КОЛЬЦА ЧАСТНЫХ КОНЕЧНЫХ AW^*-АЛГЕБР: ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Кристиан Херрманн AND Марина Семенова

Аннотация. Мы показываем, что $*$-регулярное расширение (по Берклиану) конечной AW^*-алгебры имеет точное представление в $\mathbb{C}$-алгебре эндоморфизмов некоторого замкнутого подпространства ультрастепени гильбертова пространства, где инволюции соответствует сопряжение. Мы также показываем, что это расширение является гомоморфным образом некоторой регулярной подалгебры в ультрапроизведении матричных $*$-алгебр вида $\mathbb{C}^{n\times n}$.

УДК 512.55, 512.57

1. Введение

Гудерл и Менал показали в [1, теорема 1.6], что произвольная C^*-алгебра C является гомоморфным образом резидуально конечномерной C^*-алгебры B. Более того, если алгебра C сепарабельна, то B представима в виде подпрямого произведения матричных алгебр $\mathbb{C}^{n\times n}$. Первой целью данной работы является доказательство того, что в качестве указанной выше алгебры B может служить некоторая подалгебра ультрапроизведения алгебр вида $\mathbb{C}^{n\times n}$, а также обобщение этого результата на произвольные алгебры, представимые в пространствах со скалярным произведением. Ультрапроизведения используются здесь в теоретико-модельном смысле.

Другая цель данной работы состоит в распространении этого результата об алгебраической аппроксимации на $*$-регулярные алгебры частных, где алгебра B также $*$-регулярна. Такие алгебры были построены Берберианом [2] (и изучались Хафнером [3], Пайлом [4] и Берберианом [5]) как обобщение $*$-регулярных алгебр неограниченных операторов Мюррея и фон Ноймана [6], соответствующих конечным факторам алгебры фон Ноймана; а также в более общем виде Хандельманом [7], Арой и Меналом [8]. Упомянутые результаты сформулированы в виде следующей теоремы (подробности можно найти в разделе 7). См. также [9, теорема 2.3], [10, предложение 21.2].

Теорема 1. *Пусть A — конечная рикартовская C^*-алгебра. Тогда A имеет классическое кольцо првых частных $Q(A)$. Инволюция и операции $\mathbb{C}$-алгебры*

2000 *Mathematics Subject Classification.* 06C20, 16E50, 16W10, 46L10.

Key words and phrases. конечная AW^*-алгебра, конечная ракартовская C^*-алгебра, кольцо частных, $*$-регулярное кольцо, орторешетка проекций, ультрапроизведение.

Второй автор был поддержан Советом по грантам Президента РФ МД-2587.2010.1, а также Фондом Йозефа Мяновского и Фондом польской науки.

на A могут быть продолжены единственным образом на $Q(A)$, что превращает последнее в $*$-регулярную $\mathbb{C}$-алгебру. Более того, A и $Q(A)$ имеют одни и те же проекции. Если A является дополнительно AW^*-алгеброй, то $Q(A)$ является максмльным кольцом правых частных для A.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 2. *Пусть A и $Q(A)$ такие, как в* теореме 1.

(i) *Существуют пространство со скалярным произведением $\hat{V}_{\hat{\mathbb{C}}}$, являющееся ультрастепенью гильбертова пространства $V_{\mathbb{C}}$, замкнутое $\hat{\mathbb{C}}$-линейное подпространство U пространства $\hat{V}$ и вложение ι $\mathbb{C}$-алгебры $Q(A)$ в $\mathbb{C}$-алгебру эндоморфизмов пространства $U_{\hat{\mathbb{C}}}$, такое что $\iota(r^*)$ является сопряженным эндоморфизмом к $\iota(r)$ для любого $r \in Q(A)$.*

(ii) *Для инволютивных $\mathbb{C}$-алгебр с псевдо-обращением $Q(A)$ является гомоморфным образом подалгебры ультрапроизведения алгебр вида $\mathbb{C}^{n\times n}$.*

(iii) *Орторешетка $\mathbb{L}(A)$ проекций A является гомоморфным образом некоторой подорторешетки в ультрапроизведениии орторешеток проекций алгебр $\mathbb{C}^{n\times n}$.*

Необходимые понятия приведены ниже, доказательство теоремы приведено в разделе 7. Отметим, что в (i) $\hat{\mathbb{C}}$ является, в частности, ультрастепенью $\mathbb{C}$, а скалярное произведение в $\hat{V}_{\hat{\mathbb{C}}}$ таже получено из скалярного произведения в $V_{\mathbb{C}}$ посредством конструкции ультрапроизведения. Более того, если A сепарабельна, то пространство $V_{\mathbb{C}}$ также может быть выбрано сепарабельным.

Метод доказательства, который сам по себе также представляет интерес, основан на представлении алгебры $Q(A)$ в подходящем пространстве со скалярным произведением, которое в действительности яляется замкнутым подпространством ультрастепени гильбертова пространства V, в котором алгебра A представима посредством конструкции Гельфанда-Наймарка-Сигала (или, коротко, ГНС-конструкции). Такое представление для $Q(A)$ получено на основе того, что $Q(A)$ является гомоморфным образом некоторой алгебраической системы, имитирующей алгебру неограниченных операторов, что также используется для доказательства и того факта, что $Q(A)$ является гомоморфным образом подалгебры достаточно насыщенного элементарного расширения $\hat{T}$ алгебры эндоморфизмов (с единицей) T пространства V, порожденной эндоморфизмами, образ которых имеет конечную размерность. Алгебра $\hat{T}$ может быть получена как ультрастепень алгебры T и допускает представление в некоторй ультрастепени пространства V.

Авторы признательны Луке Джудичи за полезные обсуждения этой тематики, а также рецензенту первой версии этой работы за его важные замечания и предложения.

2. Пространства со скалярным произведением, $*$-регулярные кольца и проекции

Здесь $*$-*кольцом* называется ассоциативное кольцо R с единицей и дополнительной операцией *инволюции*; то есть, анти-автоморфизмом $x \mapsto x^*$ степени

2. Мы будем рассматривать представления Λ-алгебр R с инволюцией в пространствах V_F со скалярным произведением, где Λ является коммутативным $*$-кольцом; для определения таких представлений нам придется предполагать, что F также является Λ-алгеброй и что инволюции связаны естественным образом. Адекватым понятием является поэтому понятие $*$-Λ-алгебы; то есть такой Λ-алгебры R, которая является $*$-кольцом, причем $1_\Lambda r = r$ и $(\lambda r)^* = \lambda^* r^*$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и $r \in R$. Для $*$-Λ-алгебр понятие гомоморфизма и подалгебры относится и к структуре Λ-алгебры, и к инволюции. Отметим, что C^*-алгебры являются (довольно специальными) $*$-$\mathbb{C}$-алгебрами.

Для нас основной интерес представляет случай, когда Λ является $*$-кольцом $\mathbb{C}$ комплексных чисел с сопряжением, а F является элементарным расширением $\mathbb{C}$. Однако, наши рассуждения без дополнительных усилий распространяются и на случай, когда F является произвольным $*$-Λ-телом. Мы говорим, что [правое] векторное пространство V_F над F называется *пространством со скалярным произведением*, если на нем определено *скалярное произведение* $(x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle$; то есть положительно определенная полуторалинейная форма, которая является эрмитовой относительно инволюции, см. [11]. Основные понятия и результаты, касающиеся унитарных пространств, продолжаются естественным образом на пространства со скалярным произведением. В частности, любое F-линейное подпространство U является пространством U_F с индуцированным скалярным произведением. Пусть π_U обозначает ортогональную проекцию на U в случае, когда она существует; например, если $\dim U < \infty$.

Эндоморфизмы φ пространства V_F образуют Λ-алгебру, где $(\lambda\varphi)(v) = \varphi(v)\lambda$ для $\lambda \in \Lambda$, $v \in V$. Отметим, что действие Λ на V определено равенством $v\lambda = v(\lambda 1_F)$. Эндоморфизмы V_F, для которых существует сопряженный относительно скалярного произведения эндоморфизм φ^*, образуют подалгебру $\mathsf{End}^*_\Lambda(V_F)$ в Λ-алгебре всех эндоморфизмов, которая является $*$-Λ-алгеброй; действетельно, эндоморфизм $\lambda^*\varphi^*$ является сопряженным к $\lambda\varphi$. Если эндоморфизм φ таков, что $\dim \mathsf{im}\, \varphi < \infty$, то $\varphi \in \mathsf{End}^*_\Lambda(V_F)$ и $\dim \mathsf{im}\, \varphi^* = \dim(\ker \varphi)^\perp = \dim \mathsf{im}\, \varphi$.

Представлением $*$-Λ-алгебры R в пространстве V_F со скалярным произведением называется гомоморфизм $\varepsilon\colon R \to \mathsf{End}^*_\Lambda(V_F)$ или, что более удобно для рассмотрения, унитарный R-F-бимодуль ${}_RV_F$, такой что $(\lambda r)v = r(v\lambda)$ и $\langle rv \mid w \rangle = \langle v \mid r^* w \rangle$ для всех $r \in R$, $\lambda \in \Lambda$ и v, $w \in V$; здесь $rv = \varepsilon(r)(v)$. В соответствии с этим мы будем обозначать действие эндоморфизма φ через φv, а композицию эндоморфизмов — через $\psi\varphi$.

Основной интерес для нас имеют *точные* представления; то есть такие представления ${}_RV_F$, что $rv = 0$ для всех $v \in V$ тогда и только тогда, когда $r = 0$. Если такое точное представление существует, то мы говорим, что алгебра R *представима* в пространстве V_F. Конструкция Гельфанда-Наймарка-Сигала (см. [12, §62]) влечет такой

Факт 3. *Любая (сепарабельная) C^*-алгебра представима в (сепарабельном) гильбертовом пространстве (как алгебра ограниченных операторов).*

Существует два подхода к $*$-регулярным кольцам. В рамках первого идеал I некоторого кольца называется *регулярным* [*по фон Нойману*], если для любого

$a \in I$ найдется $x \in I$, такой что $axa = a$; элемент x называется *псевдо-обратным* к a (см. [13]). Напомним следующий полезный результат, см. [14, лемма 1.3].

Факт 4. *Кольцо R регулярно тогда и только тогда, когда в нем существует регулярный идеал I, такой что фактор-кольцо R/I также регулярно. Любой идеал регулярного кольца регулярен.*

Назовем $*$-кольцо R *собственным*, если равенство $r^*r = 0$ влечет $r = 0$ для любого $r \in R$. Для произвольного $*$-кольца R элемент a^+ называется *псевдо-обращением Мура-Пенроуза* (или *рикартовским относительным обращением*; в дальнейшем мы будем называть его просто *псевдо-обращением*) элемента a, если

$$a = aa^+a, \quad a^+ = a^+aa^+, \quad (aa^+)^* = aa^+, \quad (a^+a)^* = a^+a.$$

Факт 5. *Произвольное $*$-кольцо R является собственным и регулярным тогда и только тогда, когда для любого $a \in R$ существует его псевдо-обращение $a^+ \in R$. В этом случае элемент a^+ однозначно определен элементом a.*

Факт 5 хорошо известен (см. например [15, XII предложение 2.4], [16, предложение 88] и [17, лемма 4]). Это позволяет нам определить *$*$-регулярное кольцо* R как $*$-регулярное кольцо с дополнительной операцией $a \mapsto a^+$, такой что элемент a^+ является псевдо-обратным к a. Если R является $*$-Λ-алгеброй, то мы говорим о *$*$-регулярной Λ-алгебре*. Понятия подалгебр и гомоморфизмов $*$-регулярных алгебр учитывают также и операцию псевдо-обращения. Однако, когда мы будем говорить о представлениях, мы будем имет в виду лишь структуру $*$-Λ-алгебры. Рассматривая случай $\Lambda = \mathbb{Z}$, мы охватывем также и все $*$-регулярные кольца. Эквивалентность двух определений $*$-регулярности выходит за рамки рассмотрения отдельных алгебр.

Лемма 6. *Пусть R и T — $*$-регулярные Λ-алгебры, S — $*$-Λ-подалгебра в T и пусть отображение $f\colon S \to R$ является сюрбективным гомоморфизмом [$*$-Λ-алгебр], причем идеал $\mathsf{ker}\, f$ алгебры S регулярен. Тогда S замкнута относительно псевдо-обращения в T, а отображение $f\colon S \to R$ сохраняет псевдо-обращения; то есть, в языке $*$-регулярных Λ-алгебр S является подалгеброй в T, а f является гомоморфизмом.*

Доказательство. Алгебра S, будучи $*$-подкольцом в T, является собственной и регулярной согласно факту 4. Поэтому S $*$-регулярна по факту 5. Единственность псевдо-обращения в T влечет замкнутость S относительно псевдо-обращения. Из единственности псевдо-обращения в R следует, что f сохраняет псевдо-обращения. □

Факт 7. *Пусть V_F — пространство со скалярным произведением. Множество*

$$\mathsf{End}^*_{\Lambda\mathrm{f}}(V_F) = \{\varphi + \lambda\, \mathsf{id} \mid \lambda \in F,\ \varphi \in \mathsf{End}^*_{\Lambda}(V_F),\, \dim \mathsf{im}\, \varphi < \infty\}$$

образует подалгебру в $\mathsf{End}^*_{\Lambda}(V_F)$, которая является $*$-регулярной Λ-алгеброй. В частности, если пространство V_F конечномерно, то $\mathsf{End}^*_{\Lambda}(V_F)$ является $*$-регулярной Λ-алгеброй.

