

Rahmen und erzeugende Quadrupel in modularen Verbänden

CHRISTIAN HERRMANN

In der vorliegenden Arbeit soll die Bedeutung der Ergebnisse von Nazarova [19] und Gel'fand–Ponomarev [6], die Klassifikation der endlichdimensionalen Vektorräume mit einem ausgezeichneten Quadrupel von Unterräumen betreffend, für die Untersuchung modularer Verbände mit vier Erzeugenden deutlich gemacht werden. Wesentlich hierfür ist der Begriff des Rahmens (v. Neumann [20]) – eine verbandstheoretische Abstraktion des projektiven Koordinatensystems. Es wird nämlich zu jedem unzerlegbaren Quadrupel von Defekt $\neq 0$ ein entsprechendes Quadrupel von Erzeugenden a, b, c, d eines von einem Rahmen frei erzeugten modularen Verbandes angegeben und durch Relationen der Form $u(a, b, c, d) = 1$, $v(a, b, c, d) = 0$ charakterisiert, wobei u und v benachbarte Elemente einer induktiv definierten Teilmenge B des freien modularen Verbandes $FM(4)$ mit vier Erzeugenden sind. Als Nebenergebnis stellt sich heraus, daß jeder von einem Rahmen erzeugte Verband auch von vier Elementen erzeugt wird.

Umgekehrt wird auch ein Teil jener Klassifikation mit rein verbandstheoretischen Mitteln hergeleitet. Zunächst erweisen sich die Elemente von B als perfekt im Sinne von Gel'fand and Ponomarev [7], d.h. sie nehmen bei einer endlichdimensionalen unzerlegbaren linearen Darstellung nur die Werte 0 und 1 an. Darüberhinaus erhält man zu jedem Homomorphismus von $FM(4)$ in einen abzählbar stetigen komplementierten modularen Verband eine direkte Zerlegung in Faktoren von Defekt 0 und in Faktoren obiger Art, die durch Relationen relativ zu einem Rahmen bestimmt sind, also vermöge des v. Neumannschen Koordinatisierungssatzes über einem regulären Ring ganz analog zum Vektorraumfall beschrieben werden können.

Gel'fand und Ponomarev [7] hatten vermutet, daß bis auf lineare Äquivalenz, d.h. wenn man $FM(4)$ nach allen in allen Verbänden von Untervektorräumen gültigen Gleichungen faktorisiert, die Menge der perfekten Elemente von $FM(4)$ gerade B ist – die von ihnen definierte Menge stimmt bis auf lineare Äquivalenz mit B überein. Nach Dlab und Ringel [5] (vgl. auch Dlab [25]) gibt es, wenn man

$FM(4)$ entsprechend einer festen Körpercharakteristik weiter faktorisiert, höchstens 16 perfekte Elemente außerhalb B . Es wird gezeigt, daß in diesem Fall B gerade die Menge aller perfekten Elemente ist und daß im allgemeinen alle weiteren perfekten Elemente in den Intervallen $[v, u]$, u/v ein Primquotient von B , liegen und bei vorgegebenem Rahmen den endlichen und koendlichen Mengen von Körpercharakteristiken $\neq 0$ entsprechen.

Über Teilaspekte dieser Arbeit ist in [10] und [14] berichtet worden. Wesentlich ist eine induktive Betrachtungsweise der Struktur von $FM(4)$, die unabhängig auch von W. Baur [24] entwickelt und zum Nachweis der Entscheidbarkeit der Theorie der Quadrupel von Untervektorräumen benutzt worden ist.

Der Verfasser ist der Vanderbilt University, Nashville, wo die erste Hälfte dieser Arbeit während eines Gastaufenthalts entstanden ist, zu Dank verpflichtet. Nicht weniger Dank gebührt dem Referenten für eine Vielzahl verbessernder Hinweise.

§0. Heuristik

Für einen Körper oder allgemeiner für einen Ring R mit 1 ist der kanonische Rahmen von Ordnung n das folgende System von Untermodul des freien Moduls R_R^n :

$$a_i = Re_i, \quad c_{ij} = R(e_i - e_j), \quad u = 0, \quad v = R^n \quad (1 \leq i, j \leq n, i \neq j),$$

wobei e_i den i -ten Einheitsvektor $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ von R^n bezeichnet. Allgemein heißt ein System a_i, c_{ij}, u, v ($1 \leq i, j \leq n, i \neq j$) von Elementen eines Verbandes ein Rahmen der Ordnung n falls gilt:

$$\begin{aligned} a_i \sum_{j \neq i} a_j &= u, & \sum_i a_i &= v, & a_i c_{ij} &= u, & a_i + c_{ij} &= a_i + a_j, \\ c_{ij} &= c_{ji}, & c_{ik} &= (a_i + a_k)(c_{ij} + c_{jk}) & \text{für } 1 \leq i, j, k \leq n, & i \neq j \neq k \neq i. \end{aligned}$$

Abstrakt kann man einen Rahmen der Ordnung n als ein System von Erzeugenden und Relationen auffassen.

Ein Rahmen in einem modularen Verband ist natürlich schon bestimmt durch die Elemente a_i ($1 \leq i \leq n$) und c_{ij} mit $(i, j) \in G$, wobei G ein vorgegebener zusammenhängender Graph auf $\{1, \dots, n\}$ ist. Ist G ein Baum, kann man statt des kanonischen Rahmens auch den Rahmen

$$a_i = Re_i, \quad c_{ij} = R(e_i + e_j), \quad u = 0, \quad v = R^n \quad (1 \leq i \leq n, (i, j) \in G)$$

betrachten. Das soll im Folgenden stets geschehen.

Nach [19] und [6] hat ein unzerlegbares Quadrupel $(V, U_1, \dots, U_4)$ von Unterräumen eines endlichdimensionalen Vektorraums stets Defekt 0, ± 1 oder ± 2 , wobei der Defekt $\sum \dim U_i - 2 \dim V$ ist. Für den Defekt -2 und -1 geben wir die Klassifikation hier an, die Fälle $+2$ und $+1$ sind dual.

Defekt -2 : $V = R^{2n+1}$

$$a = Re_1 + \dots + Re_n, \quad b = Re_{n+2} + \dots + Re_{2n+1}$$

$$c = R(e_2 + e_{2n+1}) + \dots + R(e_{n+1} + e_{n+2}), \quad d = R(e_1 + e_{2n}) + \dots + R(e_n + e_{n+1}).$$

Alle Permutationen führen zu isomorphen Quadrupeln. Um den induktiven Aufbau dieser Familie zu erkennen betrachten wir

$$q_3 = (a + d)(b + c) = Re_2 + \dots + Re_{2n}$$

$$aq_3 = Re_2 + \dots + Re_n, \quad bq_3 = Re_{n+2} + \dots + Re_{2n}$$

$$cq_3 = R(e_3 + e_{2n}) + \dots + R(e_{n+1} + e_{n+2}),$$

$$dq_3 = R(e_2 + e_{2n-1}) + \dots + R(e_n + e_{n+1}).$$

und

$$q_2 = (a + c)(b + d) = Re_1 + \dots + Re_{n-1} + R(e_n + e_{n+1} + e_{n+2}) + Re_{n+3} + \dots + Re_{2n+1}$$

$$aq_2 = Re_1 + \dots + Re_{n-1}, \quad bq_2 = Re_{n+3} + \dots + Re_{2n+1}$$

$$cq_2 = R(e_2 + e_{2n+1}) + \dots + R(e_{n-1} + e_{n+4}) + R(e_n + e_{n+1} + e_{n+2} + e_{n+3})$$

$$dq_2 = R(e_1 + e_{2n}) + \dots + R(e_{n-2} + e_{n+3}) + R(e_{n-1} + e_n + e_{n+1} + e_{n+2}).$$

Man bemerkt, daß die $2n-1$ -dimensionalen Quadrupel $(q_3, aq_3, \dots, dq_3)$ und $(q_2, aq_2, \dots, dq_2)$ zu der betrachteten Familie von Quadrupeln gehören. Dazu wähle man im ersten Fall das Koordinatensystem

$$a_2, \dots, a_{2n}, c_{3 \cdot 2n}, \dots, c_{n+1 \cdot n+2}, c_{2 \cdot 2n-1}, \dots, c_{n \cdot n+1}$$

und im zweiten

$$a_1, \dots, a_{n-1}, 2a_{n+1}, a_{n+3}, \dots, a_{2n+1}, c_{2 \cdot 2n+1}, \dots, c_{n-1 \cdot n+4},$$

$$2c_{n+1 \cdot n+3}, c_{1 \cdot 2n}, \dots, c_{n-2 \cdot n+3}, 2c_{n-1 \cdot n+1}$$

mit

$${}_2a_{n+1} = R(e_n + e_{n+1} + e_{n+2}), \quad {}_2c_{n+1 \ n+3} = R(e_n + e_{n+1} + e_{n+2} + e_{n+3})$$

und

$${}_2c_{n-1 \ n+1} = R(e_{n-1} + e_n + e_{n+1} + e_{n+2}).$$

In der Vereinigung dieser beiden ist das Koordinatensystem für den Raum V enthalten, d.h. man kann das ursprüngliche Quadrupel rekonstruieren. Außerdem führt die Anwendung der Reduktion " q_2 " auf $aq_3, \dots, dq_3$ ebenso wie die der Reduktion " q_3 " auf $aq_2, \dots, dq_2$ zu dem Quadrupel $aq_2q_3, \dots, dq_2q_3$ und zwar beidesmal mit demselben Koordinatensystem.

Defekt -1 : $V = R^{n+1}$

$$\begin{aligned} \text{(a) } n+1=2m \quad & a = R(e_2 + e_{m+1}) + \dots + R(e_m + e_{2m-1}) \\ & b = R(e_1 + e_{m+1}) + \dots + R(e_m + e_{2m}) \\ & c = Re_{m+1} + \dots + Re_{2m}, \quad d = Re_1 + \dots + Re_m \\ \text{(b) } n+1=2m+1 \quad & a = Re_{m+1} + \dots + Re_{2m+1}, \quad b = Re_1 + \dots + Re_m \\ & c = R(e_1 + e_{m+1}) + \dots + R(e_m + e_{2m}) \\ & d = R(e_1 + e_{m+2}) + \dots + R(e_m + e_{2m+1}). \end{aligned}$$

In beiden Fällen führen die Permutationen von b, c, d zu isomorphen Quadrupeln. Es gibt jeweils genau vier nichtisomorphe Quadrupel, die durch die Position des Teilraums von Dimension $m-1$ bzw. $m+1$ bestimmt sind.

Reduktion im Fall (a)

$$\begin{aligned} q_2 &= (a+c)(b+d) = Re_2 + \dots + Re_{2m} \\ aq_2 &= R(e_2 + e_{m+1}) + \dots + R(e_m + e_{2m-1}) \\ bq_2 &= R(e_2 + e_{m+2}) + \dots + R(e_m + e_{2m}) \\ cq_2 &= Re_{m+1} + \dots + Re_{2m}, \quad dq_2 = Re_2 + \dots + Re_m \\ q_3 &= (a+d)(b+c) = Re_1 + \dots + Re_{2m-1} \\ aq_3 &= R(e_2 + e_{m+1}) + \dots + R(e_m + e_{2m-1}) \\ bq_3 &= R(e_1 + e_{m+1}) + \dots + R(e_{m-1} + e_{2m-1}) \\ cq_3 &= Re_{m+1} + \dots + Re_{2m-1}, \quad dq_3 = Re_1 + \dots + Re_m. \end{aligned}$$

Reduktion im Fall (b)

$$q_2 = (a + c)(b + d) = Re_1 + \cdots + Re_m + Re_{m-2} + \cdots + Re_{2m+1}$$

$$aq_2 = Re_{m+2} + \cdots + Re_{2m+1}, \quad bq_2 = Re_1 + \cdots + Re_m$$

$$cq_2 = R(e_2 + e_{m+2}) + \cdots + R(e_m + e_{2m})$$

$$dq_2 = R(e_1 + e_{m+2}) + \cdots + R(e_m + e_{2m+1})$$

$$q_3 = (a + d)(b + c) = Re_1 + \cdots + Re_{2m}$$

$$aq_3 = Re_{m+1} + \cdots + Re_{2m}, \quad bq_3 = Re_1 + \cdots + Re_m$$

$$cq_3 = R(e_1 + e_{m+1}) + \cdots + R(e_m + e_{2m})$$

$$dq_3 = R(e_1 + e_{m+2}) + \cdots + R(e_{m-1} + e_{2m}).$$

Alle diese abgeleiteten Quadrupel lassen sich nach geeigneter Permutation als n -dimensionale Glieder dieser Familie auffassen, wenn man die Koordinaten

$$a_{\psi i}, c_{\psi i \psi j}$$

benutzt. Dabei ist ψ eine injektive Abbildung von $\{1, \dots, n\}$ in $\{1, \dots, n+1\}$ und zwar

$$\psi i = i + 1 \text{ bzw. } \psi i = \begin{cases} i + m & i < m \\ i - m + 1 & i \geq m \end{cases} \quad \text{im Falle (a)}$$

$$\psi i = \begin{cases} i & i \leq m \\ i + 1 & i > m \end{cases} \quad \text{bzw. } \psi i = \begin{cases} m + i & i \leq m \\ i - m & i > m \end{cases} \quad \text{im Falle (b).}$$

Auch hier führt die weitere Reduktion mit q_3 bzw. q_2 zu demselben Quadrupel $aq_2q_3, \dots, dq_2q_3$ und demselben Koordinatensystem.

§1. Einige Verbandspolynome

Sei F der von vier Elementen $a = e_1, b = e_2, c = e_3, d = e_4$ frei erzeugte modulare Verband mit Null- und Einselement. Die Elemente f aus F können wir auf die übliche Weise als vierstellige algebraische Operationen $f(x_1, \dots, x_4)$ auffassen. Es sei

$$q_1 = (a + b)(c + d), \quad q_2 = (a + c)(b + d), \quad q_3 = (a + d)(b + c).$$

Für $i = 1, 2, 3$ bezeichne $f \mapsto f^i$ den Endomorphismus von F mit $1 \mapsto q_i, 0 \mapsto 0$ und

$e_j \mapsto e_j q_i$ für $1 \leq j \leq 4$. Wir definieren nun zwei Serien s und t von Elementen in F induktiv durch die Vorschrift:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, & s_1 &= a + b + c + d, & s_{n+1} &= s_n^1 + s_n^2 + s_n^3 \\ t_0 &= 1, & t &= (a + b + c)(a + b + d)(a + c + d)(b + c + d), & t_{n+1} &= t_n^1 + t_n^2 + t_n^3. \end{aligned}$$

Offenbar sind beide Polynome symmetrisch in allen Variablen. Wir werden im Folgenden die Abkürzung $\mathbf{n} = \{1, \dots, n\}$ benutzen.

LEMMA 1.1. *Es gelten*

- (1) $q_i q_j = q_j q_i$, d.h. $(f^i)^j = (f^j)^i$ für $i \neq j$ aus **3** und f aus F .
- (2) $s_{n+1} = s_n^i + s_n^j$ und $t_{n+1} = t_n^i + t_n^j$ für $i \neq j$ aus **3** und $n \geq 1$
- (3) $q_i s_{n+1} = s_n^i$ und $q_i t_{n+1} = t_n^i$ für i aus **3** und $n \geq 0$
- (4) $t_{n+1} \leq s_{n+1} \leq t_n \leq s_n$ für $n \geq 0$
- (5) $e_i e_j \leq s_n$ und $e_i e_j \leq t_n$ für $i \neq j$ aus **4** und $n \geq 0$.

