^{\beta} = {}^{\gamma}\psi_{\beta}\, {}^{\beta}\phi_{\alpha}\vec{x})^{\alpha}$.

14.11 Inverse

Für eine lineare Abbildung ϕ von V nach W und Basen α von V, β von W sind äquivalent

- $\phi : V \to W$ ist bijektiv
- ${}^{\beta}\phi_{\alpha}$ invertierbar für ein/jedes Paar α, β von Basen von V, W.

Die inverse Abbildung ist dann auch linear und hat die inverse Matrix

$$\boxed{{}^{\alpha}(\phi^{-1})_{\beta} = ({}^{\beta}\phi_{\alpha})^{-1}}$$

Beweis. Ist ϕ bijektiv, so ist auch ϕ^{-1} linear: sei $\vec{x} = \phi\vec{u}$ und $\vec{y} = \phi\vec{v}$. Dann $\vec{x} + \vec{y} = \phi(\vec{u} + \vec{v})$, also $\phi^{-1}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{u} + \vec{v} = \phi^{-1}\vec{x} + \phi^{-1}\vec{y}$. Entsprechend für $r\vec{x}$. Es folgt ${}^{\alpha}(\phi^{-1})_{\beta} \cdot {}^{\beta}\phi_{\alpha} = ({}^{\alpha}\phi^{-1} \circ \phi)_{\alpha} = {}^{\alpha}id_{\alpha} = E$.

Ist ${}^{\beta}\phi_{\alpha}$ invertierbar, so erhält man mit ${}^{\alpha}\psi_{\beta} = ({}^{\beta}\phi_{\alpha})^{-1}$ die inverse Abbildung. Durch Wahl einer festen Basis α erhält man

Korollar 14.14 *Die invertierbaren Endomorphismen eines n-dimensionalen K-Vektorraums bilden eine zu $\mathsf{GL}(n, K)$ isomorphe Gruppe.*

14.12 Kern und Bild

Definition. Sei ϕ lineare Abbildung von V nach W. Setze

$$\operatorname{Kern}\phi = \{x \text{ in } V \mid \phi(x) = 0\} \text{ und } \operatorname{Bild}\phi = \phi(V) = \{\phi(x) \mid x \text{ in } V\}.$$

Lemma 14.15 Kern ϕ *ist Untervektorraum von V und* Bild ϕ *Untervektorraum von W. Es ist* Kern $\phi = 0$ *genau dann, wenn ϕ injektiv ist und* Bild $\phi = W$ *genau dann, wenn ϕ surjektive Abbildung von V auf W ist.*

Beweis. Ist ϕ injektiv und $\phi(v) = 0$, so wegen $\phi(0) = 0$ sofort $v = 0$. Sei umgekehrt Kern $\phi = 0$. Ist $\phi(v) = \phi(w)$, so $\phi(v - w) = \phi(v) - \phi(w) = 0$, also $v - w = 0$ und $v = w$. Also ist ϕ injektiv.

$$\boxed{\dim \operatorname{Kern}\phi + \dim \operatorname{Bild}\phi = \dim V \quad \textit{Dimensionsformel.}}$$

Anwendung: Die linearen Abbildungen vom Raum auf die Ebene sind von der Form $\psi \circ \pi$, wobei π eine Parallelprojektion des Raumes auf die Ebene und ψ eine lineare Selbstabbildung des Ebene ist.

Beweis. Wähle eine Basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ von Kern ϕ und ergänze zu einer Basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ von V. Dann hat man für jedes w in Bild ϕ eine Darstellung

$$w = \phi(\sum_{i=1}^{n} r^i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} r^i \phi(\vec{v}_i) = \sum_{i=k+1}^{n} r^i \phi(\vec{v}_i) = \phi(\sum_{i=k+1}^{n} r^i \vec{v}_i)$$

und diese Darstellung ist eindeutig, da sie für den Spezialfall $w = 0$ eindeutig ist : in diesem Fall ist $\sum_{i=k+1}^{n} r^i \vec{v}_i$ in Kern ϕ, ist also auch Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} s^i \vec{v}_i$, und da $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ unabhängig ist, sind alle r^i, s^i Null.

Korollar 14.16 *Ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums V ist genau dann injektiv, wenn er surjektiv ist.*

Korollar 14.17 *Sei ϕ lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen V und W und $r = \dim \operatorname{Bild}\phi$. Dann es gibt Basen α von V und β von W mit*

$$^{\beta}\phi_{\alpha} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \textit{ und es gilt } \begin{array}{lcl} \phi \textit{ injektiv} & \Leftrightarrow & r = \dim V \\ \phi \textit{ surjektiv} & \Leftrightarrow & r = \dim W \end{array}.$$

Ein homogenes lineares Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ kann man auch so verstehen: zu $\phi : K^n \to K^m$ mit $\phi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ ist Kern ϕ gerade der Lösungsraum.

14.13 Symmetrie und Hauptachsen *

Eine orthogonale Abbildung ϕ des euklidischen Raumes V ist eine *Symmetrie* der symmetrischen Bilinearform Φ bzw. zugehörigen quadratischen Form Q, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt

- $Q(\vec{x}) = 1 \Leftrightarrow Q(\phi(\vec{x})) = 1$ für alle $\vec{x}$,
  d.h. die Kennhyperfläche wird auf sich abgebildet
- $Q(\phi(\vec{x})) = Q(\vec{x})$ für alle $\vec{x}$
- $\Phi(\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})) = \Phi(\vec{x}, \vec{y})$ für alle $\vec{x}, \vec{y}$

Satz 14.18 *Für* $\dim V = 3$ *ist jede Achse einer Dreh- oder Drehspiegel-Symmetrie* $\neq \pm id$ *einer quadratischen Form Hauptachse. Ist der Drehwinkel* $\neq 180^o$, *so haben die Vektoren senkrecht zur Achse alle denselben Eigenwert und man hat Rotationssymmetrie bzgl. dieser Achse.*

Beweis. Sei der Winkel $\neq 180^0$. Der Vektor $\vec{v}$ ist genau dann Eigenvektor, wenn es $\phi_(\vec{v})$ ist und beide haben denselben Eigenwert. Da es ein Hauptachsensystem gibt, gibt es einen Eigenvektor $\vec{v}$ nicht parallel zur Drehachse g. Nun sind $\vec{v}$ und $\phi(\vec{v})$ linear unabhängig, spannen also einen zweidimensionalen Untervektorraum U des Eigenraums E_λ zu $\vec{v}$ auf. Wähle $\vec{w} \perp U$. Ist $\vec{w} \in E_\lambda$, so ist die Kennfläche eine Kugel. Andernfalls $U = E_\lambda$ und $V = E_\lambda \oplus^\perp E_\mu$ mit eindimensionalem Eigenraum zu $\mu \neq \lambda$. Da $\phi(U) = U$, muss ϕ auf U Drehung sein, d.h. die Drehachse ist parallel $U^\perp = E_\mu$. Wir haben also ein Hauptachsensystem mit $\vec{v}_3$ in Richtung von g und

$$Q(\sum_i x^i \vec{v}_i) = \lambda((x^1)^2 + (x^2)^2) + \mu(x^3)^2$$

Wir lesen ab, dass jede Drehung um g eine Symmetrie von Q ist.

Bei der 180^0-Drehung wähle $\vec{v}$ in Achsenrichtung, also $\phi(\vec{v}) = \vec{v}$. Ist $\vec{x} \perp \vec{v}$, so $\phi(\vec{x}) = -\vec{x}$, also $\Phi(\vec{x}, \vec{v}) = \Phi(\phi(\vec{x}), \phi(\vec{v})) = \Phi(-\vec{x}, \vec{v}) = -\Phi(\vec{x}, \vec{v})$ und somit $\Phi(\vec{x}, \vec{v}) = 0$. Also ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor von Φ. □ Die identische Abbildung und die Spiegelung am Ursprung fallen nicht unter den Satz, weil sie keine wohldefinierte Achse haben.

Ein Bewegung, d.h. abstandserhaltende Abbildung $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ des Punktraumes ist eine *Symmetrie* des Körper mit Massendichte $P \mapsto m(P)$, wenn gilt

$$m(\phi(P)) = m(P) \text{ für alle } P \in \mathcal{P}$$

Satz 14.19 *Jede Symmetrie eines Körpers hat den Schwerpunkt als Fixpunkt und überführt das Trägheitsellipsoid in sich.*

Beweis. Wegen $\phi(\vec{x} + S) = \phi_0(\vec{x}) + \phi(S)$ mit orthogonaler Abbildung ϕ_0 folgt

$$0 = \int \langle \vec{a} \,|\, \vec{x} \rangle m(\vec{x} + S) \,\mathrm{d}V = \int \langle \phi_0(\vec{a}) \,|\, \phi_0(\vec{x}) \rangle m(\phi_0(\vec{x}) + \phi(S)) \,\mathrm{d}V$$

also ist $\phi(S)$ Schwerpunkt bzgl. der durch $\phi(S)$ und $\phi_0(\vec{a})$ gegebenen Geraden. Nach Lemma 14.20 folgt $\vec{a} \perp \overrightarrow{S\phi(S)}$. Das gilt für alle $\vec{a}$, also $S = \phi(S)$. Nun

$$J(\phi_0(\vec{a})) = \int |\phi_0(\vec{a}) \times \phi_0(\vec{x})|^2 m(\phi(\vec{x} + S)) \,\mathrm{d}V = \int |\vec{a} \times \vec{x}|^2 m(\vec{x} + S) \,\mathrm{d}V = J(\vec{a})$$

Lemma 14.20 *Sind* g *und* h *parallel und* S *Schwerpunkt bzgl.* g, *so ist der Fusspunkt* $T = \vec{w} + S$ *des Lotes von* S *auf* h *Schwerpunkt bzgl.* h.

Beweis. Für die Verschiebung $P \mapsto \vec{w} + P$ gilt

$$\langle \vec{a} \,|\, \vec{w} + \vec{x} \rangle = \langle \vec{a} \,|\, \vec{w} \rangle + \langle \vec{a} \,|\, \vec{x} \rangle = \langle \vec{a} \,|\, \vec{x} \rangle$$

und damit

$$\int \langle \vec{a} \,|\, \vec{x} \rangle m(\vec{x} + S)\, \mathrm{d}V = \int \langle \vec{a} \,|\, \vec{y} \rangle m(\vec{y} + T)\, \mathrm{d}V \qquad \square$$

15 Direkte Summen und Produkte

Sei V ein K-Vektorraum mit Untervektorräumen $U_1, \ldots, U_m$.

$$U_1 + \ldots + U_m = \{\vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_m \mid \vec{u}_1 \text{ in } U_1, \ldots, \vec{u}_m \text{ in } U_m\}$$

ist der von der Vereinigung der Untervektorräume $U_1, \ldots, U_m$ erzeugte Untervektorraum von V, d.h. der kleinste Untervektorraum, der alle $U_1, \ldots, U_m$ umfasst, und heisst deren *Summe*. Ebenso ist der *Schnitt*

$$U_1 \cap \ldots \cap U_m = \{\vec{v} \in V \,|\, \vec{v} \in U_1, \ldots, \vec{v} \in U_m\}$$

ein Untervektorraum. Man rechnet nämlich sofort nach, dass es sich wirklich um Untervektorräume handelt.

Satz 15.1 *Für gegebene Untervektorräume $U_1, \ldots, U_m$ und U eines Vektorraums V sind äquivalent:*

- **(1)** $U = U_1 + \ldots + U_m$ *und jede Liste von Vektoren* $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ *in* $U_1, \ldots, \vec{u}_m \neq \vec{0}$ *in* U_m *ist linear unabhängig.*
- **(2)** *Für jedes u aus U gibt es genau eine Darstellung* $u = \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_m$ *mit* $\vec{u}_1$ *in* $U_1, \ldots, \vec{u}_m$ *in* U_m.
- **(3)** *Jede (eine) Vereinigung von Basen der $U_1, \ldots, U_m$ ist Basis von U.*
- **(4)** $U = U_1 + \ldots + U_m$ *und* $(U_1 + \ldots U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_m) \cap U_i = 0$ *für alle* $i = 1, \ldots m$.
- **(5)** $U = U_1 + \ldots + U_m$ *und* $(U_1 + \ldots + U_{k-1}) \cap U_k = 0$ *für* $1 < k \leq m$.
- **(6)** *im Falle* $\dim V < \infty$*:* $\dim U = \dim U_1 + \ldots + \dim U_m$ *und* $U = \sum_i U_i$.

Wir sagen dann, die Summe sei *direkt* und schreiben

$$U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m.$$

Korollar 15.2 *Ist V unitär/euklidisch und gilt $U_i \perp U_j$ für alle $i \neq j$ so ist die Summe $U_1 + \ldots + U_n$ direkt - man spricht auch von* orthogonaler Summe

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Aus $u = \sum \vec{u}_i = \sum \vec{u}_i{}'$ folgt $\vec{0} = \sum \vec{v}_i$ mit $\vec{v}_i = \vec{u}_i - \vec{u}_i{}'$, dabei braucht man natürlich nur über die $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ zu summieren. Gäbe es solche, so hätte man eine nichttriviale Darstellung von $\vec{0}$ in Widerspruch zu der in (1) vorausgesetzten Unabhängigkeit.
(2) $\Rightarrow$ (1): Sind die $\vec{u}_i \neq \vec{0}$ und $\vec{0} = \sum r^i \vec{u}_i$, so ergibt $\vec{0} = \vec{0} + \ldots + \vec{0}$ und die vorausgesetzte Eindeutigkeit, dass alle $r^i \vec{u}_i = \vec{0}$ und somit $r^i = 0$.
(2) $\Rightarrow$ (3): In einer Linearkombination u der Vereinigung der Basen ergeben sich nach (2) die Teilsummen $\vec{u}_i$ zu den Basiselementen aus U_i eindeutig, und zu diesen dann die Koeffizienten.
(3) $\Rightarrow$ (1): Man ergänze jeweils $\vec{u}_i$ zu Basis von U_i.
(2) $\Rightarrow$ (4): z.B. $i = 1$. Aus $\vec{u}_1 = \vec{0} + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_m$ folgt $\vec{u}_1 = \vec{0}$.
(4) $\Rightarrow$ (5): trivial. (5) $\Rightarrow$ (1): Sei $\vec{0} = \sum r^i \vec{u}_i$ mit $\vec{u}_i \neq \vec{0}$. Induktiv setzen wir voraus, dass $r^i = 0$ für $i > k$. Dann $-r^k \vec{u}_k = r^1 \vec{u}_1 + \ldots + r^{k-1} \vec{u}_{k-1}$ in $U_1 + \ldots + U_{k-1}) \cap U_k$, also $r^k \vec{u}_k = \vec{0}$ und $r^k = 0$.
(3) $\Rightarrow$ (6) trivial. (6) $\Rightarrow$ (3): Die Vereinigung der Basen ist ein Erzeugendensystem mit $\dim U$ vielen Elementen, also minimales Erzeugendensystem.
Zum Korollar: $U_i \perp \sum_{j \neq i} U_j$, also $U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0\}$.

Nach dem Muster der Räume K^n können wir die Vektorräume $U_1, \ldots, U_m$ auch "extern" zu einem neuen Vektorraum. dem *direkten Produkt*, zusammenfassen:

$$U_1 \times \ldots \times U_m = \{(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m) \,|\vec{u}_1 \in U_1, \ldots, \vec{u}_m \in U_m\}.$$

Durch komponentenweises Rechnen erhalten wir einen K-Vektorraum.

Korollar 15.3 *Die Summe $U = U_1 + \ldots + U_m$ ist genau dann direkt, wenn*

$$(\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_m) \mapsto \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_m$$

ein Isomorphismus von $U_1 \times \ldots \times U_m$ auf U ist ist.

16 Eigenvektoren von Abbildungen

16.1 Eigenvektoren

Sei V ein K-Vektorraum ϕ ein Endomorphismus, $\vec{v} \in V$ und $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent

- $\phi(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$
- $(A - \lambda E)\vec{v}^\alpha = \vec{0}$ mit $A = \phi_\alpha$ bzgl. einer/jeder Basis α
- Für jede Basis $\beta : \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j = \vec{v}, \ldots, \vec{v}_n$ ist $\lambda \boldsymbol{e}_j$ die j-te Spalte von $A' = \phi_\beta$

Ist $\vec{v} \neq \vec{0}$ so heisst $\vec{v}$ ein *Eigenvektor* (EV) von ϕ und λ ein *Eigenwert* (EW). Ist λ ein Eigenwert, so hat man den *Eigenraum* (ER) E_λ von ϕ zum EW λ und die *geometrische Vielfachheit* $\dim E_\lambda$

$$E_\lambda = \{\vec{x} \in V \,|\phi(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\}$$

Geometrisch bedeutet dies, dass ϕ auf dem Eigenraum eine Streckung um den Skalar λ ist. Insbesondere ist jeder Eigenraum von ϕ ein ϕ-invarianter Teilraum : $\phi(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$.

Hat man eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ gegeben, so hat man die analogen Bezeichnungen bezogen auf $V = K^n$ und $\phi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$. Man beachte aber die Abhängigkeit dieser Begriffe vom Körper K - die Matrizen der Drehungen der Ebene (um Winkel $\neq 180^o, 360^o$ haben keine reellen EW und EV, wohl aber komplexe. *Beispiel.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Für welche } \lambda \text{ hat} (A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

eine nichttriviale Lösung? Nur dann, wenn mindestens ein Diagonaleintrag Null ist, d.h. $\lambda = 1$ oder $\lambda = 2$. Hier hat man die eindimensionalen Lösungsräume

$$E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

16.2 Invariante Teilräume und Blockzerlegung

Sei ϕ ein Endomorphismus des K-Vektorraums V. Ein Untervektorraum U von V ist *ϕ-invariant* , falls $\phi(U) \subseteq U$. Dann ist die Einschränkung $\phi|U$ ein Endomorphismus von U.

Lemma 16.1 *Sei $\alpha : \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ Basis von V und $U = K\vec{v}_{k+1} + \ldots + K\vec{v}_{k+m}$. Genau dann ist U ein ϕ-invarianter Teilraum, wenn die Matrix von ϕ bzgl α folgende Blockgestalt hat*

$$\phi_\alpha = \begin{pmatrix} A_{11} & O & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & O & A_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } A_{11} \in K^{k\times k},\ A_{22} \in K^{m\times m}$$

Dann ist A_{22} die Matrix von $\phi|U$ bzgl. der Basis $\vec{v}_{k+1}, \ldots, \vec{v}_{k+m}$ von U.

16.3 Summe von Eigenräumen

Lemma 16.2 *EV $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ von ϕ zu lauter verschiedenen EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sind linear unabhängig. Insbesondere gibt es höchstens $n = dimV$ verschiedene EW zu ϕ.*

Beweis durch Induktion über k. Sei angenommen, dass $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k-1}$ unabhängig sind und (1): $0 = \sum_{i=1}^k r^i\vec{v}_i$. Dann $0 = \lambda_k \sum r^i\vec{v}_i = \sum r^i\lambda_k\vec{v}_i$ und $0 = \phi(\sum r^i\vec{v}_i) = \sum r^i\phi(\vec{v}_i) = \sum r^i\lambda_i\vec{v}_i$. Durch Subtraktion folgt $0 = \sum r^i(\lambda_k - \lambda_i)\vec{v}_i$. Da hier der k-te Summand 0 ist, folgt aus der Unabhängigkeit der $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k-1}$, dass $r^i(\lambda_k - \lambda_i) = 0$ für $i < k$. Da $\lambda_k \neq \lambda_i$, folgt $r^i = 0$ für $i < k$ und dann aus (1), dass $r^k\vec{v}_k = 0$. Wegen $\vec{v}_k \neq 0$ hat man also auch $r^k = 0$. Mit Satz 15.1 folgt

Korollar 16.3 *Die Summe von Eigenräumen zu verschiedenen EW ist direkt*

Korollar 16.4 *Wählt man $\vec{v}_{i1}, \ldots, \vec{v}_{id_i}$ als Basis des Eigenraums U_{λ_i} für die paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, so erhält man eine unabhängige Liste von Vektoren. Ergänzt man zu einer Basis β von V, so erhält man zu ϕ eine Matrix der Gestalt*

$$\phi_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{d_1} & \ldots & O & + \\ O & \ddots & O & \vdots \\ \vdots & & \lambda_k E_{d_k} & \\ O & \ldots & O & + \end{pmatrix}$$

16.4 Diagonalisierung

Korollar 16.5 *Für einen Endomorphismus ϕ bzw. Matrix $A = \phi_\alpha$ sind äquivalent*

- *ϕ bzw. A ist* diagonalisierbar
- *Es gibt invertierbare Matrix S mit $S^{-1}AS$ diagonal*
- *V besitzt eine Basis β von EV von ϕ bzw. A*
- *V ist Summe der Eigenräume von ϕ*
- $\dim V$ *ist die Summe der geometrischen Vielfachheiten der EW*

Man beachte den Unterschied zur Diagonalisierung von Formen.

16.5 Charakteristisches Polynom

$$det(A - \xi E) = (-1)^n \xi^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn})\xi^{n-1} + \ldots + detA, \quad A = \phi_\alpha$$

ist das *charakteristische Polynom* von ϕ bzw. A. Es ist vom Grade n in der Variablen ξ und hängt nur von der linearen Abbildung ϕ, nicht von der Basis α ab, da $\det(S^{-1}AS - \xi E) = \det(S^{-1}(A - \xi E)S) = \det(A - \xi E)$ - diese Rechnung macht man im Polynomring $K[\xi]$ oder einem ihn umfassenden Körper, z.B. dem Körper der rationalen Funktionen $\frac{p(x)}{q(x)}$, $p(x), q(x) \in K[x]$. Dann sind äquivalent

- λ ist Eigenwert von ϕ bzw. A
- es gibt $\vec{v} \neq \vec{0}$ mit $\phi(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ d.h. $(\phi - \lambda\mathrm{id})(\vec{v}) = \vec{0}$
- es gibt $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ mit $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ d.h. $(A - \lambda E)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$
- $A - \lambda E$ bzw. $\phi - \lambda\mathsf{id}$ ist singulär, d.h. nicht invertierbar
- $\det(A - \lambda E) = \det(\phi - \lambda\mathsf{id}) = 0$

Korollar 16.6 *Sei ϕ bezüglich einer Basis α durch die Matrix A gegeben. Dann sind die EW von ϕ bzw. A gerade die zu K gehörigen Nullstellen λ des charakteristischen Polynoms.*

Die Vielfachheit des EW λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist seine *algebraische Vielfachheit*. Mit Kor. 16.4 folgt sofort

$$\boxed{\text{geometrische Vielfachheit } \leq \text{ algebraische Vielfachheit}}$$

Beispiel. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ Charakteristisches Polynom $-\xi^3 + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}$
Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}$

Eigenräume $\quad E_{-1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{\frac{1}{2}} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

16.6 Determinante einer Abbildung

Sei V ein K-Vektorraum und ϕ ein Endomorphismus. Da $\det(S^{-1}AS) = \det A$ nach dem Produktsatz, kann man die *Determinante* von ϕ definieren als

$$\det \phi = \det A \quad \text{wobei } A = \phi_\alpha \text{ für beliebige Basis } \alpha$$

Für einen euklidischen Vektorraum und ON-Basis α kann man $\det A$ als das Volumen des Bildes des Einheits(hyper)würfels auffassen, also $\det \phi$ als den Faktor, mit dem sich Volumina bei Abbildung unter ϕ ändern.