Доказательство. Если $\dim \mathsf{im}\, \varphi < \infty$, то подпространство $U = (\ker \varphi)^\perp$ имеет конечную размерность, откуда получаем, что $V = U \oplus U^\perp$ и $\varphi|_U$ является изоморфизмом из U на $W = \mathsf{im}\, \varphi$. Поскольку U и W имеют конечную размерность, обратное отображение $\psi\colon W \to U$ к отображению $\varphi|_U$ имеет сопряженное отображение ψ^*. Поэтому отображение $\pi_W \psi^* \pi_U$ является сопряженным для $\pi_U \psi \pi_W$, то есть $\pi_U \psi \pi_W \in \mathsf{End}^*_{\Lambda\mathrm{f}}(V_F)$. Более того, $\varphi = \varphi \pi_U \psi \pi_W \varphi$. Таким образом, $I = \{\varphi \in \mathsf{End}^*_\Lambda(V_F) \mid \dim \mathsf{im}\, \varphi < \infty\}$ является регулярным идеалом в $\mathsf{End}^*_{\Lambda\mathrm{f}}(V_F)$. Если $\dim V_F < \infty$, то $I = V_F$. В противном случае, поскольку $\mathsf{End}^*_{\Lambda\mathrm{f}}(V_F)/I$ изоморфна F, $*$-регулярность $\mathsf{End}^*_{\Lambda\mathrm{f}}(V_F)$ следует из факта 6. □

Следуюшее утверждение получается простым применением процесса ортогонализации Грама-Шмидта.

Факт 8. *Пусть пространство V_F со скалярным произведением таково, что $\dim V_F = n < \infty$ и для любых λ, $\mu \in F$ найдется $\nu = \nu^* \in F$, такое что $\lambda^*\lambda + \mu^*\mu = \nu^2$. Тогда $\mathsf{End}^*_\Lambda(V_F)$ изоморфна алгебре матриц $F^{n\times n}$ с инволюцией, определенной по правилу $A = (a_{ij}) \mapsto A^*$, где A^* обозначает транспонированную матрицу от (a^*_{ij}).*

Элемент e $*$-кольца называется *проекцией*, если $e = e^2 = e^*$. Отметим что любая проекция совпадает со своим псевдо-обращением и что $e = aa^+$ и $f = a^+a$ являются проекциями, если a^+ является псевдо-обращением к a.

Факт 9. *Равенство $ap = 0$ влечет равенство $(a^+)^*p = 0$, а равенство $a^*p = 0$ влечет равенство $a^+p = 0$ для любых $*$-регулярного кольца R, $a \in R$ и проекции $p \in R$.*

Доказательство. Для элементов $e = aa^+$ и $f = a^+a$, равенство $ap = 0$ влечет $fp = a^+ap = 0$, откуда $pf = (fp)^* = 0$. Таким образом, $pa^+ = pa^+aa^+ = pfa^+ = 0$ и поэтому $(a^+)^*p = 0$. Из равенства $a^*p = 0$ получаем $pa = (a^*p)^* = 0$, то есть $pe = paa^+ = 0$. Следовательно, $ep = 0$ и $a^+p = a^+aa^+p = a^+ep = 0$. □

Следующее утверждение можно найти в [16, глава 2] and [10, §1].

Факт 10. *Если R — регулярное кольцо (не обязательно с единицей), то главные левосторонние идеалы Ra образуют подрешетку (с дополнениями) $\bar{L}(R)$ в решетке всех левосторонних идеалов. Кроме того, для любого $a \in R$ существует идемпотент $e \in R$, такой что $Ra = Re$.*

Далее, проекции $*$-регулярной Λ-алгебры R образуют орторешетку $\mathbb{L}(R)$, *где частичный порядок задан так:*

$$\begin{aligned} e \le f \quad &\text{тогда и только тогда, когда} \quad fe = e, \\ &\text{тогда и только тогда, когда} \quad ef = e. \end{aligned}$$

Набольший и наименьший элементы равны, сответственно, 1 и 0 в R. Ортодополнение *определено равенством $e' = 1 - e$; более точно, e' являтся дополнением для e, $e'' = e$ и $e \le f$ тогда и только тогда, когда $f' \le e'$. Решеточные объединение (супремум) и пересечение (инфимум) определены так:*

$$e \cup f = f + (e(1-f))^+e(1-f), \quad e \cap f = (e' \cup f')'.$$

Отображение $e \mapsto Re$ *устанавливает изоморфизм из* $\mathbb{L}(R)$ *на* $\bar{L}(R)$.

Как было показано фон Нойманом, любая модулярная орторешетка, обладающая определенной “системой координат” изоморфна решетке $\mathbb{L}(R)$ для некоторой $*$-регулярной алгебры R с системой матричных единиц. В этом смысле мы имеем в некотором смысле эквивалентные алгебраические системы. Несмотря на это $*$-регулярные кольца являются более подходящим обектом в рамках настоящего рассмотрения.

Факт 11. *Если* S *является подалгеброй* $*$*-регулярной* Λ*-алгебры* R*, то* $\mathbb{L}(S)$ *являтся подрешеткой в* $\mathbb{L}(R)$*. Если* $\varphi\colon R \to S$ *— гомоморфизм, то его ограничение* ψ *на* $\mathbb{L}(R)$ *являтся гомоморфизмом в* $\mathbb{L}(S)$*; если* φ *сюръективен, то* ψ *также сюръективен.*

Доказательство. Ввиду факта 10 достаточно установить лишь сюръективность отображения φ. Действительно, пусть e яляется проекцией в S. Выберем ее произвольный прообраз $a \in R$ при отображении φ. Тогда aa^+ является проекцией и $\varphi(aa^+) = ee^+ = e^2 = e$. □

3. Некоторые понятия теории моделей

Для фиксированного коммутативного $*$-кольца Λ с единицей рассмотрим класс всех $*$-Λ-алгебр, а также класс всех $*$-регулярных Λ-алгебр. Системы, принадлежащие этим классам, являются односортными алгебраическими системами, где произвольный элемент $\lambda \in \Lambda$ определяет унарную операцию $x \mapsto \lambda x$. Более того, помимо этих, а также кольцевых операций (отметим, что кольцевая операция взятия противоположноо элемента может быть опущена, поскольку она выражается следующим образом $-x = (-1_\Lambda)x$) для обоих типов алгебр мы имеем также унарную операцию инволюции. Кроме того, в случае $*$-регулярных Λ-алгебр мы рассматриваем дополнительно и унарную операцию взятия псевдо-обратного. Орторешетки рассматриваются нами в сигнатуре, содержащей бинарные операции решеточных объединения и пересечения, а также унарную операцию взятия ортодополнения. Поскольку все три упомянутых класса систем задаются тождествами, они замкнуты относительно декартовых произведений, подалгебр и гомоморфных образов.

Пусть $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на множестве I. Ввиду явного определения $\mathbb{L}(R)$ в терминах алгебры R (факт 10) имеет место следующее утверждение.

Факт 12. $\mathbb{L}\big(\prod_{i\in I} R_i/\mathcal{U}\big) = \prod_{i\in I} \mathbb{L}(R_i)/\mathcal{U}$ *для любых* $*$*-регуляных* Λ*-алгебр* R_i*,* $i \in I$.

Нам также придется использовать ультрапроизведения пространств V_F со скалярным произведением и представлений ${}_RV_F$, однако наличие скалярных произведений исключает возможность рассматривать их как односортные алгебраические системы. Наиболее удобным будет рассматривать пространство V_F со скалярным произведением как двусортную алгебраическую систему с сортами V и F, наделенными групповыми операциями и операциями $*$-Λ-алгебр, соответственно. Кроме того, имеются бинарные операции $(v, \alpha) \mapsto v\alpha \in V$ и

$(u, v) \mapsto \langle u \mid v\rangle \in F$, где u, $v \in V$ и $\alpha \in F$. При рассмотрении представления ${}_RV_F$ мы рассматриваем $*$-Λ-алгебру R в качестве третьего сорта и, дополнительно, бинарную операцию $(r, v) \mapsto rv \in V$, где $r \in R$ и $v \in V$.

Понятия гомоморфизма, подалгебры, декартова прозведения, ультрапроизведения могут быть обобщены очевидным образом на многосортные алгебры. Все конструкции являются посортными; то есть, сортами декартова произведения (ультрапроизведения и.т.д.) систем A_i, $i \in I$, являются декартовы произведения (ультрапроизведения и.т.д.) соответствующих сортов систем A_i, $i \in I$. Конечно, ценой излишних техничских сложностей можно было бы свести рассмотрение многосортных алгебраических систем к рассмотрению односортных систем с предикатами.

Для формулы φ фиксированной сигнатуры, алгебраической системы A и элементов $a_1, \dots, a_n$ из A сортов, соответствующих сортам свободных переменных $x_1, \dots, x_n$ из φ, истинность φ в A при подстановке $x_i \mapsto a_i$ определяется индуктивно, так же, как и для односортных систем, и обозначается

$$A \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

Факт 13. *Пусть $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на множестве I. Верны следующие утверждения.*

(i) *Пусть Λ — коммутативное $*$-кольцо, R_i и F_i — $*$-Λ-алгебры, $(V_i)_{F_i}$ — пространство со скалярным произведением, а ${}_{R_i}(V_i)_{F_i}$ — точное представление для любого $i \in I$. Тогда $V_F = \prod_{\mathcal{U}}(V_i)_{F_i}$ является пространством со скалярным произведением, а ${}_RV_F = \prod_{\mathcal{U}} {}_{R_i}(V_i)_{F_i}$ — точным представлением, где $F = \prod_{\mathcal{U}} F_i$ и $R = \prod_{\mathcal{U}} R_i$.*

(ii) *Для $*$-Λ-алгебры F и натурального числа n ультрастепень $(F^{n\times n})^I/\mathcal{U}$ матричных $*$-Λ-алгебр изоморфна матричной $*$-Λ-алгебре $(F^I/\mathcal{U})^{n\times n}$.*

Доказательство. Утверждение (i) являтся очевидным следствием теоремы Лося. Требуемый изоморфизм в (ii) определен так:

$$\big[(a_i^{jk})_{j,k=1,\dots,n} \mid i \in I\big] \mapsto \big([a_i^{jk} \mid i \in I]\big)_{k,j=1,\dots,n}.$$

$\square$

Факт 14. *Любое элементарное расширение ${}_{\hat{R}}\hat{V}_{\hat{F}}$ представления ${}_RV_F$ само явлется представлением, где $\hat{F}$ — элементарное расширение F, $\hat{V}_{\hat{F}}$ — элементарное расширение V_F и $\hat{R}$ – элементарное расширение R.*

При доказательстве нашего основного результата нам потребуется понятие насыщенной системы. Здесь мы будем рассматривать слабый вариант этого понятия, который будет достаточен для наших целей. Рассмотрим фиксированную систему A и для каждого элемента $a \in A$ добавим в сигнатуру новый константный символ $\underline{a}$, который будем называть *параметром.* Здесь и далее $\Sigma(x)$ обозначает множество формул с одной свободной переменной x в этом расширенном языке. Для заданного вложения $h\colon A \to B$ буем говорить, что система B является *умеренно насыщенной над A относительно h*, если любое локально выполнимое в A множество формул $\Sigma(x)$ с параметрами из A (при интерпретации констант $\underline{a}^A \mapsto a$) выполнимо в B (при интерпретации констант $\underline{a}^B \mapsto h(a)$). Следующее утверждение является частным случаем утверждения из [18, следствие 4.3.14].

Факт 15. *Любая система A допускает элементарное вложение h в некоторую систему B, которая является умеренно насыщенной над A относительно h. В качестве B можно выбрать некоторую ультрастепень системы A, а в качестве h — каноническое вложение. Отождествляя a с $h(a)$, можно предполагать, что B является элементарным расширением A.*

4. Представления алгебр с инволюцией

Теорема 16. *Пусть $*$-Λ-алгебра R имеет точное представление в пространстве V_F со скалярным произведением. Тогда R является гомоморфным образом подалгебры S ультрапроизведения алгебр $\mathsf{End}^*_\Lambda(U_F)$, где U пробегает множество всех конечномерных подпространств в V_F. Более того, если алгебра R $[*$-$]$регулярна, то S также можно выбрать $[*$-$]$регулярной.*

Напомним, что в $*$-регулярном случае все алгебраические конструкции принимают во внимание операцию псевдо-обращения; в частности, при этом допускаются лишь $*$-регулярные $*$-Λ-подалгебры.

Доказательство. Это доказательство основано на подходе Тюкавкина [19] и Миколь [20].

Выберем любое множество I конечномерных подпространств в V_F, такое что произвольное конечномерное подпространство W в V_F содержится в некотором подпространстве из I. Выбрав базис B векторного пространства V_F, можно взять, например, в качестве I множество всех подпространств U в V_F, порожденных конечными подмножествами в B. Если базис B счетен и занумерован натуральными числами, то в качестве I можно выбрать множество всех подпространств, порожденных начальными сегментами B. Для $U \in I$ полагаем $U^+ = \{W \in I \mid U \subseteq W\}$. Заметим, что $U_1^+ \cap U_2^+ = (U_1 + U_2)^+$. Поэтому существует ультрафильтр $\mathcal{U}$ на I, такой что $U^+ \in \mathcal{U}$ для любого $U \in I$. Для простоты пусть R_U обозначает $*$-регулярную Λ-алгебру $\mathsf{End}^*_\Lambda(U_F)$. Рассмотрим декартово произведение $T = \prod_{U \in I} R_U$ и ультрапроизведение $\hat{T} = \prod_{U \in I} R_U/\mathcal{U}$. Элементы T и $\hat{T}$ будут обозначаться как $\sigma = (\sigma_U \mid U \in I)$ и $[\sigma]$ соответственно. Установим соотношение между T и ${}_RV_F$.

Для элементов $\sigma \in T$, $r \in R$ и $U_0 \in I$ мы говорим, что $J \in \mathcal{U}$ *удостоверяет* отношение $\sigma \sim r$ для U_0 тогда и только тогда, когда $J \subseteq U_0^+$ и

$$\sigma_U v = rv,\ \sigma_U^* v = r^* v \quad \text{для всех } U \in J \text{ и всех } v \in U_0.$$

Заметим, что если множество J удостоверяет $\sigma \sim r$ для $U_0 \in I$, то оно удостоверяет это отношение для любого $U_1 \subseteq U_0$. Мы полагаем $\sigma \sim r$, если для любого $U_0 \in I$ найдется множество $J \in \mathcal{U}$, удостоверяющее отношение $\sigma \sim r$ для U_0. Мы полагаем также

$$S = \{\sigma \in T \mid \sigma \sim r \text{ для некоторого } r \in R\}.$$

Докажем несколько вспомогательных утверждений. Пусть σ, $\tau \in T$ и пусть r, r_0, r_1, $s \in R$.