Beweis. Drei einfache, aber wichtige Konsequenzen der Modularität sind

- (6) $x + y(x + z) = (x + y)(x + z) = x + z(x + y)$
- (7) $x(y + z) \leq y(x + z) + z(x + y) = (x + y)(x + z)(y + z)$
- (8) $w(x + y) + x(w + z) = (w + x)(x + y)(w + z)$.

Es sei darauf hingewiesen, daß, wenn in den folgenden Beweisen der besseren Lesbarkeit halber nur konkrete Vorgaben von i aus **3** betrachtet werden, dies stets durch die Symmetrien von F gerechtfertigt ist.

(1) erhält man sofort aus (8):

$$q_1^2 = [a(b + d) + b(a + c)][c(b + d) + d(a + c)] = q_1 q_2.$$

Der Fall $n = 0$ in (3)–(4) ist trivial: $q_i \leq t_1 \leq s_1 \leq t_0 = s_0 = 1$. Sei also $n = 1$. Die Definition ergibt

$$\begin{aligned} s_1^1 &= a(c + d) + b(c + d) + c(a + b) + d(a + b), \\ s_1^2 &= a(b + d) + b(a + c) + c(b + d) + d(a + c), \\ s_1^3 &= a(b + c) + b(a + d) + c(a + d) + d(b + c), \end{aligned}$$

also $s_1^1 + s_1^2 \geq s_1^3$ wegen (7). Weiterhin folgt mit (8)

$$q_1 s_1^2 \leq q_1 q_2 \leq (a+b)(c+d)(a+c) = a(c+d) + c(a+b) \leq s_1^1$$

und somit $q_1 s_2 = q_1(s_1^1 + s_1^2) = s_1^1$. $s_1^i \leq t_1$ und $s_1^i \leq q_j + q_k$ ($j \neq k$) lassen sich unmittelbar ablesen und ziehen $s_2 \leq t_1$ und $s_2 \leq q_j + q_k$ nach sich. Für die zweite Serie haben wir definitionsgemäß

$$t_1^1 = [a(c+d) + b(c+d) + c(a+b)][a(c+d) + b(c+d) + d(a+b)] \\ \times [a(c+d) + c(a+b) + d(a+b)][b(c+d) + c(a+b) + d(a+b)],$$

also insbesondere $t_1^1 \leq s_2$ und $t_2 \leq s_2$. Setzen wir

$$q = [a + b(c+d) + c][a(c+d) + b + d][a + c + d(a+b)][b + c(a+b) + d]$$

und geht p aus q durch Vertauschung von b und c hervor, so erhalten wir mit der Modularität $t_1^1 = q_1 q$ und $t_1^2 = q_2 p$, also $t_1^1 + t_1^2 = qp(q_1 + q_2)$. Wegen $q_1 + q_2 \geq s_2 \geq t_1^3$ und der Symmetrie von F bleibt $q \geq t_1^3$ zu zeigen. Aus (6) ergeben sich jedoch $a + b(c+d) + c = a + d(b+c) + c \geq aq_3 + dq_3 + cq_3 \geq t_1^3$ und auf analoge Weise die restlichen Inklusionen. Schließlich haben wir $q_1 t_1^2 \leq q_1 q = t_1^1$, also $q_1 t_2 = q_1(t_1^1 + t_1^2) = t_1^1 + q_1 t_1^2 = t_1^1$. Damit sind (2)–(4) für $n \leq 1$ nachgeprüft und wir beenden den Beweis mit dem folgenden Induktionsschritt: Es sei $u = s$ oder $u = t$ und $i \neq j \neq k \neq i$; dann folgt wegen (1) und (2) $q_i u_n^i = q_i q_j u_n^j = q_i^j u_n^j = (q_i u_n)^j = (u_{n-1}^i)^j = u_{n-1}^i(aq_i q_j, \dots, dq_i q_j) = (u_{n-1}^i)^i = (q_i u_n)^i \leq u_n^i$. Aus der Induktionsannahme (3) folgt

$$u_n^k = (q_i u_n + q_j u_n)^k = q_i^k u_n^k + q_j^k u_n^k \leq u_n^i + u_n^j$$

also $u_{n+1} = u_n^i + u_n^j$. Hieraus folgt sofort $q_i u_{n+1} = q_i(u_n^i + u_n^j) = u_n^i + q_i u_n^j = u_n^i$. Der Nachweis von (4) ergibt sich nun sofort aus der Monotonie der Verbandspolynome. (5) zeigt man ebenfalls induktiv: Wir haben $ab \leq s_1$ und $ab = aq_2 b q_2 = (ab)^2 \leq s_2^2 \leq s_{n+1}$.

Sei im Folgenden M stets ein modularer Verband mit 0 und 1 als Konstanten und $a = e_1$, $b = e_2$, $c = e_3$, $d = e_4$ Elemente von M . Wir werden die Elemente von F und die ihnen unter dem kanonischen Homomorphismus entsprechenden Elemente von M in der Bezeichnung nicht unterscheiden.

LEMMA 1.2. (a) Gilt $t_1 = 1$, so folgt $\sum_{i \neq j} e_i = 1$ für alle j aus 4. (b) Gilt $s_2 = 1$, so folgt $q_i + q_k = 1$, $q_i = \sum_j e_j q_i$ und $e_i = \sum_j e_j q_j$ für $i \neq k$ aus 3. (c) Gilt $t_2 = 1$, so folgt $e_i = e_i q_j + e_i q_k$ für i aus 4 und $j \neq k$ aus 3.

Beweis. (a) ist trivial. (b) Wegen (3) gilt $\sum_i e_i q_i = s_1^i = q_i s_2 = q_i$, also auch $1 = s_2 = s_1^i + s_1^k = q_i + q_k$. Für $p = a(c+d) + a(b+d) + b + c$ haben wir $p \geq d(a+c)$ und $p \geq d(a+b)$ aus (6), also $p \geq s_1^1 + s_1^2 = 1$ und somit $aq_1 + aq_2 + aq_3 = a(c+d) + a(b+d) + a(b+c) = ap = a$. (c) Es gilt $t_1^i = q_i t_2 = q_i$, also insbesondere $a(c+d) + b(c+d) + d(a+b) = q_1$. Es folgt $a(c+d) + b + d \geq q_1 + q_2 = 1$ mit Teil (b). Daraus erhält man

$$aq_1 + aq_2 = a(c+d) + a(b+d) = a(a(c+d) + b + d) = a.$$

LEMMA 1.3. $s_n \geq s_m^*$ gilt für alle n und m , wobei f^* dual zu f .

HILFSSATZ 1.4. Für jedes subdirekt irreduzible homomorphe Bild von F tritt einer der folgenden Fälle ein:

- (a) Es gibt eine Permutation π von **4** mit $e_{\pi 1} + e_{\pi 2} = e_{\pi 3} + e_{\pi 4} = 1 = s_n$ und $e_{\pi 1} e_{\pi 2} = e_{\pi 3} e_{\pi 4} = 0 = s_n^*$ für alle n .
- (b) $0 = e_i e_j = \inf_{n < \infty} q_{n,1} q_{n,2} q_{n,3} = s_m^*$ für alle $i \neq j$ aus **4** und $m < \infty$ in $\mathcal{F}(F)$.
- (c) $1 = e_i + e_j = \sup_{n < \infty} q_{n,1}^* + q_{n,2}^* + q_{n,3}^* = s_m$ für alle $i \neq j$ aus **4** und $m < \infty$ in $\mathcal{F}(F)$.

Dabei sind die $q_{n,k}$ induktiv definiert durch $q_{0,k} = 1$ und $q_{n+1,k} = q_k(aq_{n,k}, bq_{n,k}, cq_{n,k}, dq_{n,k})$. Der Hilfssatz wiederholt das Lemma aus [13] abgesehen von der Aussage über die s_m und s_m^* . Diese ergibt sich mit Lemma 1.1 durch Induktion. Die Behauptung des Lemmas 1.3 folgt dann unmittelbar.

HILFSSATZ 1.5. Für $n \geq 1$ gilt $q_{n,k} = q_{n-1,k}^k$.

Beweis durch Induktion über n . Für $n = 1$ ist die Aussage per definitionem richtig. Sei $n \geq 1$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} q_{n+1,k} &= q_k(aq_{n,k}, \dots, dq_{n,k}) = q_k(aq_{n-1,k}^k, \dots, dq_{n-1,k}^k) \\ &= q_k(a^k q_{n-1,k}^k, \dots, d^k q_{n-1,k}^k) = (q_k(aq_{n-1,k}, \dots, dq_{n-1,k}))^k = q_{n,k}^k. \end{aligned}$$

§2. Quadrupel von Defekt -2

Entsprechend den Quadrupeln von Defekt -2 betrachten wir für einen Rahmen Φ der Ordnung $2n+1$ die Polynome

$$\begin{aligned} e_1^n(\phi) &= \sum_{i=1}^n a_i, & e_2^n(\phi) &= \sum_{i=n+2}^{2n+1} a_i, & e_3^n(\phi) &= \sum_{i=2}^{n+1} c_{i2n+3-i} \\ e_4^n(\phi) &= \sum_{i=1}^n c_{i2n+1-i}. \end{aligned}$$

SATZ 2.1. Sei $n \geq 0$ und π eine Permutation von **4**, M ein modularer Verband und e_i aus M . Dann sind äquivalent

(i) M wird von e_1, e_2, e_3, e_4 erzeugt und es gilt $t_n = 1, s_{n+1} = 0$.

(ii) Es gibt einen erzeugenden Rahmen ϕ der Ordnung $2n+1$ von M so, daß $\pi e_i = e_i^n(\phi)$ für $i = 1, \dots, 4$, gilt.

Überdies ist der Rahmen in (ii) eindeutig bestimmt.

Beweis durch Induktion. Auf Grund der Symmetrie von F braucht man jeweils nur den Fall zu betrachten, daß π die Identität ist. Für $n=0$ ist alles, für $n=1$ ist (ii) $\Rightarrow$ (i) trivial. Gilt (i), so erhält man den gesuchten Rahmen mit $a_1 = a, a_3 = b, c_{12} = d, c_{23} = c$ und $a_2 = (a_1 + c_{12})(a_3 + c_{13})$.

Zur Vorbereitung des Induktionsschrittes machen wir folgende Beobachtung: Sei $\phi: a_i, c_{ij}, 0, 1$ ein Rahmen der Ordnung $2n+1$ von M und $e_i = e_i^n(\phi)$. Seien ${}_3\phi$ und ${}_2\phi$ gegeben durch ${}_3a_i = a_i, {}_3c_{ij} = c_{ij}$ ($i, j \neq 1, 2n+1$), ${}_3u = 0$ und ${}_3v = q_3$ beziehungsweise ${}_2a_i = a_i, {}_2c_{ij} = c_{ij}$ ($i, j \neq n, n+1, n+2$), ${}_2u = 0, {}_2v = q_2, {}_2a_{n+1} = q_2(a_n + a_{n+1} + a_{n+2}), {}_2c_{n-1n+1} = q_2(c_{nn+1} + c_{n-1n+2})$ und ${}_2c_{n+1n+3} = q_2(c_{nn+3} + c_{n+1n+2})$.

Dann sind ${}_3\phi$ und ${}_2\phi$ Rahmen der Ordnung $2n-1$ und es gilt $q_k e_i^n(\phi) = e_i^{n-1}({}_k\phi)$ für i aus **4** und $k = 2, 3$.

Für $k=3$ ist dies offensichtlich wegen $q_3 = \sum_{i=2}^{2n} a_i$. Sei $k=2$. Es gilt $e_1 + e_3 = \sum_{i \neq n+1, n+2} a_i + c_{n+1n+2}, e_2 + e_4 = \sum_{i \neq n, n+1} a_i + c_{nn+1}$, also $q_2 = (e_1 + e_3)(e_2 + e_4) \geq a_i$ für $i \neq n, n+1, n+2$ und $q_2 = q_2 \sum a_i = \sum_{i \neq n, n+1, n+2} a_i + {}_2a_{n+1}$. Mit den üblichen Methoden des Rechnens in Rahmen erhält man

$$q_2 c_{nn+1} \leq \left(\sum_{i \neq n+1n+2}^r a_i + c_{n+1n+2} \right) c_{nn+1} = (a_n + c_{n+1n+2}) c_{nn+1}$$

$$= (a_n + (a_n + a_{n+1}) c_{n+1n+2}) c_{nn+1} = a_n c_{nn+1} = 0,$$

$${}_2a_{n+1} {}_2c_{n-1n+1} \leq q_2((a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) c_{n-1n+2} + c_{nn+1})$$

$$= q_2 c_{nn+1} = 0,$$

$$q_2 + c_{nn+1} = (e_2 + e_4)(e_1 + e_3 + c_{nn+1}) = e_2 + e_4 \geq a_{n+2}$$

und

$$\begin{aligned} {}_2a_{n+1} + {}_2c_{n-1n+1} &= q_2(q_2(a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) + c_{nn+1} + c_{n-1n+2}) \\ &= q_2((a_n + a_{n+1} + a_{n+2})(q_2 + c_{nn+1}) + c_{n-1n+2}) \\ &= q_2((a_n + a_{n+1} + a_{n+2})(e_2 + e_4) + a_{n+2} + c_{n-1n+2}) \\ &= q_2((a_n + a_{n+1} + a_{n+2})(e_2 + e_4) + a_{n-1} + a_{n+2}) \\ &= q_2(a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) = a_{n-1} + q_2(a_n + a_{n+1} + a_{n+2}) \\ &= {}_2a_{n-1} + {}_2a_{n+1}. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich $q_2 c_{n+1n+2} = 0$, ${}_2 a_{n+1} {}_2 c_{n+1n+3} = 0$ und ${}_2 a_{n+1} + {}_2 c_{n+1n+3} = {}_2 a_{n+1} + {}_2 a_{n+3}$. Also bestimmen die ${}_2 a_i$, ${}_2 c_{ij}$ ($i, j \neq n, n+1, n+2$) mit ${}_2 a_{n+1}$, ${}_2 c_{n-1n+1}$ und ${}_2 c_{n+1n+3}$ einen Rahmen ${}_2 \phi$ der Ordnung $2n-1$. Schließlich hat man $q_2 a_n \leq (e_2 + e_4)(a_n + a_{n+1})a_n = c_{nn+1}a_n = 0$ und $q_2 a_{n+2} = 0$. Aus den Definitionen folgt daher mit Modularität $q_2 e_i = e_i^{n-1}({}_2 \phi)$.

Wir schließen nun von $n-1$ auf $n \geq 2$. Gilt (ii) und sind ${}_2 \phi$ und ${}_3 \phi$ wie eben bestimmt, so haben wir nach der Induktionsannahme $t_{n-1}^2 = q_2$, $t_{n-1}^3 = q_3$ und $s_n^2 = s_n^3 = 0$. Wegen $n \geq 2$ gilt $q_2 + q_3 = 1$, also $t_n = t_{n-1}^2 + t_{n-1}^3 = 1$ und $s_{n+1} = s_n^2 + s_n^3 = 0$. Da für $k = 2, 3$ ${}_k \phi$ im Erzeugnis der $q_k e_i$ liegt und eindeutig bestimmt ist und da ϕ in ${}_2 \phi \cup {}_3 \phi$ enthalten ist, liegt ϕ im Erzeugnis der e_i und ist ebenfalls eindeutig bestimmt.