16.7 Schwingung *

Für die gekoppelte Schwingung zweier Massen m_1 und m_2 an zwei Federn mit Konstanten c_1, c_2 hat man für die Auslenkungen $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t)$ die Differentialgleichungen

$$m_1 y_1'' = -c_1 y_1 + c_2(y_2 - y_1), \quad m_2 y_2'' = -c_2(y_2 - y_1).$$

Schreiben wir nun bzgl. einer ON-Basis α

$$\vec{y}(t) = \vec{y} \text{ mit } \vec{y}^\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

so kommen wir zur

$$\vec{y}'' = \phi\vec{y} \quad \text{mit } A = \phi_\alpha = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 & c_2 \\ c_2 & -c_2 \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz

$$y_i = v_i \cos \omega t, \quad \text{also } \vec{y} = \cos \omega t\ \vec{v} \quad \text{mit } \vec{v}^\alpha = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

führt zu

$$\vec{y}'' = -\omega^2 \cos \omega t\ \vec{v}, \quad \phi(\vec{v}) = -\omega^2 \vec{b}.$$

Wir haben also Eigenwerte $\lambda = -\omega^2$ und zugehörige Eigenvektoren von ϕ bzw. $A = \phi_\alpha$ zu bestimmen. Das charakteristische Polynom ist

$$\det(\begin{pmatrix} -c_1 - c_2 - \lambda & c_2 \\ c_2 & -c_2 - \lambda \end{pmatrix}) = \lambda^2 + (c_1 + 2c_2)\lambda + c_1 c_2, \quad \lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(c_1 + 2c_2 \pm \sqrt{c_1^2 + 4c_2^2}).$$

Man erhält also zwei verschiedene reelle Eigenwerte, falls nur $c_1 \neq 0$ oder $c_2 \neq 0$. Folglich gibt es eine Basis $\beta : \vec{b}_1, \vec{b}_2$ von Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 und wir erhalten zwei 'unabhängige' Lösungen

$$\begin{array}{ll} y_{11} = b_{11}\cos\omega t & y_{12} = b_{12}\cos\omega t \\ y_{21} = b_{21}\cos\omega t & y_{22} = b_{22}\cos\omega t \end{array} \quad \text{mit } \vec{b}_j^{\alpha} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \end{pmatrix}$$

und daraus alle Lösungen durch Linearkombination

$$\begin{array}{rcccc} y_1 & = & r_1 b_{11}\cos\omega t & + & r_2 b_{12}\cos\omega t \\ y_2 & = & r_1 b_{21}\cos\omega t & + & r_2 b_{22}\cos\omega t \end{array}$$

Für $m_1 = m_2 = 1$, $c_1 = 3, c_2 = 2$ hat man z.B.

$$\vec{b}_1^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b}_2^{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{rcccc} y_1 & = & 1r_1\cos t & + & 2_2\cos\sqrt{6}t \\ y_2 & = & 2r_1\cos t & - & 2r_2\cos\sqrt{6}t \end{array}$$

17 Spektraltheorie

In diesem Abschnitt sei V ein n-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum mit dem Skalarprodukt $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$ (wer will, denke sich $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt). Wir betrachten nun zusätzlich eine Form Φ bzw. Endomorphismus ϕ auf V und suchen nach für die Beschreibung von Φ bzw. ϕ günstigen ON-Basen β. Anders ausgedrückt: wir suchen zu einer $n \times n$-Matrix A ($= \Phi_\alpha$ bzw. $= \phi_\alpha$ bzgl. einer vorgegebenen ON-Basis α, z.B. der kanonischen) Transformationen (auf eine schöne Gestalt) $S^*AS = \Phi_\beta$ bzw. $S^{-1}AS = \phi_\beta$ mit unitärem S.

Von der Hauptachsentransformation (die wir nocheinmal mit beweisen) wissen wir, dass die Symmetrieeigenschaft einer Form der Grund für die Existenz einer solchen Transformation ist. Wir werden dies verallgemeinern und auf Endomorphismen übertragen.

17.1 Assoziation von Formen zu Endomorphismen

Sei ϕ ein Endomorphismus ϕ von V und Φ eine (sesquilineare) Form auf V. Dann sind äquivalent

- ϕ und Φ sind zueinander *assoziiert* (bzgl. des Skalarprodukts $\langle \mid \rangle$
- $\forall \vec{x}. \forall \vec{y}.\ \Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x} \mid \phi(\vec{y}) \rangle$
- Bzgl. einer/jeder ON-Basis α von V ist die Matrix von ϕ die Gram-Matrix von Φ, also: $\phi_\alpha = \Phi_\alpha$.

Beweis. $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}^\alpha)^* A \vec{y}^\alpha = \langle \vec{x} \mid \phi(\vec{y}) \rangle$

Satz 17.1 *Die Assoziation $\phi \leftrightarrow \Phi$ ergibt eine bijektive Entsprechung zwischen Endomorphismen und Formen. Für normierte $\vec{v}$*

$$\boxed{\vec{v} \text{ ist EV von } \phi \text{ zum EW } \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \text{ ist rechter EV von } \Phi \text{ zum EW } \lambda}$$

Dabei ist $\vec{v}$ mit $|\vec{v}| = 1$ ein *rechter Eigenvektor* von Φ zum rechten EW $\Phi(\vec{v}, \vec{v})$, wenn

$$\forall \vec{x} \in V.\ \vec{x} \perp \vec{v} \Rightarrow \Phi(\vec{x}, \vec{v}) = 0$$

Beweis. Für die bijektive Entsprechung benutze ON-Basis. Für die EV eine ON-Basis $\alpha : \vec{v}_1 = \vec{v}, \ldots, \vec{v}_n$. Dann geht es beidesmal darum dass die erste Spalte von $\phi_\alpha = \Phi_\alpha$ den ersten Eintrag λ, sonst 0 hat.

17.2 Komplexifizierung

Für den Spektralsatz wollen wir, aus Bequemlichkeit, den Fundamentalsatz für $\mathbb{C}$ benutzen. Der besagt, dass jedes Polynom $\sum_i a_i x^i$ mit Koeffizienten $a_i \in C$ mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat. Es folgt sogar, dass jedes solche Polynom sich als Produkt $\alpha \prod_i (x - \alpha_i)$ von Linearfaktoren mit α, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ schreiben lässt.

Wir können problemlos von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ übergehen, indem wir $\mathbb{R}^n$ als $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}^n$ auffassen und das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ als Einschränkung dessen von $\mathbb{C}$. Ebenso können wir eine reelle $n \times n$-Matrix als komplexe Matrix auffassen und die durch sie definierte Form bzw. Abbildung auf $\mathbb{R}^n$ als Einschränkung der auf $\mathbb{C}^n$ definierten Form bzw. Abbildung Koordinatenfrei sagt sich das so:

Bemerkung 17.2 *Zu jedem euklidischen Raum V mit ON-Basis α und Form Φ bzw. Endomorphismus ϕ gibt es einen unitären Raum $\hat{V}$ mit ON-Basis α und eine Form $\hat{\Phi}$ bzw. Endomorphismus $\hat{\phi}$ so, dass V $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\hat{V}$, $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} \hat{V}$, das Skalarprodukt auf V Einschränkung dessen auf $\hat{V}$ und Φ Einschränkung von $\hat{\Phi}$ bzw. ϕ Einschränkung von $\hat{\phi}$.*

17.3 Schur'sches Lemma

Lemma 17.3 *In einem endlichdimensionalen unitären Raum besitzt jede sesquilineare Form bzw. Endomorphismus einen Eigenvektor.*

Beweis. Sei $A = \Phi_\alpha = \phi_\alpha$ bzgl. ON-Basis. Nach dem Fundamentalsatz gibt es $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\det(A - \lambda E) = 0$ und dazu dann einen EV, dessen Koordinaten bzgl. α nichttriviale Lösung des homogenen Gleichungssystems sind. □

Satz 17.4 *Zu jeder Sesquilinearform Φ bzw. Endomorphismus ϕ auf einem endlichdimensionalen unitären Raum gibt es eine ON-Basis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ so, dass*

$$\forall i > j.\ \Phi(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0 \quad \textit{bzw.} \quad \phi(\vec{v}_i) \in \mathbb{C}\vec{v}_1 + \ldots + \mathbb{C}\vec{v}_i$$

Jede komplexe $n \times n-$Matrix kann durch eine unitäre Matrix S auf obere Dreiecksgestalt $A' = S^* A S$ transformiert werden mit den EW auf der Diagonalen. Ist A reell mit nur reellen EW, so kann S reell gewählt werden.

Beweis durch Induktion über n: Wähle $\vec{v}_1$ nach dem Lemma und $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ als ON-Basis des Orthogonalraums $\vec{v}_1^\perp$ von $\vec{v}_1$ und im Hinblick auf die Einschränkung $\Phi|\vec{v}_1^\perp$.

Algorithmus (für Übungsaufgaben)

- ▶ Gegeben Form Φ durch Gram-Matrix $A = \Phi_\alpha$ bzgl. ON-Basis α
- ▶ Bestimme das charakteristische Polynom $\mathsf{Det}(A - \xi E)$ und seine Nullstellen d.h. EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $\mathbb{C}$ (in ihrer Vielfachheit).
- ▶ Berechne nun eine Folge $A_0 = A \mid U_0 = E, \dots, A_n \mid U_n$ von Matrixpaaren wobei U_k unitär und

$$A_k = \begin{pmatrix} D_k & + \\ O & B_k \end{pmatrix} \quad \text{mit } D_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & + & \dots & + \\ 0 & \lambda_2 & & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

- ▶ Iterationschritt: Bestimme EV $\boldsymbol{v}_{k+1} \in \mathbb{C}^{n-k}$ von B_k zum EW λ_{k+1} aus dem Gleichungsystem $(B_k - \lambda_{k+1}E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
- ▶ Ergänze $\boldsymbol{v}_{k+1}$ zu ON-Basis $\boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n$ von $\mathbb{C}^{n-k}$
- ▶ Sei T die Matrix mit Spalten $\boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n$. Setze

$$U_{k+1} = U_k \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ O & T \end{pmatrix}, \quad A_{k+1} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ O & T^* \end{pmatrix} A_k \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ O & T \end{pmatrix}$$

- ▶ $A_n = U_n^* A U_n$ ist obere Dreiecksmatrix, U_n unitär.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 4i \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\det(A - \xi E) = (1-\xi)(3-\xi)(2i-\xi) - 12 - 4(1-\xi) - 3(4i-\xi) \\ &= (4i-\xi)(\xi^2 - 4\xi) + 4(\xi - 4) = \\ &= (\xi - 4)[\xi(4i - \xi) + 4] = -(\xi-4)(\xi-2i)^2 \end{aligned}$$

$$\text{EW } 4: \quad (A - 4E) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -4+4i \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \text{EV } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

normieren und ergänzen zu ON-Basis $S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad A_1 = S_1^* A S_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & + \\ O & B \end{pmatrix}$

$$\det(B - \xi E) = -\xi((4i - \xi) - 4 = \xi^2 - 4i\xi - 4 = (\xi - 2i)^2, \quad \text{EW } 2i$$

$(B - 2iE)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \text{EV } \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ normieren und ergänzen zu ON-Basis $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

$$T^*BT = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 4 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & T \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad S = S_1 S_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & -i \\ \sqrt{2} & 1 & i \\ 0 & i\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$S^*AS = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} + \sqrt{2}i & \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ 0 & 2i & 4 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

17.4 Adjungierte Formen und Endomorphismen

Zu einer Form Φ haben wir die *adjungierte Form* Φ^*

$$\Phi^*(\vec{x},\vec{y}) = (\Phi(\vec{y},\vec{x}))^*$$

Beweis. $\Phi^*(r\vec{x},\vec{y}) = (\Phi(\vec{y},r\vec{x}))^* = (r\Phi(\vec{y},\vec{x}))^* = r^*(\Phi(\vec{x},\vec{y}))^* = r^*\Phi^*(\vec{x},\vec{y})$ und $\Phi^*(\vec{x},r\vec{y}) = (\Phi(r\vec{y},\vec{x}))^* = (r^*\Phi(\vec{y},\vec{x}))^* = r^{**}(\Phi(\vec{x},\vec{y}))^* = r\Phi^*(\vec{x},\vec{y})$. □ Zur adjungierten Form gehört die adjungierte Gram-Matrix (da $(\boldsymbol{y}^*A\boldsymbol{x})^* = \boldsymbol{x}^*A^*\boldsymbol{y}$)

$$\boxed{(\Phi^*)_\alpha = (\Phi_\alpha)^*}$$

$\vec{v}$ mit $|\vec{v}| = 1$ ist ein *linker Eigenvektor* von Φ zum linken EW $\Phi(\vec{v},\vec{v})$, wenn

$$\forall \vec{x} \in V.\ \vec{x} \perp \vec{v} \Rightarrow \Phi(\vec{v},\vec{x}) = 0$$

$$\boxed{\vec{v} \text{ ist rechter EV von } \Phi^* \text{ zu } \overline{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \text{ ist linker EV von } \Phi \text{ zu} \lambda.}$$

Das bedeutet: In der ON-Basis $\alpha : \vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ ist der Vektor $\vec{v}_i$ linker EV zum linken EW λ für Φ, genau dann, wenn in der Gram-Matrix Φ_α die i-te Zeile gerade $(0,\ldots,\lambda,\ldots,0)$ ist mit λ in Position i.

Für zwei Endomorphismen ϕ und ψ von V sind äquivalent

- ψ ist zu ϕ *adjungiert*, man schreibt $\psi = \phi^*$
- Die assoziierten Formen Φ und Ψ sind zueinander adjungiert, d.h. $\Psi = \Phi^*$
- $\forall \vec{x}.\forall \vec{y},\ \langle \vec{x} \,|\, \phi(\vec{y})\rangle = \langle \psi(\vec{x}) \,|\, \vec{y}\rangle$
- Bzgl. einer/jeder ON-Basis α ist $\psi_\alpha = (\phi_\alpha)^*$

Beweis. $\langle \vec{x} \,|\, \phi(\vec{y})\rangle \vec{x}^\alpha A \vec{y}^\alpha = (A^*\vec{x}^\alpha)^*\vec{y}^\alpha = \langle \psi(\vec{x}) \,|\, \vec{y}\rangle$.

17.5 Spektralsatz

Theorem 17.5 *Für eine Sesquilinearform Φ und assoziierten Endomorphismus ϕ auf einem endlichdimensionalen unitären Raum V sind die folgenden Aussagen äquivalent*

(1) V besitzt ON-Basis aus rechten/linken EV von Φ bzw. ϕ

(2) Es gibt ON-Basis β von V so, dass $\Phi_\beta = \phi_\beta$ diagonal

(3) Jeder rechte/linke EV von Φ bzw. ϕ zum EW λ ist rechter/linker EV von Φ^* bzw. ϕ^* zum EW $\overline{\lambda}$ und umgekehrt

(4) Jeder rechte EV von Φ ist auch ein linker EV

(5) Bzgl. einer ON-Basis α von V ist $AA^* = A^*A$ für $A = \Phi_\alpha = \phi_\alpha$

(6) $\phi \circ \phi^* = \phi^* \circ \phi$

(7) Bzgl. jeder ON-Basis α *von* V *ist* $AA^* = A^*A$ *für* $A = \Phi_\alpha = \phi_\alpha$

Sesquilinearformen, Endomorphismen bzw. Matrizen wie im Theorem heissen *normal.*

Beweis. Klar sind (für rechte EV) $1 \Leftrightarrow 2$, $3 \Rightarrow 4$ (nach 16.2), $2 \Rightarrow 5$ (je zwei Diagonalmatrizen kommutieren) und $5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 5$. Hinsichtlich der linken EV betrachte man einfach die Adjungierten.
$4 \Rightarrow 1$:. Wähle EV $\vec{v}_1$ von Φ. Der ist auch link. Für die Einschränkung $\Phi|\vec{v}_1^\perp$ von Φ auf den Orthogonalraum von $\vec{v}_1$ gilt (4) und wir können nach Induktionsannahme eine ON-Basis $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ von EV wählen. Da $\vec{v}_1$ link ist, haben wir auch $\Phi(\vec{v}_1, \vec{v}_i) = 0$ für $i \geq 2$, also ist $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ ON-Basis von V aus EV von Φ.
$7 \Rightarrow 4$. Sei ein EV $\vec{v}_1$ gegeben. Ergänze zu ON-Basis α. Sei $A = \Phi_\alpha = \phi_\alpha$. Dann

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & + & \ldots & + \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & + & \ldots & \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \overline{a}_{12} & + & \ldots & + \\ \vdots & & & \vdots \\ \overline{a}_{1n} & + & \ldots & \end{pmatrix}$$

Also ist der erste Eintrag von $AA^* = A^*A$

$$a_{11}\overline{a}_{11} + a_{12}\overline{a}_{12} + \ldots + a_{1n}\overline{a}_{1n} = \overline{a}_{11}a_{11}$$

$$\text{Es folgt} \quad |a_{12}|^2 + \ldots + |a_{1n}|^2 = 0 \quad \text{und} \quad a_{12} = \ldots = a_{1n} = 0$$

Somit ist $\vec{v}_1$ ein linker EV.

Korollar 17.6 • *A normal* $\Leftrightarrow$ $\exists S$ *unitär .* S^*AS *diagonal*

- *Eine Dreicksmatrix ist genau dann normal, wenn sie diagonal ist (Übung!)*
- *Für normale Formen brauchen wir rechts und links nicht zu unterscheiden*
- *Ist* Φ *normale Form bzw.* ϕ *Endomorphismus auf* V*, so ist* V *orthogonale Summe der Eigenräume. Insbesondere stehen diese aufeinander senkrecht.*
- *Eine ON-Basis besteht aus EV genau dann, wenn die Gram-Matrix diagonal ist. Dann stehen die EW entsprechend der Vielfachheit (hier: geometrisch = algebraisch) auf der Diagonalen*

Algorithmus (für Übungsaufgaben)

▶ Gegeben Form Φ oder Endomorphismus ϕ durch Matrix $A = \Phi_\alpha = \phi_\alpha$ bzgl. ON-Basis α

▶ Überprüfe obs normal ist, d.h. $AA^* = A^*A$

- Bestimme das charakteristische Polynom $\mathsf{Det}(A-\xi E)$ und seine verschiedenen Nullstellen d.h. EW $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ in $\mathbb{C}$
- Bestimme zu jedem λ_i eine ON-Basis $\vec{v}_{i1},\ldots,\vec{v}_{ik_i}$ des Eigenraums aus dem Gleichungsystem $(A-\lambda_i E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$
- Diese ON-Basen ergeben zusammengenommen eine ON-Basis $\vec{v}_{11},\ldots,\vec{v}_{mk_m}$ von V aus EV
- Die Koordinatenspalten dieser Vektoren bzgl α ergeben die Spalten der Transformationsmatrix S
- Die Diagonalmatrix S^*AS hat die Diagonaleinträge $\underbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{k_1},\ldots,\underbrace{\lambda_m,\ldots,\lambda_m}_{k_m}$

17.6 Orthogonalprojektion

Satz 17.7 *Für einen Endomorphismus π eines euklidischen bzw. unitären Raumes sind äquivalent*

- *π ist normal mit komplexen EW in $\{0,1\}$*
- *π ist Orthogonalprojektion auf einen Untervektorraum U*
- *Bzgl. einer/jeder ON-Basis hat π eine Matrix QQ^* wobei Q Matrix mit orthonormalen Spalten.*
- *π ist selbstadjungiert und idempotent: $\pi^*=\pi=\pi^2$*

Beweis. $1\Rightarrow 2$: $U=E_1$ und $U^\perp=E_0$. $2\Rightarrow 3$: Wähle ON-Basis $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k$ von U und Q mit den Koordinatenspalten der $\vec{v}_i$. Dann gilt für die Matrix P von π

$$p_{ij}=\langle\vec{e}_i\,|\,\pi(\vec{e}_j)\rangle=\langle\vec{e}_i\,|\,\sum_{h=1}^{k}\langle\vec{v}_h\,|\,\vec{e}_j\rangle\vec{v}_h\rangle=\sum_{h=1}^{k}\langle\vec{e}_i\,|\,\vec{v}_h\rangle\cdot\langle\vec{e}_j\,|\,\vec{v}_h\rangle^*=\sum_{h=1}^{k}q_{ih}\cdot\overline{q}_{jh}$$

$3\Rightarrow 4$: Wegen der Orthonormalität der Spalten von Q ist $Q^*Q=E_k$ also $QQ^*QQ^*=QE_kQ^*=QQ^*$. $4\Rightarrow 1$: Aus $\pi=\pi^2$ folgt für die EW $0=\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)$ und somit $\lambda\in\{0,1\}$. □.

Korollar 17.8 *Genau dann sind die P_i Matrizen der Orthogonalprojektionen auf U_i und $V=U_1\oplus^\perp\ldots\oplus^\perp U_k$ mit $U_i\perp U_j$ für $i\neq j$, wenn gilt*

$$P_i^2=P_i=P_i^*,\ P_iP_j=0 \text{ für } i\neq j,\ P_1+\ldots+P_k=E$$

Beweis. Ist P die Matrix der Orthogonalprojektion auf U, so ist $E-P$ die Matrix der Orthogonalprojektion auf $U^\perp$ und $P(E-P)=0$. Nun mit Induktion. □

17.7 Orthogonale Zerlegung

Korollar 17.9 *Ein normaler Endomorphismus ϕ eines unitären Raums ist durch seine Eigenräume eindeutig bestimmt: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen EW, so*

$$\phi = \lambda_1 \pi_1 + \ldots \lambda_k \pi_k \quad \pi_i \textit{ Orthogonalprojektion auf } E_{\lambda_i}$$

Zum Beweis überprüfe man die Gleichung auf einer ON-Basis von EV.

Korollar 17.10 *Eine komplexe quadratische Matrix A ist genau dann normal mit EW λ_i und Matrizen P_i der Orthogonalprojektionen auf die Eigenräume E_{λ_i} wenn*

$$A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k \quad \textit{mit } P_i^2 = P_i = P_i^*,\ P_i P_j = 0 \textit{ für } i \neq j,\ P_1 + \ldots + P_k = E$$

17.8 Hermitesche Formen

Φ heisst *hermitesch*, falls $\Phi^* = \Phi$ (und dann $\Phi(\vec{x}, \vec{x}) \in \mathbb{R}$. ϕ heisst *selbstadjungierter* Endomorphismus oder *hermitescher* Operator, falls $\phi = \phi^*$, d.h. falls die assoziierte Form hermitesch ist.

Korollar 17.11
- *Eine Form ist hermitesch genau dann, wenn die EW reell sind und eine (nicht notwendig reelle) ON-Basis von EV existiert.*
- *Eine komplexe Matrix ist hermitesch genau dann, wenn sie sich unitär auf reelle Diagonalgestalt transformieren lässt.*
- *Eine hermitesche Form/Matrix ist positiv bzw. negativ definit ($\Phi(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ für $\vec{x} \neq \vec{0}$) genau dann, wenn die EW alle > 0 bzw. < 0 sind*
- *Eine hermitesche Form/Matrix ist positiv bzw. negativ semidefinit ($\Phi(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ für alle $\vec{x}$) genau dann, wenn die EW alle ≥ 0 bzw. ≤ 0 sind*

Eine ON-Basis β von EV von Φ heisst auch ein *Hauptachsensystem* von Φ. Die zugehörige quadratische Form Q lässt sich dann mithilfe der EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in *Hauptachsenform* angeben

$$Q(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1 |y_1|^2 + \ldots + \lambda_n |y_n|^2 \text{ mit } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^\beta$$

Korollar 17.12 *Für eine hermitesche Form Φ werden Maximum und Minimum von $\Phi(\vec{x}, \vec{x})$ unter der Nebenbedingung $|\vec{x}| = 1$ angenommen - und das nur bei EV.*

Beweis. Sind $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k$ die maximalen EW, so hat man in der Hauptachsenform offenbar ein Maximum, wenn $y_j = 0$ für $j > k$, d.h. wenn man nix an kleinere EW verschenkt.