Утверждение 1. *Отображение $g\colon S \to R$, $g(\sigma) = r$, где $\sigma \sim r$, определено корректно.*

Доказательство утверждения. Нам нужно показать, что отношения $\sigma \sim r_0$ и $\sigma \sim r_1$ влекут равенство $r_0 = r_1$. Рассмотрим произвольные вектор $v \in V$ и множество $U_0 \in I$, содержащее v. Пусть J_i удостоверяет $\sigma \sim r_i$ для U_0, $i < 2$. Тогда $J = J_1 \cap J_2$ также удостоверяет $\sigma \sim r_i$ для U_0, $i < 2$, откуда следует, что $r_0 v = \sigma_{U_0} v = r_1 v$. Это доказывает равенство $r_0 v = r_1 v$ для всех $v \in V$. Поскольку представление ${}_R V_F$ является точным, мы заключаем, что $r_0 = r_1$. □

Утверждение 2. *В языке $*$-Λ-алгебр S является подалгеброй в T, а $g\colon S \to R$ являеся гомоморфизмом.*

Доказательство утверждения. Пусть $\sigma \sim r$, $\tau \sim s$ и $\lambda \in \Lambda$. Нужно показать, что

$$(1)\ \sigma^* \sim r^*, \quad (2)\ \lambda\sigma \sim \lambda r, \quad (3)\ \tau + \sigma \sim s + r, \quad (4)\ \tau\sigma \sim sr.$$

Отметим, что отношение (1) выполняется по определению. Для доказательства отношений (2)-(4) рассмотрим $U_0 \in I$ и выберем $J \in \mathcal{U}$, удостоверяющее отношение $\sigma \sim r$, а также $K \in \mathcal{U}$, удостоверяющее отношение $\tau \sim s$ для U_0. Тогда множество $J \cap K \in \mathcal{U}$ удостоверяет оба отношения $\sigma \sim r$ и $\tau \sim s$ для U_0. Применяя линейность, получаем для любого $U \in J \cap K$ и любого $v \in U_0$:

$$\begin{aligned}
&(\lambda\sigma_U)v = (\sigma_U v)\lambda = (rv)\lambda = (\lambda r)v;\\
&(\lambda\sigma)^*_U v = (\sigma^*_U v)\lambda^* = (r^* v)\lambda^* = (\lambda^* r^*)v = (\lambda r)^* v;\\
&(\sigma + \tau)_U v = \sigma_U v + \tau_U v = rv + sv = (r + s)v;\\
&(\sigma + \tau)^*_U v = \sigma^*_U v + \tau^*_U v = r^* v + s^* v = (r^* + s^*)v = (r + s)^* v.
\end{aligned}$$

Таим образом, $J \cap K$ удостоверяет $\lambda\sigma \sim \lambda r$ и $\sigma + \tau \sim r + s$ для U_0, то есть доказана справедливость (2)-(3). Для доказательства (4) выберем $U_1 \in I$, такое что $U_1 \supseteq rU_0$, и $U_2 \in I$, такое что $U_2 \supseteq s^* U_0$. Пусть $J_0 \in \mathcal{U}$ удостоверяет $\tau \sim s$ для U_1, а $J_1 \in \mathcal{U}$ удостоверяет $\sigma \sim r$ для U_2. Тогда $J' = J \cap K \cap J_0 \cap J_1 \in \mathcal{U}$, и для любого $U \in J'$ и любого $v \in U_0$ имеем:

$$\begin{aligned}
&(\tau\sigma)_U v = \tau_U(\sigma_U v) = \tau_U(rv) = s(rv) = (sr)v;\\
&(\tau\sigma)^*_U v = \sigma^*_U(\tau^*_U v) = \sigma^*_U(s^* v) = r^*(s^* v) = (r^* s^*)v = (sr)^* v,
\end{aligned}$$

то есть J' удостоверяет $\tau\sigma \sim sr$ для U_0, и (4) установлено. □

Утверждение 3. *Отображение $g\colon S \to R$ сюръективно.*

Доказательство утверждения. Для $r \in R$ пусть $\varphi = \varepsilon(r)$ обозначает соответствующий эндоморфизм пространства V_F. Для $U \in I$ полагаем

$$\sigma_U = \pi_U \varphi|_U = \pi_U \varphi \pi_U|_U \in R_U$$

и $\sigma = (\sigma_U \mid U \in I)$, где π_U обозначает ортогональную проекцию из V на U. Отметим, что $\sigma^*_U = \pi_U \varphi^* \pi_U|_U = \pi_U \varphi^*|_U$. Для фиксированного $U_0 \in I$ выберем такое множество $U_1 \in I$, что $U_1 \supseteq U_0 + rU_0 + r^*U_0$, и пусть $J = U_1^+ \in \mathcal{U}$. Тогда для любого $U \in J$ и любого $v \in U_0$ имеем rv, $r^*v \in U$ и

$$\sigma_U v = \pi_U\big(\varphi(\pi_U v)\big) = \pi_U(\varphi v) = \pi_U(rv) = rv;$$
$$\sigma_U^* v = \pi_U\big(\varphi^*(\pi_U v)\big) = \pi_U(\varphi^* v) = \pi_U(r^* v) = r^* v.$$

Поэтому J удостоверяет $\sigma \sim r$ для U_0, следовательно, $g(\sigma) = r$. □

Полагаем

$$\hat{S} = \{[\sigma] \mid \sigma \in S\}.$$

Утверждение 4. *В языке $*$-Λ-алгебр $\hat{S}$ является подалгеброй в $\hat{T}$, а $f\colon \hat{S} \to R$, $f([\sigma]) = r$, где $\sigma \sim r$, является корректно определенным гомоморфизмом.*

Доказательство утверждения. Ввиду утверждения 2 достаточно показать, что $[\tau] = [\sigma]$ и $\sigma \sim r$ влекут $\tau \sim r$. Пусть $K = \{U \in I \mid \sigma_U = \tau_U\}$; в частности, $K \in \mathcal{U}$. Для фиксированного $U_0 \in I$ пусть J удостоверяет отношение $\sigma \sim r$ для U_0. Тогда $J \cap K$ удостоверяет $\tau \sim r$ для U_0. □

Для любого $U_0 \in I$ полагаем $\chi^{U_0} = (\chi_U^{U_0} \mid U \in I) \in T$, где $\chi_U^{U_0}$ обозначает ортогональную проекцию из U на U_0, если $U_0 \subseteq U$, и $\chi_U^{U_0} = 0$ иначе.

Утверждение 5. $[\sigma] \in \ker f$ *тогда и только тогда, когда*

$$(*) \qquad [\sigma] \cdot [\chi^{U_0}] = [\sigma^*] \cdot [\chi^{U_0}] = 0 \qquad \textit{для всех } U_0 \in I.$$

Доказательство утверждения. По определению $[\sigma] \in \ker f$ тогда и только тогда, когда $\sigma \sim 0$. Итак, пусть $\sigma \sim 0$ и $U_0 \in I$. Выберем множество $J \in \mathcal{U}$, удостоверяющее $\sigma \sim 0$ для U_0. Тогда для любых $U \in J$ и $v \in U_0$ имеем $\sigma_U v = 0 = \sigma_U^* v$, откуда следует, что $\sigma_U \chi_U^{U_0} = 0 = \sigma_U^* \chi_U^{U_0}$. Поскольку $J \in \mathcal{U}$, выполняется $(*)$.

Обратно, предположим, что $(*)$ выполняется, и пусть $U_0 \in I$. Это означает, что $K = \{U \in I \mid \sigma_U \chi_U^{U_0} = 0 = \sigma_U^* \chi_U^{U_0}\} \in \mathcal{U}$. Тогда $J = K \cap U_0^+ \in \mathcal{U}$ удостоверяет $\sigma \sim 0$ для U_0. □

Утверждение 6. *Идеал* $\ker f$ *регулярен.*

Доказательство утверждения. Согласно факту 7, R_U $*$-регулярна для любого $U \in I$, поэтому $*$-регулярно также и ультрапроизведение $\hat{T}$. Отметим, что $[\chi^{U_0}] \in \hat{T}$ является проекцией для любого $U_0 \in I$, поскольку $\chi_U^{U_0}$ является проекцией в R_U для всякого $U \in I$. Пусть теперь $[\sigma] \in \ker f$ и пусть $[\tau]$ — псевдообращение для $[\sigma]$ в $\hat{T}$. Тогда по утверждению 5 и факту 9 имеем

$$[\tau] \cdot [\chi^{U_0}] = [\tau^*] \cdot [\chi^{U_0}] = 0 \text{ для всех } U_0 \in I,$$

что, в свою очередь, влечет ввиду утверждения 5 включение $[\tau] \in \ker f$. □

Закончим теперь доказательство теоремы. Первое утверждение о $*$-Λ-алгебрах немедленно следует из утверждения 4. В $*$-регулярном случае достаточно применить утверждение 6 и лемму 6. □

Замечание 17. Предположим, что V_F имеет счетный ортонормальный базис $v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots$ (это выполняется, если, например, $\dim V_F = \omega$ и F удовлетворяет условиям факта 8). Пусть I состоит из подпространств U_n, натянутых на векторы $\{v_0, \ldots, v_n\}$, $n < \omega$, и пусть $\mathcal{U}$ является ультрафильтром, содержащим коконечный фильтр. В этом случае можно единообразно рассматривать алгебры $\mathsf{End}^*_\Lambda\big((U_n)_F\big)$, $n < \omega$, как матричные алгебры $F^{n\times n}$. Тогда $\mathsf{ker}\, f$ состоит из элементов вида $[A_n \mid n < \omega]$, где для любого $m < \omega$ существует $J \in \mathcal{U}$, такое что первые m рядов и m столбцов матрицы A_n состоят из нулей в случае, когда $U_n \in J$, см. Тюкавкин [19].

Следствие 18. *Любая C^*-алгебра являеся гомоморфным образом некоторой подалгебры в ультрапроизведении алгебр $\mathbb{C}^{n\times n}$, $n < \omega$.*

Доказательство. Применим теорему 16 к представлению, получающемуся посредством ГНС-конструкции, и заметим, что $\mathsf{End}^*_\Lambda(U_\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n\times n}$, если U является конечномерным подпространством унитарного пространства (см. факт 8). $\square$

Следующиее утверждение дает метод получения представлений гомоморфных образов и основано на работе Миколь [20, теорема 3.8].

Предложение 19. *Для произвольной регулярной $*$-Λ-алгебры R, имеющей точное представление в векторном пространстве V_F со скалярным произведением, существует ультрастепень $\hat{V}_{\hat{F}}$ пространства V_F, такая что для любого регулярного идеала $I = I^*$ алгебра R/I имеет точное представление в некотором замкнутом подпространстве пространства $\hat{V}_{\hat{F}}$.*

Доказательство. Согласно факту 15, существует ультрастепень ${}_{\hat{R}}\hat{V}_{\hat{F}}$ точного представления ${}_RV_F$, которая является умеренно насыщенной над ${}_RV_F$ относительно канонического вложения. В этом случае $\hat{V}$ является R-модулем, поскольку R канонически вкладывается в $\hat{R}$, а

$$U = \{v \in \hat{V} \mid av = 0 \text{ для всех } a \in I\} = \bigcap_{a\in I}(a\hat{V})^\perp$$

являтся замкнутым подпространством в $\hat{V}_{\hat{F}}$ и левым (R/I)-модулем. Более того, из равенства $I = I^*$ получаем

$$\langle (r+I)v \mid w\rangle = \langle v \mid (r^*+I)w\rangle \text{ для всех } v, w \in U,$$

что доказывает тот факт, что ${}_{R/I}U_{\hat{F}}$ являтся представлением R/I.

Покажем, что это представление является точным; то есть, что для любого $a \notin I$ существует $v \in U$, такой что $av \neq 0$. Поскольку включение $v \in U$ означает, что $bv = 0$ для всех $b \in I$, требуется показать, что множество формул

$$\Sigma(x) = \{\underline{a}x \neq 0\} \cup \{\underline{b}x = 0 \mid b \in I\}$$

с параметрами из $\{a\} \cup I$ и свободной переменной x типа V выполнимо в ${}_{\hat{R}}\hat{V}_{\hat{F}}$. В силу умеренной насыщенности последней системы достаточно показать, что для любых $b_1, \ldots, b_n \in I$ существует $v \in V$, такой что $av \neq 0$ и $b_iv = 0$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. В силу факта 10 и регулярности I существует идемпотент $e \in I$, такой что $Ie = \sum_{i=1}^n Ib_i$; в частности, $b_ie = b_i$ и $b_iv = 0$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$

и любого $v \in V$ с условием $ev = 0$. Таким образом, достаточно показать, что найдется $v \in V$, такой что $ev = 0$, но $av \neq 0$.