Gelte umgekehrt (i). Dann haben wir für $k = 2, 3$ $t_{n-1}^k = q_k t_n = q_k$ und $s_n^k = q_k s_{n+1} = 0$, also einen Rahmen ${}_k \phi$ mit $q_k e_i = e_i^{n-1}({}_k \phi)$ und ${}_k v = q_k$, der den von den $q_k e_i$ erzeugten Unterverband erzeugt. Die Notation sei so gewählt, daß ${}_3 \phi$ gegeben ist durch ${}_3 a_i$, ${}_3 c_{ij}$ mit $i, j \neq 1, 2n+1$ und ${}_2 \phi$ durch ${}_2 a_i$, ${}_2 c_{ij}$ mit $i, j \neq n, n+2$. Wenden wir nun die obigen Überlegungen auf ${}_2 \phi$ und ${}_3 \phi$ an, so erhalten wir Rahmen ${}_{32} \phi$ und ${}_{23} \phi$ der Ordnung $2n-3$ mit

$$e_i^{n-2}({}_{32} \phi) = q_2^2 e_i^{n-1}({}_2 \phi) = q_2 q_3 e_i = q_3^2 e_i^{n-1}({}_3 \phi) = e_i^{n-2}({}_{23} \phi)$$

Es folgt ${}_{32} \phi = {}_{23} \phi$, d.h. ${}_2 a_i = {}_3 a_i$ und ${}_2 c_{ij} = {}_3 c_{ij}$ für $2 \leq i, j \leq 2n$ und $i, j \neq n, n+1, n+2$. Weiterhin gilt $({}_2 a_1 + {}_2 a_{2n+1})q_3 = ({}_2 a_1 + {}_2 a_{2n+1})q_3^2 = 0$, da die obige Überlegung allgemein $q_3(a_1 + a_{2n+1}) = 0$ ergab. Definiert man nun $a_1 = {}_3 a_1$, $c_{ij} = {}_3 c_{ij}$ für $2 \leq i, j \leq 2n$ sowie $a_i = {}_2 a_i$ für $i = 1, 2n+1$, $c_{12n} = {}_2 c_{12n}$, $c_{22n+1} = {}_2 c_{22n+1}$ (bzw. $c_{14} = ({}_2 c_{13} + c_{23})(a_1 + a_4)$, $c_{25} = ({}_2 c_{35} + c_{34})(a_2 + a_5)$ falls $n = 2$), so sind die $a_1, \dots, a_{2n+1}$ unabhängig und wir erhalten wegen $n \geq 2$ einen Rahmen ϕ der Ordnung $2n+1$ mit $u = 0$ und $v = q_2 + q_3$. Wegen $t_2 = 1$ folgt mit Lemma 2.2 schließlich $v = 1$ und $e_i = q_2 e_i + q_3 e_i = e_i^n(\phi)$ für i aus **4**, da man $e_i^{n-1}({}_2 \phi) + e_i^{n-1}({}_3 \phi) = e_i^n(\phi)$ unmittelbar aus den Definitionen ablesen kann.

§3. Quadrupel von Defekt -1

Um die Quadrupel vom Defekt -1 ebenfalls verbandstheoretisch zu kennzeichnen, sei für einen Rahmen $\phi: a_i, c_{ij}$ der Ordnung n definiert:

$$\begin{aligned} \text{für } n = 2m: \quad f_1^n(\phi) &= \sum_{i=1}^{m-1} c_{1+i \ m+i}, & f_2^n(\phi) &= \sum_{i=1}^m c_{i \ m+i} \\ f_3^n(\phi) &= \sum_{i=m+1}^n a_i, & f_4^n(\phi) &= \sum_{i=1}^m a_i \end{aligned}$$

$$\text{für } n = 2m + 1: f_1^n(\phi) = \sum_{i=m+1}^n a_i, \quad f_2^n(\phi) = \sum_{i=1}^m a_i$$

$$f_3^n(\phi) = \sum_{i=1}^m c_{i \ m+i}, \quad f_4^n(\phi) = \sum_{i=1}^m c_{i \ m+1+i}$$

Weiterhin benötigen wir die folgenden Polynome: Für $i \neq j$ aus **4** sei $q_{ij} = (e_i + e_j) \sum_{k \neq i, j} e_k$ und für beliebiges f aus F sei $f^{ij} = f(aq_{ij}, bq_{ij}, cq_{ij}, dq_{ij})$. Ferner sei induktiv definiert

$$p_{0i} = 1, \quad p_{1i} = e_i + t_1, \quad p_{n+1 \ i} = \sum_{i \neq j} p_{nj}^{ij}.$$

Offenbar gilt $q_{ij} = q_{kl}$, falls $\{i, j\} = \{k, l\}$ oder $\{i, j, k, l\} = \mathbf{4}$, und $q_{1j} = q_{j-1}$.

LEMMA 3.1. *Es gelten*

$$(10) \quad p_{n+1 \ i} = p_{nj}^{ij} + p_{nk}^{ik} \quad \text{für } n \geq 1 \text{ und } i \neq j \neq k \neq i \text{ aus } \mathbf{4}$$

$$(11) \quad q_{ij} p_{n+1 \ i} = p_{nj}^{ij} \quad \text{für } n \geq 1 \text{ und } i \neq j \text{ aus } \mathbf{4}$$

$$(12) \quad t_n \leq p_{ni} \leq s_n \quad \text{für } n \geq 0 \text{ und } i \text{ aus } \mathbf{4}.$$

Beweis. Der Fall $n = 0$ und $t_1 \leq p_{1i} \leq s_1$ sind trivial. Für $\{i, j, k, l\} = \mathbf{4}$ gilt nach (7) $p_{1j}^{ij} + p_{1k}^{ik} = e_j q_{ij} + e_k q_{ik} = e_j(e_k + e_l) + e_k(e_j + e_l) \geq e_l(e_j + e_k) = p_{1l}^{il}$ sowie nach (1) und der trivialen Beziehung $q_{ik} \leq t_1$ $q_{ij} p_{1k}^{ik} \leq q_{ij} q_{ik} = q_{ik}^{ij} \leq t_1^{ij} \leq p_{1j}^{ij}$. Induktionsschritt mit 1.1(1): $p_{n+1 \ i}^{il} = (p_{n-1 \ j}^{ij} + p_{n-1 \ k}^{ik})^{il} = (p_{n-1 \ j}^{ik})^{il} + (p_{n-1 \ k}^{kj})^{il} \leq p_{nk}^{ik} + p_{nj}^{ij}$; $q_{ij} p_{n+1 \ i} = p_{nj}^{ij} + q_{ij} p_{nk}^{ik} = p_{nj}^{ij}$ da $q_{ij} p_{nk}^{ik} = (q_{kl} p_{nk})^{ik} = (p_{n-1 \ l}^{kl})^{ik} = (p_{n-1 \ l}^{il})^{kl} \leq p_{nj}^{il} = p_{nj}^{ij}$.

SATZ 3.2. Sei M ein modularer Verband, e_i aus M und gelte $t_n(e_1, e_2, e_3, e_4) = 0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) M wird von e_1, e_2, e_3, e_4 erzeugt und es gilt $s_n = 1$.

(ii) $p_{n1}, p_{n2}, p_{n3}, p_{n4}$ bilden eine direkte Zerlegung von M und für i aus **4** wird $[0, p_{ni}]$ von $e_1 p_{ni}, e_2 p_{ni}, e_3 p_{ni}, e_4 p_{ni}$ erzeugt.

Beweis. (i) folgt aus (ii) sofort mit (12). Die umgekehrte Implikation wird durch Induktion bewiesen. Der Fall $n = 0$ ist trivial und der Fall $n = 1$ ergibt sich aus $t_1 = \sum_i e_i \cdot \sum_{j \neq i} e_j$. Sei $n + 1 \geq 2$. Aus $s_{n+1} = 1$ folgt mit 1.1 $s_n^{ij} = q_{ij}$ also ist $p_{nk}^{ij} (k \in \mathbf{4})$ eine direkte Zerlegung es von den $e_k^{ij} (k \in \mathbf{4})$ erzeugten Unterverbandes. Wegen 1.2 haben wir für x aus $\{1, a, b, c, d\}$ $\sum_j x q_{ij} = x$ und somit

$$\sum_i x p_{n+1 \ i} \geq \sum_i x p_{nj}^{ij} \geq \sum_j x p_{nj}^{12} + \sum_j x p_{nj}^{13} + \sum_j x p_{nj}^{14} = x q_{12} + x q_{13} + x q_{14} = x.$$

Zum Nachweis der Unabhängigkeit der $p_{n+1\ i}$ (i aus **4**) bleibt – wieder wegen der vorhandenen Symmetrien – $p_{n+1\ 1} \cdot \sum_{j \neq 1} p_{n+1\ j} = 0$ zu zeigen. Wegen (10) gilt jedoch mit $g = p_{n1} + p_{n3} + p_{n4}$ und $h = p_{n1} + p_{n2} + p_{n4}$ $A := p_{n+1\ 1} \cdot \sum_{j \neq 1} p_{n+1\ j} = (p_{n2}^{12} + p_{n3}^{13})(p_{n1}^{21} + p_{n4}^{24} + p_{n1}^{31} + p_{n4}^{34} + p_{n2}^{42} + p_{n3}^{43}) = (p_{n2}^{12} + p_{n3}^{13})(g^{12} + h^{13})$. Da in einem modularen Verband ganz allgemein $a + c \leq e$ und $b + d \leq f$ $(a + b)(c + d) \leq (e + f)(a + f)(c + f)(b + e)(d + e) = e(a + f)(c + f) + f(b + e)(d + e) = (a + ef)(c + ef) + (b + ef)(d + ef)$ nach sich zieht, erhalten wir

$$A \leq (p_{n2}^{12} + q_{12}q_{13})(g^{12} + q_{12}q_{13}) + (p_{n3}^{13} + q_{12}q_{13})(h^{13} + q_{12}q_{13}).$$

Nun ist nach der Induktionsannahme für $i = 2, 3$ $p_{n1}^{1i}, p_{n2}^{1i}, p_{n3}^{1i}, p_{n4}^{1i}$ eine direkte Zerlegung des von $aq_{1i}, bq_{1i}, cq_{1i}, dq_{1i}$ erzeugten Unterverbandes, der insbesondere $q_{12}q_{13}, p_{ni}^{1i}, g^{1i}$ und h^{1i} enthält. Daraus folgert man $A \leq q_{12}q_{13}$ und $q_{13}g^{12} = q_{13}p_{n1}^{12} + q_{13}p_{n3}^{12} + q_{13}p_{n4}^{12}$ sowie $q_{12}h^{13} = q_{12}p_{n1}^{13} + q_{12}p_{n2}^{13} + q_{12}p_{n4}^{13}$. Wegen (11) haben wir für $1 \neq i \neq j \neq 1$, beliebiges k , und l mit $\{k, l\} = \{1, i\}$ bzw. $\{1, i, k, l\} = 4$

$$q_{1i}p_{nk}^{1j} = (q_{1i}p_{nk})^{1j} = (q_{ki}p_{nk})^{1j} = (p_{n-1\ i}^{1j})^{1j} = (p_{n-1\ i}^{1j})^{1i}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} A &\leq (q_{13}p_{n2}^{12} + q_{12}p_{n3}^{13})(q_{13}g^{12} + q_{12}h^{13}) = [(p_{n-1\ 4}^{12})^{13} + (p_{n-1\ 4}^{13})^{12}] \\ &\quad \times [(p_{n-1\ 3}^{12})^{13} + (p_{n-1\ 1}^{12})^{13} + (p_{n-1\ 1}^{13})^{12} + (p_{n-1\ 2}^{13})^{12} + (p_{n-1\ 1}^{13})^{12} + (p_{n-1\ 3}^{13})^{12}] \\ &= \left(p_{n-14} \cdot \sum_{i \leq 3} p_{n-1i} \right) (aq_{12}q_{13}, \dots, dq_{12}q_{13}). \end{aligned}$$

Aus der Induktionsannahme folgt schließlich $A = 0$.

SATZ 3.3. Sei M ein modularer Verband, $e_1, \dots, e_4$ aus M und π eine Permutation von **4**. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) M wird von e_1, e_2, e_3, e_4 erzeugt und es gilt $t_n = 0, p_{n\pi 1} = 1$.
- (ii) M wird von e_1, e_2, e_3, e_4 erzeugt, es gilt $t_n = 0, s_n = 1$ und $e_{\pi 1} + e_j = 1$ für alle $j \neq \pi 1$, falls n ungerade ist, $e_j + e_k = 1$ für alle $\pi 1 \neq j \neq k \neq \pi 1$, falls n gerade ist.
- (iii) Es gibt einen erzeugenden Rahmen ϕ der Ordnung n von M so, daß $e_{\pi j} = f_j^n(\phi)$ für alle j aus **4** gilt.

Überdies ist der Rahmen in (iii) eindeutig bestimmt.

Beweis. Die Äquivalenzen werden durch Induktion über n bewiesen. Sei zunächst $\pi 1 = i$. Für $n = 0$ ist alles trivial. Sei $n = 1$. Aus (ii) folgt $p_{1i} = e_i + t_1 = \sum_j e_j = 1$, also (i). Aus (i) folgt $e_i \geq p_{1i} = 1$ und $e_j \leq p_{1j}p_{1i} = 0$ für $j \neq i$, insbesondere

ist also M isomorph zum zweielementigen Verband D_2 . (iii) gilt dann offensichtlich und zieht seinerseits $M \cong D_2$ und (ii) nach sich.

Sei nun $n+1 \geq 2$ und gelte (ii). Mit $\{i, j, k, l\} = 4$ folgt für ungerades n $q_{ij} = e_i + e_j = e_j^{ij} + e_i^{ij}$ und $e_j^{ij} + e_k^{ij} = e_j + e_k(e_i + e_j) = q_{ij}$. Ist n gerade, so folgt $q_{ij} = e_k + e_l = e_k^{ij} + e_l^{ij}$ und $e_l^{ij} + e_k^{ij} = e_l(e_k + e_l) + e_k = q_{ij}$. Also haben wir nach der Induktionsannahme $p_{nj}^{ij} = q_{ij}$ für alle $j \neq i$, also $p_{n+1, i} = 1$.

Im Beweis (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) betrachten wir zunächst den Fall $n=2$. Wegen $t_2=0$ gilt $p_{1j}^{ij} = e_j^{ij} + t_1^{ij} = e_k^{ij}$ und $p_{2j} = e_j(e_k + e_l) + e_k(e_j + e_l) + e_l(e_j + e_k) = (e_j + e_k)(e_j + e_l)(e_k + e_l)$. $p_{2i} = 1$ impliziert also $e_j + e_k = 1$ und wegen 3.2 $e_i = (e_i + e_j)(e_i + e_k)(e_j + e_k) = p_{2i} = 0$. Insbesondere ist M also zum fünfelementigen Verband M_3 der Länge 2 isomorph und (iii) offensichtlich erfüllt. Umgekehrt zieht (iii) in diesem Fall sofort $M \cong M_3$ und somit (ii) nach sich.

Zur Vorbereitung des Induktionsschritts machen wir folgende Beobachtung: Seien α_3 und α_4 die Involutionen auf 4 mit $\alpha_3 = (13)(24)$ und $\alpha_4 = (14)(23)$. Für eine beliebige Permutation π auf 4 und $k=3, 4$ sei definiert $\pi^k = \pi\alpha_k$. Offenbar gilt $\pi^k 1 = \pi k$, $\pi^3 4 = \pi 2 = \pi^4 3$ und $(\pi^3)^4 = (\pi^4)^3$. Sei nun für $k=3, 4$ ψ_n^k die injektive Abbildung von n in $n+1$ mit

$$\begin{aligned} \psi_n^3 i &= i+1, & \psi_n^4 i &= \begin{cases} i+m & i < m \\ i-m+1 & i \geq m \end{cases} \quad \text{falls } n+1=2m \\ \psi_n^3 i &= \begin{cases} i & i \leq m \\ i+1 & i > m \end{cases} & \psi_n^4 i &= \begin{cases} m+i & i \leq m \\ i-m & i > m \end{cases} \quad \text{falls } n+1=2m+1. \end{aligned}$$

Man prüft leicht nach, daß Bild $\psi_n^3 \cup \text{Bild } \psi_n^4 = n+1$.