Korollar 17.13
- *Eine Form auf einem euklidischen Raum ist symmetrisch genau dann, wenn die EW reell sind und eine ON-Basis von EV existiert.*
- *Eine reelle Matrix ist genau dann symmetrisch, wenn sie sich orthogonal auf eine reelle Diagonalmatrix transformieren lässt.*

17.9 Definitheitskriterium

Satz 17.14 *Für eine hermitesche Matrix A sind gleichwertig:*

- *A ist positiv definit.*
- *Es gibt eine invertierbare komplexe Matrix S mit $A = S^*S$.*
- *Die Hauptminoren $A_{\leq k} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ von A haben reelle* $\det A_{\leq k} > 0$.

Beweis. $2 \Rightarrow 1$: $\boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{x} = (S\boldsymbol{x})^*(S\boldsymbol{x}) > 0$, falls $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ und damit auch $S\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. $1 \Rightarrow 3$: Ist A positiv definit, so auch alle alle Hauptminoren $A_{\leq k}$: für die durch $A_{\leq k}$ definierte quadratische Form $Q_{\leq k}$ gilt: $Q_{\leq k}(x_1, \ldots, x_k) = Q(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) > 0$ falls ein $x_i \neq 0$. Insbesondere ist die Determinante als Produkt der EW reell und positiv.
$3 \Rightarrow 2$: Insbesondere $a_{11} \in \mathbb{R}$, da A hermitesch, und $a_{11} > 0$. Sei T die Matrix, die bewirkt, dass passende Vielfache der ersten Spalte von den anderen Spalten so abgezogen werden, dass in der ersten Zeile ausser a_{11} nur noch Nullen stehen. Dabei ändern sich die Determinanten der Hauptminoren nicht. Wendet man T^* von links zur Bewirkung von Zeilenoperationen an, so erhält man wieder eine hermitesche Matrix

$$T^*AT = B = \begin{pmatrix} a_{11} & O \\ O & C \end{pmatrix}, \quad \det A_{\leq k} = \det B_{\leq k} = a_{11} \det C_{\leq k-1}$$

Also haben die Hauptminoren von C reelle Determinanten > 0 und wir erhalten nach Induktionsannahme eine Matrix U mit $C = U^*U$. Dann

$$A = S^*S \text{ mit } \quad S = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}} & O \\ O & U \end{pmatrix} T^*$$

17.10 Quadratwurzel

Satz 17.15 *Zu jeder positiv semidefiniten Matrix A gibt es genau eine positiv semidefinite Matrix B mit $B^2 = A$.*

Beweis. Es gibt unitäres bzw. orthogonales S mit $S^*AS = D$ Diagonalmatrix, wobei die Diagonaleinträge die Eigenwerte λ_i sind, also reell und $\lambda_i \geq 0$. Sei $\sqrt{D}$ die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\sqrt{\lambda_i}$, somit $\sqrt{D}^2 = D$. Dann geht's mit

$$B = S\sqrt{D}S^*$$

Zur Eindeutigkeit. Ist $\vec{v}$ EV von B zum EW μ, so ist $\vec{v}$ EV von A zum EW μ^2. Also ist der Eigenraum $E_\mu(B)$ von B zu μ in dem Eigenraum $E_{\mu^2}(A)$ von A zu μ^2 enthalten. Wegen $\mu \geq 0$ führen verschiedene μ zu verschiedenen μ^2, also

$$\sum_\mu \dim E_\mu(B) = n = \sum_m u \dim E_{\mu^2}(A), \quad E_\mu(B) \subseteq E_{\mu^2}(A)$$

und somit $E_\mu(B) = E_{\mu^2}(A)$. Daher sind die Eigenräume von B und somit B eindeutig bestimmt. □

17.11 Polarzerlegung

Satz 17.16 *Zu jeder invertierbaren komplexen Matrix A gibt es eindeutig bestimmte positiv definite hermitesche Matrix H und unitäre Matrix S mit*

$$A = HS \quad \textit{nämlich } H = \sqrt{AA^*},\ S = H^{-1}A$$

Ist A reell, so auch H und S.

Beweis. Ist $A = HS$, so $H = AS^*$ und $H^2 = HH^* = AS^*SA^* = AA^*$. Wählt man umgekehrt $H = \sqrt{AA^*}$ und $S = H^{-1}A$ so folgt

$$SS^* = H^{-1}AA^*H^{-1*} = H^{-1}AA^*H^{-1} = H^{-1}H^2 * H^{-1} = E$$

Korollar 17.17 *Für kleines reelles $\Delta = (\delta_{ij})$, d.h. $\delta_{ij}\delta_{kl} \approx 0$ gilt*

$$E + \Delta \approx (E + \frac{1}{2}(\Delta + \Delta^t))S \quad S \textit{ orthogonal}$$

Beweis. $(E + \frac{1}{2}(\Delta + \Delta^t))^2 = E + \Delta + \Delta^t + \frac{1}{2}\Delta\Delta^t + \frac{1}{4}\Delta^2 + \frac{1}{4}\Delta^{t2} \approx E + \Delta + \Delta^t \approx E + \Delta + \Delta^t + \Delta\Delta^t = (E + \Delta)(E + \Delta)^t$. □ Hier beschreibt

$$A = E + \Delta = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & 1 + \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

eine Deformation ϕ des Materials eines Körpers. Die orthogonale Matrix S beschreibt den Anteil σ der Verrückung, der sich allein aus der Starrheit des Körpers ergibt. Eigentlich interessant ist daher die Matrix $H = E + \frac{1}{2}(\Delta + \Delta^t)$ des Dilatationstensors Ψ.

$$\langle \vec{x} \mid \phi\vec{y} \rangle = \Psi(\vec{x}, \sigma\vec{y}), \quad \boldsymbol{x}^t(A\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^t H(S\boldsymbol{y})$$

18 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

18.1 Isometrieen

Satz 18.1 *Sei V euklidisch oder unitär. Für eine Abbildung $\phi : V \to V$ sind äquivalent*

- *ϕ ist linear und $\langle \phi(\vec{x}) \mid \phi(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$*
- *ϕ ist linear und erhält Längen $\forall\vec{x}.\forall\vec{y}.\ |\phi(\vec{x})| = |\vec{x}|$*
- *ϕ erhält das Skalarprodukt: $\forall\vec{x}.\forall\vec{y}.\ \langle \phi(\vec{x}) \mid \phi(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$*
- *$\phi(\vec{0}) = \vec{0}$ und ϕ erhält Abstände $\forall\vec{x}.\forall\vec{y}.\ |\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{y})| = |\vec{x} - \vec{y}|$*

Eine solche Abbildung heisst *Isometrie* von V auf sich.

Beweis. $1 \Leftrightarrow 2 \Rightarrow 3$, da Skalarprodukt und Länge bzw. $|.|^2$ wechselseitig auseinander definiert werden können. Ebenso $3 \Leftrightarrow 4$ da die Länge der Abstand von $\vec{0}$ und $\vec{0}$ der einzige Vektor von Länge 0 ist.
$3 \Rightarrow 2$. $|r\phi(\vec{x}) - \phi(r\vec{x})|^2 = |r|^2|\phi(\vec{x})|^2 - r^*\langle\phi(\vec{x}) \mid \phi(r\vec{x})\rangle - r\langle\phi(r\vec{x}) \mid \phi(\vec{x})\rangle + |\phi(r\vec{x})|^2 = |r|^2|\vec{x}|^2 - r^*\langle\vec{x} \mid r\vec{x}\rangle - r\langle r\vec{x} \mid \vec{x}\rangle + |r\vec{x}|^2 = |r\vec{x} - r\vec{x}|^2 = 0$ also $r\phi(\vec{x}) = \phi(r\vec{x})$.
Wir haben stets $|\vec{x}+\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + 2\Re\langle\vec{x} \mid \vec{y}\rangle + |\vec{y}|^2$ wobei $\Re$ der Realteil bezeichnet. Also $|\phi(\vec{x}+\vec{y}) - [\phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y})]|^2 = |\phi(\vec{x}+\vec{y})|^2 - 2\Re\langle\phi(\vec{x}+\vec{y}) \mid \phi(\vec{x})\rangle - 2\Re\langle\phi(\vec{x}+\vec{y}) \mid \phi(\vec{y})\rangle + |\phi(\vec{x})|^2 + 2\Re\langle\phi(\vec{x}) \mid \phi(\vec{y})\rangle + |\phi(\vec{y})|^2 = |\vec{x}+\vec{y}|^2 - 2\Re\langle\vec{x}+\vec{y} \mid \vec{x}\rangle - 2\Re\langle\vec{x}+\vec{y} \mid \vec{y}\rangle + |\vec{x}|^2 + 2\Re\langle\vec{x} \mid \vec{y}\rangle + |\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + 2\Re\langle\vec{x} \mid \vec{y}\rangle + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}|^2 - 2\Re\vec{x}\langle\vec{x} \mid \vec{y}\rangle - 2\Re\langle\vec{x} \mid \vec{y}\rangle - 2|\vec{y}|^2 + |\vec{x}|^2 + 2\Re\langle\vec{x} \mid \vec{y}\rangle + |\vec{y}|^2 = 0$, also $\phi(\vec{x}+\vec{y}) = \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y})$. □

18.2 Orthogonale Abbildungen

Satz 18.2 *Sei V endlichdimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Für eine lineare Abbildung $\phi : V \to V$ sind äquivalent*

- *ϕ ist eine Isometrie von $V, \langle\,|\,\rangle$ auf sich*
- *Das Bild $\phi(\vec{e}_1), \ldots, \phi(\vec{e}_n)$ einer/jeder ON-Basis ist ON-Basis*
- *Bzgl. eines/jedes Paares α, β von ON Basen ist die Matrix ${}^{\beta}\phi_{\alpha}$ unitär*
- *$\phi^* = \phi^{-1}$*
- *ϕ hat (ggf. in der Komplexifizierung) ON-Basis von EV mit EW vom Betrag 1*

Man nennt solches ϕ *unitär*, auch *orthogonal* falls $K = \mathbb{R}$.

Korollar 18.3 *Unitäre Abbildungen bzw. Matrizen sind normal, haben Eigenwerte und Determinante vom Betrag* 1.

Beweis.$1 \Rightarrow 2$ ist trivial. $2 \Rightarrow 3$. Die Spalten der Matrix ${}^{\alpha}\phi_{\alpha}$ von ϕ bzgl. der ON-Basis α sind die Koordinaten der Bilder $\phi(\vec{e}_j)$ also orthonormal, da die $\phi(\vec{e}_j)$ eine ON-Basis bilden. Also ist ${}^{\alpha}\phi_{\alpha}$ unitär und damit auch ${}^{\beta}\phi_{\alpha} = {}^{\beta}T_{\alpha}\,{}^{\alpha}\phi_{\alpha}$.
$3 \Rightarrow 1$. Sei $A = {}^{\alpha}\phi_{\alpha}$ unitär. Dann

$$\langle\phi(\vec{x}) \mid \phi(\vec{y})\rangle = (A\vec{x}^{\alpha})^* A\vec{y}^{\alpha} = (\vec{x}^{\alpha})^* A^* A\vec{y}^{\alpha} = (\vec{x}^{\alpha})^* E\vec{y}^{\alpha} = \langle\vec{x} \mid \vec{y}\rangle$$

$3 \Rightarrow 4$ da $U^* = U^{-1}$ für unitäre Matrizen. $4 \Rightarrow 5$: ϕ ist normal, da $\phi^* \circ \phi = id = \phi \circ \phi^*$. Also kann man Spektralsatz benutzen. Ist v EV von ϕ so auch von ϕ^* (zum EW $\overline{\lambda}$) und

$$|\lambda|^2\vec{v} = \overline{\lambda}\lambda\vec{v} = \phi^*(\lambda\vec{v}) = \phi^*(\phi(\vec{v})) = \vec{v}. \quad \text{also } |\lambda| = 1$$

$5 \Rightarrow 3$: die Matrix ist unitäre Diagonalmatrix.

Die Normalität folgt aus $\phi^{-1} \circ \phi = id = \phi \circ \phi^{-1}$. Für eine unitäre Matrix A ist $\overline{\det A} = \overline{\det A^t} = \det A^* = \det A^{-1} = 1/\det A$ also $\det A\overline{\det A} = 1$. □

18.3 Spur

Die Spur einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ über einem beliebigen Körper K ist definiert als die Summe der Diagonaleinträge

$$\operatorname{Spur} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Es gilt: $$\operatorname{Spur}(A+B) = \operatorname{Spur} A + \operatorname{Spur} B, \quad \operatorname{Spur} rA = r \operatorname{Spur} A$$

$$\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA), \quad \operatorname{Spur}(S^{-1}AS) = \operatorname{Spur} A.$$

Beweis. $\operatorname{Spur}(AB) = \sum_i \sum_h a_{ih} b_{hi} = \sum_h \sum_i b_{hi} a_{ih} = \operatorname{Spur}(BA)$. $\operatorname{Spur}(S^{-1}AS) = \operatorname{Spur}(ASS^{-1}) = \operatorname{Spur} A$. Die letzte Formel erlaubt, für lineare Abbildungen ϕ von V in V zu definieren $\operatorname{Spur}\phi = \operatorname{Spur}\phi_\alpha$

18.4 Orthogonale Abbildungen im Raum

Satz 18.4 *Sei ϕ eine orthogonale Abbildung eines 3-dimensionalen euklidischen Raums und $A = \phi_\alpha$ bzgl. einer Basis α. Dann $\det A = \pm 1$ und es gibt es eine ON-Basis $\beta : \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$, $\vec{w}_1$ EV zum EW $\det A$, mit*

$$\phi_\beta = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

Jenachdem ob $\det A = 1$ oder -1 handelt es sich um Drehung bzw. Drehspiegelung mit Winkel ω und Achse $\vec{w}_1$. Ist α-ON-Basis, so ist A orthogonal, der Cosinus des Drehwinkels ist

$$\cos\omega = \frac{1}{2}(\mathsf{Spur}\, A - \det A)$$

und die Drehachse ergibt einen EV von $A - A^t$, Der Drehwinkel ist 0^o oder 180^o genau dann, wenn $A = A^t$. Andernfalls gilt

$$\vec{w}_1^\alpha = r \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ -a_{31} + a_{13} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix}$$

Bei einer Drehspiegelung im Raum wird erst um die Achse gedreht (ggf. um 0^o) und dann an der Ursprungsebene senkrecht zur Achse gespiegelt.

Korollar 18.5 *Die Inversen von Drehungen sind Drehungen, von Drehspiegelungen sind Drehspiegelungen. Die Hintereinanderausführung zweier Drehungen bzw. zweier Drehspiegelungen ist eine Drehung an eulerweiswelcher Achse.*

Beweis. Euler zu Ehren geben wir auch einen direkten Beweis. Das charakteristische Polynom von A bzw. ϕ ist ein reelles Polynom $p(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$, also $p(\lambda) \to -\infty$ für $\lambda \to \infty$ und $p(\lambda) \to -\infty$ für $\lambda \to -\infty$. Nach dem Zwischenwertsatz hat man mindestens eine reelle Nullstelle, d.h. EW λ_1 und $\lambda_1 = \pm 1$. Sei $\lambda_1 = -1$

falls -1 EW ist. Sei $\vec{w}_1$ normierter EV zu λ_1 und ergänze zu ON-Basis $\beta : \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$. Da $\phi(\vec{w}_1) = \pm 1$, gilt für $i = 2, 3$, dass $\langle \phi\vec{w}_i \mid \vec{w}_1\rangle = \pm\langle \phi\vec{w}_i \mid \phi\vec{w}_1\rangle = \pm\langle \vec{w}_i \mid \vec{w}_1\rangle = 0$. Also hat ϕ bzgl. β die orthogonale Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $B = (b_{ij})$ orthogonale 2×2-Matrix, $\det A = \lambda_1 \det B$ und die EW von A sind λ_1 und die EW von B. Ist $\det B = 1$, so B Drehmatrix und $\lambda_1 = \det A$. Andernfalls hat B EW $1, -1$ mit zueinander orthogonalen EV. Also gibt es ON-Basis $\vec{w}_1, \vec{w}_2', \vec{w}_3'$ so, dass ϕ die folgende Matrix hat

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Durch Vertauschen ergibt sich die gewünschte Form mit $\omega = \pi$.

Für die Aussagen über den Winkel beachte, dass diese invariant sind unter Basistransformation S. Zunächst: $\frac{1}{2}(\text{Spur}A' - \det A') = \frac{1}{2}(\text{Spur}A - \det A)$. Mit A' in obiger Normalform liest man die Behauptung aber einfach ab.

$A = A^t$ bedeutet $\phi^2 = id$, also $\omega = k180^o$. Da ϕ und ϕ^{-1} dieselbe Achse $\vec{w}_1$ haben, ist diese EV von $\phi - \phi^{-1}$ zum EW 0, also $\vec{w}_1^\alpha$ EV von $A - A^t$ zum EW 0. Es gilt aber

$$A - A^t = \begin{pmatrix} 0 & -z & -y \\ z & 0 & -x \\ y & x & 0 \end{pmatrix} m \;\; A - A^t\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ -a_{31} + a_{13} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det A = -1, \ \text{Spur A} = \frac{1}{3}, \ \cos\omega = \frac{2}{3}$$

$$\begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ -a_{31} + a_{13} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

18.5 Eulersche Winkel

Satz 18.6 *Zu zwei gegebenen aufeinander senkrechten Achsenrichtungen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Raum lässt sich jede Drehung in der Form $\phi = \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$ schreiben, wobei ϕ_1, ϕ_3 Drehungen um $\vec{a}$ und ϕ_2 Drehung um $\vec{b}$.*

Beweis. Es genügt zu positiv orientierten ON-Basen $\vec{e}_i$ und $\vec{f}_i$ Drehungen ϕ_1, ϕ_3 um $\vec{e}_1$ und ϕ_2 um $\vec{e}_2$ so anzugeben, dass $\phi(\vec{f}_i) = \vec{e}_i$ für $\phi = \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$. Dazu wähle ϕ_1 so, dass $\phi_1(\vec{f})_1 \in \mathbb{R}\vec{e}_1 + \mathbb{R}\vec{e}_3$. und ϕ_2 so, dass $\phi_2(\phi_1(\vec{f}_1)) = \vec{e}_1$. Nun bilden

$\vec{e}_1$, $\phi_2(\phi_1(\vec{f}_2))$, $\phi_2(\phi_1(\vec{f}_3))$ eine positiv orientierte ON-Basis und diese kann durch ϕ_3 in $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ überführt werden. $\Box$ Hat man Drehungen ϕ_1, ϕ_3 um $\vec{e}_3$ mit Winkeln ψ und ω und ϕ_2 um $\vec{e}_1$ mit Winkel θ so erhält man bzgl. dieser Basis die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\omega\cos\psi - \sin\omega\sin\psi\cos\theta & -\sin\omega\cos\psi - \cos\omega\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ \cos\omega\sin\psi + \sin\omega\cos\psi\cos\theta & -\sin\omega\sin\psi + \cos\omega\cos\psi\cos\theta & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\omega\sin\theta & \cos\omega\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Hierbei ist ϕ_1 die Drehung um $\vec{e}_3$ mit Winkel ω, ϕ_2 die Drehung um $\vec{e}_1$ mit Winkel θ und ϕ_3 die Drehung um $\vec{e}_3$ mit Winkel ψ.

Dieselbe Drehung (mit derselben Matrix) kann man aber auch als Hintereinanderausführung $\chi_3 \circ \chi_2 \circ \chi_1$ von 3 Drehungen um zwei der (mitbewegten) Achsen a_1, a_3 eines Körpers sehen:

- a_3 liegt in Richtung $\vec{e}_3$ und χ_1 ist die Drehung um a_3 mit Winkel ψ
- a_1 liegt nun in Richtung von $\chi_1(\vec{e}_1)$ und χ_2 ist die Drehung um a_1 mit Winkel θ
- a_3 liegt nun in Richtung von $\chi_2\chi_1(\vec{e}_3)$ und χ_3 ist die Drehung um a_3 mit Winkel ω

Das folgt sofort aus folgendem

Lemma 18.7 *Sind bzgl. einer ON-Basis A und B die Matrizen der Drehungen ϕ bzw. χ um die Achse $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ mit Winkel ω bzw. θ, so ist AB die Matrix von $\rho \circ \phi$, wobei ρ die Drehung um $\phi(\vec{b})$ mit Winkel θ ist.*

Beweis. Die ON-Basis sei $\vec{e}_i$. Die Matrix von ρ bzgl. der Basis $\phi(\vec{e}_i)$ ist B, da $\phi(\vec{b})$ bzgl. dieser Basis dieselben Koordinaten hat wie $\vec{b}$ bzgl, $\vec{e}_i$. Die Matrix A ist auch die Matrix der Basistransformation von der neuen Basis $\phi(\vec{e}_i)$ zurück zur alten Basis $\vec{e}_i$. Somit hat ρ bzgl. der alten Basis die Matrix ABA^{-1} und $\rho \circ \phi$ die Matrix $ABA^{-1}A = AB$. $\Box$.

18.6 Normalform unitärer Matritzen

Ist A unitär, so sind die EW vom Betrag 1, d.h. von der Form $e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega$. Es gibt dann nach dem Spektralsatz eine unitäre Matrix S mit

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} e^{i\omega_1} & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{i\omega_n} \end{pmatrix}.$$

Für $n = 2$ hat eine Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

mit Winkel ω bzgl. einer ON=Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ die komplexen Eigenvektoren

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\vec{v}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \ = \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die unitäre Normalform

$$\begin{pmatrix} e^{i\omega} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega} \end{pmatrix}$$

In der Tat

$$\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\cos\omega & -\sin\omega \\ i\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} = e^{i\omega}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entsprechend hat man für $n = 3$ die unitäre Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\omega} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\omega} \end{pmatrix}$$

18.7 Reellifizierung

Die Normalform für unitäre Matrizen führt zu Normalformen für orthogonale und allgemeiner reelle normale Matrizen. Dazu müssen wir aber den Übergang vom Komplexen ins Reelle beherrschen, vgl. die Situation bei linearen Differentialgleichungen.

Wir betrachten nun den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen und $\mathbb{C}$-Vektorräume V, z.B. $\mathbb{C}^n$. V ist auf natürliche Weise auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum: wir betrachten halt nur die Skalare $r \in \mathbb{R}$.

Lemma 18.8 *Ist $v_1, \ldots, v_n$ Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums V, so ist $v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n$ Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums V.*

Wir betrachten $\mathbb{C}^n$. Für eine Matrix $A = (a_{ik})$ sei $\overline{A} = (\overline{a}_{ik})$ die konjugierte. Die Matrix über $\boldsymbol{C}$ ist *reell*, wenn alle ihre Komponenten reell sind, d.h. wenn $A = \overline{A}$. Diese Notation überträgt sich auch auf Vektoren.

Lemma 18.9 *Der von $\boldsymbol{v}$ und $\overline{\boldsymbol{v}}$ aufgespannte $\mathbb{C}$-Unterverktorraum U von $\mathbb{C}^n$ hat eine Basis aus reellen Vektoren: entweder $\boldsymbol{v}$ reell oder*

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\boldsymbol{v} - \overline{\boldsymbol{v}}) = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{v} - \overline{\boldsymbol{v}}) = \sqrt{2}\Im(\boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{v} + \overline{\boldsymbol{v}}) = \sqrt{2}\Re(\boldsymbol{v}).$$

Dies ist auch eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums der reellen Vektoren aus U, der ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist. Gilt $\boldsymbol{v} \perp \overline{\boldsymbol{v}}$, so auch $\boldsymbol{u}_1 \perp \boldsymbol{u}_2$ und $|\boldsymbol{u}_i| = |\boldsymbol{v}|$.