Предположим противное; то есть, что равенство $ev = 0$ влечет равенство $av = 0$ для любого $v \in V$. Для $w \in V$ положим $v = (1-e)w$. Поскольку $ev = 0$, имеем $av = 0$ согласно нашему предположению. Таким образом, $0 = av = a(1-e)w$ для всех $w \in V$, поэтому $a(1-e) = 0$, так как ${}_RV_F$ является точным представлением. Но в этом случае $a = ae \in I$, что противоречит выбору a. Доказательство закончено. $\square$

5. Алгебры обобщенных операторов

Для заданного коммутативного $*$-кольца Λ *пред-$*$-Λ-алгеброй* называется множество R с определенными на нем бинарными операциями $+$ и $\cdot$, константами 0_R и 1_R, унарной операцией $r \mapsto \lambda r$ для каждого $\lambda \in \Lambda$ и симметричным бинарным отношением $\bowtie$, таким что для любого $r \in R$ существует $r^* \in R$ с условием $r \bowtie r^*$, а для всех r, r^*, s, $s^* \in R$ и всех $\lambda \in \Lambda$ выполняются условия:

(a) $r \bowtie r^*$ и $s \bowtie s^*$ влекут $r + s \bowtie r^* + s^*$;
(b) $r \bowtie r^*$ и $s \bowtie s^*$ влекут $r \cdot s \bowtie s^* \cdot r^*$;
(c) $r \bowtie r^*$ влечет $\lambda r \bowtie \lambda^* r^*$;
(d) $0_R \bowtie 0_R$ и $1_R \bowtie 1_R$.

Действие R на векторном пространстве V_F со скалярным произведением, где F является $*$-Λ-алгеброй, сопоставляет каждому элементу $r \in R$ линейное подпространство $\mathsf{dom}\, r$ в V_F и F-линейное отображение $\mathsf{dom}\, r \to V$, записываемое как $v \mapsto rv$. В частности, для любых v, $w \in V$, любого $r \in R$ и любого $\alpha \in F$ справедливо:

(e) если u, $v \in \mathsf{dom}\, r$, то $v + w \in \mathsf{dom}\, r$ и $r(v + w) = rv + rw$;
(f) если $u \in \mathsf{dom}\, r$, то $u\alpha \in \mathsf{dom}\, r$ и $r(v\alpha) = (rv)\alpha$.

Через ${}_RV_F$ мы будем обозначать векторное пространство V со скалярным произведением, действием F справа и действием R слева и будем рассматривать этот объект как 3-сортную систему с сортами V, F и R; действие R на V определяется тернарным отношением

$$\{(r, v, w) \in R \times V \times V \mid r \in R,\ v \in \mathsf{dom}\, r,\ w = rv\}.$$

Мы также полагаем $rX = \{rv \mid v \in X\}$ и $r^{-1}(X) = \{v \in \mathsf{dom}\, r \mid rv \in X\}$ для любого $X \subseteq V$.

Дополнительно мы предполагаем, что задано направленное вниз множество $\mathcal{D}$ линейных подпространств в V_F. Мы говорим, что действие R на V_F является *$\mathcal{D}$-согласованным*, если для любых r, $s \in R$ и любого $\lambda \in \Lambda$ выполняются следующие условия:

(i) $D \subseteq \mathsf{dom}\, r$ для некоторого $D \in \mathcal{D}$;
(ii) для любого $D \in \mathcal{D}$ существует $D' \in \mathcal{D}$, такое что $D' \subseteq r^{-1}(D)$;
(iii) существует $D \in \mathcal{D}$, такое что $D \subseteq \mathsf{dom}\, r \cap \mathsf{dom}\, s \cap \mathsf{dom}(r + s)$ и $(r + s)v = rv + sv$ для всех $v \in D$;
(iv) $0_R v = 0$ и $1_R v = v$ для всех $v \in V$;

(v) существует $D \in \mathcal{D}$, такое что $D \subseteq \mathsf{dom}(r \cdot s) \cap s^{-1}(\mathsf{dom}\, r) \cap \mathsf{dom}\, s$ и $(r \cdot s)v = r(sv)$ для всех $v \in D$;

(vi) существует $D \in \mathcal{D}$, такое что $D \subseteq \mathsf{dom}\, r \cap \mathsf{dom}(\lambda r)$ и $(\lambda r)v = (rv)\lambda$ для всех $v \in D$;

(vii) если $r \bowtie r^*$, то существует $D \in \mathcal{D}$, такое что $D \subseteq \mathsf{dom}\, r \cap \mathsf{dom}\, r^*$ и $\langle rv \mid w\rangle = \langle v \mid r^* w\rangle$ для всех $v, w \in D$.

Для $\mathcal{D}$-согласованного действия R на V_F определим бинарное отношение $\approx_{\mathcal{D}}$ на R, полагая

$r \approx_{\mathcal{D}} s$ тогда и только тогда, когда для любых $r^* \bowtie r$ и $s^* \bowtie s$ существует $D \in \mathcal{D}$, *удостоверяющее* отношение $r \approx_{\mathcal{D}} s$ *при заданном условии*, а именно: $D \subseteq \mathsf{dom}\, r \cap \mathsf{dom}\, r^* \cap \mathsf{dom}\, s \cap \mathsf{dom}\, s^*$ и $rv = sv$, $r^*v = s^*v$ для всех $v \in D$.

Мы говорим о Λ-*алгебре обобщенных операторов* на V_F и обозначаем ее через $({}_RV_F; \mathcal{D})$, если выполняется дополнительно следующее условие:

(viii) $r \bowtie t$ и $s \bowtie t$ влекут $r \approx_{\mathcal{D}} s$ для любых $r, s, t \in R$.

Лемма 20. *Если $({}_RV_F; \mathcal{D})$ является Λ-алгеброй обобщенных операторов, то $\approx_{\mathcal{D}}$ является конгруенцией отностельно операций, определенных на R. Более того, для любых $r, r^*, s, s^* \in R$, таких что $r \bowtie r^*$ и $s \bowtie s^*$, отношение $r \approx_{\mathcal{D}} s$ влечет отношение $r^* \approx_{\mathcal{D}} s^*$.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что отношение $\approx_{\mathcal{D}}$ рефлексивно и симметрично. Покажем, что $\approx_{\mathcal{D}}$ транзитивно. Пусть $r \approx_{\mathcal{D}} s$ и $s \approx_{\mathcal{D}} t$. Пусть также $r \bowtie r^*$ и $t \bowtie t^*$. Тогда существует $s^* \in R$, такое что $s \bowtie s^*$. Пусть $D_0 \in \mathcal{D}$ удостоверяет $r \approx_{\mathcal{D}} s$ при условиях $r \bowtie r^*$ и $s \bowtie s^*$. Пусть также $D_1 \in \mathcal{D}$ удостоверяет $s \approx_{\mathcal{D}} t$ при условиях $s \bowtie s^*$ и $t \bowtie t^*$. Поскольку множество $\mathcal{D}$ направлено вниз, найдется $D \in \mathcal{D}$ с условием $D \subseteq D_0 \cap D_1$. Тогда D удостоверяет $r \approx_{\mathcal{D}} t$ при условиях $r \bowtie r^*$ и $t \bowtie t^*$.

Проверим, что для любого $\lambda \in \Lambda$ отношение $\approx_{\mathcal{D}}$ стабильно относительно операции $\lambda\cdot$. Предположим, что $r \approx_{\mathcal{D}} s$ для некоторых $r, s \in R$. Для доказательства отношения $\lambda r \approx_{\mathcal{D}} \lambda s$ предположим, что $t \bowtie \lambda r$ и $u \bowtie \lambda s$. Пусть также $D' \subseteq \mathsf{dom}\, r \cap \mathsf{dom}\, r^* \cap \mathsf{dom}\, s \cap \mathsf{dom}\, s^*$ удостоверяет $r \approx_{\mathcal{D}} s$ при условиях $r \bowtie r^*$ и $s \bowtie s^*$. Согласно (c) и (viii), имеем $t \approx_{\mathcal{D}} \lambda^* r^*$ и $u \approx_{\mathcal{D}} \lambda^* s^*$; в частности, найдутся $D_{0r}, D_{0s} \in \mathcal{D}$, такие что $tv = (\lambda^* r^*)v$ для всех $v \in D_{0r}$ и $uv = (\lambda^* s^*)v$ для всех $v \in D_{0s}$. Более того, согласно (vi), существуют $D_{1r}, D_{2r}, D_{1s}, D_{2s} \in \mathcal{D}$, такие что выполняются условия:

$$
\begin{aligned}
&D_{1r} \subseteq \mathsf{dom}\, r \cap \mathsf{dom}(\lambda r) && \text{и } (\lambda r)v = (rv)\lambda \text{ для всех } v \in D_{1r};\\
&D_{2r} \subseteq \mathsf{dom}\, r^* \cap \mathsf{dom}(\lambda^* r^*) && \text{и } (\lambda^* r^*)v = (r^* v)\lambda^* \text{ для всех } v \in D_{2r};\\
&D_{1s} \subseteq \mathsf{dom}\, s \cap \mathsf{dom}(\lambda s) && \text{и } (\lambda s)v = (sv)\lambda \text{ для всех } v \in D_{1s};\\
&D_{2s} \subseteq \mathsf{dom}\, s^* \cap \mathsf{dom}(\lambda^* s^*) && \text{и } (\lambda^* s^*)v = (s^* v)\lambda^* \text{ для всех } v \in D_{2s}.
\end{aligned}
$$

Так как множество $\mathcal{D}$ направлено вниз, существует $D \in \mathcal{D}$ с условием $D \subseteq D' \cap \bigcap_{i<3} D_{ir} \cap \bigcap_{i<3} D_{is}$. Тогда для любого $v \in D$ имеем:

$$(\lambda r)v = (rv)\lambda = (sv)\lambda = (\lambda s)v;$$
$$tv = (\lambda^* r^*)v = (r^* v)\lambda^* = (s^* v)\lambda^* = (\lambda^* s^*)v = uv.$$

Таким образом, D удостоверяет $\lambda r \approx_{\mathcal{D}} \lambda s$ при условиях $\lambda r \bowtie t$ и $\lambda s \bowtie u$.

Стабильность отношения $\approx_{\mathcal{D}}$ относительно операции $+$ может быть установлена так же (и даже проще), как и выше, используя (a) и (iii). Докажем теперь, что $\approx_{\mathcal{D}}$ стабильно относительно операции $\cdot$. Пусть $r_0 \approx_{\mathcal{D}} s_0$ и $r_1 \approx_{\mathcal{D}} s_1$. Для доказательства отношения $r_0 \cdot r_1 \approx_{\mathcal{D}} s_0 \cdot s_1$ предположим, что $t \bowtie r_0 \cdot r_1$ и $u \bowtie s_0 \cdot s_1$. Пусть также $D_0 \subseteq \mathsf{dom}\, r_0 \cap \mathsf{dom}\, r_0^* \cap \mathsf{dom}\, s_0 \cap \mathsf{dom}\, s_0^*$ удостоверяет $r_0 \approx_{\mathcal{D}} s_0$ при условиях $r_0 \bowtie r_0^*$, $s_0 \bowtie s_0^*$, а $D_1 \subseteq \mathsf{dom}\, r_1 \cap \mathsf{dom}\, r_1^* \cap \mathsf{dom}\, s_1 \cap \mathsf{dom}\, s_1^*$ удостоверяет $r_1 \approx_{\mathcal{D}} s_1$ при условиях $r_1 \bowtie r_1^*$, $s_1 \bowtie s_1^*$. Согласно (b) и (viii), имеем $t \approx_{\mathcal{D}} r_1^* \cdot r_0^*$ и $u \approx_{\mathcal{D}} s_1^* \cdot s_0^*$; в частности, найдутся D_{0r}, $D_{0s} \in \mathcal{D}$, такие что $tv = (r_1^* \cdot r_0^*)v$ для всех $v \in D_{0r}$ и $uv = (s_1^* \cdot s_0^*)v$ для всех $v \in D_{0s}$. Более того, согласно (v), существуют D_{1r}, D_{2r}, D_{1s}, $D_{2s} \in \mathcal{D}$, такие что:

$$\begin{aligned}
D_{1r} &\subseteq \mathsf{dom}(r_0 \cdot r_1) \cap r_1^{-1}(\mathsf{dom}\, r_0) \cap \mathsf{dom}\, r_1 \\
&\qquad \text{и } (r_0 \cdot r_1)v = r_0(r_1 v) \text{ для всех } v \in D_{1r}; \\
D_{2r} &\subseteq \mathsf{dom}(r_1^* \cdot r_0^*) \cap (r_0^*)^{-1}(\mathsf{dom}\, r_1^*) \cap \mathsf{dom}\, r_0^* \\
&\qquad \text{и } (r_1^* \cdot r_0^*)v = r_1^*(r_0^* v) \text{ для всех } v \in D_{2r}; \\
D_{1s} &\subseteq \mathsf{dom}(s_0 \cdot s_1) \cap s_1^{-1}(\mathsf{dom}\, s_0) \cap \mathsf{dom}\, s_1 \\
&\qquad \text{и } (s_0 \cdot s_1)v = s_0(s_1 v) \text{ для всех } v \in D_{1s}; \\
D_{2s} &\subseteq \mathsf{dom}(s_1^* \cdot s_0^*) \cap (s_0^*)^{-1}(\mathsf{dom}\, s_1^*) \cap \mathsf{dom}\, s_0^* \\
&\qquad \text{и } (s_1^* \cdot s_0^*)v = s_1^*(s_0^* v) \text{ для всех } v \in D_{2s}.
\end{aligned}$$

Согласно (ii), существуют D_0', $D_1' \in \mathcal{D}$, такие что $D_0' \subseteq r_1^{-1}(D_0)$ и $D_1' \subseteq (r_0^*)^{-1}(D_1)$. В частности, $r_1 D_0' \subseteq D_0$ и $r_0^* D_1' \subseteq D_1$. Поскольку $\mathcal{D}$ направлено вниз, найдется $D \in \mathcal{D}$ с условием

$$D \subseteq D_0 \cap D_1 \cap D_0' \cap D_1' \cap \bigcap_{i<3} D_{ir} \cap \bigcap_{i<3} D_{is}.$$

Тогда для любого $v \in D$ получаем:

$$(r_0 \cdot r_1)v = r_0(r_1 v) = s_0(r_1 v) = s_0(s_1 v) = (s_0 \cdot s_1)v;$$
$$tv = (r_1^* \cdot r_0^*)v = r_1^*(r_0^* v) = s_1^*(r_0^* v) = s_1^*(s_0^* v) = (s_1^* \cdot s_0^*)v = uv.$$

Поэтому D удостоверяет $r_0 \cdot r_1 \approx_{\mathcal{D}} s_0 \cdot s_1$ при условиях $r_0 \cdot r_1 \bowtie t$ и $s_0 \cdot s_1 \bowtie u$.