Sei nun ϕ ein Rahmen $a_i, c_{ij}, 0, 1$ der Ordnung $n+1$ von M und $k=3, 4$. Dann wird durch ${}_k a_i = a_{\psi_n^k i}$, ${}_k c_{ij} = c_{\psi_n^k i, \psi_n^k j}$ ein Rahmen ${}_k \phi$ der Ordnung n bestimmt und es folgt aus der Gültigkeit von $e_{\pi j} = f_j^{n+1}(\phi)$ für $j=1, 2, 3, 4$, daß $q_{\pi 1 \pi k} = \sum_{i=1}^n {}_k a_i$ und $e_{\pi k_i}^{\pi 1 \pi k} = q_{\pi 1 \pi k} \cdot e_{\pi k_i} = q_{\pi 1 \pi k} f_{\pi k_i}^{n+1}(\phi) = f_j^n({}_k \phi)$ gelten. Da die Anwendung von π einer Umnummerierung der f_j^{n+1} entspricht, genügt es den Fall $\pi = id$ zu betrachten und $q_{1k} f_j^{n+1}(\phi) = f_{\alpha_{kj}}^n({}_k \phi)$ zu beweisen. Dies ergibt sich jedoch sofort aus der Gültigkeit von $q_{13} = \sum_{i=2}^{n+1} a_i$ für $n+1=2m$, $q_{13} = \sum_{i \neq m+1} a_i$ für $n+1=2m+1$ und $q_{14} = \sum_{i=1}^n a_i$ in beiden Fällen. Als Nebenergebnis kann man ablesen, daß für einen Rahmen ϕ der Ordnung $n+1 \geq 3$, der zu Rahmen ${}_k \phi$ in der angegebenen Weise über ψ_n^k in Beziehung steht,

$$f_j^{n+1}(\phi) = f_{\alpha_{3j}}^n({}_3 \phi) + f_{\alpha_{4j}}^n({}_4 \phi) \quad \text{gilt.}$$

Sei nun π gegeben und gelte (iii) für $n+1 \geq 3$. Bildet man wie oben für $k=3, 4$ ${}_k \phi$, so gilt nach der Induktionsannahme $p_{\pi k}^{\pi 1 \pi k} = q_{\pi 1 \pi k}$. Mit 1.2(b) und (10) folgt sofort $p_{n+1 \pi 1} = p_{\pi \pi 3}^{\pi 1 \pi 3} + p_{\pi \pi 4}^{\pi 1 \pi 4} = q_{\pi 1 \pi 3} + q_{\pi 1 \pi 4} = 1$. Da ϕ in der Vereinigung von ${}_3 \phi$

und ${}_4\phi$ enthalten ist, ist ϕ wie diese eindeutig bestimmt. Außerdem gilt $s_{n+1} \geq p_{n+1} = 1$. Die weiteren Behauptungen von (ii) ergeben sich unmittelbar aus der Definition der Terme f_j^n . Gelte umgekehrt (i) für $n+1 \geq 3$. Aus (2) und (11) erhalten wir $t_{n\pi k}^{\pi 1\pi k} = 0$ und $p_{n\pi k}^{\pi 1\pi k} = q_{\pi 1\pi k}$ für $k=3, 4$. Also gibt es nach der Induktionsannahme für $k=3, 4$ jeweils einen Rahmen ${}_k\phi: {}_k a_i, {}_k c_{ij}$ ($i, j \leq n$), $q_{\pi 1\pi k}$ der Ordnung n mit $e_{\pi k_i}^{\pi 1\pi k} = f_i^n({}_k\phi)$. Mit dem analogen Reduktionsschritt $n \rightarrow n-1$ bilden wir ${}_{43}\phi$ und ${}_{34}\phi$ mit $q_{\pi 3, \pi 3, \pi 3, \pi 3}^{\pi 1\pi 3} \cdot e_{(\pi^3)^4 j} = f_j^{n-1}({}_{43}\phi)$ und $q_{\pi 4, \pi 1, \pi 4, \pi 3}^{\pi 1\pi 4} \cdot e_{(\pi^4)^3 j} = f_j^{n-1}({}_{34}\phi)$. Es folgt $f_j^{n-1}({}_{43}\phi) = f_j^{n-1}({}_{34}\phi)$, also ${}_{43}\phi = {}_{34}\phi$, da nach der Induktionsannahme zu $(\pi^3)^4 = (\pi^4)^3$ nur ein Rahmen gehören kann. Also erhält man $n+1$ Elemente a_i so, daß $a_{\psi_n^k i} = {}_k a_1$ für $k=3, 4$ gilt. Ist $J = \text{Bild } \psi_n^3$, $K = \text{Bild } \psi_n^4$ und $\{i\} = K - J$, so folgt

$$a_i \cdot \sum_{j \in J} a_j \leq a_i q_{\pi 1\pi 4}^{\pi 1\pi 3} \cdot \sum_{j \in J} a_j = a_i \cdot \sum_{k \in K \cap J} a_k \cdot \sum_{j \in J} a_j = a_i \cdot \sum_{j \in K \cap J} a_j = 0,$$

da ${}_4\phi$ ein Rahmen ist. Also sind die $a_1, \dots, a_{n+1}$ unabhängig und man erhält mit den c_{ij} der Form $c_{\psi_n^k i \psi_n^k j} = {}_k c_{ij}$ ($k=3, 4$) einen Rahmen der Ordnung $n+1$. Wegen Lemma 1.2 folgt $\sum_i a_i = q_{\pi 1\pi 3} + q_{\pi 1\pi 4} = 1$ und $e_{\pi j} = q_{\pi 1\pi 3} e_{\pi j} + q_{\pi 1\pi 4} e_{\pi j} = q_{\pi 1\pi 3} e_{\pi 3\alpha_{3j}} + q_{\pi 1\pi 3} e_{\pi 4\alpha_{4j}} = f_{\alpha_{3i}}^n({}_3\phi) + f_{\alpha_{4i}}^n({}_4\phi) = f_j^{n+1}(\phi)$, wie behauptet.

§4. Anwendungen auf die Theorie modularer Verbände

Aus Satz 3.3 liest man unmittelbar ab, daß jeder von einem Rahmen erzeugte Verband auch von einem Quadrupel erzeugt werden kann. Genauer

SATZ 4.1. *Zu jedem n gibt es ein System von 4 Erzeugenden und 2 Relationen, das in der Klasse der modularen Verbände äquivalent ist zum Rahmen der Ordnung n (aufgefaßt als System von n^2 Erzeugenden und $n^3 + 1$ Relationen).*

Teilaspekte hiervon hat schon G. Hutchinson [15] benutzt, als er bewies, daß es ein System von 5 Erzeugenden und endlich vielen Relationen gibt, das in der Klasse aller modularen Verbände ein unlösbares Wortproblem hat. Mit obigem Satz kann man den Beweis von Lipshitz [17] für den Fall von neun leicht auf den Fall von fünf Erzeugenden übertragen. Wir geben einen Abriß: Sei S eine freie Halbgruppe mit Erzeugenden $g_2, \dots, g_n$ ($n \geq 4$) und Relationen $v_i = w_i$ ($1 \leq i \leq m$). Wir geben Verbandsrelationen auf $e_1, \dots, e_5$ an. Zunächst:

$$p_{n1}(e_1, e_2, e_3, e_4) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$$

$$t_n(e_1, e_2, e_3, e_4) = e_1 e_2 e_3 e_4 e_5.$$

Diese garantieren, daß nach Satz 3.3 ein Rahmen a_i, c_{ij} der Ordnung n gegeben wird (mit $\pi = \text{id}$). Nach J. v. Neumann [19] (vgl. auch B. Artmann [1]) hat man zu $k \neq l$ Verbandspolynome $\text{add}_{kl}(x, y)$ und $\text{mult}_{kl}(x, y)$ in x, y und den a_i, c_{ij} derart, daß in jedem modularen Verband M mit Rahmen a_i, c_{ij} die Operationen add_{kl} und mult_{kl} eine Ringstruktur auf $M_{kl} = \{x \mid xa_l = a_k a_l, x + a_l = a_k + a_l\}$ definieren – dabei ist M_{1k} isomorph zu M_{1j} vermöge der Abbildung $\varphi_{kj}x = (x + c_{kj})(a_1 + a_j)$ mit i von 1, j und k verschieden. Wir nehmen nun die Relationen

$$e_5 a_j = a_1 a_j \quad \text{und} \quad e_5(a_1 + a_j) + a_j = a_1 + a_j \quad (2 \leq j \leq n)$$

hinzu, die ausdrücken, daß $\bar{g}_j = e_5(a_1 + a_j)$ in M_{1j} liegt. Mit der Definition $\bar{g}_j = \varphi_{j2} \bar{g}_i = (g_j + c_{j2})(a_1 + a_2)$ erhalten wir zu jedem Halbgruppenwort w in $g_2, \dots, g_n$ ein Verbandsword $\bar{w}$ in $e_1, \dots, e_5$ indem wir g_j durch $\bar{g}_j$ und die Multiplikation durch das Verbandspolynom mult_{12} ersetzen.

Sei nun L der freie modulare Verband mit Erzeugenden $e_1, \dots, e_5$ und den Relationen $\bar{v}_i = \bar{w}_i$ ($1 \leq i \leq m$) sowie allen anderen schon eingeführten Relationen. Wir behaupten, daß $v = w$ in S genau dann gilt, wenn $\bar{v} = \bar{w}$ in L gilt.

Betrachtet man nämlich die von $g_2, \dots, g_n$ erzeugte Unterhalbgruppe von L_{12} , so erfüllt diese die Relationen von S . Also impliziert die Gültigkeit von $v = w$ in S , daß $\bar{v} = \bar{w}$ in L gilt. Andererseits kann man S stets als Unterhalbgruppe eines Ringes R mit 1 (z.B. eines Halbgruppenringes über $S \cup \{1\}$) auffassen. Sei nun M der Untermodulverband des freien Moduls A von Rang n über R und a'_i, c'_{ij} der kanonische Rahmen von M . Wir können M_{12} mit R identifizieren (vgl. B. Artmann [1; 5.7]). Wähle $e'_1, \dots, e'_4$ nach Satz 3.3 und $e'_5 = \sum (\varphi_{2j} g_j \mid 2 \leq j \leq n)$. Dann gilt $\bar{g}_i(e'_1, \dots, e'_5) = \varphi_{2i} g_i$, $\bar{g}_j(e'_1, \dots, e'_5) = g_j$ und die Elemente $e'_1, \dots, e'_5$ erfüllen die Relationen von L . Also gibt es einen kanonischen Homomorphismus von L auf M . Gilt nun $\bar{v} = \bar{w}$ in L , so auch in M , also $v = w$ in S .

Wählt man S als Halbgruppe mit unlösbarem Wortproblem, so hat folglich auch L ein unlösbares Wortproblem. Mehr noch, das L definierende System von Erzeugenden und Relationen hat ein unlösbares Wortproblem in jeder Quasivarietät $\mathcal{Q}$ modularer Verbände, die einen Untermodulverband eines freien abzählbar erzeugten unitären Q -Moduls enthält, wobei Q ein beliebiger Ring mit 1 ist (s. G. Hutchinson [15]). Wählt man nämlich R als den Halbgruppenring über $S \cup \{1\}$ mit Koeffizienten in Q , so ist der oben betrachtete Modul A auch freier abzählbar erzeugter Q -Modul, also M in $\mathcal{Q}$ enthalten.

Die Ergebnisse aus §2 und 3 werden ergänzt durch

SATZ 4.2. *Sei M ein subdirekt irreduzibler modularer Verband mit Erzeugenden e_1, e_2, e_3, e_4 und gelte $s_n = 1, s_n^* = 0$ für alle n . Dann gibt es eine Permutation π von 4 so, daß $e_{\pi 1} + e_{\pi 2} = e_{\pi 3} + e_{\pi 4} = 1$ und $e_{\pi 1} e_{\pi 2} = e_{\pi 3} e_{\pi 4} = 0$, d.h. M erscheint in der in [13] angegebenen Liste.*

Die Struktur des freien modularen Verbandes mit vier Erzeugenden und $s_n = 1$, $s_n^* = 0$ für alle n ist folglich durch die Ergebnisse von Abschnitt 5 in [13] beschrieben.

Zum Beweis nehmen wir zunächst das Gegenteil der Behauptung an, nämlich daß Alternative (a) aus Hilfssatz 1.4 nicht eintrete. Dann liegt o.B.d.A. der Fall (b) vor. Wir behaupten, daß

$$e = eq_{n,1} + eq_{m,2}q_{k,3}$$

für alle e in $E = \{a, b, c, d\}$ und $n, m, k \geq 0$ gilt. Für $n = 0$ ist dies trivial. Sei $n = 1$. Wir benutzen Induktion über $m + k$. Der Fall $m + k = 0$ ist wieder trivial. Sei also o.B.d.A. $m \geq 1$. Dann hat man nach 1.5

$$eq_1 + eq_{m,2}q_{k,3} \geq (eq_1)^2 + e^2 q_{m-1,2}^2 q_{k,3}^2 = (eq_1 + eq_{m-1,2}q_{k,3})^2 = e^2 = eq_2,$$

also $eq_1 + eq_{m,2}q_{k,3} \geq eq_1 + eq_2 = e$ nach Lemma 1.2. Für $n \geq 2$ ergibt sich induktiv $eq_{n,1} + eq_{m,2}q_{k,3} \geq e^1 q_{n-1,1}^1 + (eq_{m,2}q_{k,3})^1 = (eq_{n-1,1} + eq_{m,2}q_{k,3})^1 = e^1 = eq_1$ und mit dem Fall $n = 1$

$$eq_{n,1} + eq_{m,2}q_{k,3} \geq eq_1 + eq_{m,2}q_{k,3} = e.$$

Sei nun M in seinen Filterverband $\mathcal{F}(M)$ eingebettet, Q_i der von den $q_{n,i}$ ($n < \infty$) erzeugte Filter und M' der von E und den Q_i ($1 \leq i \leq 3$) erzeugte Unterverband von $\mathcal{F}(M)$. Da $\mathcal{F}(M)$ abwärts stetig ist erhalten wir für e aus E $eQ_1 + eQ_2Q_3 = \prod (eq_{n,1} \mid n < \infty) + \prod (eq_{m,2}q_{k,3} \mid m < \infty) = \prod (\prod (eq_{n,1} \mid n < \infty) + eq_{m,2}q_{k,3} \mid m < \infty) = \prod (eq_{n,1} + eq_{m,2}q_{k,3} \mid n, m < \infty) = e$ und insbesondere $Q_1 + Q_2Q_3 \geq a + b + c + d = 1$. Folglich ist M' direktes Produkt seiner Intervalle $[Q_1, 1]$ und $[Q_2Q_3, 1]$ (vgl. Poguntke [21], Lemma 1.2). Wegen Symmetrie folgt $Q_2 + Q_3 = 1$ und $e = eQ_2 + eQ_3$ für e in E . Also ist $[Q_2Q_3, 1]$ direktes Produkt von $[Q_2, 1]$ und $[Q_3, 1]$. Da M subdirekt irreduzibel ist, ist es schon in einem der $[Q_i, 1]$ enthalten. Das zieht aber $Q_j = 1$ für $j \neq i$ nach sich und insbesondere $q_j = 1$. Dann zerfällt E aber in zwei Paare zueinander komplementärer Elemente, wie im Satz behauptet.