Dabei stehen $\Re(\boldsymbol{v})$ und $\Im(\boldsymbol{v})$ für Real- und Imaginärteil von $\boldsymbol{v}$, d.h. sie liegen in $\mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{v} = \Re(\boldsymbol{v}) + i\Im(\boldsymbol{v})$. Beweis:

$$\boldsymbol{v} = \frac{i}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_2 \text{ und } \overline{\boldsymbol{v}} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_2$$

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle = \frac{i}{2}(|\boldsymbol{v}|^2 - |\overline{\boldsymbol{v}}|^2 - \langle \overline{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \overline{\boldsymbol{v}} \rangle) = 0$$

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle = \frac{-i^2}{2}(|\boldsymbol{v}|^2 + |\overline{\boldsymbol{v}}|^2 - \langle \overline{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{v} \rangle - \langle \boldsymbol{v}, \overline{\boldsymbol{v}} \rangle) = |\boldsymbol{v}|^2.$$

18.8 Eigenwerte reeller Matrizen

Satz 18.10 *Ist $\boldsymbol{v}$ EV der reellen Matrix A zum EW λ, so ist der konjugierte Vektor $\overline{\boldsymbol{v}}$ EV von A zum konjugierten EW $\overline{\lambda}$. Die Wirkung von $\phi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ auf dem zu den beiden EV gehörenden Untervektorraum $U = (\mathbb{C}\,\boldsymbol{v} + \mathbb{C}\,\overline{\boldsymbol{v}}) \cap \mathbb{R}^n$ von $\mathbb{R}^n$ wird, wenn λ die Polardarstellung $\lambda = r(cos\omega + isin\omega)$ hat, bezüglich obiger Basis $\beta : \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ angegeben durch die Matrix*

$$(\phi|U)_\beta = \begin{pmatrix} rcos\omega & -rsin\omega \\ rsin\omega & rcos\omega \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$A\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{A}\,\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{A\boldsymbol{v}} = \overline{\lambda\boldsymbol{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{v}}$$

$$A\boldsymbol{u}_1 = A\frac{1}{i\sqrt{2}}(\boldsymbol{v} - \overline{\boldsymbol{v}}) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(A\boldsymbol{v} - A\overline{\boldsymbol{v}}) = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\lambda\boldsymbol{v} - \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}})$$

$$= \frac{1}{2i}[\lambda(i\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) - \overline{\lambda}(-i\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2)] = \frac{1}{2i}[(\lambda + \overline{\lambda})i\boldsymbol{u}_1 + (\lambda - \overline{\lambda})\boldsymbol{u}_2]$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda + \overline{\lambda})\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{2i}(\lambda - \overline{\lambda})\boldsymbol{u}_2 = \mathbb{R}(\lambda)\boldsymbol{u}_1 + \Im(\lambda)\boldsymbol{u}_2 = rcos\omega\boldsymbol{u}_1 + rsin\omega\boldsymbol{u}_2.$$

$$A\boldsymbol{u}_2 = A\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{v} + \overline{\boldsymbol{v}}) = \frac{1}{2}[\lambda(i\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) + \overline{\lambda}(-i\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2]$$

$$= \frac{i}{2}(\lambda - \overline{\lambda})\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{2}(\lambda + \overline{\lambda})\boldsymbol{u}_2 = -\Im(\lambda)\boldsymbol{u}_1 + \mathbb{R}(\lambda)\boldsymbol{u}_2.$$

18.9 Normalform normaler reeller Matrizen

Lemma 18.11 *Ist A reelle normale Matrix und $\boldsymbol{v}$ EV von A zu nicht reellem EW λ, so gilt $\boldsymbol{v} \perp \overline{\boldsymbol{v}}$.*

Beweis. $\overline{\boldsymbol{v}}$ ist EV zu EW $\overline{\lambda} \neq \lambda$ von A, also nach dem Spektralsatz $\boldsymbol{v} \perp \overline{\boldsymbol{v}}$.

Satz 18.12 *Eine reelle Matrix A ist normal genau dann, wenn eine orthogonale Matrix S gibt so, dass*

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} r_1 D_{\omega_1} & O & \dots & O \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ O & \dots & r_l D_{\omega_l} & O \\ O & \dots & O & D \end{pmatrix}$$

mit $r_k \in \mathbb{R}$, reeller Diagonalmatrix D und $D_{\omega_k} = \begin{pmatrix} \cos\omega_k & -\sin\omega_k \\ \sin\omega_k & \cos\omega_k \end{pmatrix}$.

Beweis. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die EW von A so angeordnet, dass $\lambda_{2i+1} = \overline{\lambda}_{2i} \neq \lambda_{2i}$ für $i = 1, \ldots, l$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i > 2l$. Sei $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ nach dem Spektralsatz zugehörige ON-Basis von EV. Dann bilden nach 18.10 und 18.11 die $\boldsymbol{v}_1, \overline{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l, \overline{\boldsymbol{v}}_l, \boldsymbol{v}_{l+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ eine ON-Basis von EV und nach 18.9 bilden $\sqrt{2}\Im\boldsymbol{v}_1, \sqrt{2}\Re\boldsymbol{v}_1, \ldots, \sqrt{2}\Im\boldsymbol{v}_l, \sqrt{2}\Re\boldsymbol{v}_l, \boldsymbol{v}_{l+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ eine ON-Basis. Die Wirkung von A auf $\sqrt{2}\Im\boldsymbol{v}_k, \sqrt{2}\Re\boldsymbol{v}_k$ wird durch eine Matrix $r_k D_{\omega_k}$ beschrieben, auf den $\boldsymbol{v}_k$ mit $k > l$ durch einen Streckfaktor. Umgekehrt sind die Matrizen der angegebenen Gestalt offenbar normal, also auch $A = SA'S^*$.

Korollar 18.13 *Für eine orthogonale Matrix hat man in obiger Normalform $r_k = 1$ und D mit ± 1 auf der Diagonalen*

Man hat also eine orthogonale Zerlegung von $\mathbb{R}^n$ in einen Unterraum, auf dem A trivial wirkt, einen weiteren, auf dem A als Spiegelung am Ursprung wirkt, und Ebenen, in denen A jeweils als Drehung um einen passenden Winkel wirkt.

19 Jordan-Normalform

19.1 Klassifikation ebener Abbildungen

Satz 19.1 *Sei ϕ eine lineare Abbildung der reellen Ebene mit charakteristischem Polynom*

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \quad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

Die λ_i sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt und es tritt genau einer der folgenden Fälle ein

(i)	*Zentrische Streckung* $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$	*für jede Basis β* $\phi_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$
(ii)	*Scherung* $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$	*es gibt Basis β mit* $\phi_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$
(iii)	*(verzerrte) Achsenstreckung* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2$	*es gibt Basis β mit* $\phi_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
(iv)	*(verzerrte) Drehstreckung* $\lambda_{1/2} = r(\cos\omega \pm i \sin\omega) \notin \mathbb{R}$	*es gibt Basis β mit* $\phi_\beta = r\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$

- *Im Fall (ii) ist der erste, in Fall (iii) sind beide Basisvektoren bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt.*
- *In Fall (i) und (ii) kann man β stets als ON-Basis wählen*
- *In Fall (iii) kann man β genau dann zur ON-Basis normieren, wenn ϕ selbstadjungiert ist, d.h. wenn bzgl. einer/jeder ON-Basis α gilt*
$$\phi_\alpha^t = \phi_\alpha$$
- *In Fall (iv) kann man β genau dann zu einer ON-Basis normieren, wenn ϕ* normal *ist, d.h. wenn bzgl. einer/jeder ON-Basis α gilt*
$$\phi_\alpha \phi_\alpha^t = \phi_\alpha^t \phi_\alpha$$
Ist ϕ normal, so hat man zu jeder ON-Basis dieselbe Matrix. Andernfalls ist die Basis β bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt.

Beweis. Zu Fall (i) und (iii) siehe 17.4. In Fall (iii) sind die $\vec{b}_i$ Eigenvektoren zu den λ_i mit eindeutig bestimmten Richtungen.

Zu Fall (ii), d.h. $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, aber $\phi \neq \lambda_1 I$. Wähle $\vec{a}_1$ als Eigenvektor und ergänze zu Basis $\alpha : \vec{a}_1, \vec{a}_2$. Dann haben wir die Matrix

$$\phi_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

und a_{22} ist Eigenwert, also $a_{22} = \lambda_1$. Folglich

$$(\phi - \lambda_1 \mathsf{id})_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } a_{12} \neq 0 \text{ und } (\phi - \lambda_1 \mathsf{id})_\alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ ) & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Also } (\phi - \lambda_1 \mathsf{id})^2 = O,\ \phi - \lambda_1 \mathsf{id} \neq O. \quad \text{Wähle } \vec{b}_2 \text{ mit } \vec{b}_1 := (\phi - \lambda_1 \mathsf{id})(\vec{b}_2) \neq 0$$
$$\text{Es folgt } (\phi - \lambda_1 \mathsf{id})(\vec{b}_1) = \vec{0}, \text{ d.h. } \phi(\vec{b}_1) = \lambda_1 \vec{b}_1 \text{ und } \phi(\vec{b}_2) = \vec{b}_1 + \lambda_1 \vec{b}_2$$

Dann ist $\vec{b}_1$ ein Eigenvektor, nicht jedoch $\vec{b}_2$. Also bilden sie eine Basis β mit ϕ_β wie gewünscht. Um eine ON-Basis zu erhalten wähle $\vec{b}_2 \perp \vec{a}_1$.

Fall (iv) vgl. Satz 18.8. Drehstreckungen sind offensichtlich normal und haben für jede ON-Basis dieselbe Matrix. Ist ϕ normal mit konjugierten EW, so nach Satz 18.8 in der Tat eine Drehstreckung und wird bzgl. einer ON-Basis durch eine entsprechende Matrix beschrieben. Die Eindeutigkeitsaussagen folgen mit

Lemma 19.2 *Sind A, B Drehstreckungsmatrizen (aber eine $\neq rE$) und $C^{-1}AC = B$ so ist C ebenfalls Drehstreckungsmatrix oder sE*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass C normal ist. Dabei kommt es auf eine unitäre Transformation nicht an. Mit einer solchen können wir jedoch A und B gleichzeitig auf Diagonalgestalt bringen (s. 18.6). Also dürfen wir annehmen, dass A und B diagonal sind mit Einträgen $\lambda, \overline{\lambda}$ bzw. $\mu, \overline{\mu}$ und $AC = CB$. Es folgt $\lambda b_{11} = \mu b_{11}$ also $\lambda = \mu \notin \mathbb{R}$ und $\lambda b_{12} = \overline{\lambda} b_{12}$, also $b_{12} = 0$. Ebenso $b_{21} = 0$. Also C normal. □

19.2 Differenzengleichungen und Matrixiteration

Ein *System linearer Differenzengleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten* ist eine durch eine lineare Abbildung ψ bzw. ϕ gegebene Bedingung an Vektorfolgen $\vec{u}_k$ mit $k \in \mathbb{N}$

$$\forall k.\ \vec{u}_{k+1} - \vec{u}_k = \psi(\vec{u}_k) \quad \text{bzw. } \forall k.\ \vec{u}_{k+1} = \phi(\vec{u}_k) \quad \text{mit } \phi = \psi + \mathsf{id}$$

Die Vektorfolge ist dann durch den Startvektor $\vec{u}_0$ (oder jeden anderen) eindeutig bestimmt. Man beachte die Analogie zu Systemen linearer Differentialgleichungen (kontinuierlicher Zeitparameter)

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}(t)}{\mathrm{d}t} = \psi(\vec{y}(t))$$

Korollar 19.3 *Sei $A = \phi_\alpha$ diagonalisierbar mit Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und Eigenwerten λ_1, λ_2. Gilt für den Startvektor $\vec{u}_0 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$ (und solche c_i gibt es dann), so ergibt sich die Lösung der Differenzengleichung als*

$$\forall k. \quad \vec{u}_k = c_1\lambda_1^k\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^k\vec{v}_2$$

Umgekehrt bestimmen je zwei c_1, c_2 eine Lösung der Differenzengleichung.

Die durch ϕ gegebene Differenzengleichung $\vec{u}_{k+1} = \phi(\vec{u}_k)$ heisst

stabil	falls	$\forall \vec{u}_0.\ \lim_{k\to\infty} \lvert\vec{u}_k\rvert = 0$
neutral stabil	falls	$\forall \vec{u}_0.\exists C.\forall k.\ \lvert\vec{u}_k\rvert \leq C$
unstabil	falls	$\exists \vec{u}_0.\forall C.\exists k.\ \lvert\vec{u}_k\rvert > C$

Lemma 19.4 *Ist ϕ diagonalisierbar mit Eigenwerten λ_1, λ_2 oder (verzerrte) Drehstreckung mit Streckfaktor r, so gilt für die zugehörige Differenzengleichung*

stabil	*falls*	$\lvert\lambda_1\rvert, \lvert\lambda_2\rvert < 1$	*bzw.* $\lvert r\rvert < 1$
neutral stabil	*falls*	$\lvert\lambda_1\rvert, \lvert\lambda_2\rvert \leq 1$	*bzw.* $\lvert r\rvert \leq 1$
unstabil	*falls*	$\lvert\lambda_1\rvert > 1 \vee \lvert\lambda_2\rvert > 1$	*bzw.* $\lvert r\rvert > 1$

Beispiele Gegeben sei eine ON-Basis α der Ebene und die Matrix ϕ_α einer linearen Abbildung und ein Startvektor.

$$\phi_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \ \text{bzw. } \phi_\alpha = \frac{r}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_0^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_i \in \{\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1,\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4}\}$ und $r \in \{\frac{3}{4},\ 1,\ \frac{5}{4}\}$. In Fig.1 haben wir für einige dieser Abbildungen die $\vec{u}_k, -10 \leq k \leq 10$ geplottet (hier ist ϕ invertierbar). Der Pfeil gibt die Richtung $k \mapsto k+1$ an. Beachten Sie die unterschiedlichen Skalen!
In Fig.2 hat man dieselben Matrizen, nur dass jetzt $\alpha : \vec{a}_1, \vec{a}_2$ nicht ON-Basis ist sondern bzgl. einer ON-Basis δ gilt

$$\vec{a}_1^\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2^\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

19.3 Systeme linearer Differentialgleichungen

Ein System von n linearen DGLn wird gegeben durch eine $n \times n$-Matrix A

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{y}(t)$$

Bei der Transformation

$$\boldsymbol{y}(t) = S\boldsymbol{z}(t), \quad fz(t) = S^{-1}fy(t)$$

geht es über in

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = S^{-1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = S^{-1}AS\boldsymbol{z}(t)$$

Ist $S-1AS$ eine Diagonalmatrix mit EV λ_i, so hat man die Lösungen (auch im Komplexen)

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Ist $S-1AS$ obere Dreiecksmatrix, so hat man immerhin die letzte Komponente von dieser Gestalt und kann dann die weiteren Lösungen von unter nach oben fortschreitend bestimmen. Übersichtlicher wird es, wenn $S-1AS$ in Jordan-Normalform ist. Für den Fall $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ haben wir diese bestimmt und können die Bahnen $\{\boldsymbol{y}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ der zugehörigen Lösungen wie in Fig.3 und 4 skizzieren. Die Stabilitätsbetrachtungen gehen analog zu den Differenzengleichungen (vgl. Jänich, Analysis für Physiker).

19.4 Potenzen von Dreiecksmatrizen

Lemma 19.5 *Sei A eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonale λ_i und Blockmatrix*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ O & A_{22} & A_{23} \\ O & O & A_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{22} \text{ mit Null-Diagonale}$$

Dann Ist $B = A^k$ obere Dreiecksmatrix mit Diagonale λ_i^k und Blockmatrix desselben Formats mit

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ O & B_{22} & B_{23} \\ O & O & B_{33} \end{pmatrix}, \quad B_{22} \text{ mit } 1\text{-te bis } k\text{-te oberer Null-Diagonalen}$$

Insbesondere $B_{22} = O$ falls $A_{22} \in K^{k\times k}$.

Beweis durch Induktion über k. $C = BA$ wird blockweise berechnet

$$(C_{ij} = \sum_{k=1}^{3} B_i A_j, \quad \text{also } C_{ii} = B_{ii}A_{ii}$$

Nun scharf hinsehen. □

$$\begin{pmatrix} a_1 & + & \dots & + \\ 0 & a_2 & \dots & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & + & \dots & + \\ 0 & b_2 & \dots & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & + & \dots & + \\ 0 & a_2 b_2 & \dots & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & + & + & \dots & + \\ 0 & 0 & 0 & + & + & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & + \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & + & + & + & \dots & + \\ 0 & 0 & + & + & + & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & + & + \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & + \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & + & \dots & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

19.5 Jordan-Blöcke

) Ein k-Jordanblock zum Eigenwert λ ist eine $k \times k$-Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Sei ϕ eine lineare Abbildung von V in V und λ ein EW von ϕ. Dann bilden $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ aus V eine λ-*Jordankette* der Länge k mit *Kopf* $\vec{v}_k$ und *Schwanz* $\vec{v}_1$ für ϕ genau dann, wenn k minimal ist mit

$$0 = \phi(\vec{v}_1) - \lambda\vec{v}_1,\ \vec{v}_1 = \phi(\vec{v}_2) - \lambda\vec{v}_2,\ \vec{v}_2 = \phi(\vec{v}_3) - \lambda\vec{v}_3, \dots, \vec{v}_{k-1} = \phi(\vec{v}_k) - \lambda\vec{v}_k$$

bzw. mit $\phi_\lambda(x) = \phi(x) - \lambda x$, d.h. mit $\phi_\lambda = \phi - \lambda id$

$$0 = \phi_\lambda(\vec{v}_1),\ \vec{v}_1 = \phi_\lambda(\vec{v}_2),\ \vec{v}_2 = \phi_\alpha(\vec{v}_3), \dots, \vec{v}_{k-1} = \phi_\lambda(\vec{v}_k).$$

$$\vec{0} \xleftarrow{\phi_\lambda} \vec{v}_1 \xleftarrow{\phi_\lambda} \vec{v}_2 \xleftarrow{\phi_\lambda} \vec{v}_3 \leftarrow \cdots\cdots \vec{v}_{k-1} \xleftarrow{\phi_\lambda} \vec{v}_k$$

Ist $V = K^n$, $\boldsymbol{v}_i = v_i^\alpha$ und $A = \phi_\alpha$ so schreibt sich das so

$$\mathbf{0} = (A - \lambda E)\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_1 = (A - \lambda E)\boldsymbol{v}_2,\ \dots, \boldsymbol{v}_{k-1} = (A - \lambda E)\boldsymbol{v}_k,$$

Lemma 19.6 *Die Matrix einer Abbildung ϕ von V in V bzgl. einer Basis β : $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ von V ist von der Form*

$$\begin{pmatrix} J & O \\ O & + \end{pmatrix}$$

mit einem k-Jordanblock zum EW λ genau dann, wenn $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ eine λ-Jordankette für ϕ ist. Der Schwanz $\vec{v}_1$ *einer λ-Jordankette ist stets ein EV zum EW λ.*

19.6 Jordan-Matrizen

Eine *Jordanmatrix* J ist blockdiagonal mit Jordan Kästchen auf der Diagonale.

Korollar 19.7 *Die Matrix einer Abbildung ϕ von V in V bzgl. einer Basis β ist eine Jordan-Matrix genau dann, wenn β eine Aneinanderreihung von λ-Jordanketten zu EW λ von ϕ ist.*

Eine solche Basis heisst eine *Jordan-Basis* von ϕ. Die einzelnen Jordan-Ketten entsprechen dabei den Blöcken und erzeugen invariante Teilräume.

Satz 19.8 *Zu jeder komplexen $n \times n$-Matrix A (genauso gehts in jedem algebraisch abgeschlossenen Körper) gibt es eine komplexe invertierbare Matrix S so, dass $A' = S^{-1}AS$ Jordanmatrix ist, die Jordansche Normalform. Diese ist bis auf die Reihenfolge der Jordanblöcke eindeutig bestimmt, insbesondere stehen auf der Diagonalen die Eigenwerte gerade entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit und die Anzahl der Jordanblöcke zum EW λ ist gerade dessen geometrische Vielfachheit. Die Transformationsmatrix kann man reell wählen, wenn A und alle seine Eigenwerte reell sind.*

Beispiel. Für jeden Eigenwert λ sei die geometrische Vielfachheit entweder 1 oder gleich der algebraischen. Für erstere bestimmen wir einen Eigenvektor $\boldsymbol{v}_1$, dann einen Hauptvektor $\boldsymbol{v}_2$ mit $(A-\lambda E)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$, zu diesem wieder ein $\boldsymbol{v}_3$ mit $(A-\lambda E)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2$, und so weiter solange bis es nicht mehr geht (das passiert, wenn man $m =$ algebraische Vielfachheit viele Vektoren hat). Auf diese Weise erhält man jeweils eine Jordankette und insgesamt zusammen mit den Basen der restlichen Eigenräume eine Jordanbasis.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ doppelter EW, $\lambda_2 = 3$ einfacher EW. Eigenvektoren

$$\boldsymbol{v}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ zu } \lambda_1, \ \boldsymbol{v}_2 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ zu } \lambda_2.$$

Aus $(A - 1E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_{11}$ erhält man Hauptvektor

$$\boldsymbol{v}_{12} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

somit

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{7}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

19.7 Hauptvektoren und verallgemeinerte Eigenräume

Sei ϕ Endomorphismus des n-dimensionalen Vektorraums V mit Matrix $A = \phi_\alpha$. Ist λ ein EW von ϕ so heisst

$$V_\lambda = \text{Kern}\,(\phi_\lambda)^n = \{\vec{x} \in V\,|(A - \lambda E)^n \vec{x}^\alpha = \mathbf{0}\}.$$

verallgemeinerter Eigenraum oder *Hauptraum* von ϕ zum EW λ. Die Vektoren aus V_λ heissen auch *Hauptvektoren* von ϕ zum EW λ. Offensichtlich gilt

- V_λ wird erzeugt von den λ-Jordanketten
- allgemeiner: das Erzeugnis der Jordan-Kette von Länge $\leq k$ ist

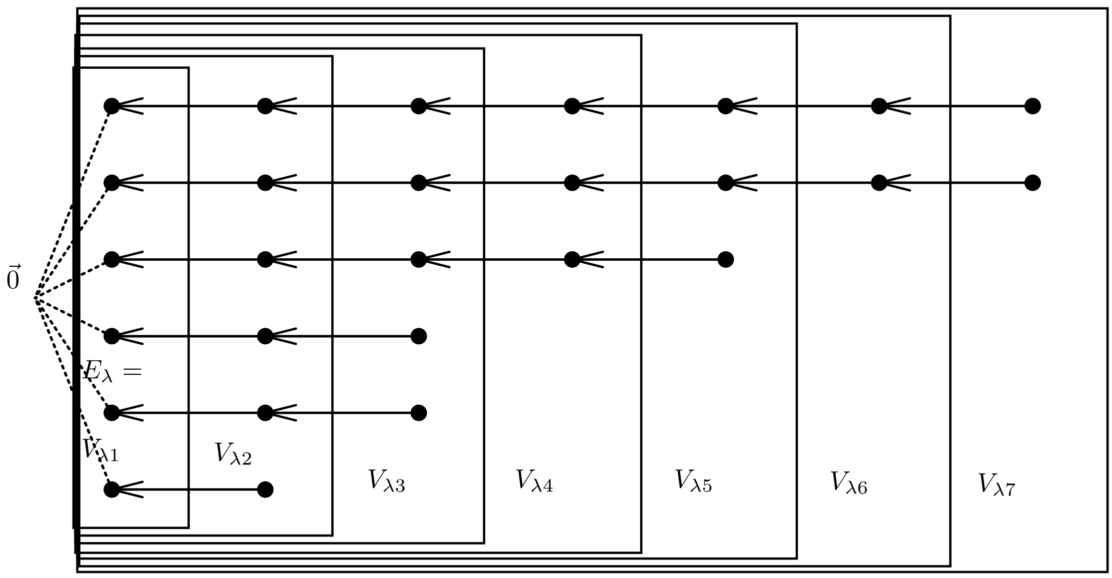
$$V_{\lambda k} = \text{Kern}\,(\phi_\lambda)^k = \{\vec{x} \in V\,|\,(A - \lambda E)^k \vec{x}^\alpha = \mathbf{0}\}$$

Korollar 19.9 *Ist A die Matrix von ϕ bzgl. irgendeiner Basis und β eine Jordanbasis von ϕ, so ist die Anzahl der λ-Jordanketten von Länge $\geq k$ aus β gegeben durch*

$$\dim V - Rang(A - \lambda E) = \dim E_\lambda \textit{ falls } k = 1.$$

$$Rang(A - \lambda E)^{k-1} - Rang(A - \lambda E)^k \textit{ falls } k > 1$$

Beweis. Eine Basis von $V_{\lambda k}$ erhält man, wenn man aus jeder Kette zum EW λ der Jordanbasis die vordersten k Glieder nimmt. Also ist die Anzahl der k-ten Glieder gerade $\dim V_{\lambda k} - \dim V_{\lambda k-1}$. Das Beispiel zeigt zum EW λ Blöcke der Länge 7 (2 mal), 5 (1 mal), 3 (2 mal), 2 (1 mal)



19.8 Zerlegung

Lemma 19.10 *Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die verschiedenen EW von ϕ, so*

- $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_m}$
- $\dim V_{\lambda_i}$ *ist die algebraische Vielfachheit m_i von λ_i*
- *Die V_{λ_i} und ihre Summen sind invariant unter allen ϕ_μ*
- $\phi_\lambda|V_\lambda$ *ist* nilpotent, *d.h. es gibt k so, dass $(\phi_\lambda|V_\lambda)^k$ Nullabbildung*
- $\phi_\lambda|\sum_{\mu\neq\lambda} V_\mu$, *ist bijektiv*

Beweis. Nach Schur dürfen wir voraussetzen, dass A eine obere Dreiecksmatrix ist so, dass gleiche EW auf der Diagonale benachbart sind - also m_i Kopien von λ_i hintereinander. In $A - \lambda_i$ sind die entsprechenden Diagonaleinträge 0. Nach Lemma 19.5 haben wir in $(A - \lambda_i E)^{m_i}$ den entsprechenden Diagonalblock als Nullmatrix, die anderen Diagonalelemente von 0 verschieden. Somit hat $(A - \lambda_i E)^{m_i}$ den Rang $n - m_i$, also $\dim V_{\lambda_i} = m_i$.