Предположим наконец, что $r \bowtie r^*$, $s \bowtie s^*$ и $r \approx_{\mathcal{D}} s$. Для доказательства совместности с $\bowtie$ предположим, что $t \bowtie r^*$ и $u \bowtie s^*$. Тогда $r \approx_{\mathcal{D}} t$ и $s \approx_{\mathcal{D}} u$ согласно (viii). Поскольку отношение $\approx_{\mathcal{D}}$ транзитивно, мы заключаем, что $t \approx_{\mathcal{D}} u$. Тогда существует множество $D \in \mathcal{D}$, удостоверяющее отношение $t \approx_{\mathcal{D}} u$ при условиях $t \bowtie r^*$ и $u \bowtie s^*$. Таким образом, D удостоверяет $r^* \approx_{\mathcal{D}} s^*$ при тех же самых условиях. $\square$

В теореме 22 будет показано, что фактор-система $R/{\approx_{\mathcal{D}}}$ всегда является $*$-Λ-алгеброй.

Факт 21. *Если ${}_RV_F$ является представлением $*$-Λ-алгебры R, то $({}_RV_F; \{V\})$ является Λ-алгеброй обобщенных операторов, где $r \bowtie s$ тогда и только тогда, когда $s = r^*$. В этом случае $\approx_{\mathcal{D}}$ совпадает с отношением равенства.*

Теорема 22. *Пусть $({}_RV_F; \mathcal{D})$ — Λ-алгебра обобщенных операторов на пространстве со скалярным произведением V_F. Тогда $R/{\approx_{\mathcal{D}}}$ является $*$-Λ-алгеброй. Более того, если $R/{\approx_{\mathcal{D}}}$ $*$-регулярна, то она имеет точное представление в некотором замкнутом подпространстве ультрастепени V_F.*

Замечание 23. Доказательство теоремы 22 похоже на доказательство теоремы 16, и можно было бы предположить, что $R/{\approx_{\mathcal{D}}}$ также является гомоморфным образом некоторой подалгебры в ультрапроизведении алгебр эндоморфизмов конечномерных подпростарнств в V_F. Сложность в доказательстве этого утверждения состоит в невозможности выбрать ультрафильтр, согласованный в некотором смысле со множеством $\mathcal{D}$. Это утверждение, однако, оказывается справедливым в случае $F = \mathbb{C}$ (см. доказательство теоремы 2). Но справедливость этого утвержения в общем случае представляется сомнительной. Тем не менее, доказательство теоремы 16 (и идеи Тюкавкина, использованные в нем) позволили получить следующее доказательство.

Доказательство теоремы 22. Пусть $T = \mathsf{End}^*_{\Lambda f}(V_F)$; в этом случае кроме действия R на V слева мы имеем также действие T на V слева. Получившуюся 4-сортную систему мы будем обозначать ${}_{T,R}V_F$. В частности, T является $*$-регулярной алгеброй по факту 7, а ${}_TV_F$ является ее точным представлением. Согласно факту 15, ${}_{T,R}V_F$ обладает умеренно насыщенным элементарным расширением ${}_{\hat{T},\hat{R}}\hat{V}_{\hat{F}}$. Согласно факту 14, $\hat{T}$ является $*$-регулярной алгеброй, а ${}_{\hat{T}}\hat{V}_{\hat{F}}$ — ее точным представлением. Полагаем для $\sigma \in \hat{T}$ и $r \in R$

$\sigma \sim r$ если для любых $r^* \bowtie r$ в R существует $D \in \mathcal{D}$, $D \subseteq \mathsf{dom}\, r \cap \mathsf{dom}\, r^*$, такой что $\sigma v = rv$ и $\sigma^* v = r^* v$ для всех $v \in D$.

В этом случае мы говорим, что D *удостоверяет* отношение $\sigma \sim r$ *при условии* $r \bowtie r^*$. Мы полагаем также

$$S = \{\sigma \in \hat{T} \mid \sigma \sim r \text{ для некоторого } r \in R\}.$$

Напомним, что отношение $\approx_{\mathcal{D}}$ на R, определенное для алгебры обобщенных операторов, является конгруенцией по лемме 20. Пусть $[r] = \{s \in R \mid s \approx_{\mathcal{D}} r\}$.

Утверждение 1. *Отображение $g\colon S \to R/{\approx_{\mathcal{D}}}$, $g(\sigma) = [r]$, где $\sigma \sim r$, определено корректно.*

Доказательство утверждения. Пусть D_r и D_s удостоверяют $\sigma \sim r$ и $\sigma \sim s$ при условиях $r \bowtie r^*$ и $s \bowtie s^*$, соответственно. Поскольку множество $\mathcal{D}$ направлено вниз, найдется $D \in \mathcal{D}$ с условием $D \subseteq D_r \cap D_s$. Для любого $v \in D$ имеем $rv = \sigma v = sv$ and $r^* v = \sigma^* v = s^* v$, то есть $r \approx_{\mathcal{D}} s$. □

Утверждение 2. *В языке $*$-Λ-алгебр S является подалгеброй в $\hat{T}$, а отображение $g\colon S \to R/{\approx_{\mathcal{D}}}$ является гомоморфизмом.*

Доказательство утверждения. Пусть $\sigma \sim r$, $\tau \sim s$. Ввиду леммы 20 достаточно показать, что

$$(1)\ \sigma^* \sim r^*, \quad (2)\ \lambda\sigma \sim \lambda r, \quad (3)\ \tau + \sigma \sim s + r, \quad (4)\ \tau\sigma \sim s \cdot r.$$

Пусть $D_r \in \mathcal{D}$ удостоверяет $\sigma \sim r$ при условии $r \bowtie r^*$. Для доказательства (1) рассмотрим произвольный элемент $t \in R$ с условием $r^* \bowtie t$. Согласно (viii), имеем $t \approx_{\mathcal{D}} r$; это отношение удостоверяется некоторым множеством $D' \in \mathcal{D}$ при условиях $t \bowtie r^*$ и $r \bowtie r^*$. Так как $\mathcal{D}$ направлено вниз, найдется $D \in \mathcal{D}$ с условием $D \subseteq D' \cap D_r$. Тогда D удостоверяет $\sigma^* \sim r^*$ при условии $r^* \bowtie t$, поскольку $\sigma^* v = r^* v$ и $(\sigma^*)^* v = \sigma v = rv = tv$ для всех $v \in D$.

Что касается (2), рассмотрим произвольный элемент t с условием $\lambda r \bowtie t$. Согласно (c), имеем $\lambda r \bowtie \lambda^* r^*$, откуда $t \approx_{\mathcal{D}} \lambda^* r^*$ согласно (viii); это отношение удостоверяется некоторым множеством $D_0 \in \mathcal{D}$. Согласно (vi), существует $D_1 \in \mathcal{D}$, такое что $D_1 \subseteq \mathsf{dom}\, r \cap \mathsf{dom}(\lambda r)$ и $(\lambda r)v = (rv)\lambda$ для всех $v \in D_1$. Поскольку $\mathcal{D}$ направлено вниз, существует $D \in \mathcal{D}$ с условием $D \subseteq D_0 \cap D_1 \cap D_r$. Для любого $v \in D$ имеем:

$$(\lambda\sigma)v = (\sigma v)\lambda = (rv)\lambda = (\lambda r)v;$$
$$(\lambda\sigma)^* v = (\lambda^*\sigma^*)v = (\sigma^* v)\lambda^* = (r^* v)\lambda^* = (\lambda^* r^*)v = tv,$$

то есть D удостоверяет отношение (2) при условии $\lambda r \bowtie t$.

Для доказательства (3) и (4) предположим, что $D_s \in \mathcal{D}$ удостоверяет $\tau \sim s$ при условии $s \bowtie s^*$. Пусть $s + r \bowtie t$ для некоторого $t \in R$. Согласно (a), мы имеем также $s + r \bowtie s^* + r^*$, откуда $s^* + r^* \approx_{\mathcal{D}} t$ согласно (viii). Пусть D' удостоверяет последнее отношение при условиях $t \bowtie s + r$ и $s^* + r^* \bowtie s + r$. Согласно (iii), существуют $D_0, D_1 \in \mathcal{D}$, такие что $D_0 \subseteq \mathsf{dom}\, s \cap \mathsf{dom}\, r \cap \mathsf{dom}(s+r)$, $D_1 \subseteq \mathsf{dom}\, s^* \cap \mathsf{dom}\, r^* \cap \mathsf{dom}(s^* + r^*)$ и $sv + rv = (s + r)v$ для всех $v \in D_0$, а $s^* v + r^* v = (s^* + r^*)v$ для всех $v \in D_1$. Так как $\mathcal{D}$ направлено вниз, найдется $D \in \mathcal{D}$ с условием $D \subseteq D' \cap D_0 \cap D_1 \cap D_r \cap D_s$. Для всех $v \in D$ имеем:

$$(\tau + \sigma)v = \tau v + \sigma v = sv + rv = (s + r)v;$$
$$(\tau + \sigma)^* v = (\tau^* + \sigma^*)v = \tau^* v + \sigma^* v = s^* v + r^* v = (s^* + r^*)v = tv,$$

то есть D удостоверяет отношение (3) при условии $s + r \bowtie t$.

Пусть $s \cdot r \bowtie t$ для некоторого $t \in R$. Согласно (b), $s \cdot r \bowtie r^* \cdot s^*$, откуда получаем $r^* \cdot s^* \approx_{\mathcal{D}} t$ согласно (viii). Пусть D' удостоверяет последнее отношение при условиях $t \bowtie s \cdot r$ и $r^* \cdot s^* \bowtie s \cdot r$. Согласно (v), существуют D_0, $D_1 \in \mathcal{D}$, такие что

$$D_0 \subseteq \mathsf{dom}(s \cdot r) \cap r^{-1}(\mathsf{dom}\, s) \cap \mathsf{dom}\, r;$$
$$D_1 \subseteq \mathsf{dom}(r^* \cdot s^*) \cap (s^*)^{-1}(\mathsf{dom}\, r^*) \cap \mathsf{dom}\, s^*$$

и

$$(s \cdot r)v = s(rv) \quad \text{для всех } v \in D_0;$$
$$(r^* \cdot s^*)v = r^*(s^* v) \quad \text{для всех } v \in D_1.$$

Поскольку множество $\mathcal{D}$ направлено вниз, найдется множество $D' \in \mathcal{D}$ с условием $D' \subseteq D_r \cap D_s \cap D_0 \cap D_1$. Более того, согласно (ii), существует $D \in \mathcal{D}$, такое что $D \subseteq D' \cap r^{-1}(D') \cap (s^*)^{-1}(D')$. Поэтому $D \subseteq D_r$ и $rD \subseteq D_s$. Аналогично, $D \subseteq D_s$ и $s^*D \subseteq D_r$.

Таким образом, для любого $v \in D$ имеем:

$$(\tau\sigma)v = \tau(\sigma v) = \tau(rv) = s(rv) = (s \cdot r)v;$$
$$(\tau\sigma)^*v = (\sigma^*\tau^*)v = \sigma^*(\tau^*v) = \sigma^*(s^*v) = r^*(s^*v) = (r^* \cdot s^*)v = tv,$$

то есть D удостоверяет отношение (4) при условии $s \cdot r \bowtie t$.

Очевидно, $0 \sim 0_R$ и $1 \sim 1_R$ согласно (iv). $\square$

Утверждение 3. *Отображение g сюръективно.*

Доказательство утверждения. Пусть $r \bowtie r^*$ в R. Согласно (vii), существует $D \in \mathcal{D}$, такое что $D \subseteq \mathsf{dom}\, r \cap \mathsf{dom}\, r^*$ и $\langle x \mid r^*y \rangle = \langle rx \mid y \rangle$ для всех x, $y \in D$. Покажем, что существует элемент $\sigma \in \hat{T}$, такой что $\sigma v = rv$ и $\sigma^*v = r^*v$ для всех $v \in D$. Пусть $v_1, \ldots, v_n \in D$ и пусть U — подпространство в V_F, натянутое на векторы $v_1, \ldots, v_n$. Рассмотрим конечномерное подпространство $W = U + rU + r^*U$ в V и F-линейные отображения

$$\varphi_0 \colon U \to W, \quad \varphi_0 v = rv, \quad \text{и} \quad \psi_0 \colon U \to W, \quad \psi_0 v = r^*v.$$

В частности, $\langle x \mid \psi_0 y \rangle = \langle \varphi_0 x \mid y \rangle$ для всех x, $y \in U$. Выберем базис $u_1, \ldots, u_k$ в U и продолжим его до базиса $u_1, \ldots, u_m$ пространства W. Существуют единственные отображения φ, $\psi \in \mathsf{End}^*_\Lambda(W_F)$, такие что

$$\langle \varphi u_i \mid u_j \rangle = \langle u_i \mid \psi u_j \rangle = \begin{cases} \langle u_i \mid \psi_0 u_j \rangle & \text{для } j \leqslant k; \\ \langle \varphi_0 u_i \mid u_j \rangle & \text{для } i \leqslant k; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следовательно, $\psi = \varphi^*$, $\varphi|_U = \varphi_0$ и $\psi^*|_U = \psi_0$. Рассматривая ортогональную проекцию $\rho = \pi_W$, получаем, что $\rho \in T$. Более того,

$$\sigma = \rho\varphi\rho \in T, \quad \sigma^* = \rho\psi\rho \in T; \quad \sigma v = \varphi_0 v = rv, \quad \sigma^* v = \psi_0 v = r^* v$$

для всех $v \in U$. Рассмотрим теперь множество формул

$$\Sigma(\xi) = \{(\xi \underline{v} = \underline{r}\, \underline{v}) \;\&\; (\xi^* \underline{v} = \underline{r}^*\, \underline{v}) \mid v \in D\},$$