§5. Einige neutrale Elemente von $FM(4)$

Ein Element u eines modularen Verbandes heißt *neutral* (s. [18; §3]), wenn $x \mapsto (ux, u + x)$ eine subdirekte Darstellung von M in $[0, u] \times [u, 1]$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn für alle x, y aus M u, x , und y einen distributiven

Unterverband von M erzeugen (es genügt $u(x+y) \leq x+uy$ nachzuprüfen). Die Gesamtheit aller neutralen Elemente von M bildet einen Unterverband on M .

SATZ 5.1. Die Elemente $s_1, t_1, p_{1i}, s_2, t_2, p_{2i}$ ($i \in 4$) sind neutral in F .

Zum Nachweis dient Proposition 2 aus [13].

LEMMA 5.2. Sei M ein modularer Verband, u in M , S ein Verband und α eine ordnungserhaltende Abbildung von S in M so, daß $\alpha(S)$ M erzeugt, $x \mapsto u + \alpha x$ Schnitte und $x \mapsto \alpha x$ Verbindungen erhält. Dann ist u neutral in M .

Es sei bemerkt, daß, wenn $x \mapsto u + \alpha x$ Schnitte erhält, für alle x, y mit $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ schon $u\alpha(x+y) = u\alpha x + u\alpha y$ gilt. Wegen $(u + \alpha x)(u + \alpha y) = u + \alpha xy \leq u + \alpha x\alpha y$ erzeugen nämlich $u, \alpha x$ und αy einen distributiven Unterverband.

Beweis des Satzes. s_1 ist neutral, da es das einzige Koatom von F ist.

Zu t_1 : Wähle S als den Potenzmengenverband auf $E = \{a, b, c, d\}$ und $\alpha X = \sum X$, wobei $\sum \emptyset = 0$. Dann gilt mit $X_i = \{e_j \mid j \neq i\}$ $t_1 + \alpha X_i = \sum X_i$ und wegen der Modularität $t_1 + \alpha e_i = \prod (\alpha X_j \mid j \neq i)$. Folglich sind die $t_1 + \alpha e_i$ ($i \in 4$) unabhängig in $[t_1, s_1]$ und $X \mapsto t_1 + \alpha X$ ein Isomorphismus auf den von ihnen erzeugten Unterverband. Also ist t_1 neutral.

Zu s_2 : Wegen der Neutralität von t_1 können wir statt F ein homomorphes Bild mit $t_1(a, b, c, d) = 1$ betrachten. Sei S_2 die Menge der Partitionen auf E mit der zur Inklusion dualen Halbordnung – eine geometrische Veranschaulichung dieses Verbandes ist in Fig. 1 gegeben. Setze $\alpha 1 = 1$, $\alpha 0 = 0$, $\alpha(\pi) = \sum X \sum Y$ für $\pi = \{X, Y\}$ und $\alpha(\pi) = \sum E - X$, falls X die einzige zweielementige Klasse von π ist.

Wir prüfen $(s_2 + \alpha y)\alpha x \leq s_2 + \alpha xy$ zunächst für den Fall nach, daß x und y Koatome sind. Sei zum Beispiel $\alpha x = a + b$. Für $\alpha y = a + c$ haben wir $(a+b)(a+c+s_2) = (a+b)(a+c+q_1 s_2) \leq a+s_2 + (a+b)c = a+s_2$, da $s_2 = q_1 s_2 + q_2 s_2$ und $s_2 \geq e(f+g)$ für je drei verschiedene Elemente von E gilt. Für $\alpha y = c + d$ erhält man $(a+b)(c+d+s_2) = (a+b)(c+d+q_2 s_2) = (a+b)(c+d+a(b+d)+b(a+c)) = q_1 + a(b+d) + b(a+c) \leq q_1 + s_2$. Aus Symmetriegründen deckt dies alle Fälle ab.

Seien nun x, y Atome, $z = x + y$ Koatom – zum Beispiel $\alpha z = a + b$ und $\alpha x = a$. Für $\alpha y = b$ ergibt sich $a(b+s_2) \leq a(as_2 + b + c) = as_2 + a(b+c) \leq s_2$. Es gilt nämlich $s_2 \leq as_2 + b + c$, wie man sofort mit (7) aus §1 nachrechnet. Im Falle $\alpha y = q_1$ benutzt man, daß $s_2 \leq as_2 + c + d$ also $a(s_2 + c + d) \leq s_2$ gilt, d.h. daß $a, c + d$ und s_2 einen distributiven Unterverband erzeugen. Es folgt $q_1(a+s_2) =$

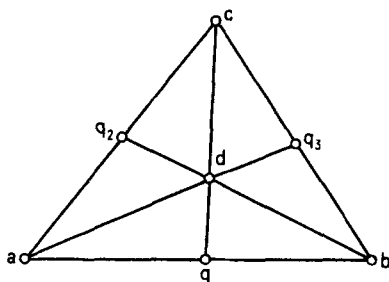


Fig. 1

$(a+b)(a(c+d)+(c+d)s_2) = a(c+d) + q_1s_2 \leq s_2$. Da damit alle möglichen Fälle ausgeschöpft sind, erzeugen s_2 , αx und αy für alle x, y aus S_2 einen distributiven Unterverband. Insbesondere gilt $s_2(\alpha x + \alpha y) = s_2\alpha x + s_2\alpha y$, falls $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$. Dies ist der Fall, wenn $x+y$ oberer Nachbar von x und y ist: Zum Beispiel $a+q_1 = a + (a+b)(c+d) = (a+b)(a+c+d) = a+b$ und $a+b+q_2 = a+b + (a+c)(b+d) = (a+b+d)(a+b+c) = 1$. Der einzige andersartige Fall ist $\alpha x = q_i$, $\alpha y = q_j$. In diesem gilt aber $s_2 = q_1s_2 + q_2s_2$ nach Lemma 1.1.

HILFSSATZ 5.3. Für alle $n \geq 1$ gilt

(a) Für jede Wahl von $i \neq j \neq k \neq i$ aus 4 erzeugen e_i , $e_j + e_k$ und t_n bzw. e_i , $e_j + e_k$ und s_{n+1} einen distributiven Unterverband.

(b) $t_n(a+t_n, \dots, d+t_n) = t_n$ und $s_{n+1}(a+s_{n+1}, \dots, d+s_{n+1}) = s_{n+1}$.

Beweis. Der Induktionsanfang $n=1$ wird durch die Neutralität von t_1 und s_2 garantiert. Dies gilt auch für die Hilfsbehauptung $at_n + ct_n + dt_n = t_n$. Im Schluß von n auf $n+1$ haben wir $at_{n+1} + ct_{n+1} + dt_{n+1} = \sum a^i t_n^i + c^i t_n^i + d^i t_n^i = \sum t_n^i = t_{n+1}$. Folglich erzeugen a , $c+d$ und t_{n+1} einen distributiven Unterverband und es gilt $q_1(a+t_{n+1}) = (a+b)(a(c+d)+(c+d)t_{n+1}) = aq_1 + q_1t_{n+1}$. Aus Symmetriegründen haben wir $q_i(e+t_{n+1}) = eq_i + q_it_{n+1}$ für alle e aus E und i aus 3. Wegen $q_it_{n+1} = t_n(aq_i, \dots, dq_i)$ erhält man dann mit Induktion

$$\begin{aligned} t_n(q_i(a+t_{n+1}), \dots, q_i(d+t_{n+1})) \\ &= t_n(aq_i + t_n(aq_i, \dots, dq_i), \dots, dq_i + t_n(aq_i, \dots, dq_i)) \\ &= t_n(aq_i, \dots, dq_i) = t_n^i \leq t_{n+1}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$t_{n+1}(a+t_{n+1}, \dots, d+t_{n+1}) = \sum t_n(q_i(a+t_{n+1}), \dots, q_i(d+t_{n+1})) \leq t_{n+1}.$$

Für die s_{n+1} schließt man ganz analog.

Zur Neutralität von t_2 : Wegen der Neutralität von s_2 können wir M mit $s_2 = 1$ betrachten. Sei M_3 der Verband von Länge 2 mit 3 Atomen. Definiere $\alpha_j: M_3 \rightarrow M$ durch

$$\alpha_j a_i = e_i q_{ij}, \quad \alpha_j 1 = \sum_{i \neq j} \alpha_i a_i, \quad \alpha_j 0 = 0,$$

wobei a_i ($i \in 4, i \neq j$) die Menge der Atome von M_3 bezeichne. Sei $S = T_2$ die vierte Potenz von M_3 und α von S in M als die Summenabbildung $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum \alpha_i x_i$ definiert. Wegen 5.3(a) gilt z.B. $bq_1(a + t_2, \dots, d + t_2) = b(c + d)(a + t_2, \dots, d + t_2) = (b + t_2)(c + d + t_2) = t_2 + b(c + d) = t_2 + bq_1 = t_2 + \alpha_1 a_2$. Daher ist $x \mapsto t_2 + \alpha x$ eine verbindungserhaltende Abbildung von S in den von $a + t_2, \dots, d + t_2$ erzeugten Unterverband L . Nach 5.3(b) und Satz 3.2 und 3.3 ist aber L isomorph zur vierten Potenz von M_3 und es sind die $e_i q_{1i}(a + t_2, \dots, d + t_2)$ gerade die Atome von L . Also ist $x \mapsto t_2 + \alpha x$ ein Isomorphismus von S auf L und t_2 nach Lemma 5.2 neutral in M und somit auch in F . Die Neutralität der p_{1i} und p_{2i} folgt nun unmittelbar aus Satz 3.2.

§6. Perfekte Elemente

In den folgenden beiden Abschnitten untersuchen wir Darstellungen von Quadrupeln in komplementären modularen Verbänden. Dazu einige verbandstheoretische Vorbemerkungen (vgl. F. Maeda [18; I, II]). Sei M ein modularer Verband mit 0 und 1. M heißt $\mathcal{K}$ -stetig ($\mathcal{K}$ eine Kardinalzahl), falls M $\mathcal{K}$ -vollständig ist und $a \sum D = \sum (ad \mid d \in D)$ bzw. $a + \prod D = \prod (a + d \mid d \in D)$ für jede aufwärts bzw. abwärts gerichtete Teilmenge D von M der Kardinalität $\leq \mathcal{K}$ gilt. Eine Teilmenge B von M heißt Basis, falls $\sum B = 1$ und $a \sum E = 0$ für alle endlichen Teilmengen E von B und $a \in B - E$ gilt. Kombiniert man Lemma 1.2 aus W. Poguntke [21] und Satz 3.8 aus F. Maeda [18], so erhält man

HILFSSATZ 6.1. *Ist B eine Basis von M , $E \cup B$ eine Erzeugendenmenge von M , $M|B|$ -stetig und gilt $x = \sum (xb \mid b \in B)$ für alle $x \in E$, so sind $x \mapsto (xb \mid b \in B)$ und $(x_b \mid b \in B) \mapsto \sum (x_b \mid b \in B)$ zueinander inverse Isomorphismen zwischen M und dem direkten Produkt der Intervalle $[0, b]$ ($b \in B$) von M . Insbesondere sind die Elemente von B neutral in M .*

Eine Darstellung eines Verbandes L ist ein Homomorphismus φ von L in einen komplementären modularen Verband M . Sie heißt n -dimensional bzw.

linear, falls M von Länge n bzw. der Verband aller Untervektorräume eines Vektorraums ist. Eine Basis B von M ist eine direkte Zerlegung von φ , falls $\varphi x = \sum (b\varphi x \mid b \in B)$ für alle x aus L gilt. Ist $M \mid B$ -stetig, so genügt es dies für die x aus einer Erzeugendenmenge von L zu fordern (Hilfssatz 6.1). Zudem sind dann auch die $\varphi_b : L \rightarrow [0, b]$ mit $\varphi_b x = b\varphi x$ Darstellungen und φ die direkte Summe der φ_b ($b \in B$). Weiterhin ist dann mit $b' = \sum B - \{b\}$ die Menge $\{b' \mid b \in B\}$ eine duale direkte Zerlegung und der direkte Summand φ_b isomorph zu $x \mapsto b' + \varphi x$. Ist B disjunkte Vereinigung von B_i ($i \in I$) und $\sum B_i = b$, so ist B genau dann direkte Zerlegung von φ , wenn $\{b_i \mid i \in I\}$ direkte Zerlegung von φ und die B_i direkte Zerlegungen der φ_{b_i} sind. Schließlich heiße eine Darstellung φ unzerlegbar, falls $\{0, 1\}$ die einzige direkte Zerlegung von φ ist.

Sei nun ein fester Verband L gegeben. Ein Element u von L heißt nach I. M. Gel'fand und V. A. Ponomarev [7], [8] *perfekt*, falls für jede endlichdimensionale unzerlegbare lineare Darstellung φ von L $\varphi u = 0$ oder $\varphi u = 1$ gilt. Ergeben die endlichdimensionalen linearen Darstellungen von L eine subdirekte Zerlegung von L , so impliziert dies die Neutralität von u in L . Wir benutzen hier einen etwas stärkeren Begriff: Ein Element u von L heiße *plusquamperfekt*, falls für jede Darstellung $\varphi : L \rightarrow M$ ein $\tilde{u}$ in M existiert derart, daß $\{\varphi u, \tilde{u}\}$ direkte Zerlegung von φ ist. Insbesondere ist dann φu ein neutrales Element in dem von $\varphi(L)$ erzeugten Unterverband. Die plusquamperfekten Elemente bilden einen Unterverband von L , wie man aus folgendem Hilfssatz ersieht.

HILFSSATZ 6.2. Ist $\varphi : L \rightarrow M$ eine Darstellung und u, v in L , $\tilde{u}, \tilde{v}$ in M so, daß $\{\varphi u, \tilde{u}\}$ und $\{\varphi v, \tilde{v}\}$ direkte Zerlegungen von φ sind, so sind $\{\varphi uv, \tilde{u} + \tilde{v}\}$ und $\{\varphi(u+v), \tilde{u}\tilde{v}\}$ direkte Zerlegungen von φ .

Beweis. Wir schreiben $u = \varphi u$, $v = \varphi v$. Dann gilt für $x \in \varphi L \cup \{1\}$ $xuv + x(\tilde{u} + \tilde{v}) \geq xuv + xv\tilde{u} = xv$, also $xuv + x(\tilde{u} + \tilde{v}) \geq xv + x\tilde{v} = x$. Andererseits gilt $uv(\tilde{u} + \tilde{v}) = u(v\tilde{u} + v\tilde{v}) = uv\tilde{u} = 0$. Die zweite Behauptung folgt dual.

Aus der in I. M. Gel'fand und V. A. Ponomarev [5] angegebenen Liste unzerlegbarer endlichdimensionaler Darstellungen von F kann man leicht die Perfektheit der s_n , t_n und p_{ni} ablesen. Wir zeigen hier unmittelbar

SATZ 6.3. Die Elemente s_n , t_n und p_{ni} und die dazu dualen sind plusquamperfekt im freien modularen Verband F mit vier Erzeugenden und 0 und 1.