Die Vektoren von V_{λ_1} können nur an den Nicht-Pivotstellen (die den Diagonalpositionen von λ_1 entsprechen) von 0 verschieden sein, d.h. V_{λ_1} wird von den ersten m_1 Basivektoren aufgespannt und ist wegen der Dreiecksform invariant und $\phi_{\lambda_1}|V_{\lambda_1}$ ist nilpotent.

Der Dreiecksform sieht man ebenfalls an, dass $\sum_{i=1}^{m-1} V_{\lambda_i}$ ist invariant und die Einschräkung von ϕ_{λ_1} darauf bijektiv ist.

Nun kann man aber bei Schur die EW nach Belieben anordnen, also gelten diese Aussagen für jede Permutation der λ_i

$$V_{\lambda_i}, \sum_{j\neq i} V_{\lambda_j} \quad \text{invariant}$$

$$\phi_{\lambda_i}|V_{\lambda_i} \quad \text{nilpotent} \ , \quad \phi_{\lambda_i}|\sum_{j\neq i} V_{\lambda_j} \quad \text{bijektiv}$$

Also

$$V_{\lambda_i} \cap \sum_{j\neq i} V_{\lambda_j} = 0, \quad V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$$

Tipp. Will man die Jordan-Normalform bestimmen, so

- ▶ suche man für jeden EV λ_i ein minimales k_i mit $\mathsf{Rang}(A - \lambda_i E)^{k_i} = n - m_i$
- ▶ und dann jeweils eine Basis des Lösungsraums von $(A - \lambda_i E)^{k_i}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ - d.h. eine Basis γ_i des Hauptraums V_{λ_i}.
- ▶ Nun bestimme man Die Matrix A_i von $\phi|V_{\alpha_i}$
- ▶ und dazu eine Jordan-Basis β_i bzw. Transformationsmatrix S_i und Jordan-Normalform $J_i = S_i^{-1} A_i S_i$.

- ▶ Zusammengenommen ergeben die β_i eine Jordanbasis von V.
- ▶ Die Jordan-Normalform J von ϕ bzw. A und die Transformationsmatrix $S = {}^\gamma T_\beta$ sind blockdiagonal aus den J_i bzw. S_i zusammengesetzt.
- ▶ Die endgültige Transformationsmatrix ist ${}^\alpha T_\beta = {}^\alpha T_\gamma S$

19.9 Verschiebung

Lemma 19.11 *Sei $\mu \in \boldsymbol{C}$. Dann gilt*

$$S^{-1}(A - \mu E)S = S^{-1}AS - \mu E.$$

$$S^{-1}AS \text{ in Jordan-NF } \Leftrightarrow S^{-1}(A - \mu E)S \text{ in Jordan-NF.}$$

$$\lambda \text{ m-facher EW von } A \Leftrightarrow \lambda - \mu \text{ m-facher EW von } A - \mu E.$$

Beweis klar - für die letzte Behauptung wieder mit Schur. □ Zusammen mit der Zerlegung haben wir den Beweis des Satzes und die Berechnung der Jordan-Normalform also auf den Fall reduziert, dass 0 der einzige EV von A ist und damit $A^n = 0$ - eine solche Matrix nennt man *nilpotent*.

19.10 Normalform nilpotenter Matrizen

Sei K ein beliebiger Körper. Ein Endomorphismus $\phi : V \to V$ heisst *nilpotent*, wenn es ein k gibt mit $\phi^{k+1} = 0$, die Nullabbildung. Gleichbedeutend: $A^k = O$ mit $A = \phi_\alpha$ für eine/jede Basis α von V. Wählt man k minimal, so

$$V \supset \phi(V) \supset \phi^2(V) \supset \ldots \supset \phi^k(V) \supset 0 = \phi^{k+1}(V) \text{ also } k \leq n = \dim V$$

andernfalls hätte man ein $\phi^l(V) = \phi^{l+1}(V) = \phi^k(V) \neq 0$ für alle $k \geq l$.

Satz 19.12 *Jeder nilpotente Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums hat eine Jordan-Basis.*

Wir führen ad hoc einige Bezeichnungen ein: *Jordan-Rang* $JR(\vec{v})$ und *Schwanz* $\sigma(\vec{v})$

$$JR(\vec{v}) = \min\{k \mid \phi^k(\vec{v}) = \vec{0}\}, \quad \sigma(\vec{v}) = \begin{cases} \phi^{k-1}(\vec{v}) & \text{falls } k = JR(\vec{v}) > 0 \\ \vec{0} & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt offensichtlich

$$JR(r\vec{v}) = JR(\vec{v}), \;\; \sigma(r\vec{v}) = r\sigma(\vec{v}) \quad \text{falls } r \neq 0$$

$$JR(\vec{v}) = JR(\phi(\vec{v}) + 1 \text{ falls } \vec{v} \neq \vec{0}, \quad \sigma(\vec{v}) = \sigma(\phi(\vec{v}) \text{ falls } \phi(\vec{v}) \neq \vec{0}$$

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ heissen *J-unabhängig*, falls die $\sigma(\vec{v}_1), \ldots, \sigma(\vec{v}_m)$ linear unabhängig sind.

Lemma 19.13 $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ *sind* J-unabhängig *genau dann, wenn die Familie*

$$(\phi^k(\vec{v}_i) \mid 0 \leq k \leq JR(\vec{v}_i; 1 \leq i \leq m)$$

linear unabhängig ist - diese ist disjunkte Vereinigung von Jordanketten - und es gilt

$$JR(\sum_i \sum \{r_{ik}\phi^k(\vec{v}_i) \mid k \leq JR(\vec{v}_i)\}) = \max\{JR(\phi^k(\vec{v}_i) \mid r_{ik} \neq 0\}$$

Beweis: Induktion über $\max_i JR(\vec{v}_i)$. Sei

$$\sum_i \sum \{r_{ik}\phi^k(\vec{v}_i) \mid k \leq JR(\vec{v}_i)\} = \vec{0}$$

Dann $\phi(\phi^k(\vec{v}_i)) = \vec{0}$ für $k = JR(\vec{v}_i)$ also

$$\sum_i \sum \{r_{ik}\phi^k(\phi(\vec{v}_i)) \mid k \leq JR(\phi(\vec{v}_i))\} = \sum_i \sum \{\phi(r_{ik}\phi^k(\vec{v}_i)) \mid k \leq JR(\vec{v}_i)\} = \phi(\vec{0}) = \vec{0}$$

also $r_{ik} = 0$ für $k < JR(\vec{v}_i)$ mit Induktion. Somit

$$\sum_i r_{iJR(\vec{v}_i)}\sigma(\vec{v}_i) = \vec{0}$$

und nach Voraussetzung $r_{iJR(\vec{v}_i)} = 0$. □

Konstruktion einer Jordan-Basis. Wir fangen mit nix an. Sind J-unabhängige $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ schon gewählt, und gibt es $\vec{v}$ so, dass $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{v}$ J-unabhängig ist, so wählen wir $\vec{v}_{m+1}$ als eines mit maximalem Jordan-Rang unter diesen - dadurch ist garantiert dass

$$JR(\vec{v}_1) \geq \ldots \geq JR(\vec{v}_m) \geq JR(\vec{v}_{m+1})$$

Andernfalls hören wir auf und es bildet die Vereinigung der Jordan-Ketten zu den $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ eine Jordan-Basis von V.

Sei nämlich U der von diesen erzeugte Untervektorraum und angenommen $\vec{v} \notin U$. Da ϕ nilpotent ist, gibt es dann auch ein $\vec{v} \notin U$ mit $\phi(\vec{v}) \in U$ also

$$\phi(\vec{v}) = \sum_i \sum \{r_{ik}\phi^k(\vec{v}_i) \mid k \leq JR(\vec{v}_i)\}$$

Nach Konstruktion $JR(\phi(\vec{v}) < JR(\vec{v}_i)$, weil es sonst ein erstes i gäbe mit $JR(\vec{v}) = JR(\phi(\vec{v})) + 1 > JR(\vec{v}_i)$, im Widerspruch zur Konstruktionsvorschrift. Also $r_{i1} = 0$ für alle i nach dem Lemma. Wir setzen nun

$$\vec{w} = \vec{v} - \sum_i \sum \{r_{ik}\phi^{k-1}(\vec{v}_i) \mid k \leq JR(\vec{v}_i)\}$$

Dann $\vec{w} \notin U$, da $\vec{v} \notin U$. Aber $\phi(\vec{w}) = \phi(\vec{v}) - \phi(\vec{v}) = \vec{0}$, also $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{w}$ J-unabhängig, Widerspruch. □.

Tipp.

- Bestimme minimales k mit $A^k = O$.
- Suche unter den gegebenen (kanonischen) Basisvektoren von $V = K^n$ die rechte Zahl von $\mathsf{Rang} A^{k-1}$-vielen Köpfen $\boldsymbol{v}_i$ von Jordan-Ketten der (maximalen) Länge k, d.h. $A^{k-1}\boldsymbol{v}_i \neq \mathbf{0}$.
- Hat man die richtige Anzahl $J(l)$ von Jordan-Ketten mit Länge $\geq l$ schon erfolgreich bestimmt, so
  - sei U der von ihnen erzeugte Untervektorraum
  - wähle $h < l$ maximal mit $d = \mathsf{Rang} A^h - \mathsf{Rang} A^l - J(l)(1 + l - h) > 0$
  - ergänze die Jordan-Ketten durch Vektoren aus $\ker A^h$ zu einer Basis von V
  - wähle aus den neuen Basisvektoren d aus, die nicht in $\ker A^{h-1}$ liegen und mit den schon vorhandenen Köpfen J-unabhängig sind
  - füge die zugehörigen Jordan-Ketten zu den schon vorhandenen hinzu und setze $J(h) = J(l) + d$
  - man darf aber auch gleich d passende neue Köpfe finden, ohne Basisergänzung. Dabei hilft der Dreh
- Bei $h = 0$ ists fertig.

Beweis. Der Tipp folgt der Konstruktion, also ist sichergestellt, dass die vorhandene Jordan-Basis von U zu einer von V ausgebaut werden kann. Insbesondere $V = U + \ker A^h$ und es gibt die gesuchten neuen Köpfe in $\ker A^h$. Würde man sie nicht schon unter den ergänzten Basisvektoren finden, so ergäbe sich für $\phi^h(V)$ eine zu kleine Dimension. □ Der Dreh folgt sofort mit dem vorangegangenen Lemma.

Lemma 19.14 Dreh: *Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ J-unabhängig und zu gegebenem $\vec{v}$ sei l minimal so, dass $\phi^l(\vec{v})$ im Erzeugnis der $\phi^k(\vec{v}_i)$. Sei dabei $l > 0$ und*

$$\phi^l(\vec{v}) = \sum_i \sum_{k \geq l} r_{ik}\phi^k(\vec{v}_i), \quad \vec{w} := \vec{v} - \sum_i \sum_{k \geq l} r_{i\,k-l}\phi^{k-l}(\vec{v}_i)$$

Dann ist $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m, \vec{w}$ J-unabhängig und $JR(\vec{w}) = l$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^3 = O$, $\mathsf{Rang} A^2 = 2$. $A^2\mathbf{5} = 2\boldsymbol{e}_1$ und $A^2\boldsymbol{e}_6 = 2\boldsymbol{e}_2$ sind linear unabhängig, also $\boldsymbol{e}_5$ und $\boldsymbol{e}_6$ die rechten Köpfe. In den Jordanketten kommen jeweils noch $A\boldsymbol{e}_5 = \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4$ und $A\boldsymbol{e}_6 = \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4$, also hat U Basis $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_6$ und $\boldsymbol{e}_7, \boldsymbol{e}_8$ liefern Basisergänzung. Mir den Dreh $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{e}_8 - 3\boldsymbol{e}_5 \in \ker A^2$ und $A\boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4 + 2\boldsymbol{e}_7 \notin U$, also ist $\boldsymbol{v}$ der gesuchte neue Kopf und wir sind fertig.

19.11 Reelle Jordansche Normalform

Satz 19.15 *Zu jeder reellen quadratischen Matrix A gibt es eine Transformationsmatrix S so, dass $A' = S^{-1}AS$ Blockdiagonalmatrix mit Blöcken der Form*

$$\begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b & \ddots & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & \ddots & & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & a & -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

Dabei entspricht ein solcher Block einem Jordankästchen zum Eigenwert $\lambda = a + bi$.

Beweis. Man wähle eine Jordanbasis so, dass man zu jeder Jordankette zu einem EW λ auch die konjugierte Jordankette zum EW $\overline{\lambda}$ in der Basis hat. Man sortiere die Basis so um, dass jeweils ein Vektor und sein konjugierter aufeinander folgen und ersetze dann dieses Paar komplexer Vektoren durch ein Paar reeller Vektoren. Dann hat man eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich derer die lineare Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ durch eine Matrix der Form A' beschrieben wird.

19.12 Satz von Cayley-Hamilton

Für ein Polynom $p(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0$ und eine quadratische Matrix, können wir die Matrix $p(A) = a_n A^n + \ldots a_1 A + a_0 E$ ausrechnen. Bei Basistransformation gilt $p(S^{-1}AS) = a_n(S^{-1}AS)^n + \ldots + a_1 S^{-1}AS + a_0 E = a_n S^{-1}A^n S + \ldots + a_1 S^{-1}AS + a_0 S^{-1}ES = S^{-1}p(A)S$. Haben wir

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix} \text{ so } A^k = \begin{pmatrix} B^k & O \\ O & C^k \end{pmatrix} \text{ und } p(A) = \begin{pmatrix} p(B) & O \\ O & p(C) \end{pmatrix}.$$

Satz 19.16 *Für das charakteristische Polynom $\chi(x)$ von A gilt $\chi(A) = O$.*

Beweis. Bei Basistransformation äändert sich χ nicht, also dürfen wir annehmen, dass A in Jordanscher Normalform ist. Für die Matrix J_i mit den Jordankästchen zum Eigenwert λ_i als Diagonalblöcken haben wir $(J - \lambda_i E_{m_i i})^{m_i} = O$, d.h. $(x - \lambda_i)^{m_i}(J_i) = O$ und somit auch $\chi(J_i) = O$ da $\chi(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_k)^{m_k}$. Also wegen der Blockstruktur $\chi(A) = O$. Mit demselben Argument sehen wir

Satz 19.17 *Für ein Polynom $p(x)$ gilt genau dann $p(A) = O$, wenn das* Minimalpolynom $\mu(x) = (x - \lambda_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_k)^{l_k}$ *Teiler von $p(x)$ ist. Dabei ist l_i das maximale Format eines Jordankästenchens zum EW λ_i.*

20 Pauli-Matrizen *

20.1 Spur Null

Sei H ein 2-dimensionaler unitärer Raum. Für einen Endomorphismus $\phi : H \to H$ sind äquivalent

- ϕ ist selbstadjungiert und $\mathsf{Spur}\phi = 0$
- bzgl. einer/jeder ON-Basis wird ϕ beschrieben durch eine Matrix der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- ϕ besitzt ON-Basis von EV mit EW $\pm\lambda \in \mathbb{R}$

Für solches ϕ gilt • $\phi^2 = \lambda^2 \mathsf{id}$

20.2 Pauli-Matrizen

Satz 20.1 *Sei H ein 2-dimensionaler unitärer Raum Die selbstadjungierten Endomorphismen von H mit* Spur *Null bilden einen 3-dimensionalen reellen Vektorraum*

$$P(H) = \{\phi : H \to H \mid \phi^* = \phi,\ \mathsf{Spur}\phi = 0\},\ \ (\phi{+}\psi)(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}),\ \ (r\phi)(\vec{x}) = r\phi(\vec{x})$$

Gibt man eine ON-Basis H vor, so erhält man eine Basis von V durch die Operatoren mit den Pauli-Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beweis. Es ist sofort klar, dass $P(H)$ unter Addition und Multiplikation mit reellen Skalaren abgeschlossen ist. Die Matrizen A_i entsprechen Elementen von $P(H)$ und man hat die eindeutige Darstellung

$$A = \Re\beta A_1 + \Im\beta A_2 + \alpha A_3$$

20.3 Skalarprodukt

Satz 20.2 *$P(H)$ wird zum euklidischen Vektorraum durch das Skalarprodukt*

$$\langle \phi \,|\, \psi \rangle = \frac{1}{2}\mathsf{Spur}(\phi \circ \psi)$$

und es gilt

$$|\phi| = \sqrt{\det \phi} = \lambda \quad \textit{wobei } \lambda \textit{ der EW } \geq 0$$

$$\langle \phi \,|\, \psi \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \phi \circ \psi + \psi \circ \phi = 0$$

Bzgl. einer ON-Basis von H liefern die Pauli-Matrizen eine ON-Basis von $P(H)$. Jede ON-Basis von $P(H)$ entsteht auf diese Weise.

Beweis. Aus 18.7 folgt, dass man eine bilineare und symmetrische Form hat. Zudem $\langle \phi \,|\, \phi \rangle = \frac{1}{2}\mathsf{Spur}\phi^2 = \lambda^2$, also positiv definit. Weiterhin

$$\phi \circ \psi + \psi \circ \phi = (\phi + \psi)^2 - \phi^2 - \psi^2 = \mu \mathsf{id}$$

$$\langle \phi \,|\, \psi \rangle = \frac{1}{4}\mathsf{Spur}(\mu \mathsf{id}) = \frac{1}{2}\mu = 0 \;\Leftrightarrow\; \mu = 0$$

Die Pauli-Matrizen haben EW ± 1, also Länge 1. Schliesslich

$$A_1A_2 + A_2A_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = O$$

$$A_1A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_3A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2A_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; A_3A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Der Nachweis, dass man jede ON-Basis mit $A_1, \pm A_2, A_3$ darstellen kann, und dass die mit $+A_2$ alle derselben Orientierung entsprechen, ist ein bisschen aufwendiger.

20.4 Spin

Eine *Richtung* in $P(H)$ ist ein “Strahl”

$$\mathbb{R}_{>0}\phi = \{r\phi \mid r \in \mathbb{R},\; r > 0\}, \quad \phi \in P(H)$$

Die Richtungen entsprechen eindeutig den Zerlegungen orthogonalen Zerlegungen

$$H = H_+ \oplus^\perp H_-$$

$$H_+ = E_\lambda, \;\; H_- = E_{-\lambda} \;\; \lambda \geq 0 \text{ EW von } \phi$$

H_+ heisst auch der Zustand mit Spin-Projektion $+\frac{1}{2}$, in Richtung $\mathbb{R}_{>0}\phi$ und H_- der mit Spin $-\frac{1}{2}$.

20.5 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt auf $P(H)$ bzgl. der durch $+A_2$ gegebenen Orientierung ist

$$\phi \times \psi = \frac{-i}{2}(\phi \circ \psi - \psi \circ \phi)$$

Das ist nämlich linear in jedem Argument und macht auf den Pauli-Matrizen, was es soll.

20.6 Produkt von Operatoren

$P(H)$ ist nicht unter Produkt (=Hintereinanderausführung) abgeschlossen. Schreiben wir jedoch σ_i für den Endomorphismus zu A_i (bzgl. fester ON-Basis von H) so gilt

$$(\sum_i x_i\sigma_i)\circ(\sum_i y_i\sigma_i) = \sum_i x_iy_i\mathsf{id} + i(\sum_i x_i\sigma_i)\times(\sum_i y_i\sigma_i)$$

in Physiker-Schreibweise

$$(\vec{x}\cdot\vec{\sigma})(\vec{y}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{x}\cdot\vec{y})\mathsf{id} + i(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{\sigma}$$

und koordinatenfrei

$$\phi\circ\psi = \langle\vec{\phi}\,|\,\vec{\psi}\rangle\mathsf{id} + i\phi\times\psi$$

Beweis. Wie in Satz 22.2.

$$\phi\circ\psi - i\phi\times\psi = \frac{1}{2}(\phi\circ\psi+\psi\circ\phi) = \frac{1}{2}\mu\mathsf{id} = \langle\vec{\phi}\,|\,\vec{\psi}\rangle\mathsf{id}$$

20.7 Quaternionen

Es folgt, dass der $\mathbb{R}$-Untervektorraum

$$\mathbb{R}\mathsf{id} + iP(H)$$

des Raumes aller Endomorphismen von H unter Hintereinanderausführung abgeschlossen ist und damit eine $\mathbb{R}$-Algebra. Also Basis haben wir sofort

$$\mathbf{1} = \mathsf{id},\ \boldsymbol{i} = -i\sigma_1,\ \boldsymbol{j} = -i\sigma_2,\ \boldsymbol{k} = -i\sigma_3$$

und die Multiplikation sieht so aus

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$$

$$\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k},\ \ \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j},\ \ \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}$$

In diesem Ring kann man auch dividieren (ähnlich wie in $\mathbb{C}$), man spricht vom Schiefkörper der *Quaternionen*. In der Tat

$$(r\mathsf{id}+i\phi)(r\mathsf{id}-i\phi) = r^2(\mathsf{id}+\phi^2) = s\mathsf{id}$$

also

$$(r\mathsf{id}+\phi)^{-1} = \frac{1}{s}(r\mathsf{id}-i\phi)$$

20.8 Überlagerung

Sei α feste ON-Basis von H und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die zugehörige ON-Basis von $P(H)$. Eine unitäre Matrix U kann man als Matrix einer Basistransformation $U = {}^{\alpha}T_{\beta}$ auffassen. Der ON-Basis β entspricht dann eine ON-Basis $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ von $P(H)$ und es gibt eine eindeutig bestimmte orthogonale Abbildung von $P(H)$ mit $\sigma_i \mapsto \sigma_i'$ - ihre Matrix bzgl. σ_i sei $s(U)$, also orthogonal.