где ξ является переменной сорта T. Если множество $\Psi(\xi) \subseteq \Sigma(\xi)$ конечно, то в $\Psi(\xi)$ встречается лишь конечное число параметров $\underline{v}_i$, $v_i \in D$, и, как показано выше, существует $\sigma \in T$, такой что $\Psi(\sigma)$ выполняется в ${}_R V_F$. Поскольку система ${}_{\hat{T},\hat{R}}\hat{V}_{\hat{F}}$ является умеренно насыщенной над ${}_{T,R}V_F$, существует элемент $\sigma \in \hat{T}$, такой что $\Sigma(\sigma)$ выполняется в ${}_{\hat{T},\hat{R}}\hat{V}_{\hat{F}}$, то есть $\sigma v = rv$ и $\sigma^* v = r^* v$ для всех $v \in D$. Это доказывает, что $\sigma \sim r$. $\square$

Утверждение 4. *Для любого $v \in V$ существует единственная проекция $\hat{\pi}_v \in \hat{T}$, такая что $\hat{\pi}_v v = v$ и для любого $w \in \hat{V}$ найдется $\lambda \in \hat{F}$ с условием $\hat{\pi}_v w = \lambda v$.*

Доказательство утверждения. Существует проекция $\pi_v \in T$, такая что $\pi_v v = v$ и $\mathsf{im}\, \pi_v$ является подпространством, порожденным вектором v; а именно, ортогональная проекция на подпространство, порожденное v. Требуемое утверждение следует из того, что ${}_{\hat{T},\hat{R}}\hat{V}_{\hat{F}}$ является элементарным расширением ${}_{T,R}V_F$. $\square$

Утверждение 5. *$\sigma \in \ker g$ тогда и только тогда, когда для любого $t \bowtie 0_R$ существует множество $D \in \mathcal{D}$, такое что $\sigma\hat{\pi}_v = 0 = \sigma^*\hat{\pi}_v$ для всех $v \in D$, где $\hat{\pi}_v$ удовлетворяет условиям утверждения 4.*

Доказательство утверждения. Предположим, что $\sigma \in \ker g$ и $t \bowtie 0_R$. Тогда отношение $\sigma \sim 0_R$ удостоверяется некоторым $D_0 \in \mathcal{D}$ при условии $0_R \bowtie t$. С другой стороны, согласно (d) и (viii), $t \approx_{\mathcal{D}} 0_R$. Пусть последнее отношение удостоверяется множеством $D_1 \in \mathcal{D}$ при условиях $0_R \bowtie 0_R$ и $t \bowtie 0_R$. Тогда существует $D \in \mathcal{D}$, такое что $D \subseteq D_0 \cap D_1$ и

$$(*) \qquad \sigma v = 0_R v = tv = \sigma^* v \text{ для всех } v \in D.$$

Поскольку $0_R v = 0$, $(*)$ эквивалентно тому, что

$$(**) \qquad \sigma\hat{\pi}_v = 0 = \sigma^*\hat{\pi}_v \text{ для всех } v \in D.$$

Обратно, рассмотрим произвольный элемент $t \bowtie 0_R$ и предположим, что $(**)$ имеет место для некоторого $D \in \mathcal{D}$. Согласно (d) и (viii), отношение $t \approx_{\mathcal{D}} 0_R$ удостоверяется некоторым $D_0 \in \mathcal{D}$. Тогда отношение $\sigma \sim 0_R$ удостоверяется любым множеством $D' \in \mathcal{D}$, таким что $D' \subseteq D \cap D_0$, при условии $t \bowtie 0_R$. $\square$

Утверждение 6. *Идеал $\mathsf{ker}\, g$ регулярен.*

Доказательство утверждения. Поскольку T $*$-регулярна, $\hat{T}$ также является $*$-регулярной. Поэтому любой элемент $\sigma \in \mathsf{ker}\, g$ имеет псевдо-обратный элемент σ^+ в $\hat{T}$. Ввиду утверждения 5 и факта 9, $\sigma \in \mathsf{ker}\, g$ влечет $\sigma^+ \in \mathsf{ker}\, g$. $\square$

Докажем теперь утверждения теоремы. Первое следует из утверждений 2 и 3. Если $\mathsf{im}\, g = R/{\approx_{\mathcal{D}}}$ $*$-регулярен, то $*$-регулярность S следует из леммы 6. Более того, поскольку T точно представима в V_F, $\hat{T}$ точно представима в $\hat{V}_{\hat{F}}$ согласно факту 14. Таким образом, подсистема S также имеет точное представление в $\hat{V}_{\hat{F}}$, а точная представимость ее гомоморфного образа $R/{\approx_{\mathcal{D}}}$ в некотором замкнутом подпространстве U ультрастепени $\tilde{V}_{\tilde{F}}$ пространства $\hat{V}_{\hat{F}}$ следует из предложения 19. Наконец, отметим, что умеренно насыщенное расширение ${}_{\hat{T},\hat{R}}\hat{V}_{\hat{F}}$ может быть выбрано изоморфным ультрастепени системы ${}_{T,R}V_F$ по факту 15. В частности, $\tilde{V}_{\tilde{F}}$ изоморфна ультрастепени V_F согласно факту 13(i). Рассматривая композицию представления $R/{\approx_{\mathcal{D}}}$ в $U_{\tilde{F}}$ с этим изоморфизмом, мы получаем точное представление $R/{\approx_{\mathcal{D}}}$ в замкнутом подпространстве некоторой ультрастепени пространства V_F. $\square$

6. Кольца частных

Для ознакомления с кольцами частных мы отсылаем читателя к книге Роуена [21, глава 3]; однако, мы будем рассматривать правые кольца частных. Пусть A является Λ-алгеброй, пусть $\mathcal{I}_r(A)$ обозначает множество всех правых идеалов I в A и пусть $\mathsf{Hom}(I, A)$ обозначает множество всех линейных отображений $f\colon I_A \to A_A$. Правый идеал $I \in \mathcal{I}_r(A)$ называется *плотным* (в A), если для любого идеала $J \supseteq I$ из $\mathcal{I}_r(A)$ и любого отображения $f \in \mathsf{Hom}(J, A)$ равенство $f|I = 0$ влечет равенство $f = 0$.

Подмножество $\mathcal{E}$ в $\mathcal{I}_r(A)$ называется *множеством суппортов* (для A), если выполняется следующее:

(i) Любой идеал из $\mathcal{E}$ является плотным (в A);
(ii) $A \in \mathcal{E}$ и $I \cap J \in \mathcal{E}$ для любых I, $J \in \mathcal{E}$;
(iii) $f^{-1}(J) \in \mathcal{E}$ для любых I, $J \in \mathcal{E}$ и любого $f \in \mathsf{Hom}(I, A)$.

Отметим, что условие (iii) применимо, в частности, к умножению на элемент a слева $l_a\colon A \to A$, $l_a(x) = ax$, для любого $a \in A$, включая частный случай $a = \lambda 1_A$, где $l_{\lambda 1_A}\colon x \mapsto \lambda x$. Отметим также, что любой идеал $I \in \mathcal{I}_r$ инвариантен относительно λ, и положим $\lambda f = l_{\lambda 1_A} \circ f = f \circ (l_{\lambda 1_A}|I)$ для $f \in \mathsf{Hom}(I, A)$. Следующее утверждение хорошо известно.

Лемма 24. *Множество $\mathcal{E}_0$ всех плотных правых идеалов в A является множеством суппортов для A.*

Для заданного множества суппортов $\mathcal{E}$ определим *алгебру $R(A, \mathcal{E})$ абстрактных частных над $\mathcal{E}$* следующим образом:

$$R(A, \mathcal{E}) = \big\{(f, I) \mid I \in \mathcal{E},\ f \in \mathsf{Hom}(I, A)\big\}.$$

Наделим $R(A, \mathcal{E})$ операциями пред-Λ-алгебры так:

$$\begin{aligned}
&(f, I) + (g, J) = (f|K + g|K,\ K), && \text{где } K = I \cap J;\\
&\lambda(f, I) = \big((\lambda f)|K,\ K\big), && \text{где } K = \lambda^{-1}(I);\\
&(f, I) \cdot (g, J) = \big((f \circ g)|K,\ K\big), && \text{где } K = g^{-1}(I)\\
&0_R = (0, A), \quad 1_R = (\mathsf{id}_A, A)
\end{aligned}$$

Определим бинарное отношение $\equiv_{\mathcal{E}}$ на $R(A, \mathcal{E})$ так:

$$(f, I) \equiv_{\mathcal{E}} (g, J), \text{ если } f|K = g|K \text{ для некоторого } K \in \mathcal{E} \text{ с условием } K \subseteq I \cap J.$$

Следующие факты либо хорошо известны, либо доказываются очень просто.

Предложение 25. *Пусть A — Λ-алгебра и пусть $\mathcal{E}$ — множество суппортов для A.*

(i) *$(f, I) \equiv_{\mathcal{E}} (g, J)$ тогда и только тогда, когда $f|(I \cap J) = g|(I \cap J)$.*
(ii) *$\equiv_{\mathcal{E}}$ является отношением эквивалентности на $R(A, \mathcal{E})$, фактор-систему по которому мы обозначаем через $Q(A, \mathcal{E})$, а канонический гомоморфизм — через $\pi_{\mathcal{E}}$.*
(iii) *Отображение $\omega\colon A \to R(A, \mathcal{E})$, $\omega(a) = (l_a, A)$, является вложением Λ-алгебр; ограничение $\equiv_{\mathcal{E}}$ на $\omega(A)$ совпадает с тождественным отношением. В частности, $\pi_{\mathcal{E}} \circ \omega$ является вложением Λ-алгебр.*
(iv) *$(f, I) \cdot (l_a, A) \in \omega(A)$ тогда и только тогда, когда $a \in I$; в этом случае $(f, I) \cdot (l_a, A) = (l_{f(a)}, A)$.*
(v) *$R(A, \mathcal{E})$ является подалгеброй в $R(A, \mathcal{E}_0)$, а $\equiv_{\mathcal{E}}$ — ограничением отношения $\equiv_{\mathcal{E}_0}$.*
(vi) *$Q(A, \mathcal{E}_0) = Q_{\max}(A)$, где $Q_{\max}(A)$ обозначает максимальное кольцо правых частных для A.*
(vii) *$\pi_{\mathcal{E}} \circ \omega$ вкладывает A в $Q_{\max}(A)$.*

Напомним, что множество всех проекций $*$-кольца частично упорядочено отношением

$$e \leq e', \quad \text{если} \quad e'e = e, \quad \text{что равносильно} \quad ee' = e.$$

Теорема 26. *Пусть A — $*$-Λ-алгебра, пусть $\mathcal{E}$ — множество суппортов для A и пусть $R = R(A, \mathcal{E})$ таково, что:*

(a) *для любого $I \in \mathcal{E}$ существует направленное вверх множество P_I проекций в I, такое что $P_I A = \bigcup_{e \in P_I} eA \in \mathcal{E}$;*
(b) *инволюция на A может быть продолжена на $Q(A, \mathcal{E})$;*
(c) *существует точное представление ε для A в векторном пространстве V_F со скалярным произведением.*

Тогда существует алгебра обобщенных операторов $({}_R V_F; \mathcal{D})$, такая что $R/{\approx_{\mathcal{D}}}$ и $Q(A, \mathcal{E})$ изоморфны как $*$-Λ-алгебры.

Доказательство. Сопоставим любому идеалу $I \in \mathcal{E}$ конкретное направленное вверх множество проекций P_I, удовлетворяющее условиям из (a). Определим действие R на V_F, полагая

$$\mathsf{dom}(f, I) = D(I) = \bigcup_{e \in P_I} \mathsf{im}\, \varepsilon(e);$$
$$(f, I)v = \varepsilon(f(e))(v), \quad \text{если } v \in \mathsf{im}\, \varepsilon(e),\ e \in P_I.$$

Заметим, что $\varepsilon(e)(v) = v$ для любого $v \in \mathsf{im}\, \varepsilon(e)$, посольку e является проекцией.

Утверждение 1. *Для любого $(f, I) \in R$ действие (f, I) определено корректно.*

Доказательство утверждения. Предположим, что $v \in \mathsf{im}\, \varepsilon(e) \cap \mathsf{im}\, \varepsilon(e')$ для некоторых e, $e' \in P_I$. Поскольку множество P_I направлено, существует проекция $e'' \in P_I$, такая что $e''e = e$ и $e''e' = e'$. Тогда $\mathsf{im}\, \varepsilon(e)$, $\mathsf{im}\, \varepsilon(e') \subseteq \mathsf{im}\, \varepsilon(e'')$ и

$$\varepsilon\big(f(e)\big)(v) = \varepsilon\big(f(e''e)\big)(v) = \varepsilon\big(f(e'')e\big)(v) = \Big(\varepsilon\big(f(e')\big) \circ \varepsilon(e)\Big)(v) =$$
$$= \varepsilon\big(f(e'')\big)\big(\varepsilon(e)(v)\big) = \varepsilon\big(f(e'')\big)(v).$$

Аналогично, $\varepsilon\big(f(e')\big)(v) = \varepsilon\big(f(e'')\big)(v)$, то есть $\varepsilon\big(f(e)\big)(v) = \varepsilon\big(f(e')\big)(v)$. □

Утверждение 2. *Для любого $I \in \mathcal{E}$ множество $D(I)$ является F-линейным подпространством в V_F, а*

$$(f, I) \colon \mathsf{dom}(f, I) \to V$$

является F-линейным отображением для всякого $(f, I) \in R$.