Wir benutzen wieder die Notationen von §1. Zum Beweis betrachten wir die freie algebraische Struktur $\tilde{F}$ mit Erzeugenden $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ und Operationen $+$, $\cdot$, 0 , 1 , $'$ und definierenden Gleichungen, die besagen, daß $\tilde{F}$ mit $+$ und $\cdot$ ein modularer Verband mit 0 und 1 ist und $x + x' = 1$, $xx' = 0$ —d.h. $'$ ist

eine Komplementierung. Sei β der kanonische Homomorphismus von F in $\bar{F}$ (betrachtet als Verband mit 0 und 1). Dann gibt es zu jedem Homomorphismus φ von F in einen komplementären modularen Verband M einen eindeutig bestimmten Homomorphismus ψ von $\bar{F}$ in $\bar{M}$ mit $\varphi = \psi \circ \beta$, wenn nämlich $\bar{M}$ aus M durch Auswahl einer Komplementierungsoperation entsteht. Insbesondere gilt dies für den Homomorphismus von F in $[0, \beta q_i]$ mit $e \mapsto \beta e q_i$ ($e \in E$), wenn wir das Intervall $[0, \beta q_i]$ mit dem relativen Komplement $x \mapsto x' \beta q_i$ versehen. Diesen Homomorphismus notieren wir mit $x \mapsto x^i$. Schreiben wir f für βf , so ist dies konsistent mit der Notation von §1.

Wir konstruieren nun $\bar{s}_n \leq \bar{t}_n \leq \bar{s}_{n+1} \leq \bar{t}_{n+1}$ in $\bar{F}$ so, daß $\{s_n, \bar{s}_n\}$ und $\{t_n, \bar{t}_n\}$ direkte Zerlegungen von β sind. Die Plusquamperfektheit von s_n und t_n ist dann klar, für die p_{ni} berufen wir uns auf Satz 3.2. In der Konstruktion setzen wir $\bar{s}_0 = \bar{t}_0 = 0$, $\bar{s}_{n+1} = \bar{s}_n + \bar{t}_n$ und $\bar{t}_{n+1} = \bar{t}_n + \bar{s}_{n+1}$ mit induktiv definierten $\bar{s}_n$, $\bar{t}_n$ derart, daß $\{s_n, \bar{s}_n\}$ direkte Zerlegung von β_{n-1} und $\{t_n, \bar{t}_n\}$ von β_{s_n} ist und $q_i \bar{s}_n = \bar{s}_{n-1}^i$, $q_i \bar{t}_n = \bar{t}_{n-1}^i$ für $i = 1, 2$ gilt.

Wir behandeln zunächst den Induktionsschritt $n \mapsto n+1$ für $n \geq 2$. Setze $\bar{s}_{n+1} = \bar{s}_n^1 + \bar{s}_n^2$. Aus $q_1 \bar{s}_n^2 = (q_1 \bar{s}_n)^2 = \bar{s}_{n-1}^{12} = s_{n-1}^{21} = (q_2 \bar{s}_n)^1 = q_2 \bar{s}_n^1$ folgt $q_1 \bar{s}_{n+1} = \bar{s}_n^1 + q_1 \bar{s}_n^2 = \bar{s}_n^1$ und entsprechend $q_2 \bar{s}_{n+1} = \bar{s}_n^2$. Da $x \mapsto x^i$ ein Homomorphismus ist mit $et_{n-1} \mapsto et_{n-1}^i$ ($e \in E$), ist $\{s_n^i, \bar{s}_n^i\}$ eine direkte Zerlegung von β_{n-1}^i . Wir folgern

$$\begin{aligned} es_{n+1} + e\bar{s}_{n+1} &\geq es_n^1 + e\bar{s}_n^1 + es_n^2 + e\bar{s}_n^2 \\ &= et_{n-1}^1 + et_{n-1}^2 = eq_1 t_n + eq_2 t_n = (eq_1 + eq_2) t_n = et_n, \end{aligned}$$

die Neutralität von t_n in βF und Lemma 1.2(b) ausnutzend. $s_{n+1} + \bar{s}_{n+1} = t_n$ ergibt sich hieraus sofort.

Um $s_{n+1} \bar{s}_{n+1} = 0$ zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß für $i = 1, 2$ gilt $q_1 q_2 t_n = (s_n^i + q_1 q_2 t_n)(\bar{s}_n^i + q_1 q_2 t_n)$ und $s_n^i + \bar{s}_n^i + q_1 q_2 t_n \leq q_1 t_n$ da $q_1 q_i t_n = (q_i t_{n-1})^i$.

Daher sind $s_n^1 + q_1 q_2 t_n$, $\bar{s}_n^1 + q_1 q_2 t_n$, $s_n^2 + q_1 q_2 t_n$, $\bar{s}_n^2 + q_1 q_2 t_n$ unabhängig in $[q_1 q_2 t_n, t_n]$. Es folgt $s_{n+1} \bar{s}_{n+1} \leq (s_n^1 + s_n^2 + q_1 q_2 t_n)(\bar{s}_n^1 + \bar{s}_n^2 + q_1 q_2 t_n) = q_1 q_2 t_n$ und $s_{n+1} \bar{s}_{n+1} \leq s_{n+1} \bar{s}_{n+1} q_1 q_2 \leq s_n^1 \bar{s}_n^1 = 0$. Für $\bar{t}_{n+1} = \bar{t}_n^1 + \bar{t}_n^2$ verläuft die Argumentation ganz analog.

Wir kommen nun zu den Fällen mit $n \leq 2$. Für $\bar{s}_1 = s_1'$ ist alles klar. Setze $r_{1i} = \sum (e_j \mid j \in 4, j \neq i)$, $\bar{r}_{1i}$ sei das relative Komplement $e_i(e_i r_{1i})'$ von $e_i r_{1i}$ in $[0, e_i]$. Dann bilden r_{1i} und $\bar{r}_{1i}$ eine direkte Zerlegung von β_{s_1} , also nach Hilfssatz 6.2 auch $t_1 = \prod (r_{1i} \mid i \in 4)$ und $\bar{t}_1 = \prod (\bar{r}_{1i} \mid i \in 4)$. $q_i \bar{t}_1 = 0$ folgt aus $q_1 \leq t_1$ und der Tatsache, daß nach Hilfssatz 6.1 $x \mapsto \bar{t}_1$ ein Homomorphismus mit $t_1 \mapsto 0$ ist.

Hilfssatz 6.4. Sei M ein modularer Verband mit Erzeugenden a, b, c, d und $z_i \leq q_i(a, b, c, d)$, $i \in 3$. Sei entweder (a) $t_1(a, b, c, d) = 1$ und $u = s_2(a, b, c, d)$ oder (b) $s_2(a, b, c, d) = 1$ und $u = t_2(a, b, c, d)$. Gilt dann $z_i + u = q_i$ und $z_i u = 0$ für $i \in 3$, so ist u neutral in M .

Sei definiert $\bar{s}_2 = \bar{s}_1^1 + \bar{s}_1^2 + \bar{s}_1^3$ und $\bar{t}_2 = \bar{t}_1^1 + \bar{t}_1^2 + \bar{t}_1^3$. Da $\bar{s}_1^i + s_2 \geq \bar{s}_1^i + s_1^i = q_i$ und $\bar{s}_1^i s_2 \leq \bar{s}_1^i q_i s_2 = \bar{s}_1^i s_1^i = 0$ gilt, läßt sich (a) auf die Elemente et_1 ($e \in E$) und $\bar{s}_1^i$ anwenden. Das ergibt $s_2 \bar{s}_2 = \sum s_2 \bar{s}_1^i = \sum s_1^i \bar{s}_1^i = 0$ und $es_2 + e\bar{s}_2 = et_1$, da $s_2 + \bar{s}_2 = \sum s_1^i + \bar{s}_1^i = \sum q_i = t_1$. (Letzteres erhält man so: Wegen der Neutralität von t_1 und s_2 genügt es $\sum q_i = 1$ unter der Bedingung $s_2 = 1$ bzw. $t_1 = 1$, $s_2 = 0$ zu zeigen. Im ersten Falle können wir uns auf Lemma 1.2, im zweiten auf Satz 2.1 berufen.) Da sowohl $q_i \bar{s}_2$ wie $\bar{s}_1^i$ Komplemente von s_1^i in $[0, q_i]$ sind und $q_i \bar{s}_2 \geq \bar{s}_1^i$, folgt $q_i \bar{s}_2 = \bar{s}_1^i$ aus der Modularität.

Entsprechend gilt $\bar{t}_1^i + t_2 \geq \bar{t}_1^i + t_1^i = s_1^i = q_i s_2 = q_i (as_2, \dots, ds_2)$ und $\bar{t}_1^i t_2 = 0$ wegen der Neutralität von s_2 . Anwendung von (b) auf es_2 ($e \in E$) und $\bar{t}_1^i$ ergibt $t_2 \bar{t}_2 = 0$ und $et_2 + e\bar{t}_2 = es_2$ wegen $t_2 + \bar{t}_2 = \sum s_1^i = s_2$. $\bar{t}_1^i \leq q_i \bar{t}_2$ sind beide Komplemente von t_1^i in $[0, s_1^i]$, also $\bar{t}_1^i = q_i \bar{t}_2$.

Der Beweis des Hilfssatzes folgt dem von Satz 5.1. Insbesondere wenden wir Lemma 5.2 an. Im Fall (a) sei $S = S_2 \cup \{z_i \mid i \in 3\}$ mit $z_i \leq x \leftrightarrow q_i \leq ax$ und $\alpha z_i = z_i$. Wegen $z_i + u = q_i + u$ und dem Beweis von 5.1 ist dann $x \mapsto u + \alpha x$ schnitterhaltend, wegen $z_i u = 0$ $x \mapsto u \alpha x$ verbindungserhaltend, also u neutral. Im Fall (b) definieren wir entsprechend $S = T_2 \cup \{z_i \mid i \in 3\}$.

Beim Nachweis der Neutralität und Perfektheit von t_1 und t_2 hätte man auch das D_2 - und M_3 -lemma aus R. Wille [23] bzw. W. Poguntke [21] benutzen können. Dies hätte jedoch keinen Vorteil bei der Bestimmung einer konkreten Zerlegung gebracht.

§7. Zur Klassifikation von Darstellungen

Eine Darstellung $\varphi: F \rightarrow M$, M ein komplementärer Verband, heißt vom

Typ 0 falls $\varphi s_n = 1$ und $\varphi s_n^* = 0$ für alle n	(vgl. 4.2)
Typ $-I_n$ falls $\varphi p_{ni} = 1$ und $\varphi t_n = 0$	(vgl. 3.3)
Typ $-II_n$ falls $\varphi t_n = 1$ und $\varphi s_{n+1} = 0$	(vgl. 2.1)
Typ $+I_n$ falls $\varphi p_{ni}^* = 0$ und $\varphi t_n^* = 1$	dual zu $-I_n$
Typ $+II_n$ falls $\varphi t_n^* = 0$ und $\varphi s_{n+1}^* = 1$	dual zu $-II_n$

Über die Darstellungen vom Typ $\neq 0$ läßt sich auf Grund des v. Neumannschen Koordinatisierungssatzes [20] folgendes sagen: Sei $m = n$ im Falle $-I_n$ und $m = 2n + 1$ im Falle $-II_n$. Dann hat man nach Satz 3.3 bzw. 2.1 einen erzeugenden Rahmen der Ordnung m von Bild φ . Ist $m \geq 4$ oder $m \geq 3$ und M arguesisch (s. B. Jónsson [16]), so hat man einen regulären Ring R derart, daß M zum Untermodulverband des Moduls R_R^m isomorph ist, wobei der gegebene Rahmen in den kanonischen übergeht, $\varphi e_1, \dots, \varphi e_4$ entsprechen dann Untermoduln, die in völliger Analogie zu Quadrupeln vom Defekt -1 bzw. -2 aus der Liste von I. M.

Gel'fand und V. A. Ponomarev [5] gegeben sind. Für die Typen $+I_n$ und $+II_n$ hat man auf dem Wege über duale Rahmen das entsprechende Ergebnis.

SATZ 7.1. *Jede unzerlegbare Darstellung von F in einem komplementären modularen Verband ist von genau einem der Typen 0 , $\pm I_n$ oder $\pm II_n$ ($i \in \mathbf{4}$, $n < \infty$).*

Der Beweis folgt sofort aus Satz 6.3, wenn man 1.1, 1.3 und 3.2 hinzuzieht. Aus der Beschreibung der unzerlegbaren Darstellungen der Rahmen [11; 2.2] ergibt sich weiterhin, daß im Falle von $\text{Typ} \neq 0$ M Länge m hat. Im koordinatisierbaren Fall ist R ein Schiefkörper und der von $\varphi e_1, \dots, \varphi e_4$ erzeugte Unterverband von M isomorph zum Untervektorraumverband $L(P_P^m)$, P der Primkörper von R . Eine Zerlegung in direkt unzerlegbare Summanden ist nicht immer möglich, wie das Beispiel der kontinuierlichen Geometrien zeigt. Es gilt jedoch

SATZ 7.2. *Jede Darstellung φ von F in einem abzählbar stetigen komplementären modularen Verband ist direkte Summe von Darstellungen der Typen 0 , $\pm I_n$ und $\pm II_n$.*

Beweis. Zunächst folgende etwas allgemeinere Überlegung: Sei M ein abzählbar stetiger modularer Verband, L ein Unterverband von M und u_n, v_n komplementäre neutrale Elemente in L ($n < \infty$) so, daß $u_n \geq u_{n+1}$ und $v_n \leq v_{n+1}$. Sei L' der von L erzeugte abzählbar vollständige Unterverband von M , $u = \prod u_n$, $v = \sum v_n$. Dann gilt wegen der Stetigkeit $u + v = \prod (u_n + \sum v_m) \geq \prod (u_n + v_n) = 1$ und $uv = 0$ sowie $ux + vx = \prod u_n x + \sum v_m x = \prod (u_n x + \sum v_m x) \geq \prod (u_n x + v_n x) = x$ für alle $x \in L$. Da die Gültigkeit von $ux + vx = x = (u + x)(v + x)$ bei der Bildung endlicher und gerichteter abzählbarer Infima und Suprema erhalten bleibt, sind die Abbildungen $x \mapsto ux$ und $x \mapsto u + x$ ($x \in L'$) sogar abzählbar vollständige Verbandshomomorphismen.

Für eine Darstellung $\varphi: F \rightarrow M$ wenden wir dies an auf die Elemente $\varphi s_n, \varphi \bar{s}_n$ ($n < \infty$). Dann ist $u = \prod \varphi s_n$, $v = \sum \varphi \bar{s}_n$ eine direkte Zerlegung von φ und es gilt $s_n(\varphi_u e_1, \dots, \varphi_u e_4) = \varphi_u s_n = u \varphi s_n = u$ für alle n und $\prod s_n(u + \varphi e_1, \dots, u + \varphi e_4) = \prod (u + \varphi s_n) = \prod \varphi s_n = u$ sowie $\prod s_n(\varphi_v e_1, \dots, \varphi_v e_4) = 0$ wegen des Isomorphismus von $[u, 1]$ auf $[0, v]$. Indem man φ_u auf duale Weise weiter zerlegt, erhält man somit eine Darstellung von φ als direkte Summe von φ^+ , $\tilde{\varphi}$ und φ^- mit $\prod s_n(\varphi^+ e_1, \dots, \varphi^+ e_4) = 0$, $s_n(\tilde{\varphi} e_1, \dots, \tilde{\varphi} e_4) = 1$ und $s_n^*(\tilde{\varphi} e_1, \dots, \tilde{\varphi} e_4) = 0$ für alle n und $\sum s_n^*(\varphi^- e_1, \dots, \varphi^- e_4) = 1$. Zur weiteren Zerlegung von $\varphi^-: F \rightarrow M^-$ benutzen wir.