Stellen wir $\phi \in H(P)$ durch komplexe 2×2-Matrizen dar, so können wir den Übergang

$$\phi \mapsto s(U)(\phi)$$

auch als Basistransformation in H verstehen

$$A \mapsto s(U)(A) = UAU^{-1} \quad A \text{ bzgl. } \alpha$$

Satz 20.3 *$S \mapsto s(U)$ ist ein surjektiver Homomorphismus der Gruppe $\mathsf{SU}(2)$ der unitären 2×2-Matrizen mit $\det = 1$ auf die Gruppe $\mathsf{SO}(3)$ der orthogonalen 3×3-Matrizen mit $\det = 1$.*

Literatur: A.I.Kostrikin und Yu.I.Manin, Linear Algebra and Geometry

20.9 Überlagerung

Sei α feste ON-Basis von H und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die zugehörige ON-Basis von $P(H)$. Eine unitäre Matrix U kann man als Matrix einer Basistransformation $U = {}^{\alpha}T_{\beta}$ auffassen. Der ON-Basis β entspricht dann eine ON-Basis $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ von $P(H)$ und es gibt eine eindeutig bestimmte orthogonale Abbildung von $P(H)$ mit $\sigma_i \mapsto \sigma_i'$ - ihre Matrix bzgl. σ_i sei $s(U)$, also orthogonal.

Stellen wir $\phi \in H(P)$ durch komplexe 2×2-Matrizen dar, so können wir den Übergang

$$\phi \mapsto s(U)(\phi)$$

auch als Basistransformation in H verstehen

$$A \mapsto s(U)(A) = UAU^{-1} \quad A \text{ bzgl. } \alpha$$

Satz 20.4 *$S \mapsto s(U)$ ist ein surjektiver Homomorphismus der Gruppe $\mathsf{SU}(2)$ der unitären 2×2-Matrizen mit $\det = 1$ auf die Gruppe $\mathsf{SO}(3)$ der orthogonalen 3×3-Matrizen mit $\det = 1$.*

Literatur: A.I.Kostrikin und Yu.I.Manin, Linear Algebra and Geometry

21 Relativität *

Gegeneinander bewegte Koordinatensysteme werden in der Physik seit Jahrhunderten erfolgreich benutzt - insbesondere auch für die Formulierung des Relativitätsprinzips und damit für die Klärung des Begriffs "Physikalisches Gesetz". Der Übergang von einem System ins andere kann jedoch nicht als Koordinatentransformation in Sinne der Mathematik verstanden werden, jedenfalls nicht als Transformation von Koordinaten räumlicher bzw. raum-zeitlicher Punkte. Vielmehr handelt es sich, wie von Einstein bemerkt, um gegeneinander bewegte Räume bzw. Raumzeiten. Diese Bewegungen lassen sich als Abbildungen zwischen den Raumzeiten beschreiben. Die Verwendung von Koordinaten verdunkelt dabei eher die Zusammenhänge bzw. verführt zur Betrachtung rein formaler Koinzidenzen ohne inhaltliche Bedeutung.

21.1 Längengleichheit

Will man bei einem euklidischen Vektorraum von der Skalierung absehen, so kann man das dadurch erreichen, dass man statt des Skalarproduktes bzw. der Länge die binäre Relation 'gleichlang' betrachtet

$$\vec{x} \sim \vec{y} \;\Leftrightarrow\; |\vec{x}| = |\vec{y}|$$

Lemma 21.1 *Das Skalarprodukt ist durch die Relation 'gleichlang' bis auf einen Skalierungsfaktor eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $\langle\,|\,\rangle_i$ $(i = 1, 2)$ Skalarprodukte auf demselben $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{V}$ mit zugehöriger Länge $|\;|_i$ und Längengleichheitsrelation $\sim_i$. Gelte $\vec{x} \sim_1 \vec{y} \;\Leftrightarrow\; \vec{x} \sim_2 \vec{y}$ für alle $\vec{x}$ und $\vec{y}$. Wähle eine Vektor $\vec{e}$ mit $|\vec{e}|_1 = 1$ und sei $\mu = |\vec{e}|_2$. Jeden Vektor kann man schreiben als $\vec{x} = r\vec{n}$ mit $|\vec{n}|_1 = 1$ und $r \geq 0$. Es folgt

$$|\vec{x}|_1 = r|\vec{n}|_1 = r|\vec{e}|_1 = r\mu|\vec{e}|_2 = r\mu|\vec{n}|_2 = \mu|r\vec{n}|_2 = \mu|\vec{x}|_2$$

weil $\vec{e} \sim_1 \vec{n}$ und damit auch $\vec{e} \sim_2 \vec{n}$. Drückt man die Skalarprodukte über die Längen aus, so erhält man den Skalierungsfaktor μ^2. □

Einen reellen Vektorraum mit einer Äquivalenzrelation, die die Längengleichheit eines Skalarproduktes ist, und einen affinen Raum mit einem solchen Vektorraum wollen wir *pro-euklidisch* nennen, wenn zusätzlich noch eine Orientierung gegeben ist z.B. durch eine ausgezeichnete Basis und damit eine Abbildung

22 Relativität *

Gegeneinander bewegte Koordinatensysteme werden in der Physik seit Jahrhunderten erfolgreich benutzt - insbesondere auch für die Formulierung des Relativitätsprinzips und damit für die Klärung des Begriffs "Physikalisches Gesetz". Der Übergang von einem System ins andere kann jedoch nicht als Koordinatentransformation in Sinne der Mathematik verstanden werden, jedenfalls nicht als Transformation von Koordinaten räumlicher bzw. raum-zeitlicher Punkte. Vielmehr handelt es sich, wie von Einstein bemerkt, um gegeneinander bewegte Räume bzw. Raumzeiten. Diese Bewegungen lassen sich als Abbildungen zwischen den Raumzeiten beschreiben. Die Verwendung von Koordinaten verdunkelt dabei eher die Zusammenhänge bzw. verführt zur Betrachtung rein formaler Koinzidenzen ohne inhaltliche Bedeutung.

22.1 Längengleichheit

Will man bei einem euklidischen Vektorraum von der Skalierung absehen, so kann man das dadurch erreichen, dass man statt des Skalarproduktes bzw. der Länge die binäre Relation 'gleichlang' betrachtet

$$\vec{x} \sim \vec{y} \Leftrightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}|$$

Lemma 22.1 *Das Skalarprodukt ist durch die Relation 'gleichlang' bis auf einen Skalierungsfaktor eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $\langle\,|\,\rangle_i$ $(i = 1, 2)$ Skalarprodukte auf demselben $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{V}$ mit zugehöriger Länge $|\;|_i$ und Längengleichheitsrelation $\sim_i$. Gelte $\vec{x} \sim_1 \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \sim_2 \vec{y}$ für alle $\vec{x}$ und $\vec{y}$. Wähle eine Vektor $\vec{e}$ mit $|\vec{e}|_1 = 1$ und sei $\mu = |\vec{e}|_2$. Jeden Vektor kann man schreiben als $\vec{x} = r\vec{n}$ mit $|\vec{n}|_1 = 1$ und $r \geq 0$. Es folgt

$$|\vec{x}|_1 = r|\vec{n}|_1 = r|\vec{e}|_1 = r\mu|\vec{e}|_2 = r\mu|\vec{n}|_2 = \mu|r\vec{n}|_2 = \mu|\vec{x}|_2$$

weil $\vec{e} \sim_1 \vec{n}$ und damit auch $\vec{e} \sim_2 \vec{n}$. Drückt man die Skalarprodukte über die Längen aus, so erhält man den Skalierungsfaktor μ^2. □

Einen reellen Vektorraum mit einer Äquivalenzrelation, die die Längengleichheit eines Skalarproduktes ist, und einen affinen Raum mit einem solchen Vektorraum wollen wir *pro-euklidisch* nennen, wenn zusätzlich noch eine Orientierung gegeben ist z.B. durch eine ausgezeichnete Basis und damit eine Abbildung

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \mapsto \mathsf{sign}(\mathsf{det}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)) \in \{1, -1, 0\}$$

die angibt, ob die Vektoren positiv oder negativ orientiert sind bzw. linear abhängig. Eine positiv orientierte Basis heisse *porthogonal*, wenn ihre Vektoren gleichlang sind und bzw. eines/jedes der zugehörigen Skalarprodukte aufeinander senkrecht stehen.

Sind $\mathcal{A}$ mit $\sim$ und $\mathcal{A}'$ mit $\sim'$ zwei pro-euklidische affine Räume, so heisse eine bijektive affine orientierungserhaltende Abbildung $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ (und auch die zugehörige lineare Abbildung ϕ_0) eine *Ähnlichkeit*, wenn gilt

$$\vec{x} \sim \vec{y} \Leftrightarrow \phi_0\vec{x} \sim' \phi_0\vec{y}$$

Korollar 22.2 *Für eine affine Abbildung $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ sind äquivalent*

- *ϕ ist eine Ähnlichkeit*
- *ϕ_0 ist orientierungserhaltend und bzgl. eines/jedes Paares $\langle\,|\,\rangle$ und $\langle\,|\,\rangle'$ von zu $\sim$ bzw. $\sim'$ gehörigen Skalarprodukten gibt es ein reelles $r > 0$ mit*

$$\langle \phi_0\vec{x} \,|\, \phi_0\vec{y}\rangle' = r\langle \vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle$$

- *bzgl. eines/jedes Paares porthogonaler Basen wird ϕ_0 durch ein passendes positives Vielfaches einer orthogonalen Matrix S mit $\det S = 1$ beschrieben*

Beweis. Sei ϕ eine Ähnlichkeit. Wenn wir $\phi(P)$ mit P und $\phi_0\vec{x}$ mit $\vec{x}$ identifizieren, fallen die Relationen $\sim'$ und $\sim$ zusammen. □

22.2 Kegel

Ist Q eine quadratische Form auf einem reellem Vektorraum so gibt es Basen, bzgl derer Q durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird ("symmetrischer Gauss-Algorithmus" oder Hauptachsentranformation, nachdem man V irgendwie euklidisch gemacht hat). Nach dem Trägheitssatz von Sylvester sind dabei die Anzahl p der positiven und q der negativen Diagonaleinträge eindeutig bestimmt. Das Paaar (p, q) heisst die *Signatur* von Q

Lemma 22.3 *Eine quadratische Form* Q *der Signatur* $(n, 1)$ *auf einem* $n+1$*-dimensionalen reellen Vektorraum* V *ist durch ihren* asymptotischen Doppel-Kegel $\{\vec{x} \in V \mid Q(\vec{x}) = 0\}$ *bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt, genauer: Ist* Q' *eine quadratische Form mit* $Q'(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow Q(\vec{x}) = 0$. *so gibt es* $r \neq 0$ *mit* $Q' = rQ$.

Zusatz. *Es gibt eine Basis bezgl. derer* Q *beschrieben wird durch* $-x_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2$. *Die zu* Q *gehörigen* Zeit-Kegel *sind dann (für jede solche Basis dieselben bis auf Vertauschen)*

$$\{\vec{x} \in V \mid Q(\vec{x}) < 0,\ x_0 \geq 0\}, \quad \{\vec{x} \in V \mid Q(\vec{x}) < 0,\ x_0 \leq 0\}$$

Beweis. Es gibt eine Basis $\vec{e}_0, \ldots, \vec{e}_n$, bzgl derer Q durch eine Diagonalmatrix mit Einträgen λ_i beschrieben wird mit $\lambda_0 < 0$ und $\lambda_i > 0$ für $i \geq 1$. Nach Ersetzung von $\vec{e}_1$ durch $|\lambda_i|^{-2}\vec{e}_i$ wird $Q(\vec{e}_0) = -1$ und $Q(\vec{e}_i) = 1$ für $i \geq 1$. Und es gibt ein Skalarprodukt, bzgl. dessen $\vec{e}_0, \ldots, \vec{e}_n$ ON-Basis ist. Sei $V_Z = \mathbb{R}\vec{e}_0$ und $V_R = \sum_{i=1}^n \mathbb{R}\vec{e}_i$ Dann haben wir

$$V = V_Z \oplus V_R, \quad Q(\vec{x}) = |\vec{x}_R|^2 - |\vec{x}_Z|^2$$

Sei nun Q' eine quadratische Form auf V mit $Q'(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow Q(\vec{x}) = 0$. Im Falle $n = 1$ ist die Kennlinie von Q eine Hyperbel und der asymptotische Kegel ist ein Paar von Ursprungsgeraden symmetrisch zu $\mathbb{R}\vec{e}_0$. Nach der Klassifikation der ebenen Formen ist dann die Kennlinie von Q' ebenfalls Hyperbel und zwar mit denselben Achsen, also $Q'(x_0\vec{e}_0 + x_1\vec{e}_1) = \mu_0 x_0 + \mu_1 x_1$ mit $\mu_0\mu_1 < 1$ und $|\mu_1/\mu_0| = 1$. Also $\mu_1 = r,\ \mu_0 = -r$ für ein $r \neq 0$ und $Q' = rQ$. Das gilt auch für die zugehörigen Bilinearformen: $\Phi' = r\Phi$ und insbesondere $\Phi'(\vec{e}_0, \vec{e}_1) = 0$.

Für $n > 1$ und $i \geq 1$ können wir den Fall $n = 1$ auf $U_i = \mathbb{R}\vec{e}_0 + \mathbb{R}\vec{e}_i$ und die Einschränkungen von Φ und Φ' anwenden und erhalten $\Phi'(\vec{z}, \vec{p}) = 0$ für $\vec{z} \in \mathbb{R}\vec{e}_0$ und $\vec{p} \in \mathbb{R}\vec{e}_i$. Es folgt

$$\Phi'(\vec{z}, \vec{p}) = 0, \quad Q'(\vec{p} + \vec{z}) = Q'(\vec{p}) + Q'(\vec{z}) \quad \text{für } \vec{z} \in V_Z,\ \vec{p} \in V_R$$

$$Q'(\vec{p}) = -Q'(\vec{e}_0) \Leftrightarrow Q'(\vec{p} + \vec{e}_0) = 0 \Leftrightarrow Q(\vec{p} + \vec{e}_0) = 0 \Leftrightarrow |\vec{p}| = 1 \quad \text{für } \vec{p} \in V_R$$

Somit hat $Q'|V_R$ Sphären als Kennhyperflächen und es gibt ein $r \neq 0$ mit $Q'(\vec{p}) = r|\vec{p}| = rQ(\vec{p})$ für $\vec{p} \in V_R$. Nach dem Fall $n = 1$ gilt $Q'(\vec{e}_0) = -Q'(\vec{e}_1) = -rQ(\vec{e}_1) = rQ(\vec{e}_0)$, also $Q' = rQ$.

Ein Zeitkegel (bzgl. der gewählten Basis) ist offensichtlich eine *Zusammenhangkomponente* von $V \setminus \{\vec{x} \mid Q(\vec{x}) = 0\}$, d.h. eine maximale Teilmenge von V so, dass je zwei seiner Punkte durch einen Weg verbunden werden können, der keinen Punkt mit

$Q(\vec{x}) = 0$ enthält. Von diesen gibt es 4 Stück und die Zeitkegel sind dadurch charakterisiert, dass sie ein $\vec{x}$ mit $Q(\vec{x}) < 0$ enthalten. Also haben wir eine basis-unabhängige Charakerisierung. □ Die euklidische Struktur auf V war nur ein Trick, um uns auf die Klassifikation der Formen berufen zu können. Sie hat physikalisch keine Bedeutung. Auch mathematisch lässt sie sich vermeiden. Die Aussage des Lemmas gilt nicht für definite Formen (die haben alle "Kegel" 0).

22.3 Galileisch bewegte Räume

Wir betrachten zunächst den 'Galileischen' Fall, dass die Räume dreidimensionale pro-euklidische affine Räume sind und die Zeit in einem separaten eindimensionalen affinen Raum $\mathcal{Z}$ mit orientiertem Vektorraum $\mathcal{V}_Z \cong \mathbb{R}$ lebt.

Seien $\mathcal{A}_R$ und $\mathcal{A}'_R$ pro-euklidische affine Räume mit zugehörigen Vektorräumen $\mathcal{V}_R$ und $\mathcal{V}'_R$. Eine *Bewegung* ϕ von $\mathcal{A}'_R$ gegen $\mathcal{A}_R$ wird gegeben durch eine Familie $\phi(T) : \mathcal{A}'_R \to \mathcal{A}_R$ $(T \in \mathcal{Z})$ von Ähnlichkeitsabbildungen. Dabei wird durch $P = \phi(T)(Q)$ festgelegt, welchem Punkt in $\mathcal{A}$ der Punkt Q aus $\mathcal{A}'$ zur Zeit T entspricht - z.B. weil dort zur Zeit T dasselbe physikalische Event stattfindet.

Die Familie der inversen Abbildungen bestimmt dann eine Bewegung von $\mathcal{A}_R$ gegen $\mathcal{A}'_R$ - die *inverse* Bewegung. Ist eine Bewegung von $\mathcal{A}''_R$ gegen $\mathcal{A}'_R$ durch die $\psi(T)$ gegeben, so bestimmen die $\phi(T) \circ \psi(T)$ eine Bewegung von $\mathcal{A}''_R$ gegenüber $\mathcal{A}_R$, die *Hintereinanderausführung* $\phi \circ \psi$.

Die Bewegung ϕ von $\mathcal{A}'_R$ gegen $\mathcal{A}_R$ ist *gleichmässig*, wenn es eine Basis $\vec{e}$ von $\mathcal{V}_Z$, Zeitpunkt $T_0 \in \mathcal{Z}$ und Vektor $\vec{v} \in \mathcal{V}_R$ gibt mit

$$(*) \quad \phi(t\vec{e} + T_0)(Q) = t\vec{v} + \phi(T_0)(Q) \quad \text{für alle } Q \in \mathcal{A}'_R,\ t \in \mathbb{R}$$

Für gleichmässiges ϕ gilt

- $\phi(T)_0 = \phi(T')_0$ für alle $T, T' \in \mathcal{Z}$
- Zu jeder Basis $\vec{e}$ von $\mathcal{V}_Z$ und Zeitpunkt T_0 gibt einen Vektor $\vec{v} \in V$ mit $(*)$.
- Ist die 'Zeiteinheit' $\vec{e}$ festgelegt, so ist der Vektor $\vec{v}$ durch ϕ eindeutig bestimmt

$$\vec{v}(\phi) = \overrightarrow{\phi(T)(Q)\,\phi(\vec{e} + T)(Q)} \quad \text{beliebige } T \in \mathcal{Z},\ Q \in \mathcal{A}'_R$$

- Hintereinanderausführungen und Inverse gleichmässiger Bewegungen sind gleichmässig

$$\vec{v}(\phi \circ \psi) = \vec{v}(\phi) + \phi_0(\vec{v}(\psi)), \quad \vec{v}(\phi^{-1}) = \phi_0^{-1}(-\vec{v}(\phi))$$

Beweis. Zu $T \in \mathcal{Z}$ gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit $T = t\vec{e} + T_0$ und somit $\phi(T)_0(\overrightarrow{QR}) =$

$$= \overrightarrow{\phi(T)(Q)\,\phi(T)(R)} = \overrightarrow{t\vec{v} + \phi(T_0)(Q)\ t\vec{v} + \phi(T_0)(R)} = \overrightarrow{\phi(T_0)(Q)\,\phi(T_0)(R)} = \phi(T_0)_0(\overrightarrow{QR})$$

Ersetzt man T_0 durch $T = s\vec{e} + T_0$, so bleibt $\vec{v}$ unverändert. Ersetzt man $\vec{e}$ durch $s\vec{e}$, so hat man $\vec{v}$ durch $s\vec{v}$ zu ersetzen. Schliesslich für $Q \in \mathcal{A}''_R$

$$(\phi \circ \psi)(t\vec{e} + T_0)(Q) = \phi(t\vec{e} + T_0)(\psi(t\vec{e} + T_0)(Q) = \phi(t\vec{e} + T_0)(t\vec{v}(\psi) + \psi(T_0)(Q))$$

$$= t\vec{v}(\phi) + \phi(T_0)(t\vec{v}(\psi) + \psi(T_0)(Q)) = t\vec{v}(\phi) + \phi_0(t\vec{v}(\psi)) + \phi(T_0)(\psi(T_0)(Q))$$
$$= t(\vec{v}(\phi) + \phi_0(\vec{v}(\psi)) + (\phi \circ \psi)(T_0)(Q) \quad \Box$$

Als Veranschaulichung denke man sich $\mathcal{A}_R$ durch den am Bahndamm stehenden Einstein gegeben, $\mathcal{A}'_R$ als den vorbeifahrenden Zug und $\mathcal{A}''_R$ durch eine ans Fenster eilende Frau - Raben haben sich für Einstein weniger interessiert.

22.4 Galileische Raumzeit

Zu einem dreidimensionalen pro-euklidischen affinen Raum $\mathcal{A}_R$ mit Vektorraum $\mathcal{V}_R$ erhält man die zugehörige *Galilei-Raumzeit* $\mathcal{A}$ indem man jeweils einen Zeit- und Raumpunkt zu einem Paar zusammenfasst - und entsprechend für Vektoren. D.h. man hat als Punktemenge bzw. als Vektorenmenge

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times \mathcal{A}_R \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_Z \times \mathcal{V}_R$$

wobei man mit den Vektoren komponentenweise rechnet und auch das Antragen eines Zeit-Raum-Vektors $(\vec{t}, \vec{x})$ an einen Zeit-Raum-Punkt (T, P) komponentenweise ausgeführt wird

$$(\vec{t}, \vec{x}) + (T, P) = (\vec{t} + T, \vec{x} + P)$$

Insbesondere gilt auch

$$\overrightarrow{(T_1, P_1)\,(T_2, P_2)} = (\overrightarrow{T_1T_2}, \overrightarrow{P_1P_2})$$

Unter einer *Raumzeit* $\mathcal{A}$ verstehen wir einen affinen Raum, dessen zugehöriger Vektorraum ein vierdimensionaler reeller Vektorraum $\mathcal{V}$ ist mit zusätzlicher Struktur:

- dreidimensionalem pro-euklidischen Untervektorraum $\mathcal{V}_R$
- eindimensionalem (und damit auf eindeutige Weise pro-euklidischen) orientiertem Untervektorraum $\mathcal{V}_Z$
- so dass jeder Vektor $\vec{v} \in V$ eine eindeutige Darstellung hat

$$\vec{x} = \vec{x}_R + \vec{x}_Z \quad \text{mit } \vec{x}_R \in \mathcal{V}_R,\ \vec{x}_Z \in \mathcal{V}_Z$$

- einer Orientierung, die durch eine Basis gegeben ist, die einen Vektor von $\mathcal{V}_Z$ durch eine positiv orientierte Basis von $\mathcal{V}_R$ ergänzt.

Die ausgezeichneten Untervektorräume einer Galilei-Raumzeit sind

$$\mathcal{V}_Z \times \{\vec{0}\} \cong \mathcal{V}_Z, \quad \{\vec{0}\} \times \mathcal{V}_R \cong \mathcal{V}_R$$

Durch Festlegung von Längen bzw. Zeiteinheit kann man in der Raumzeit Längen- bzw. Zeitmessung betreiben. Sind positiv orientierte Zeiteinheit $\vec{e}$ und Zeitursprung T_0 festgelegt, so heisst ein Koordinatensystem

$$(T_0, O);\ (\vec{e}, \vec{0}),\ (\vec{0}, \vec{e}_1),\ (\vec{0}, \vec{e}_2),\ (\vec{0}, \vec{e}_3)$$

Galileisch, falls $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ porthogonale Basis des pro-euklidischen Vektorraums $\mathcal{V}_R$ ist.