Доказательство утверждения. Пусть u, $v \in D(I)$ и пусть $\lambda \in F$. Поскольку множество P_I направлено, существует $e \in P_I$ с условием u, $v \in \mathsf{im}\, \varepsilon(e)$. Так как $\mathsf{im}\, \varepsilon(e)$ является подпрострнством в V, $u + v$, $u\lambda \in \mathsf{im}\, \varepsilon(e)$. Используя тот факт, что ε является представлением, получаем:

$$(f, I)(u + v) = \varepsilon\big(f(e)\big)(u + v) = \varepsilon\big(f(e)\big)(u) + \varepsilon\big(f(e)\big)(v) = (f, I)u + (f, I)v;$$
$$(f, I)(u\lambda) = \Big(\varepsilon\big(f(e)\big)(u)\Big)\lambda = \big((f, I)u\big)\lambda.$$

□

Для (f, I), $(g, J) \in R$ полагаем

$$(f, I) \bowtie (g, J), \quad \text{если} \quad \pi_{\mathcal{E}}(g, J) = \big(\pi_{\mathcal{E}}(f, I)\big)^*.$$

Поскольку $\pi_{\mathcal{E}}$ являтся гомоморфизмом пред-Λ-алгебр, а * является инволючией на $Q(A, \mathcal{E})$, выполняются условия (a)-(c) опредеения пред-$*$-Λ-алгебры. Условие (d) выполняется очевидным образом. Полагаем

$$\mathcal{D} = \{D(I) \mid I \in \mathcal{E}\}.$$

Утверждение 3. *Для любых (f, I), $(g, J) \in R$ условие $(f, I) \approx_{\mathcal{D}} (g, J)$ равносильно условию $(f, I) \equiv_{\mathcal{E}} (g, J)$.*

Доказательство утверждения. Предположим, что отношение $(f, I) \approx_{\mathcal{D}} (g, J)$ удостоверяется множеством $D(K)$ для некоторого $K \in \mathcal{E}$ при некоторых условиях. Так как $K \cap I \cap J \in \mathcal{E}$, мы можем предполагать, что $K \subseteq I \cap J$. Тогда для каждого $e \in P_K$ и каждого $v \in \operatorname{im} \varepsilon(e)$ имеем

$$\varepsilon\big(f(e)\big)(v) = (f, I)v = (g, J)v = \varepsilon\big(g(e)\big)(v).$$

Это означает, что для любого $u \in V$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}\varepsilon\big(f(e)\big)(u) =&\varepsilon\big(f(e^2)\big)(u) = \varepsilon\big(f(e)e\big)(u) = \varepsilon\big(f(e)\big)\big(\varepsilon(e)(u)\big) = \\ &=\varepsilon\big(g(e)\big)\big(\varepsilon(e)(u)\big) = \varepsilon\big(g(e)e\big)(u) = \varepsilon\big(g(e^2)\big)(u) = \varepsilon\big(g(e)\big)(u),\end{aligned}$$

поэтому $f(e) = g(e)$, так как ε является точным представлением. Тогда для любого $a \in eA$ получаем

$$f(a) = f(ea) = f(e)a = g(e)a = g(ea) = g(a).$$

Согласно (a), $P_K A = \bigcup_{e \in p(K)} eA$ является плотным правым идеалом. Поскольку $f|P_K A = g|P_K A$, мы заключаем, что $f|K = g|K$, что доказывает отношение $(f, I) \equiv_{\mathcal{E}} (g, J)$.

Обратно, предположим, что $\pi_{\mathcal{E}}(f, I) = \pi_{\mathcal{E}}(g, J)$, и рассмотрим произвольные $(h_0, K_0), (h_1, K_1) \in R$, такие что $(h_0, K_0) \bowtie (f, I)$ и $(h_1, K_1) \bowtie (g, J)$ в R. Согласно определению, это означает, что

$$\pi_{\mathcal{E}}(h_0, K_0) = \big(\pi_{\mathcal{E}}(f, I)\big)^* = \big(\pi_{\mathcal{E}}(g, J)\big)^* = \pi_{\mathcal{E}}(h_1, K_1).$$

Таким образом, для любого идеала $K \in \mathcal{E}$ с условием $K \subseteq I \cap J \cap K_0 \cap K_1$ мы имеем $f|K = g|K$ и $h_0|K = h_1|K$. Тогда $D(K)$ удостоверяет отношение $(f, I) \approx_{\mathcal{D}} (g, J)$ при заданных условиях. □

Утверждение 4. *$({}_R V_F; \approx_{\mathcal{D}})$ является алгеброй обобщенных операторов.*

Доказательство утверждения. Для любого $(f, I) \in R$ имеем $D(I) = \mathsf{dom}(f, I)$, поэтому выполняется условие (i) из определения алгебры обобщенных операторов. Если $(f, I) \in R$ и $D(J) \in \mathcal{D}$ для некоторого $J \in \mathcal{E}$, тогда $K = f^{-1}(P_J A) \in \mathcal{E}$ согласно (a) и (iii) из определения множества суппортов для A. Пусть $v \in \operatorname{im} \varepsilon(e)$ для некоторого $e \in P_K$. Так как $K \subseteq I$, мы получаем, что $f(e) \in P_J A$. Поэтому $f(e) = e' f(e)$ для некоторого $e' \in P_J$ согласно (a). Таким образом,

$$(f, I)v = \varepsilon\big(f(e)\big)(v) = \varepsilon\big(e' f(e)\big)(v) = \varepsilon(e')\Big(\varepsilon\big(f(e)\big)(v)\Big) \in \operatorname{im} \varepsilon(e') \subseteq D(J).$$

Следовательно, $(f,I)D(K)\subseteq D(J)$ и условие (ii) выполняется.

Предположим, что (f,I), $(g,J)\in R$ и $K=I\cap J$. Тогда $K\in\mathcal{E}$ и $D(K)\subseteq \mathsf{dom}(f,I)\cap\mathsf{dom}(g,J)\cap\mathsf{dom}\big((f,I)+(g,J)\big)$. Более того, для любого $e\in P_K$ и любого $v\in\mathsf{im}\,\varepsilon(e)$ имеем:

$$\begin{aligned}\big((f,I)+(g,J)\big)v &= \varepsilon\big((f+g)(e)\big)(v)=\varepsilon\big(f(e)+g(e)\big)(v)=\\ &=\Big(\varepsilon\big(f(e)\big)+\varepsilon\big(g(e)\big)\Big)(v)=\varepsilon\big(f(e)\big)(v)+\varepsilon\big(g(e)\big)(v)=(f,I)v+(g,J)v.\end{aligned}$$

Таким образом, выполняется (iii).

Рассмотрим (f,I), $(g,J)\in R$. Согласно доказательству (ii), $K=g^{-1}(P_IA)\in\mathcal{E}$ и $(g,J)D(K)\subseteq D(I)$. Поэтому $D(K)\subseteq\mathsf{dom}(g,J)\cap(g,J)^{-1}\big(\mathsf{dom}(f,I)\big)=\mathsf{dom}\big((f,I)\cdot(g,J)\big)$. Более того, согласно (a), для любого $e\in P_K$ и любого $v\in\mathsf{im}\,\varepsilon(e)$ существует $e'\in P_I$ с условием $g(e)=e'g(e)$. Таким образом, для любого $v\in\mathsf{im}\,\varepsilon(e)$ имеем:

$$\begin{aligned}\big((f,I)\cdot(g,J)\big)v &= \varepsilon\big((f\circ g)(e)\big)(v)=\varepsilon\big(f\big(g(e)\big)\big)(v)=\varepsilon\big(f\big(e'g(e)\big)\big)(v)=\\ &=\varepsilon\big(f(e')g(e)\big)(v)=\varepsilon\big(f(e')\big)\varepsilon\big(g(e)\big)(v)=(f,I)\big((g,J)v\big),\end{aligned}$$

поэтому выполняется (v). Очевидно, что условие (iv) также выполняется.

Для доказательства (vi) предположим, что $\lambda\in\Lambda$, и пусть $K=\lambda^{-1}(I)\cap I$. Тогда $K\in\mathcal{E}$ согласно (ii)-(iii) из определения множества суппортов для A. Для любого $e\in P_K$ имеем $\lambda e=\lambda e^2=e(\lambda e)$. Таким образом, для любого $v\in\mathsf{im}\,\varepsilon(e)$ получаем:

$$\begin{aligned}\big(\lambda(f,I)\big)v &= \varepsilon\big((\lambda f)(e)\big)(v)=\varepsilon\big(f(\lambda e)\big)(v)=\varepsilon\big(f(e\cdot\lambda e)\big)(v)=\\ &=\varepsilon\big(f(e)\cdot\lambda e\big)(v)=\varepsilon\big(f(e)\big)\varepsilon(\lambda e)(v)=\varepsilon\big(f(e)\big)\big(\varepsilon(e)(v)\lambda\big)=\\ &=\varepsilon\big(f(e)\big)(v\lambda)=\varepsilon\big(f(e)\big)(v)\lambda=\big((f,I)v\big)\lambda,\end{aligned}$$

то есть выполняется условие (vi).

Для доказательства (vii) предположим, что $(f,I)\bowtie(g,J)$. Согласно предложению 25(iv), $\omega(f(e))=(f,I)\cdot\omega(e)$ для любого $e\in P_I$. По предположению (b) отображение $\pi_{\mathcal{E}}\omega$ является $*$-гомоморфизмом, откуда

$$\begin{aligned}\pi_{\mathcal{E}}\omega\big(f(e)^*\big) &= \pi_{\mathcal{E}}\big(\omega(f(e))\big)^*=\big(\pi_{\mathcal{E}}(f,I)\cdot\pi_{\mathcal{E}}\omega(e)\big)^*=\pi_{\mathcal{E}}\omega(e)^*\cdot\big(\pi_{\mathcal{E}}(f,I)\big)^*=\\ &=\pi_{\mathcal{E}}\omega(e)\cdot\pi_{\mathcal{E}}(g,J)=\pi_{\mathcal{E}}\big(\omega(e)\cdot(g,J)\big)=\pi_{\mathcal{E}}(l_e\circ g,J).\end{aligned}$$

Поэтому существует $K_0\in\mathcal{E}$, такой что $K_0\subseteq J$ и для любого $a\in K_0$

$$e\cdot g(a)=(l_e\circ g)(a)=l_{f(e)^*}(a)=f(e)^*\cdot a.$$

Пусть $K=K_0\cap I\cap J$. Тогда $K\in\mathcal{E}$ и $D(K)\subseteq D(I)\cap D(J)=\mathsf{dom}(f,I)\cap\mathsf{dom}(g,J)$. Предположим, что u, $v\in D(K)$. Тогда согласно (a), существует проекция $e\in$

P_K, такая что u, $v \in \operatorname{im}\varepsilon(e)$. Так как ε является представлением, имеем:

$$\begin{aligned}\langle (f,I)u \mid v\rangle &= \langle \varepsilon\big(f(e)\big)(u) \mid v\rangle = \langle u \mid \varepsilon\big(f(e)\big)^*(v)\rangle = \langle u \mid \varepsilon\big(f(e)^*\big)(v)\rangle = \\ &= \langle u \mid \varepsilon\big(f(e)^*\big)\varepsilon(e)(v)\rangle = \langle u \mid \varepsilon\big(f(e)^*\cdot e\big)(v)\rangle = \langle u \mid \varepsilon\big(e\cdot g(e)\big)(v)\rangle = \\ &= \langle u \mid \varepsilon(e)\varepsilon\big(g(e)\big)(v)\rangle = \langle u \mid \varepsilon(e^*)\varepsilon\big(g(e)\big)(v)\rangle = \\ &= \langle \varepsilon(e)(u) \mid \varepsilon\big(g(e)\big)(v)\rangle = \langle u \mid \varepsilon\big(g(e)\big)(v)\rangle = \langle u \mid (g,J)v\rangle.\end{aligned}$$

Таким образом, выполняется условие (vii).

Если $(g_0,J_0) \bowtie (f,I) \bowtie (g_1,J_1)$, то $\pi_{\mathcal{E}}(g_0,J_0) = \big(\pi_{\mathcal{E}}(f,I)\big)^* = \pi_{\mathcal{E}}(g_1,J_1)$, откуда $(g_0,J_0) \equiv_{\mathcal{E}} (g_1,J_1)$, и условие (viii) следует из утверждения 3. □

Утверждения выше показывают, что $({}_RV_F;\mathcal{D})$ является алгеброй обобщенных операторов. Согласно утверждению 3, $R/{\approx_{\mathcal{D}}} \cong Q(A,\mathcal{E})$. □

7. Доказательство основных результатов

Следующие понятия читатель может найти в [22] и в [10]. Пусть A — кольцо. Для любого $X \subseteq A$ полагаем:

$$\mathsf{Ann}_r(X) = \{a \in A \mid Xa = 0\};$$
$$\mathsf{Ann}_l(X) = \{a \in A \mid aX = 0\}$$

и называем эти множества *правым* и *левым аннигилятором* X соответственно. $*$-кольцо A называется *бэровским* [*рикартовским*], если для любого [одноэлементного] подмножества X в A существует проекция $e \in A$, такая что $\mathsf{Ann}_r(X) = eA$. В этом случае левый аннигилятор множества X также порождается проекцией. Если A является дополнительно C^*-алгеброй, то она называется *AW^*-алгеброй* [*рикартовской C^*-алгеброй* соответственно]. Согласно [10, 14.22, 14.24], это определение AW^*-алгебры эквивалентно определению, данному в [24]. Любая алгебра фонНоймана является AW^*-алгеброй. Мы будем называть $*$-кольцо A *конечным* (такое кольцо называется $*$-конечным в [10]), если равенство $xx^* = 1$ влечет равенство $x^*x = 1$ для любого $x \in A$. Кольцо A имеет *достаточно много проекций*, если любой собственный правый идеал содержит ненулевую проекцию. Будем говорить, что A удовлетворяет условию $LP \sim RP$ (в [10] используется обозначение $LP \sim^* PR$), если для любых элемента $x \in A$ и проекций e, $f \in A$ с условиями $\mathsf{Ann}_r(x) = (1-e)A$ и $\mathsf{Ann}_l(x) = A(1-f)$ существует элемент $y \in A$, такой что $e = yy^*$ и $f = y^*y$.