HILFSSATZ 7.3. *Ist $\varphi: L \rightarrow M$ eine Darstellung in einem abzählbar stetigen modularen Verband und für jedes $n \geq 0$ $\{a_n, b_n\}$ eine direkte Zerlegung von φ sowie $b_0 = 1$, $a_n \leq a_{n+1}$, $b_n \geq b_{n+1}$ und $\sum a_n = 1$, so ist $B = \{b_n a_{n+1} \mid n \geq 0\}$ eine direkte Zerlegung von φ .*

Beweis. Der von den a_n und b_m erzeugte Unterverband ist distributiv, da er von zwei Ketten erzeugt wird. Durch Induktion ergibt sich $b_0 a_1 + \dots + b_n a_{n+1} = a_n + b_n a_{n+1} = a_{n+1}(b_n + a_n) = a_{n+1}$. Also gilt für $k > n$ $b_k a_{k+1}(b_0 a_1 + \dots + b_n a_{n+1}) = b_k a_{k+1} a_{n+1} \leq b_k a_k = 0$. Da $\sum b_n a_{n+1} = \sum a_{n+1} = 1$ vorausgesetzt wurde, ist B eine Basis von M . Wegen der Stetigkeit genügt es zu zeigen, daß $b_0 a_1 \varphi x + \dots + b_n a_{n+1} \varphi x = (b_0 a_1 + \dots + b_n a_{n+1}) \varphi x = a_{n+1} \varphi x$ für alle x gilt. Dies geschieht durch Induktion: $b_0 a_1 \varphi x + \dots + b_n a_{n+1} \varphi x = a_n \varphi x + b_n a_{n+1} \varphi x = a_{n+1}(a_n \varphi x + b_n \varphi x) = a_{n+1} \varphi x$.

Sei auf M^- eine Komplementierungsoperation gewählt. Dann gibt es einen Homomorphismus ψ^- von $\tilde{F}$ in M^- mit $\varphi^- = \psi^- \circ \beta$. Wir wenden den Hilfssatz an auf die Folgen $0 = \varphi^- s_0^* = \varphi^- t_0^* \leq \varphi^- s_1^* \leq \varphi^- t_1^* \leq \dots$ und $1 = \psi^- \tilde{s}_0^* = \psi^- \tilde{t}_0^* \geq \psi^- \tilde{s}_1^* \geq \psi^- \tilde{t}_1^* \geq \dots$. Betrachte den direkten Summanden φ_b^- mit $b = \psi^- \tilde{t}_n^* s_{n+1}^*$. Sei α der Endomorphismus $x \mapsto (x + \varphi^- t_n^*) \varphi^- s_{n+1}^*$ von Bild φ^- und δ der Isomorphismus von $[\varphi^- t_n^*, \varphi^- s_{n+1}^*]$ auf $[0, b]$ mit $x \mapsto xb$. Dann gilt $\varphi_b^- = \delta \circ \alpha \circ \varphi^-$. Wegen $s_{n+1}^* (\alpha \varphi^- e_1, \dots, \alpha \varphi^- e_4) = \alpha \varphi^- s_{n+1}^* = \varphi^- s_{n+1}^*$ und $t_n^* (\alpha \varphi^- e_1, \dots, \alpha \varphi^- e_4) = \alpha \varphi^- t_n^* = \varphi^- t_n^*$ folgt $s_{n+1}^* (\varphi_b^- e_1, \dots, \varphi_b^- e_4) = b$ und $t_n^* (\varphi_b^- e_1, \dots, \varphi_b^- e_4) = 0$. d.h. φ_b^- ist vom Typ $+IIn$. Entsprechend erhält man, daß für $b = \psi^- \tilde{s}_n^* t_n^*$ φ_b^- direkte Summe von Darstellungen vom Typ $+In$ (benutze das Dual zu 3.2). Für φ^+ findet man eine Zerlegung auf dem Umweg über duale Zerlegungen. Ohne die Voraussetzung der abzählbaren Stetigkeit ist die Aussage des Satzes nicht mehr richtig, ja nicht einmal für Untervektorraumverbände unendlichdimensionaler Vektorräume – vgl. C. M. Ringel [22; 2.6]. Man kann jedoch mit demselben Vorgehen wie oben immerhin eine "ideale" Zerlegung finden, indem man M in einen abzählbar stetigen Verband einbettet – es genügt sogar die Stetigkeit, die man durch die Einbettung in den Filterverband des Idealverbandes erhält.

§8. Zur Struktur von $FM(4)$ bis auf lineare Äquivalenz

Sei $\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{V}$ die von allen komplementären modularen bzw. arguesischen Verbänden erzeugte Verbandsvarietät. $\mathcal{V}$ wird von den Verbänden $L(P_p^n)$ P ein endlicher Primkörper, $n < \infty$, erzeugt, bei $\mathcal{C}$ kommen noch die nicht desargues'schen projektiven Ebenen hinzu – vgl. [12]. Die von einem Rahmen erzeugten subdirekt irreduziblen Verbände in $\mathcal{V}$ sind gerade die $L(P_p^n)$, P Primkörper [11; 2.2]. Also ergibt Satz 7.2 eine vollständige Liste subdirekt irreduzibler Verbände in $\mathcal{V}$, die von einem Quadrupel erzeugt werden. Insbesondere kann man in $\mathcal{V}$ (und in $\mathcal{C}$) das Wortproblem in vier Erzeugenden lösen.

Den freien Verband F_1 in $\mathcal{V}$ mit 0 und 1 in 4 Erzeugenden erhält man, indem man F nach der linearen Äquivalenz im Sinne von I. M. Gel'fand und V. A.

Ponomarev [7] faktorisiert: x und y aus F heißen linear äquivalent, falls $\varphi x = \varphi y$ für jede endlichdimensionale lineare Darstellung von F . Die Struktur von F_1 ist weitgehend bekannt: Satz 6.3 liefert die neutralen Elemente $1 \geq s_1 \geq t_1 \geq s_2 \geq t_2 \geq \dots \geq t_2^* \geq s_2^* \geq t_1^* \geq s_1^* \geq 0$. §2 und 3 beschreiben die Struktur der Intervalle $[t_n, s_{n+1}]$ und $[s_n, t_n]$, Satz 4.2 den Quotienten mit $s_n = 1$ und $s_n^* = 0$ für alle n . Hieraus können wir insbesondere den Unterverband der neutralen Elemente bestimmen.

Sei $B^+(n)$ der von s_n, t_n und p_{ni} ($i \in 4$) erzeugte Unterverband von F_1 . Dann besteht $B^+(n)$ aus plusquamperfekten Elementen und ist wegen Satz 3.2 ein Boolescher Verband mit Atomen p_{ni} ($i \in 4$). Die Definition von $B^+(n)$ stimmt (in F_1) mit der von I. M. Gel'fand und V. A. Ponomarev [7] überein, da dies für die subdirekt irreduziblen Faktoren von F_1 der Fall ist. $B^-(n)$ ist dual definiert und B als die Vereinigung aller $B^+(n)$ und $B^-(n)$. In [7] und [8] wurde vermutet, daß jedes perfekte Element von F_1 zu B gehört. Wir geben hier weitere plusquamperfekte Elemente an, die im Zusammenhang mit Körpercharakteristiken stehen.

Sei nämlich $m \geq 3$ und $FV(\phi_m)$ der von einem Rahmen der Ordnung m frei erzeugte Verband in $\mathcal{V}$. Dann gibt es nach [11; 6.2] für jede quadratfreie Zahl k Elemente $c_k, \tilde{c}_k$ von $FV(\phi_m)$ so, daß für jeden Homomorphismus φ von $FV(\phi_m)$ in einen Verband $L(P_P^m) - P$ endlicher Primkörper $-\varphi c_k = 1$ und $\varphi \tilde{c}_k = 0$ gilt, falls $|P|$ ein Teiler von k ist, sonst aber $\varphi c_k = 0$ und $\varphi \tilde{c}_k = 1$. Da $FV(\phi_m)$ subdirektes Produkt der $L(P_P^m)$ ist, sind c_k und $\tilde{c}_k$ komplementäre neutrale Elemente in $FV(\phi_m)$, insbesondere also plusquamperfekt. Die Elemente der Form c_k und $\tilde{c}_k$ bilden offenbar einen Unterverband von $FV(\phi_m)$, der zum Verband der endlichen und koendlichen Teilmengen der Menge der Primzahlen isomorph ist. Andererseits sind die c_k und $\tilde{c}_k$ die einzigen neutralen Elemente von $FV(\phi_m)$. Für jedes weitere neutrale Element wäre nämlich die Menge I bzw. J der Primzahlen p , für die der kanonische Homomorphismus φ_p von $FV(\phi_m)$ auf $L(P_P^m)$ mit $|P| = p$ $\varphi_p u = 1$ bzw. $\varphi_p u = 0$ ergibt, unendlich. Nun faktorisiert aber der kanonische Homomorphismus von $FV(\phi_m)$ auf $L(Q_Q^m) - Q$ der rationale Zahlkörper – durch jedes subdirekte Produkt über unendlich viele der φ_p (vgl. [11; 4.3]), es müßte also in $L(Q_Q^m)$ $0 = \varphi u = 1$ gelten, ein Widerspruch.

Wegen der Plusquamperfektheit von t_n und s_{n+1} erzeugt der nach 2.1 zu den $t_n e_j + s_{n+1}$ ($j \in 4$) bestimmte Rahmen eine isomorphe Kopie von $FV(\phi_{2n+1})$. Für $n \geq 1$ sei $\tilde{B}^+(n)$ der Verband der neutralen Elemente hierin, wie oben angegeben. Die Elemente von $\tilde{B}^+(n)$ sind dann auch in F_1 plusquamperfekt. Ebenso erzeugt der nach 3.3 zu den $e_j p_{ni} + t_n$ ($j \in 4$) bestimmte Rahmen eine Kopie von $FV(\phi_n)$. Für $n \geq 3$ sei $\tilde{B}_i^+(n)$ der Verband der neutralen Elemente hierin. $\tilde{B}^+(n)$ sei das Erzeugnis der $\tilde{B}_i^+(n)$ ($i \in 4$), das wegen 3.2 gerade zum direkten Produkt dieser 4 Verbände isomorph ist. $\tilde{B}^+(n)$ ist dann der Verband aller neutralen Elemente in $[t_n, s_n]$. Schließlich sei $\tilde{B}^+(1) = 1$, $\tilde{B}^+(n) = B^+(n)$ für $n = 1, 2$. Die $\tilde{B}^-(n)$ und

$\bar{B}^-(n)$ seien dual definiert, $\bar{B}$ sei die Vereinigung aller $\bar{B}^+(n)$, $\bar{B}^+(n)$, $\bar{B}^-(n)$, $\bar{B}^-(n)$.

SATZ 8.1. $\bar{B}$ ist der Unterverband aller neutralen Elemente in F_l . Jedes Element von $\bar{B}$ ist plusquamperfekt.

KOROLLAR 8.2. Jedes neutrale Element von $FM(4)$ ist perfekt.

Da F_l subdirektes Produkt über endlichdimensionale lineare Darstellungen ist, ist jedes perfekte Element von F_l neutral in F_l , also $\bar{B}$ gerade der Unterverband aller perfekten Elemente von F_l .

Sei F_{lp} der Quotient von F_l nach folgender Kongruenz: x ist kongruent zu y genau dann, wenn $\varphi x \varphi y$ für alle endlichdimensionalen linearen Darstellungen φ über einem Schiefkörper der Charakteristik p gilt. F_{lp} ist der freie Verband in der Varietät $\mathcal{V}_p$, die von allen Verbänden $L(P_p^m)$ mit $\text{char}(P) = p$ erzeugt wird. $\mathcal{V}_p$ enthält keinen Verband $L(P_p^n)$ mit $\text{char}(P) \neq p$ – vgl. [12].

ZUSATZ 8.3. In F_{lp} ist das Bild von B der Unterverband aller neutralen Elemente.

Man vergleiche hierzu V. Dlab und C. M. Ringel [5], wo gezeigt wurde, daß es höchstens 16 perfekte Elemente in F_{lp} gibt, die nicht zu B gehören. Der Beweis des Satzes erfolgt in mehreren Schritten.

I. Es gibt kein Element u in F mit $s_n \geq u \geq s_n^*$ für alle n . Sei nämlich u ein solches Element, P ein fest gewählter Primkörper und $\varphi_n: F_l \rightarrow L_n = L(P^{2n+1})$ die Darstellung vom Typ $-II_n$, L das subdirekte Produkt über die φ_n , φ der kanonische Homomorphismus von F_l auf L . Sei M_4 der Verband der Länge 2 mit 4 Atomen, μ ein Homomorphismus von F_l auf M_4 . Wie unten gezeigt wird, existiert ein Homomorphismus $\bar{\mu}$ von L auf M_4 mit $\mu = \bar{\mu}\varphi$. Da $u \leq s_n$ für alle n gilt, haben wir $\varphi u = 0$, also $\mu u = 0$. Definiert man nun L^* , φ^* und μ^* dual, so folgt $\varphi^* u = 1$, also $\mu u = 1$, ein Widerspruch.

Die Existenz von $\bar{\mu}$ erhalten wir wie folgt: Sei $\mathcal{F}$ nichttrivialer Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, L' der von den $\bar{e}_i = (\varphi_n e_i \mid n > 0) / \mathcal{F}$ ($i \in 4$) erzeugte Unterverband des Ultraprodukts $\prod L_n / \mathcal{F}$. Es gilt offenbar für $i \neq j$ aus 4 $\bar{e}_i \bar{e}_j = 0$ und es ist $\bar{e}_i + \bar{e}_j$ Koatom, da entsprechendes in allen L_n der Fall ist. Auf L' ist eine Kongruenz gegeben mit $x \sim y$ genau dann, wenn $[xy, x+y]$ endliche Länge hat. Der Quotient $L'/\sim$ ist aber zu M_4 isomorph.

II. Ist u neutral in F so gilt entweder $u \geq s_n^*$ für alle n oder $u \leq s_n$ für alle n .

Sei das Gegenteil angenommen und n und m minimal mit $s_n \not\geq u$, $s_m^* \not\geq u$. Dann

sind $v = us_n + s_m^*$, uv und $u+v$ neutral in F_l und voneinander verschieden. Sei L das homomorphe Bild von F_l unter $x \mapsto x(u+v) + uv$. Dann sind u und v komplementäre neutrale Elemente von L , also L das direkte Produkt seiner Intervalle $[uv, u]$ und $[uv, v]$. Wegen des Isomorphismus $x \mapsto x(u+v)$ von $[s_n, u + s_n]$ auf $[v, u+v]$ und Hilfssatz 5.3 hat man jedoch $(e_i(u+v) + v) \times (e_j(u+v) + v) = v$ für alle $i \neq j$ aus **4**. Entsprechend erhält man $e_i v + uv + e_j v = v$. Also ergibt sich ein Widerspruch, wenn man den folgenden trivialen Hilfssatz auf $S = M_4$ anwendet.