22.5 Galilei-Abbildungen

Verfährt man mit $\mathcal{A}'_R$ ebenso, so kann man die Familie $\phi(T) : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ $(T \in \mathcal{Z})$ von Abbildungen auch als Abbildung verstehen

$$\phi : \mathcal{A}' = \mathcal{Z} \times \mathcal{A}'_R \to \mathcal{A} = \mathcal{Z} \times \mathcal{A}_R \quad \text{mit} \quad \phi(T,Q) = (T, \phi(T)(Q))$$

Ist die Bewegung gleichmässig, so nennen wir ϕ eine *Galilei-Abbildung*

Lemma 22.4 *Sei $\phi : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ eine Abbildung zwischen Galileischen Raumzeiten. Dann sind äquivalent*

- *ϕ ist Galileisch*
- *$\phi : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ ist affin und es gilt*
  - *$\phi((T,Q) = (T, P(T))$ mit passenden $P(T)$ für alle (T,Q)*
  - *Für ein/alle $T_0 \in \mathcal{Z}$ ist die Abbildung $Q \mapsto P$ mit $(T_0, P) = \phi(T_0, Q)$ eine Ähnlichkeitsabbildung von $\mathcal{A}'_R$ auf $\mathcal{A}_R$*
- *ϕ ist affin und bzgl. eines/jedes Paares Galileischer Koordinatensysteme β und α von $\mathcal{A}'$ bzw. $\mathcal{A}$ mit Ursprüngen (T_0, O') und $(T_0, O) = \phi(T_0, O')$ und Zeitbasis $\vec{e}$ wird ϕ beschrieben durch*

$$\begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \phi(T,Q)^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad \textit{mit} \quad \begin{pmatrix} t' \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = (T,Q)^\beta$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \textit{Drehstreckungsmatrix}$$

Dabei sind a_{10}, a_{20}, a_{30} gerade die Koordinaten des Vektors $\vec{v}(\phi)$ bzgl. des $\mathcal{V}_R$-Anteils des Koordinatensystems α.

Korollar 22.5 *Bei einer Galilei-Abbildung $\phi : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ ist der "Geschwindigkeitsvektor" $\vec{v}(\phi)$ für die Bewegung von $\mathcal{A}'$ relativ zu $\mathcal{A}$ bzgl. der Zeitbasis $\vec{e}$ bestimmt durch*

$$\phi_0(\vec{e}, \vec{0}) = (\vec{e}, \vec{v})$$

Man kann die Beziehung zwischen den Koordinaten von Bild (ungestrichen) und Urbild (gestrichen) auch so schreiben

$$t = t', \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{pmatrix}$$

wie das bei der Galilei-"Transformation" üblich ist - wer will, kann dann auch die gestrichenen Koordinaten durch die ungestrichenen ausdrücken. Man darf aber nicht vergessen, dass es sich um die Beschreibung einer (affinen) Abbildung handelt, nicht um Transformation von Koordinaten. Die Bahn des Bildes des Ursprungs O' von $\mathcal{A}'_R$ ist eine Gerade in $\mathcal{A}_R$

$$\{\phi(T)(O') \mid T \in \mathcal{Z}\} = \mathbb{R}\vec{v}(\phi) + O$$

Statt der Bahn kann man ihren Graphen in der Raumzeit $\mathcal{A}$ betrachten, die Gerade

$$\{(T, \phi(T)(O')) \mid T \in \mathcal{Z}\} = \mathbb{R}(\vec{e}, \vec{v}(\phi)) + (T_0, O)$$

Beweis. Sei ϕ Galileisch, $T_i = t_i\vec{e} + T_0$ und $\lambda\overrightarrow{(T_1, Q_1)\,(T_2, Q_2)} = \overrightarrow{(T_3, Q_3)\,(T_4, Q_4)}$. Dann

$$\overrightarrow{\phi(T_3, Q_3)\,\phi(T_4, Q_4)} = \overrightarrow{(T_3, \phi(T_3)(Q_3))\,(T_4, \phi(T_4)(Q_4)}$$
$$= (\overrightarrow{T_3T_4},\ \overrightarrow{t_3\vec{v} + \phi(T_0)(Q_3)\ t_4\vec{v} + \phi_0(T_0)(Q_4)}) = (\overrightarrow{T_3T_4},\ (t_4{-}t_3)\vec{v}{+}\overrightarrow{\phi(T_0)(Q_3)\,\phi(T_0)(Q_4)})$$
$$= (\lambda\overrightarrow{T_1T_2},\ \lambda(t_2{-}t_1)\vec{v}{+}\lambda\overrightarrow{\phi(T_0)(Q_1)\,\phi(T_0)(Q_2)}) = \lambda(\overrightarrow{T_1T_2},\ (t_2{-}t_1)\vec{v}{+}\overrightarrow{\phi(T_0)(Q_1)\,\phi(T_0)(Q_2)})$$
$$= \lambda\overrightarrow{(T_1, \phi(T_1)(Q_1))\,(T_2, \phi(T_2)(Q_2))} = \lambda\overrightarrow{\phi(T_1, Q_1)\,\phi(T_2, Q_2)}$$

Die weiteren Eigenschaften sind offensichtlich. Setzt man diese voraus, so ergibt sich die Matrixbeschreibung sofort. Und aus dieser folgt, dass ϕ Galileisch ist. Die Aussage über $\vec{v}(\phi)$ folgt, wenn man $T = T_0$ und $Q = O'$ einsetzt. □

22.6 Kegel der Erreichbarkeit

Welche weitere Struktur auf einer einzelnen Raum-Zeit ergibt sich, wenn wir physikalische Fragestellungen einbeziehen. Z.B. die, welche Raum-Zeit-Punkte in $\mathcal{A}$ von O aus erreichbar sind, wenn man sich maximal mit einer Geschwindigkeit c bewegen kann (als Licht oder auf dem Fahrrad) - bezogen auf das gewählte Längenmass $|\ |_R$ und Zeitmass $|\ |_Z$. Diese Raum-Zeit-Punkte gehören gerade zu folgendem Kegel

$$\{\vec{x} + O \mid \vec{x} \in \mathcal{V}\ |\vec{x}_R|_R \leq c|\vec{x}_Z|_Z,\ \vec{x}_Z \text{ positiv}\}$$

Der Kegel ist schon durch seinen Mantel

$$K_c^+ + O \quad \text{wobei } K_c^+ = \{\vec{x} \in \mathcal{V} \mid |\vec{x}_R|_R = c|\vec{x}_Z|_Z,\ \vec{x}_Z \text{ positiv}\}$$

eindeutig bestimmt: die positive Zeitachse $\{\vec{z} \in \mathcal{V}_Z \mid \vec{z} \text{ positiv}\} + O$ liegt im Inneren des Kegels.

Lemma 22.6 *Die pro-euklidische Struktur des Unterraums $\mathcal{V}_R$ von $\mathcal{V}$ ist schon eindeutig bestimmt, wenn man die Orientierung und einen einzigen 'Kegel' K_c^+ kennt.*

Die Geschwindigkeit c und Längen- und Zeiteinheit braucht man dabei nicht zu kennen. Beweis: Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}_R$ gilt

$$\begin{aligned}\vec{x} \sim \vec{y} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt positives } \vec{t} \in \mathcal{V}_Z:\ \vec{x} + \vec{t} + O \in K_c^+ \text{ und } \vec{y} + \vec{t} + O \in K_c^+ \\ &\Leftrightarrow \quad \text{für alle positiven } \vec{t} \in \mathcal{V}_Z:\ \vec{x} + \vec{t} + O \in K_c^+ \Leftrightarrow \vec{y} + \vec{t} + O \in K_c^+\end{aligned} \qquad \square$$

Lemma 22.7 *Sei das Verhältnis zwischen Längen- und Zeiteinheit gegeben. Zu jeder Geschwindigkeit c gibt es eine quadratische Form Q auf $\mathcal{V}$ mit*

$$K_c^+ = \{\vec{x} \mid Q(\vec{x}) = 0,\ \vec{x}_Z \textit{ positiv}\}$$

Diese ist bis auf einen Faktor $r > 0$ eindeutig bestimmt: mit gegebenem Längen- und Zeitmass gilt

$$Q(\vec{x}) = r(|\vec{x}_R|_R^2 - c^2|\vec{x}_Z|_Z^2)$$

Umgekehrt ist c durch K_c eindeutig bestimmt. Die Einschränkung von Q auf $\mathcal{V}_R$ ist positiv definit und passt zu der pro-euklidischen Struktur:

$$\vec{x} \sim \vec{y} \Leftrightarrow Q(\vec{x}) = Q(\vec{y}) \quad \textit{für } \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}_R$$

Die Einschränkung von Q auf $\mathcal{V}_Z$ ist negativ definit. Für die zugehörige Bilinearform Φ gilt $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ für $\vec{x} \in \mathcal{V}_Z$ und $\vec{y} \in \mathcal{V}_R$.

Dabei ist für zwei Längen bzw. Zeitmessungen $|\ |_{Ri}$ und $|\ |_{Zi}$ dasselbe Verhältnis zwischen Längen- und Zeiteinheit gegeben, wenn für ein/jedes Paar von (Nicht-Null) Vektoren $\vec{x}_R \in \mathcal{V}_R$ und $\vec{x}_z \in \mathcal{V}_Z$ gilt

$$\frac{|\vec{x}_R|_{R1}}{|\vec{x}_Z|_{Z1}} = \frac{|\vec{x}_R|_{R2}}{|\vec{x}_Z|_{Z2}}$$

Eine Raumzeit zusammen mit vorgegebenem $c > 0$ (der *Lichtgeschwindigkeit*) und Verhältnis von Längen- und Zeiteinheit heisse eine *Einstein-Raumzeit* und die zugehörigen Q bzw. Φ *Minkowski-(Bilinear)-Formen.* Beweis. Definiere die *Standard-Minkowski-Form* durch

$$Q(\vec{x}) = |\vec{x}_R|_R^2 - c^2|\vec{x}_Z|_Z^2$$

und rechne nach, dass Q quadratische Form mit allen gewünschten Eigenschaften ist. Sei nun Q' eine weitere quadratische Form, die denselben positiven Kegel definiert - und damit auch denselben asymptotischen (Doppel)Kegel. Nach Lemma 22.3 gibt es $r \neq 0$ mit $Q' = rQ$. Dass die positiven Kegel dieselben sind, besagt $r > 0$. □

Korollar 22.8 *Für einen Raum-Zeit-Punkt $P = \vec{x} + O$ gilt*

$$P \textit{ liegt im } \left\{ \begin{array}{l} \textit{Inneren} \\ \textit{Mantel} \\ \textit{Äusseren} \end{array} \right\} \textit{ des Kegels } K_c + O \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{ll} Q(\vec{x}) < 0 & \text{(zeitartig)} \\ Q(\vec{x}) = 0 & \text{(lichtartig)} \\ Q(\vec{x}) > 0 & \text{(raumartig)} \end{array} \right.$$

Die Geraden mit zeit- bzw. lichtartigem Richtungsvektor sind dann die Graphen physikalisch möglicher gleichmässiger Bewegungen. Betrachtet man auch die Punkte, von denen aus O erreichbar ist, so kommt man zum Doppelkegel

$$K_c = \{\vec{x} \mid |\vec{x}_R|_R = c|\vec{x}_Z|_Z\}$$

Ist dieser durch die quadratische Form Q gegeben, $K_c = \{\vec{x} \mid Q(\vec{x}) = 0\}$, so wird der zugehörige positive Kegel genau dann durch Q definiert ($K_c^+ = \{\vec{x} \mid Q(\vec{x}) = 0,\ \vec{x}_Z$ positiv$\}$), wenn es einen zeitartigen Vektor $\vec{y}$ gibt mit $Q(\vec{y}) < 0$.

22.7 Einstein-Basen

Sei $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ eine Basis der Einstein-Raumzeit $\mathcal{A}$ wobei $\vec{e}_0$ positiv orientierte Basis von $\mathcal{V}_Z$ und $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ porthogonale Basis von $\mathcal{V}_R$ ist. Insbesondere ist sie positiv orientiert und es gilt bzgl. jeder Minkowski-Bilinearform

$$Q(\vec{e}_0) < 0, \;\; Q(\vec{e}_1) = Q(\vec{e}_2) = Q(\vec{e}_3) > 0, \;\; \Phi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 \text{ für } i \neq j$$

Wenn man $\vec{e}_0$ durch ein passendes Vielfaches ersetzt, erreicht man

$$|\vec{e}_0|_Z = |\vec{e}_i|_R =: s > 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

für ein/alle im richtigen Verhältnis stehenden Paare von Längen- und Zeit-Messung. Wir wollen dann von einer *Einstein-Basis* sprechen. Positive Vielfache von Einstein-Basen sind wieder welche und für die Lichtgeschwindigkeit c gilt

$$|\vec{x}_R|^2 - c^2|\vec{x}_Z|^2 = s^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 x_0^2) \quad \text{für } \vec{x} = \sum_{i=0}^{3} x_i \vec{e}_i$$

d.h. bzgl. einer Einstein-Basis sind die Minkowski-Formen der Einstein-Raumzeit gerade die, die durch eine Matrix folgender Art gegeben sind

$$rs^2 \begin{pmatrix} -c^2 & O \\ O & E_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } r > 0$$

Offensichtlich ist eine Matrix genau dann Matrix einer Transformation zwischen Einstein-Basen, wenn sie von folgender Gestalt ist

$$\begin{pmatrix} a & O \\ O & aS \end{pmatrix} \quad \text{mit } a > 0, \; \mathtt{det} S = 1, \; S \text{ orthogonal}$$

22.8 Minkowski-Raum

Mathematische Abstraktion führt zum Begriff des *Minkowski-Raums*: Ein vierdimensionaler orientierter reeller Vektorraum V (und zugehörigem affinen Raum $\mathcal{A}$) mit symmetrischer Bilinearform Φ (und zugehörigem Q) der Signatur $(3, 1)$ einer "Lichtgeschindigkeit" $c > 0$ und einem der beiden Zeitkegel von Q, dem "Zukunftskegel" Z^+.

Eine *Einstein-Basis* $\vec{e}_0, \ldots, \vec{e}_3$ des Minkowski-Raums ist dann eine positive orientierte Basis $\vec{e}_0, \ldots, \vec{e}_3$ mit

$$\Phi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad \text{(Q-orthogonal)}$$

$$Q(\vec{e}_1) = Q(\vec{e}_2) = Q(\vec{e}_3) > 0, \;\; Q(\vec{e}_0) = \frac{-1}{c^2} Q(\vec{e}_1) \in Z^+$$

- d.h. $\vec{e}_0$ soll in positiver Zeitrichtung sein. Nach dem Trägheitssatz von Sylvester, wird jede Q-orthogonale Basis zur Einstein-Basis nach passender Umnummerierung und Streckung. Jeder Einstein-Basis kann man eine Einstein-Raum-Zeit mit Lichtgeschwindigkeit c zuordnen

$$\mathcal{V}_Z = R\vec{e}_0, \ \ \mathcal{V}_R = \mathbb{R}\vec{e}_1 + \mathbb{R}\vec{e}_2 + \mathbb{R}\vec{e}_3$$

$$|\vec{y}|_R = \sqrt{Q(\vec{y})} \ \text{ für } \vec{y} \in \mathcal{V}_R, \ \ |\vec{z}|_Z = \sqrt{-Q(\vec{z})} \ \text{ für } \vec{z} \in \mathcal{V}_Z$$

und den durch die Basis gegebenen Orientierungen. Insbesondere hat man

$$Q(\vec{x}) = r(|\vec{x}_R| - c^2|\vec{x}_Z|, \quad \vec{x} = \vec{x}_R + \vec{x}_Z, \vec{x}_R \in \mathcal{V}_R, \, \vec{x}_Z \in \mathcal{V}_Z$$

Korollar 22.9 *Zu jeder Einstein-Raumzeit erhält man einen Minkowski-Raum, wenn man Q nach Lemma 22.7 wählt. Mit einer gegebenen Einstein-Basis kann man aus diesem Minkowski-Raum die Einstein-Raumzeit zurückgewinnen.*

Das rechtfertigt die Definition

$$\begin{array}{lcl} Q(\vec{x}) < 0 & \Leftrightarrow & \vec{x} \textit{ zeitartig} \\ Q(\vec{x}) = 0 & \Leftrightarrow & \vec{x} \textit{ lichtartig} \\ Q(\vec{x}) > 0 & \Leftrightarrow & \vec{x} \textit{ raumartig} \end{array}$$

$$K^+ = \{\vec{x} \in V \mid Q(\vec{x}) = 0 \text{ und es gibt raumartiges } \vec{p} \text{ und } \vec{z} \in Z^+ \text{ mit } \vec{x} = \vec{z} + \vec{p}\}$$

Korollar 22.10 *Ein Minkowski-Raum ist durch den unterliegenden Vektorraum und den "Lichtkegel" K^+ eindeutig bestimmt - dieser ist der Rand von Z^+ - bis auf Skalierungsfaktor.*

Lemma 22.11 *In einem Minkowski-Raum seien $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ unabhängige raumartige Vektoren. Dann gibt es eine Einstein-Basis $\vec{e}_0, \ldots, \vec{e}_3$ mit $\mathbb{R}\vec{a}_2 + \mathbb{R}\vec{a}_3 = \mathbb{R}\vec{e}_2 + \mathbb{R}\vec{e}_3$. Ebenso kann jeder Vektor $\vec{e}_0 \in Z^+$ zur Einstein-Basis ergänzt werden.*

Beweis. Sei $\vec{e}^{\,0}_0, \ldots, \vec{e}^{\,0}_3$ eine Einstein-Basis. Es gibt raumartiges $\vec{a}_1 \in \{\vec{e}^{\,0}_1, \vec{e}^{\,0}_2, \vec{e}^{\,0}_3\}$ so, dass $U = \mathbb{R}\vec{a}_1 + \mathbb{R}\vec{a}_2 + \mathbb{R}\vec{a}_3$ 3-dimensional ist. Nun ist $\Phi|U$ ein Skalarprodukt, also gibt es nach Gram-Schmidt eine bzgl. Φ orthonormale Basis $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1$ von U wie gewünscht. $\vec{e}_0$ findet man nach demselben Rezept

$$\vec{e}_0 = \vec{e}^{\,0}_0 = \sum_{i=1}^{3} \Phi(\vec{e}^{\,0}_0, \vec{e}_i)\vec{e}_i$$

Um die positive Orientierun zu erhalten, muss man ggF. $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ vertauschen. □

22.9 Lorentz-Abbildungen

Bei Galileisch gegeneinander bewegten Räumen bzw. Raumzeiten ist zu einer in $\mathcal{A}'$ beobachten Geschwindigkeit einer Bewegung beim Wechsel der Beschreibung zu $\mathcal{A}$ diese Geschwindigkeit in die Einheiten von $\mathcal{A}$ umzurechnen und die in $\mathcal{A}$ ausgedrückte Geschwindigkeit der Relativbewegung von $\mathcal{A}'$ bzgl. $\mathcal{A}$ zu addieren. Bei gleicher Bewegungsrichtung addieren sich also die Beträge der Geschwindigkeiten. Geht man davon aus, dass es in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ jeweils eine maximale "physikalisch beobachtbare" Geschwindigkeit gibt (die Lichtgeschwindigkeit), und dass diese bei der Umrechnung ineinander überzugehen haben, so ergibt sich ein Widerspruch, wenn die beachtete Geschwindigkeit diese Maximalgeschwindigkeit ist und die Relativgeschwindigkeit gleichgerichtet und nicht Null.

Somit ist das Konzept zur Beschreibung von gleichmässiger Relativbewegung abzuwandeln. Wir bleiben bei der Beschreibung als affine Abbildung der einen Raumzeit in die andere. Nur verlangen wir jetzt, dass die Licht-Ausbreitungs-Kegel dabei ineinander übergehen sollen. Das ist theoretisch durch das Relativiätsprinzip im Verein mit dem Prinzip der "Konstanz der Lichtgeschwindigkeit" zu begründen, empirisch z.B. durch das Michelson-Morley Experiment. Die kegelförmige Ausbreitung bedeutet natürlich auch, dass die Raumzeiten "inertial" sein sollen - was damit gemeint ist, kann nur ein Physiker wissen.

- $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ sind affine Minowski-Räume mit 'Licht-Geschwindigkeiten' c und c', 'Licht-Kegeln' K_c^+ und $K_{c'}'^+$ und Zukunfts-Kegeln Z^+ und Z'^+.
- $\phi : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ ist eine bijektive affine Abbildung .

(i) ϕ ist orientierungserhaltend, d.h. ϕ_0 bildet positiv orientierte Basen von $\mathcal{V}'$ auf positiv orientierte Basen von $\mathcal{V}$ ab.

(ii) ϕ_0 bildet mindestens einen Vektor aus Z'^+ in Z^+ ab

(iii) $\phi_0(K'^+) = K^+$

Eine solche Abbildung soll eine *Lorentz-Abbildung* heissen.

Satz 22.12 *Eine orientierungserhaltende bijektive affine Abbildung $\phi : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ mit (ii) zwischen Minkowski-Räumen ist genau dann eine Lorentz-Abbildung wenn es ein (eindeutig bestimmtes) $r > 0$ so gibt, dass*

$$Q(\phi_0\vec{y}) = rQ'(\vec{y}) \quad \textit{für alle } \vec{y} \in V' \ \textit{ und somit } \Phi(\phi_0\vec{y}, \phi_0\vec{z}) = r\Phi'(\vec{y}, \vec{z})$$

Beweis. Sei Φ eine Lorentz-Abbildung. Wir definieren auf V'

$$\Phi''(\vec{x}, \vec{y}) = \Phi(\phi_0\vec{x},\, \phi_0\vec{y})$$

Dann ist sofort klar, dass es sich um eine symmetrische Bilinearform handelt. Für die zugehörige quadratische Form gilt

$$Q''(\vec{y}) = 0 \ \Leftrightarrow\ Q(\phi_0\vec{y}) = 0 \ \Leftrightarrow\ Q'(\vec{y}) = 0$$

Also definieren Q' und $\varepsilon Q''$ mit passendem $\varepsilon = \pm 1$ denselben Licht-Kegel. Nach Lemma 22.6 gibt es $r > 0$ mit $\varepsilon Q'' = rQ'$, also $Q(\phi_0\vec{y}) = Q''(\vec{y}) = \varepsilon r Q'(\vec{y})$. Wegen (ii) geht mindestens ein zeitartiger Vektor in einen zeitartigen über, folglich $\varepsilon = 1$. In der umgekehrten Richtung ist klar, dass die Doppelkegel ineinander übergehen, wegen (ii) aber auch die Licht-Kegel. $\square$

22.10 Lorentz-Matrizen

Wir wollen Lorentz-Abbildungen bzgl. geeigneter Koordinatensysteme beschreiben. Glücklicherweise lassen sich die so wählen, dass zwei der räumlichen Koordinaten problemlos sind.