HILFSSATZ 8.4. *Stein M und S Verbände, σ und γ verbindungs- bzw. schnitterhaltende Abbildungen von S in M so, daß M von der Vereinigung L der Intervalle $[\sigma x, \gamma x]$ ($x \in S$) erzeugt wird. Dann gilt $M = L$.*

LEMMA 8.5. *Sei L der freie modulare Verband mit Erzeugenden a, b, c, d und Relationen $s_n(a, b, c, d) = 1$, $s_n^*(a, b, c, d) = 0$ für alle n . Dann sind 0 und 1 die einzigen neutralen Elemente von L .*

Beweis. Wegen Satz 4.3 ist L subdirektes Produkt der von A. Day, R. Wille und dem Verfasser in [4] eingeführten einfachen Verbände $S(n, 4)$ – Fig. 2. Dabei gibt es für jede der Projektionen $\varphi: L \rightarrow S(n, 4)$ eindeutig bestimmte $i < j$ aus **4** so, daß $\varphi e_k + \varphi e_l = 1$ für $\{k, l\} \neq \{i, j\}$ und $\varphi e_k \varphi e_l = 0$ für $\{k, l\} \neq \{i, j\}$ falls n gerade bzw. für $\{k, l\} \neq 4 - \{i, j\}$ falls n ungerade. Wir schreiben dann $\varphi = \varphi_{nij}$. Zu jedem n, i und j gibt es zwei Verbandseinbettungen α und β von $S(n, 4)$ in $S(n+2, 4)$ so, daß $\alpha \varphi_{nij} e \leq \varphi_{n+2ij} e$ und $\beta \varphi_{nij} e \geq \varphi_{n+2ij} e$ für alle e aus $\{a, b, c, d\}$. Ist u neutral in L und X entweder die Menge der geraden oder der ungeraden Zahlen, so muß folglich zu gegebenen i, j entweder $\varphi_{nij} u = 0$ für alle n aus X oder $\varphi_{nij} u = 1$ für alle n aus X gelten. Andererseits ist aber für gegebene i, j und X der Verband M_4 homomorphes Bild des subdirekten Produkts über die $\varphi_{nij}: L \rightarrow S(n, 4)$ ($n \in X$), wie man Theorem 5 in [4] entnimmt oder ähnlich wie im Fall I beweist. Sei nun φ der kanonische Homomorphismus von L auf M_4 . Da M_4 einfach ist, gilt entweder $\varphi u = 1$ und somit $\varphi_{nij} u = 1$ für alle n, i und j (also $u = 1$) oder $\varphi u = 0$ und $u = 0$.

HILFSSATZ 8.6. *Der modulare Verband M sei in seinen Idealverband $\mathcal{I}(M)$ eingebettet. Dann gilt: (a) Sind die $u_n \leq u_{n+1}$ ($n \geq 0$) neutral in M , so ist $u = \sum u_n$ neutral in $\mathcal{I}(M)$. (b) Ist φ ein Homomorphismus von M in einen endlichen Verband L , so definiert $\bar{\varphi} X = \sum \varphi X$ einen Homomorphismus von $\mathcal{I}(M)$ in L .*

Beweis. (a) Da $\mathcal{I}(M)$ aufwärts stetig ist, gilt für x, y aus M $(x+y)u = \sum (x+y)u_n = \sum (xu_n + yu_n) = xu + yu$. Für a, b aus $\mathcal{I}(M)$ gibt es gerichtete $A, B \subseteq M$ mit $a = \sum A, b = \sum B$, also $u(a+b) = \sum (u(x+y) \mid x \in A, y \in B) =$

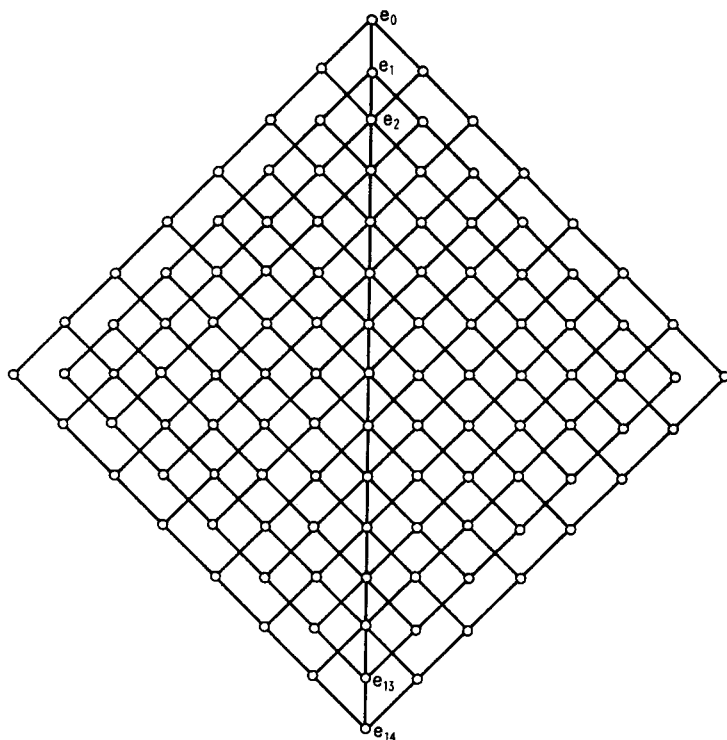


Fig. 2

$\sum (ux + uy) \mid x \in A, y \in B = ua + ub$. (b) $\bar{\varphi}(X + Y) = \sum \varphi(x + y \mid x \in X, y \in Y) = \bar{\varphi}X + \bar{\varphi}Y$ ist trivial. Zu X aus $\mathcal{I}(M)$ gibt es $x \in X$ mit $\bar{\varphi}X = \varphi x$, also $\bar{\varphi}X\bar{\varphi}Y = \varphi x\varphi y = \varphi xy \leq \bar{\varphi}(XY)$, da xy in $X \cap Y$ liegt.

III. Ist u neutral in F_l , so gibt es ein n mit $u \geq s_n$ oder $u \leq s_n^*$. Wegen II können wir (bis auf Dualität) $u \geq s_n^*$ für alle n voraussetzen. Sei F_l in den Idealverband M seines Filterverbandes eingebettet. Sei s der von den s_n erzeugte Filter, s^* das von den s_n^* erzeugte Ideal. Nach Hilfssatz 8.6(a) und seinem Dual sind s und s^* neutral in M . Wir behaupten, daß der von den $\bar{e} = es + s^*$ ($e \in E$) erzeugte Unterverband L' isomorph zu dem Verband L aus Lemma 8.5 ist. Es gilt offensichtlich $s_n(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}) = s$ und $s_n^*(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}) = s^*$ für alle n . Da die subdirekten Faktoren $S(n, 4)$ von L zu $\mathcal{V}$ gehören (vgl. [4]), genügt es zu zeigen, daß jeder Homomorphismus φ von F_l auf $S(n, 4)$ durch L' faktorisiert. Dazu setze man zunächst φ nach 8.6(b) zu $\bar{\varphi}: M \rightarrow S(n, 4)$ fort und beachte $\bar{\varphi}s = 1$, $\bar{\varphi}s^* = 0$, also $\bar{\varphi}\bar{e} = \varphi e$.

Man betrachte nun das Element us von L' . Es ist neutral in L' , also $us = s^*$ oder $us = s$ nach Lemma 8.5. Sei zunächst $us = s^*$ angenommen. Wegen I gibt es

ein minimales n mit $u \not\leq s_n$. Dann liefern u und $us_n + s$ eine direkte Zerlegung des von den $e(u+s) + us_n$ ($e \in E$) erzeugten Unterverbands U . Da $[us_n, us_n + s]$ über $x \mapsto xs$ zu L isomorph ist, hat U das direkte Product $[us_n, u] \times M_4$ als homomorphes Bild. Wegen des Isomorphismus $x \mapsto x + s_n$ von $[us_n, u]$ auf $[s_n, u + s_n]$ gilt jedoch $us_n = (u+s)(us_n + e_i)(us_n + e_j)$, also führt Hilfssatz 8.4 zu einem Widerspruch. Folglich muß $u \geq s$ gelten, d.h. u zu dem von den s_n erzeugten Filter gehören. Da diese eine absteigende Kette bilden, gibt es ein m mit $u \geq s_m$.

Wir betrachten nun die absteigende Kette C der Elemente $1 = t_0 > s_1 > t_1 > s_2 > t_2 > \dots$ von F_l .

IV. Ist u neutral in F_l und gibt es x, y in C mit $x \geq u \geq y$, so gibt es einen Primquotienten p/q in C mit $p \geq u \geq q$.

Da per definitionem die neutralen Elemente des Intervalls $[q, p]$ von F_l zu $\tilde{B}$ gehören, beschließt dies den Beweis von Satz 8.1.

Der Nachweis von IV erfolgt durch Induktion über die Länge l des Intervalls $[y, x]$ von C . Wir behandeln zunächst den Induktionsschritt $l-1 \mapsto l$ für $l \geq 3$. Sei x in C minimal mit $x \geq u$ und y in C maximal mit $y \leq u$, die Länge von $[y, x]$ sei $l \geq 3$. Sei $\underline{x}$ der untere Nachbar von x in C , $\bar{y}$ der obere Nachbar von y in C . Dann gilt $\bar{y} \leq \underline{x}$ und man kann die Induktionsvoraussetzung auf $u\underline{x}$ und $u + \bar{y}$ anwenden. Folglich muß $u\underline{x}$ mit $\bar{y}$ und $u + \bar{y}$ mit $\underline{x}$ vergleichbar sein, also $u\underline{x} \leq \bar{y}$ und $u + \bar{y} \geq \underline{x}$ nach der Wahl von x und y . Mit der Modularität folgt $\underline{x} = \bar{y}$, d.h. $l = 2$ und es bleibt nur dieser Fall, d.h. $s_n \geq s_{n+1}$ bzw. $t_n \geq u \geq t_{n+1}$, abzuhandeln.

HILFSSATZ 8.7. Die Abbildung $x \mapsto x^i$ ist ein Isomorphismus von F_l auf den von den eq_i ($e \in E$) erzeugten Unterverband L_i mit größtem bzw. kleinstem Element q_i bzw. 0. Ist u in F_l neutral, so gilt $u^i = uq_i$ und $u = uq_i + uq_j$ ($i \neq j$) falls $u \leq s_2$.

Beweis. Zu jedem $\varphi: F_l \rightarrow S$, S subdirekt irreduzibel, gibt es nämlich ein $\psi: F_l \rightarrow T$, T subdirekt irreduzibel und eine Einbettung α von S in T mit $\alpha\varphi e = \psi eq_i$ ($e \in E$). Dies stellt man durch Inspektion der Liste der subdirekt irreduziblen fest. Zum Beweis der zweiten Behauptung sei nur angemerkt, daß $\varphi u = 0$ oder $\varphi u = 1$.

Wir zeigen nun durch Induktion über n : $s_n \geq u \geq s_{n+1}$ impliziert $u \geq t_n$ oder $u \leq t_n$. Für $n = 1$ ist dies trivial. Für $n \geq 2$ schließen wir so: u^i ist neutral in L_i und $s_{n-1}(aq_i, \dots, dq_i) = s_n^i \geq u^i \geq s_{n+1}^i = s_n(aq_i, \dots, dq_i)$, also nach Induktionsannahme $u^i \geq t_{n-1}(aq_i, \dots, dq_i) = t_n^i$ oder $u \leq t_n^i$. Dies gilt für jedes $i \in \mathbf{3}$, also gibt es $i \neq j$ aus $\mathbf{3}$ mit $u^i \geq t_n^i$ und $u^j \geq t_n^j$ oder aber $u^i \leq t_n^i$ und $u^j \leq t_n^j$. Wegen $u = u^i + u^j$ und $t_n = t_n^i + t_n^j$ erhält man $u \geq t_n$ oder $u \leq t_n$.

Für $t_n \geq u \geq t_{n+1}$ verläuft der Induktionsschritt ganz analog. Im Falle $n = 1$ sei $u \neq s_2$ und $u \neq s_2$ angenommen. Das Element us_2 ist neutral in $[t_2, s_2] \cong M_3^4$, also eines der 15 Elemente $\sum (p_{2i} | i \in I)$ mit $I \subset 4$. Man hat o.B.d.A. $r = p_{21} + p_{22} + p_{23} \geq us_2$. Dann ist auch $v = u + r$ neutral, $v \neq s_2$ und $vs_2 = r$. Wir wenden nun Hilfssatz 8.4 an auf $[r, v + s_2]$ mit $S = [r, s_2] \cong M_3$. Sei σ die Identität auf S und $\gamma(r + es_2) = (v + s_2)(d + e) + s_2$. Dann ist γ sogar eine Einbettung von S in $[d(v + s_2) + s_2, v + s_2]$. $[s_2, v + s_2]$ nämlich nichttrivial vom Typ $-II1$. Es müßte also $x \in S$ geben mit $\sigma x \leq v \leq \gamma x$ und somit $\sigma x = r$, $\gamma x = v + s_2$ wegen $\sigma x \leq s_2 \leq \gamma x$. Das ist jedoch unmöglich, da $\gamma r = d(v + s_2) + s_2 < v + s_2$.

LITERATUR

- [1] B. ARTMANN, *On coordinates in modular lattices with a homogeneous basis*, Illinois J. Math. 12 (1968), 626–648.
- [2] S. BRENNER, *On four subspaces of a vector space*, J. Algebra 29 (1974), 587–599.
- [3] P. CRAWLEY und R. P. DILWORTH, *Algebraic Theory of Lattices*, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J. 1973.
- [4] A. DAY, C. HERRMANN und R. WILLE, *On modular lattices with four generators*, Algebra Universalis 2 (1972), 317–323.
- [5] V. DLAB und C. M. RINGEL, *Perfect elements in free modular lattices*, Math. Ann. 247 (1980), 95–100.
- [6] I. M. GEL'FAND und V. A. PONOMAREV, *Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite dimensional vector space*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. 5, Hilbert Space Operators, Tihany, 1970.
- [7] I. M. GEL'FAND und V. A. PONOMAREV, *Free modular lattices and their representations*, Russian Math. Surveys 29, 6 (1974), 1–56.
- [8] I. M. GEL'FAND und V. A. PONOMAREV, *Lattices, representations, and algebras connected with them I*, Russian Math. Surveys 31, 5 (1976) 67–85.
- [9] I. M. GEL'FAND und V. A. PONOMAREV, *Lattices, representations, and algebras connected with them II*, Russian Math. Surveys 32, 1 (1977), 91–114.
- [10] C. HERRMANN, *On the equational theory of submodule lattices*, Proc. Univ. Houston Lattice Theory Conf. 1973, 105–118.
- [11] C. HERRMANN und A. P. HUHN, *Lattices of normal subgroups which are generated by frames*, Coll. Math. Soc. Bolyai 14 Lattice Theory, Szeged 1974, 97–136.
- [12] C. HERRMANN und A. P. HUHN, *Zum Wortproblem für freie Untermodulverbände*, Arch. der Math. 26 (1975), 243–251.
- [13] C. HERRMANN, *On modular lattices generated by two complemented pairs*, Houston J. Math. 2 (1976), 513–523.
- [14] C. HERRMANN, C. M. RINGEL und R. WILLE, *On modular lattices with four generators*, Notices Amer. Math. Soc. 20 (1973), A-418.
- [15] G. HUTCHINSON, *Embedding and unsolvability theorems for modular lattices*, Algebra Universalis, 7 (1977), 47–84.
- [16] B. JÖNSSON, *Representations of complemented modular lattices*, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 64–94.
- [17] L. LIPSHITZ, *The undecidability of the word problems for projective geometries and modular lattices*, Trans. Amer. Math. Soc. 193 (1974), 171–180.

- [18] F. MAEDA, *Kontinuierliche Geometrien*, Springer, Berlin 1958.
- [19] L. A. NAZAROVA, *Representation of a tetrad*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. 31 (1967), 1361–1378.
- [20] J. v. NEUMANN, *Continuous Geometry*, Princeton. Math. Ser. 25 Princeton Univ. Press, Princeton 1960.
- [21] W. POGUNTKE, *Zerlegung von S-Verbänden*, Math. Z. 142 (1975), 47–65.
- [22] C. M. RINGEL, *Infinite dimensional representations of finite dimensional hereditary algebras*, Vorabdruck 1978.
- [23] R. WILLE, *On free modular lattices generated by finite chains*, Algebra Universalis, 3 (1973), 131–138.
- [24] W. BAUR, *On the elementary theory of quadruples of vector spaces*.
- [25] V. DLAB, *Structure des treillis lineares libres*, Springer Lecture Notes in Math. 795 (1980), ed P. M. Malliavin, pp. 10–34.

Technische Hochschule Darmstadt
Darmstadt
West Germany