Lemma 22.13 *Zu jeder Lorentz-Abbildung $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ gibt es Einstein-Basen $\vec{e}_i$ von $\mathcal{A}$ und $\vec{e}_i{}'$ von $\mathcal{A}'$ so, dass*

$$\phi_0(\vec{e}_i{}') = \vec{e}_, \;\; \textit{für } i = 2,3. \quad \textit{Es folgt } \phi_0(\vec{e}_i') \in \mathbb{R}\vec{e}_0 + \mathbb{R}\vec{e}_1 \quad \textit{für } i = 0,1$$

Wir sprechen auch von einem *Einstein-Basis-Paar*. Beweis. Wir benötigen die leicht zu beweisende Dimensionsformel für Untervektorräume eines Vektorraums

$$\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$$

(ergänze eine Basis von $U \cap W$ zu einer von U und zu einer von W. Zusammen gibt das eine Basis von $U+W$). V und V' haben 3-dimensionale Untervektorräume W und W' raumartiger Vektoren. Da auch $\dim \phi_0^{-1}(W) = 3$ haben wir $\dim U \geq 2$ für $U = W' \cap \phi_0^{-1}(W)$. Also gibt es nach Lemma 22.11 eine Einstein-Basis $\vec{e}_i'$ von V' mit $U \supseteq \mathbb{R}\vec{e}_2{}' + \mathbb{R}\vec{e}_3{}'$. Wähle $\vec{e}_i = \phi_0(\vec{e}_i{}')$ für $i = 2,3$ und ergänze (mit Gram-Schmidt) zu Einstein-Basis von V. Da $\Phi'(\vec{e}_i{}', \vec{e}_j{}') = 0$ für $i = 0,1$ und $j = 2,3$ folgt für

$$\vec{x} = \phi_0 \vec{e}_i{}' = \sum_k x_k \vec{e}_k \;\; \text{dass} \;\; x_j Q(\vec{e}_j) = \Phi(\vec{x}, \vec{e}_j) = \Phi'(\vec{x}, \phi_0 \vec{e}_j{}') = 0$$

also $x_j = 0$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}\vec{e}_0 + \mathbb{R}\vec{e}_1$ $\Box$.

Satz 22.14 *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ Minkowski-Räume mit $c = c'$ und Einstein-Basis-Paar $\vec{e}_0, \ldots, \vec{e}_3$; $\vec{e}_0{}', \ldots, \vec{e}_3{}'$ mit $Q(\vec{e}_1{}') = Q'(\vec{e}_1{}') = 1$. Sei $\phi : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ eine affine Abbildung mit $\phi_0(\vec{e}_i{}') = \vec{e}_i$, $i = 2,3$. Dann sind äquivalent*

- *ϕ ist eine Lorentz-Abbildung*
- *(i), (ii) und $Q(\phi_0 \vec{y}) = Q'(\vec{y})$ für alle $\vec{y} \in V'$*
- *(i), (ii) und $Q(\phi_0 \vec{e}_0{}') = -c^2$, $Q(\phi_0 \vec{e}_i{}') = 1\, i \geq 1)$ und $\Phi(\phi_0 \vec{e}_i{}', \phi_0 \vec{e}_j{}') = 0\,(i \neq j)$*
- *ϕ_0 wird beschrieben durch eine Matrix (mit eindeutig bestimmtem) v mit $|v| < c$*

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & E_2 \end{pmatrix} \quad \textit{mit} \quad A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c^2} \\ v & 1 \end{pmatrix}$$

In Analogie zur Galilei-“Transformation” können wir die Lorentz-“Transformation” schreiben als

$$\begin{array}{rclcrcl}
t &=& \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(t' + \frac{v}{c^2}x_1') & \qquad & t' &=& \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(t - \frac{v}{c^2}x_1) \\
x_1 &=& \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(vt' + x_1') & & x_1' &=& \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(-vt + x_1) \\
x_2 &=& x_2' & & x_2' &=& x_2 \\
x_3 &=& x_3' & & x_3' &=& x_3
\end{array}$$

Beweis. Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen folgt aus Satz 22.12, da von $rQ'(\vec{e}_2{}') = Q(\phi\vec{e}_2{}') = Q(\vec{e}_2)$ auf $r = 1$ geschlossen werden kann. Auch bei zugehörigen Bilinearformen ergibt sich $r = 1$, womit die Äquivalenz zur dritten Aussage klar ist. Sei diese angenommen. Man kann die erste Bedingung ersetzen durch

$$Q(\phi_0 \frac{1}{c}\vec{e}_0{}') = -1$$

Sei nun

$$\phi_0 \frac{1}{c}\vec{e}_0{}' = s\frac{1}{c}\vec{e}_0 + r\vec{e}_1, \quad \phi_0\vec{e}_1{}' = q\frac{1}{c}\vec{e}_0 + p\vec{e}_1$$

also

$$(a)\;\; r^2 - s^2 = -1, \;\; p^2 - q^2 = 1, \;\; pr - qs = 0$$

Wegen der in (ii), (i) haben wir

$$(b)\;\; s > 0 \;\text{ und }\; ps - qr = \det\begin{pmatrix} s & q \\ r & p \end{pmatrix} > 0$$

Es folgt $p^2 = q^2 + 1$, $pr = qs$ und $s^2 = r^2 + 1$ woraus $(q^2 + 1)r^2 = p^2r^2 = q^2s^2 = q^2(r^2 + 1)$, also $r^2 = q^2$ und $p^2 = s^2$. Somit $r = \varepsilon q$ und $s = \delta p$ mit $\varepsilon, \delta \in \{1, -1\}$ und $(\delta - \varepsilon)q^2 + \delta = \delta p^2 - \varepsilon q^2 > 0$ also $\delta = 1$ d.h

$$p = s > 0, \quad q = r, \quad p^2 = q^2 + 1$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}, \; q = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \qquad \text{mit } k = \frac{q}{p} =: \frac{v}{c} \quad \text{wobei } k^2 < 1$$

Wegen

$$\phi_0\vec{e}_0{}' = p\vec{e}_0 + cq\vec{e}_1, \quad \phi_0\vec{e}_1{}' = q\frac{1}{c}\vec{e}_0 + p\vec{e}_1$$

erhalten wir die gewünschte Abbildungsmatrix und ihre Inverse mit

$$A = \begin{pmatrix} p & \frac{1}{c}q \\ cq & p \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} p & -\frac{1}{c}q \\ -cq & p \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix}$$

Umgekehrt sind für eine solche Matrix offenbar (a) und (b) erfüllt und damit die dritte Aussage. □

22.11 Resumee

Will man die Bewegung des Ursprungs O' von $\mathcal{A}'$ im Raum $\mathcal{A}$, d.h. die Abbildung $\vec{t'} \mapsto \phi(\vec{t'} + O')$ ($\vec{t'} \in \mathcal{V}'_Z$) beschreiben, so wähle man für $\mathcal{A}$ den Ursprung $\phi(O')$ und ein Einstein-Basis-Paar. Dann hat $\vec{t'} + O'$ die Koordinaten t' und $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$ und für die Koordinaten von $\phi(\vec{t'} + O')$ folgt

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t', \;\; x_1 = vt, \; x_2 = x_3 = 0$$

Also kann $v\vec{e}_1 = \phi_0(\vec{e}_0{}')_R$ (der räumliche Anteil des Bildes der Zeitbasis von $\mathcal{A}'$) als Geschwindigkeitsvektor der Relativbewegung von $\mathcal{A}'$ gegen $\mathcal{A}$ interpretiert werden. Dabei ergab sich aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und dem Begriff der Lorentz-Abbildung (und somit im wesentlichen aus dem Relativitätsprinzip), dass $|v| < c$. Anders ausgedrückt, der Geschwindigkeitsvektor ist zeitartig bzw. die Bahn der Bewegung liegt im Innern des Erreichbarkeitskegels. Dies bedeutet, dass mit grösserer Geschwindigkeit gegeneinander bewegte Koordinatensysteme zwar gedacht werden können, aber keine mit den genannten Prinzipien verträgliche Interpretation zulassen - von der physischen Realisierbarkeit einmal abgesehen.

Die Konsistenz der Prinzipien mit einem physikalischen Gesetz bedeutet nun die Invarianz des Gesetzes unter Lorentz-Abbildungen.

Korollar 22.15 *Um die Invarianz für ein Gesetz zu beweisen, hat man nur die im Satz 22.14 beschriebene Situation zu betrachten.*

Beweis. Beim Wechsel von einer Einstein Basis desselben Raums zu einer anderen handelt es sich ja nur um eine wirkliche und wahrhaftige Koordinatentransformation und man kann sich auf die koordinatenunabhängige geometrische Bedeutung der Begriffe berufen. □

Das Zwillingsparadox und damit Inertialsysteme nur im Rahmen der oben beschriebenen Begriffe behandeln zu wollen, wäre jedoch eindeutig unseriös.

22.12 Traumzeit

In der Literatur findet man meistens nur die Eine Raum-Zeit-Welt bzw. den Einen Minkowski-Raum. Dabei handelt es sich um den Koordinatenraum und der ist bei gegebenem c in der Tat eindeutig bestimmt - eine Quelle von Missverständnissen und Mogeleien. Beliebt ist der Missbrauch des Relativitätsprinzips: Sind x_i und x'_i Koordinaten desselben Punktes bzgl. zweier Koordinatensysteme, so wird derselbe Kegel durch $\sum_{i=1}^3 x_i^2 - c^2 x_0^2 = 0$ wie durch $\sum_{i=1}^3 x_i'^2 - c^2 x_0'^2 = 0$ beschrieben, woraus messerscharf $\sum_{i=1}^3 x_i^2 - c^2 x_0^2 = \sum_{i=1}^3 x_i'^2 - c^2 x_0'^2$ gefolgert wird. Oder, wenn man von der Bewegung ausgeht, so hat man $a'x' = x - vt$ und $ax = x' + vt'$ und suggeriert $a = a'$. Noch bequemer wäre es, gleich mit dem Relativiätsprinzip auf $v = -v$ zu schliessen.

Einsteins Schriften, insbesondere seine Orginalarbeit zeichnen sich dagegen durch eine sorgfältige physikalische Begründung aus - insbesondere wie die Längen- und

Zeitmessung in den unterschiedlichen Systemen korreliert werden kann. Und es ist sich dessen bewusst, dass der Koordinatenraum nur ein mathematisches Konstrukt ist. Minkowski gibt eine angemessene mathematische Interpretation. Erst Hermann Weyl behauptet, die Welt im Sinne der speziellen Relativitätstheorie wäre ein Minkowskiraum. Solide mathematische Behandlungen des Themas beginnen beim Minkowski-Raums und seinen Isometrieen, etwa B.Artmann, Lineare Algebra oder, ausführlicher B.Huppert, Angewandte Lineare Algebra und kommen zur physikalischen Bedeutung im Wege einer Illustration.

Wir betrachten nun eine Familie $(\mathcal{V}_i\ (i \in I)$ von (der Einfachheit halber) vektoriellen Einstein-Raumzeiten mit Minkowski-Form Q_i und zu jedem Paar $i \neq j$ eine lineare Lorentz-Abbildung $\phi_i : \mathcal{V}_i \to \mathcal{V}_j$. Insbesondere gibt es zu jedem i, j ein eindeutig bestimmtes $r_{ij} > 0$ mit $Q_j(\phi_{ij}\vec{x}) = r_{ij}Q_i(\vec{x})$. Wähle nun ein Element der Indexmenge I, es heisse 0. Ersetzen wir Q_i durch $Q'_i = r_{0i}Q_i$ und schreiben wir $Q = Q_0$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$, $r_{00} = 1$ und $\phi_{00} = id_{\mathcal{V}}$ so gilt

$$Q'_i(\phi_{0i}\vec{x}) = Q(\vec{x}), \quad Q'_j(\phi_{ij}\vec{x}) = r'_{ij}Q'_i(\vec{x}) \text{ mit } r'_{ij} = r_{0j}r_{ij}r_{0i}^{-1}$$

Wenn wir nun $(\mathcal{V}_i, Q'_i)$ via ϕ_{0i}^{-1} mit der “isometrischen Kopie” $(\mathcal{V}, Q)$ “identifizieren”, so heisst das, dass wir ϕ_{ij} ersetzen können durch

$$\phi'_{ij} = \phi_{0j}^{-1} \circ \phi_{ij} \circ \phi_{0i} \quad \text{und haben} \quad Q(\phi'_{ij}\vec{x}) = r'_{ij}Q(\vec{x})$$

d.h. es reicht aus der Sicht der Mathematik im Prinzip aus, einen einzigen Einstein-Raum und dessen Lorentz-Selbstabbildungen zu betrachten. Wären alle $r'_{ij} = 1$, so hätten wir nur *Isometrieen*. Das läuft aber darauf hinaus zu fordern, dass

$$r_{jk}r_{ij} = r_{ik} \quad \text{für alle } i, j, k$$

Hinreichend dafür ist die Voraussetzung

$$\phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik} \quad \text{für alle } i, j, k$$

die dann aber auch wieder physikalisch zu rechtfertigen wäre.

22.13 Methoden der Verwirrung

Die Beschreibung von Objekten der Linearen Algebra bzw. Physik durch Koordinaten und Matrizen ist nützlich und oft bequem. Dabei ist es unvermeidbar, dass identische Beschreibungsmittel unterschiedliche Objekttypen beschreiben können - z.B. kann ein Koordinatentripel sowohl die Richtung einer Bewegung wie auch Geschwindigkeit oder Beschleunigung beschreiben, obwohl das doch physikalisch einen nicht unerheblichen Unterschied ausmacht.

Wir wollen im Folgenden die wichtigsten Quellen rein mathematischer Verwirrung angeben. Dabei seien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$ affine Räume mit reellen Vektorräumen V und V' gleicher Dimension mit Koordinatensystemen α bzw. β mit Ursprung O_α bzw. O_β und Basis $\vec{\alpha}$ bzw. $\vec{\beta}$ (bisher haben wir den Basisanteil einfach auch mit α und β bezeichnet). Dabei bezeichne $\boldsymbol{x}$ die Koordinaten in $\mathcal{P}$ bzw. V bzgl. α bzw. $\vec{\alpha}$ und $\boldsymbol{x}'$ die in $\mathcal{P}'$ bzw. V' bzgl. β bzw. $\vec{\beta}$.

- Ist $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ (also auch $V = V'$) und $O_\alpha = O_\beta$ so wird die Koordinatentransformation im affinen Raum und im Vektorraum durch dieselbe Transformationsmatrix S beschrieben: $\boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}'$

- Ist $\phi : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ eine affine Abbildung, mit $\phi(O_\beta) = O_\alpha$, so werden ϕ und die zugehörige lineare Abbildung $\phi_0 : V' \to V$ durch dieselbe Abbildungsmatrix beschrieben: $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}'$ sind die Koordinaten des Bildes, wenn $\boldsymbol{x}'$ die Koordinaten des Urbildes sind

- Ist $V = V'$ so lässt sich der Koordinatentransformation $\boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}'$ die lineare Selbst-Abbildung $\boldsymbol{x}' \mapsto \boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}'$ des Koordinatenraumes $\mathbb{R}^n$ zuordnen. Will man von dieser Abbildung zurück zur Transformation, so muss man eine der beiden Basen $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ kennen.

- Ist $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ so lässt sich der Koordinatentransformation $\boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{v}$ die affine Selbst-Abbildung $\boldsymbol{x}' \mapsto \boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{v}$ des affinen Koordinatenraumes $\mathbb{R}^n$ zuordnen. Will man von dieser Abbildung zurück zur Transformation, so muss man eines der beiden Koordinatensysteme α, β kennen.

- Einer linearen Abbildung $\phi_0 : V' \to V$ mit Matrix A bzgl. $\vec{\beta}$ und $\vec{\alpha}$ ist die lineare Selbstabbildung $\boldsymbol{x}' \mapsto \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}'$ von $\mathbb{R}^n$ zugeordnet. Zur Rückgewinnung der Abbildung ϕ_0 muss man beide Basen $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ kennen.

- Einer affinen Abbildung $\phi : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ mit Matrix A und Translationsspalte $\boldsymbol{v}$ bzgl. β und α ist die affine Selbstabbildung $\boldsymbol{x}' \mapsto \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{v}$ von $\mathbb{R}^n$ zugeordnet. Zur Rückgewinnung der Abbildung ϕ muss man beide Koordinatensysteme α, β kennen.

Es ergeben sich hieraus vielfältige Möglichkeiten, Abbildungen als Koordinatentransformationen misszuverstehen und umgekehrt. Insbesondere wenn man alle Räume mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert.

23 Algortihmen und Beispiele

Transformation

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-i & 1-i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zeilenoperation $\leadsto^l$ wird nur links ausgeführt. Die Kombination mit adjungierter Spaltenoperation als $\leadsto^*$ notiert

$$\underset{S1 \leftrightarrow S2}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ i & 1 & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 1-i & 0 & 1-i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{Z1 \leftrightarrow^l Z2}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 1 & 1+i & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1-i & 0 & 1-i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{S3 := S3 + (i-1)S1}{\overset{S2 := S2 + iS1}{\leadsto}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2i & 2i & 1 & i & i-1 \\ 1-i & 1+i & 1+i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{Z3:=Z3-(i+1)Z1}{\overset{Z2:=Z2-iZ1}{\rightsquigarrow^l}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 2i & 2i & 1 & i & i-1\\ 2-2i & 1+i & 1+i & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\underset{S3:=S3-S2}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 3 & 2i & 0 & 1 & i & -1\\ 2-2i & 1+i & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\underset{Z3:=Z3-Z2}{\rightsquigarrow^l}\left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 3 & 2i & 0 & 1 & i & -1\\ -1-2i & 1-i & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_1^*\\ \boldsymbol{w}_2^*\\ \boldsymbol{w}_3^*\end{pmatrix}\cdot A\cdot(\,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\,)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -i & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 1 & i & 1+i\\ 0 & 1-i & 1-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & i & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -i & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2i & 0\\ i & 0 & 0\\ 1-i & 1+i & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & 0 & 0\\ 3 & 2i & 0\\ -1-2i & 1-i & 0\end{pmatrix}$$

$*$-Gauss und Definitheit

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 10 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{S3:=S3-\frac{1}{2}S1}{\overset{S2:=S2+\frac{1}{2}S1}{\rightsquigarrow^*}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 9 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\underset{S3:=S3-\frac{1}{3}S2}{\rightsquigarrow^*}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6}\\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{S2:=\frac{1}{3}S2\\ S3:=\frac{1}{\sqrt{2}}S3}}{\overset{S1:=\frac{1}{2}S1}{\rightsquigarrow^*}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{-5}{6\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right)$$

Cholesky-Zerlegung

$$\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ -2 & 10 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & 0 & 0\\ & & 0\\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ & & 0\\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & & 0\\ 1 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 3 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Orthonormalisierung

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ -3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 0\\ -4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}.\quad d_1=1,\ \boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{v}_1''=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \langle \boldsymbol{v}_1'' \,|\, \boldsymbol{v}_2 \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad d_2 = 2,\ \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_3' = \boldsymbol{v}_3 - \langle \boldsymbol{v}_1'' \,|\, \boldsymbol{v}_3 \rangle \boldsymbol{v}_1'' - \langle \boldsymbol{v}_2'' \,|\, \boldsymbol{v}_3 \rangle \boldsymbol{v}_2''$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - 4\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 4\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d_3 = 2,\ \boldsymbol{v}_3'' = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{v}_4' = \boldsymbol{v}_4 - \langle \boldsymbol{v}_1'' \,|\, \boldsymbol{v}_4 \rangle \boldsymbol{v}_1'' - \langle \boldsymbol{v}_2'' \,|\, \boldsymbol{v}_4 \rangle \boldsymbol{v}_2''$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ d_3 = 3, \quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_4'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergänzung Ergänze $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ zu ON-Basis von $\mathbb{R}^4$. Dazu Gram-Schmidt für beliebige Ergänzung zu Erzeugendensystem, z.B. $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$

$$\boldsymbol{e}_1 - \langle \boldsymbol{w}_1 \,|\, \boldsymbol{e}_1 \rangle \boldsymbol{w}_1 - \langle \boldsymbol{w}_2 \,|\, \boldsymbol{e}_1 \rangle \boldsymbol{w}_2 - \langle \boldsymbol{w}_3 \,|\, \boldsymbol{e}_3 \rangle \boldsymbol{w}_3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ON-Basis } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

QR-Zerlegung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} = QR, \quad Q = (\boldsymbol{v}_1'', \boldsymbol{v}_2'', \boldsymbol{v}_3'', \boldsymbol{v}_4'') = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{v}_1| & \langle \boldsymbol{v}_1'' \,|\, \boldsymbol{v}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{v}_1'' \,|\, \boldsymbol{v}_3 \rangle & \langle \boldsymbol{v}_1'' \,|\, \boldsymbol{v}_4 \rangle \\ 0 & |\boldsymbol{v}_2| & \langle \boldsymbol{v}_2'' \,|\, \boldsymbol{v}_3 \rangle & \langle \boldsymbol{v}_2'' \,|\, \boldsymbol{v}_4 \rangle \\ 0 & 0 & 1 & \langle \mathbf{0} \,|\, \boldsymbol{v}_4 \rangle \\ 0 & 0 & 0 & |\boldsymbol{v}_4| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Approximation

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{minimiere } |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|$$

1.Methode: $U = \mathbb{R}\boldsymbol{v}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_2$, löse $A\boldsymbol{x} = \pi_U(\boldsymbol{b})$

$$\pi_U(\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \ \boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.Methode: Löse $A^*A\boldsymbol{x} = A^*\boldsymbol{b}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 20 & 12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 16 & 8 \end{array}\right), \ \boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.Methode $A = QR$, also $A^*A\boldsymbol{x} = A^*\boldsymbol{b} \ \Leftrightarrow \ R^*Q^*QR\boldsymbol{x} = R^*Q\boldsymbol{b} \ \Leftrightarrow \ R\boldsymbol{x} = Q^*\boldsymbol{b}$, da $Q^*Q = E$.

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \ R^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = R^{-1}Q^*\boldsymbol{b} = R^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Probierverfahren

- Bestimme alle Eigenwerte λ von A in $\mathbb{C}$
- Strategie: Suche zu jedem λ ein möglichst grosses System von möglichst langen Jordan-Ketten so, dass die EV aus diesen Ketten unabhängig sind.
- Hat man für die verschiednen EW insgesamt $\dim V$ viele Vektoren gefunden, so hat man eine Jordanbasis von V.
- Ist der ER U_λ eindimensional, so bestimme EV $v_{\lambda 1}$ und iterativ

  $$v_{\lambda k+1} \text{ mit } v_k = \phi_\lambda(v_{\lambda k+1}) \text{ d.h. löse } \boldsymbol{v}_k^\alpha = (A - \lambda E)\boldsymbol{x}$$

  Geht's nicht mehr, so ist die Jordan-Basis von V_λ komplett
- Ist $\dim U_\lambda > 1$, so bestimme ggf. $\dim V_\lambda$. Z.B. nach dem Korollar.

- Wähle eine Basis von U_λ und versuche jeden dieser EV zu einer Jordankette zu ergänzen so, dass man $\dim V_\lambda$ (oder insgesamt $\dim V$) viele Vektoren erhält. Klappt's, so hat man Jordan-Basis von V_λ (bzw. V). Klappt's nicht gleich, so probiere andere Basis.

- Klappt's partout nicht, so rechne die EV und zwischenzeitlichen HV mit unbestimmen Koeffizienten. Genauer

  - bestimme s minimal mit $\text{Rang}\,(A - \lambda E)^s = \text{Rang}\,(A - \lambda E)^{s+1}$
  - Löse das folgende lineare Gleichungssystem in ns Unbekannten

    $$\mathbf{0} = (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 = (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{s-1} = (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_s$$

  - Jede Lösung aus dem gefundenen Fundamentalsystem entspricht einer λ-Jordankette maximaler Länge s.
  - Hat man davon $\dim U_\lambda$ viele, so ist die Jordan-Basis von V_λ komplett
  - Hat man weniger, so ergänze man die EV aus den gefundene Jordanketten zu einer Basis von U_λ und versuche durch rumprobieren zu den neuen EV weitere Jordan-Ketten zu finden.
  - Hilft Probieren nicht weiter, so bestimme die nächste Jordan-Blockgrösse $r < s$, d.h. $r < s$ maximal mit $\text{Rang}\,(A - \lambda E)^r > r \cdot$Anzahl der gefundenen λ-Jordanketten. Löse nun das System in nr Unbekannten

    $$\mathbf{0} = (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 = (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{r-1} = (A - \lambda E)\boldsymbol{x}_r$$

    so, dass die Schwanzstücke der Länge r der schon gefundenen Ketten in das Fundamentalsystem der Lösungen mit eingebaut werden. Und so weiter.