Правый идеал I кольца A называется *существенным* или *большим* в $J \supseteq I$, если $I \cap K \neq 0$ для любого идеала $K \in \mathcal{I}_r(A)$ с условием $0 \neq K \subseteq J$. Очевидно, что если идеал I является существенным в A, то любой идеал $J \supseteq I$ также является существенным в A. Следующее утверждение хорошо известно и может быть доказано непосредственно.

Лемма 27. *Пусть I, $J \in \mathcal{I}_r(A)$ таковы, что $I \subseteq J$ и J является существенным в A. Тогда I является существенным в J тогда и только тогда, когда I является существенным в A.*

Напомним, что A называется *несингулярным*, если правый идеал $\mathsf{Ann}_r(x)$ является существенным тогда и только тогда, когда $x = 0$. Более того, для любого несингулярного кольца понятия плотного в A и существенного в A правого идеала совпадают. Любое рикартовское $*$-кольцо является, очевидно, несингулярным.

Предложение 28. *Пусть A и $Q(A)$ удовлетворяют одному из следующих условий:*

(i) *A является конечной рикартовской C^*-алгеброй, а $Q(A)$ — ее классическим кольцом правых частных;*

(ii) *A — $*$-Λ-алгебра, являющаяся конечным бэровским $*$-кольцом, удовлетворяющим условию $LP \sim RP$ и имеющим достаточно много проекций, а $Q(A)$ — ее максимальное кольцо правых частных.*

Тогда существует множество суппортов $\mathcal{E}$, такое что $Q(A, \mathcal{E})$ и $Q(A)$ изоморфны и выполняются условия (a) *и* (b) теоремы 26, *что превращает $Q(A, \mathcal{E})$ в $*$-регулярную Λ-алгебру. Более того, в обоих случаях инволюция на A продолжается единственным образом до инволюции на $Q(A)$; наделенная этой инволюцией, $Q(A)$ является $*$-регулярной.*

Доказательство. Случай (i). Следуя Хандельману [7, стр. 177], пусть $\mathcal{E}$ состоит из всех правых идеалов $I \in \mathcal{E}_0$, таких что существует счетное множество $X \subseteq I$ с условием $\sum_{x \in X} xA \in \mathcal{E}_0$. Согласно [7, предложение 2.1] и лемме 27, существует счетное ортогональное множество проекций $P \subseteq I$, такое что правый идеал $J = \sum_{e \in P} eA$ является существенным в A. Пусть

$$P_I = \{e_0 + \ldots + e_n \mid n < \omega,\ e_0, \ldots, e_n \in P\}.$$

Тогда P_I является направленным множством проекций и $J = \bigcup_{e \in P_I} eA \in \mathcal{E}_0$. Поэтому выполняется условие (a) теоремы 26. Более того, согласно [7, леммы 2.3-2.4], выполняются также и условия (i)-(iii) определения множества суппортов, а алгебра $Q(A, \mathcal{E})$ является регулярной согласно [7, лемма 2.7]. Далее, в [7, теорема 2.1] построено $*$-регулярное подкольцо R в $Q_H(A) = Q(A, \mathcal{E})$, такое что инволюция на R продолжает инволюцию на A. Позже Арой и Меналом [8, стр. 129] было показано, что $R = Q_H(A)$ является классическим кольцом правых частных для A. Единственность продолжения инволюции в этом случае очевидна.

Случай (ii). Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$. Согласно лемме 24, $\mathcal{E}_0$ является множеством суппортов. Доказательство из [4, следствие 4.10] (см. [3, лемма 5]) вместе с [4, предложение 4.11] обеспечивает выполнимость условия (a) теоремы 26. Согласно Пайлу [23] и Хафнеру [3, теорема 2], алгебра $Q(A, \mathcal{E}_0)$ является $*$-регулярной, а инволюция на ней продолжает инволюцию на A. Единственность этого продолжения следует из [10, следствия 21.22 и 21.27], см. также [9]. $\square$

Следствие 29. *Пусть A и $Q(A)$ такие же, как в* предложении 28, *и пусть $\Lambda = F = \mathbb{C}$ в случае* (i). *Для любого точного представления ε алгебры A в гильбертовом пространстве $V_{\mathbb{C}}$ алгебра $Q(A)$ изоморфна $*$-$\mathbb{C}$-алгебре $R/{\approx_{\mathcal{D}}}$ для некоторой $\mathbb{C}$-алгебры $({}_R V_{\mathbb{C}}; \mathcal{D})$ обобщенных операторов на $V_{\mathbb{C}}$.*

Доказательство теоремы 2. Согласно ГНС-конструкции (факт 3), A имеет точное представление в некотором гильбертовом пространстве $V_{\mathbb{C}}$. Согласно следствию 29, $Q(A) \cong R/\approx_{\mathcal{D}}$ для некоторой алгебры обобщенных операторов $({}_RV_{\mathbb{C}}; \mathcal{D})$. Теорема 22 дает точное представление последней в некотором замкнутом подпространстве U ультрастепени $\hat{V}_{\hat{\mathbb{C}}} = V_{\mathbb{C}}^I/\mathcal{U}$. Это доказывает (i).

Согласно теореме 16, $Q(A)$ является гомоморфным образом подалгебры в ультрапроизведении $\prod_{k\in K} \mathsf{End}^*_\Lambda\big((U_k)_{\hat{\mathbb{C}}}\big)/\mathcal{W}$, где $\dim U_k = n_k < \omega$ для всех $k \in K$. Согласно фактам 8 и 13(ii), алгебра эндоморфизмов $\mathsf{End}^*_\Lambda\big((U_k)_{\hat{\mathbb{C}}}\big)$ изоморфна $(\mathbb{C}^{n_k\times n_k})^I/\mathcal{U}$ для любого $k \in K$. Поскольку все перечисленные алгебраические конструкции сохраняют псевдо-обращение, выполняется утверждение (ii). Далее, (ii) в свою очередь влечет (iii) согласно фактам 11 и 12. □

Напомним, наконец, некоторые факты, касающиеся конечных AW^*-алгебр (мы будем обозначать такую алгебру, как обычно, через A). Бербериан [2] построил $*$-регулярное расширение $Q_B(A)$ для A. Хафнер [3] и Пайл [4] показали, что как кольцо $Q_B(A)$ является максимальным кольцом правых частных для A. Таким образом, эта ситуация подпадает под случай (ii) предложения 28. Действительно, согласно Бербериану [10, 14.31], A удовлетворяет условию $LP \sim RP$, см. также [24, теорема 5.2] и имеет достаточно много проекций согласно [24, лемма 2.2].

С другой стороны, в [5, доказательство теоремы 10] Бербериан заметил, что в случае конечной AW^*-алгебры его конструкция $Q_B(A)$ дает классическое кольцо правых частных для A. Мы дадим набросок доказательства этого результата в рамках нашего подхода. Как было отмечено Арой и Меналом [8, стр. 129], $Q_H(A)$ состоит из всех элементов $x \in Q_M(A)$ максимального кольца правых частных, таких что существует ортогональная последовательность проекций e_k, таких что $xe_k \in A$ для всех k и идеал $J = \sum_k e_kA$ существенен в A. Элементы x множества $Q_B(A)$ (которое совпадает как кольцо с $Q_M(A)$) представимы так называемыми операторами с замыканием (OWC), которые по определению являются последовательностями вида (x_n, f_n), где $x_n \in A$ и $x_nf_m = x_mf_m$, $x_n^*f_m = x_m^*f_m$ для всех $m < n$; здесь последовательность f_n образует так называемую сильно плотную область (SDD), то есть возрастающую цепь проекций в A, объединение которых равно 1. Отметим, что существует ортогональная последовательность проекций e_n с объединениями $f_n = \sum_{k\leqslant n} e_k$, откуда следует, что $x_ne_k = x_nf_ke_k = x_ke_k$ и $x^*e_k = x^*e_k$ для $n \geqslant k$. Из доказательства [2, теорема 2.1] немедленно следует, что последовательность $xe_k \in Q_B(A)$ представима некоторым оператором с замыканием (x_ne_k, g_n), который эквивалентен оператору с замыканием (x_ke_k, h_n), где $h_n = 0$ для $n < k$ и $h_n = 1$ для $n \geqslant k$. Таким образом, $xe_k \in A$ для любого k. Поэтому для доказательства включения $Q_B(A) \subseteq Q_H(A)$ достаточно показать, что идеал $J = \sum_k e_kA$ является существенным в A. Для этого рассмотрим правый идеал $K \neq 0$ в A. Существует ненулевая проекция $e \in K$, и непрерывность решетки $\mathbb{L}(A)$ дает равенство $e = e \cap \bigvee_k e_k = e \cap \bigvee_k f_k = \bigvee_k (f_k \cap e)$, откуда $e = f_k \cap e = ef_k \in J \cap K$ для некоторого k.

8. Обсуждение

Очевидно, наш подход имеет много общего с методом, разработанным Элеком и Сабо [25] для доказательства прямой конечности группового кольца $D(G)$ (софической) группы, где D — произвольное тело. Идея состоит в построении на декартовом произведении E колец эндоморфизмов D-векторных пространств, порожденных конечными подмножествами в G, функции псевдо-рагнга N посредством ультрапределов и во вложении $D(G)$ в непрерывное регулярное кольцо $E/\mathsf{ker}N$.

Можно задаться вопросом, в какой мере в специальном случае алгебр фон Ноймана можно заменить теоретико-модельные ультрапроизведения ультрапроизведениями алгебр фон Ноймана, см. например [26], и получить таким образом идеи для решения более серьезных проблем в этой области. Отметим, однако, что свойство насыщенности теоретико-модельных ультрапроизведений имеет ключевое значение для нашего подхода.

Существует огромное многообразие результатов, касающихся бэровских $*$-колец, удовлетворяющих определенным условиям, которые влекут $*$-регулярность максимального кольца частных, см. например [5, 10, 3, 4, 9]; утверждение (i) предложения 28 является одним из них. В противоположность этому, результаты о представлениях $*$-колец в пространствах со скалярным произведением лежат в двух полярных областях: ГНС-констркуция с одной, "непрерывной", стороны и результаты о кольцах с максимальными правыми идеалами (см. [27]) с другой, "дискретной". Хотелось бы получить подобные результаты на основе более слабого (теоретико-решеточного) понятия непрерывности.

В последующей работе мы будем использовать результаты настоящей работы при детальном обсуждении классов $*$-алгебр и модулярных орторешеток, представимых в векторных пространствах со скалярным произведением над $*$-полями, элементарно эквивалентными полю действительных чисел $\mathbb{R}$ и полю комплексных чисел $\mathbb{C}$ соответственно, включая разрешимость и сложность определенных алгоритмических проблем над этими классами. В частности, будет показано, что любая алгебра вида $Q(A)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1, (а также ее орторешетка проекций) имеет разрешимую эквациональную теорию. Это является еще одним указанием на то, что алгебры вида $Q(A)$ являются особенными элементами класса всех $*$-регулярных колец; стоит отметить, что $Q(A)$ является прямо конечной, покольку имеет регулярное расширение (Хандельман [9, 7]). Открытым остается, однако, вопрос, в какой мере прямая конечность наследуется гомоморфными образами подалгебр (теоретико-модельных) ультрапроизведений матричных $*$-алгебр вида $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Список литературы

[1] K.R. Goodearl, P. Menal, Free and residually finite dimensional C^*-algebras, J. Funct. Anal. 90 (1990) 391-410.

[2] S.K. Berberian, The regular ring of a finite AW^*-algebra, Ann. Math. 65 (1957) 224-240.

[3] I. Hafner, The regular ring and the maximal ring of quotients of a finite Baer $*$-ring, Michigan Math. J. 21 (1974) 153-160.

[4] E.S. Pyle, The regular ring and the maximal ring of quotients of a finite Baer $*$-ring, Trans. Amer. Math. Soc. 203 (1975) 201-213.
[5] S.K. Berberian, The maximal ring of quotients of a finite von Neumann algebra, Rocky Mountain J. Math. 12 (1982) 149-164.
[6] F.J. Murray, J. von Neumann, On rings of operators, Ann. Math. 37 (1936) 116-229.
[7] D. Handelman, Finite Rickart C^*-algebras and their properties, Studies in analysis, in: Adv. Math. Suppl. Stud. 4, Academic Press, New York–London, 1979, pp. 171-196.
[8] P. Ara, P. Menal, On regular rings with involution, Arch. Math. 42 (1984) 126-130.
[9] D. Handelman, Coordinatization applied to finite Baer $*$-rings, Trans, Amer. Math. Soc. 235 (1978) 1-34.
[10] S.K. Berberian, Baer Rings and Baer $*$-Rings, Austin, 1988; http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/c/03/03-181.pdf
[11] N. Jacobson, Lectures on Abstract Algebra II, van Nostrand, Toronto, 1953.
[12] S.K. Berberian, Lectures in Functional Analysis and Operator Theory, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1974.
[13] J. von Neumann, Continuous Geometry, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960.
[14] K.R. Goodearl, Von Neumann Regular Rings, second ed., Krieger, Malabar, 1991.
[15] F. Maeda, Kontinuierliche Geometrien, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 45, Springer, Berlin, 1958.
[16] Л.А. Скорняков, Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., Физматгиз, 1961; English translation: Complemented Modular Lattices and Regular Rings, Oliver & Boyd, Edinburgh, 1964.
[17] I. Kaplansky, Any orthocomplemented complete modular lattice is a continuous geometry, Ann. Math. 67 (1955) 524-541.
[18] C.C. Chang, H.J. Keisler, Model Theory, third ed., North Holland Publ., Amsterdam, 1990.
[19] Д.В. Тюкавкин, Регулярные кольца с инволюцией, Вестник Московского государственного университета. Серия 1: Математика. Механика N 3 (1984) 29-32.
[20] F. Micol, On Representability of $*$-Regular Rings and Modular Ortholattices, Ph.D. thesis, Technische Universität Darmstadt, 2003; http://elib.tu-darmstadt.de/diss/000303/diss.pdf
[21] L. Rowen, Ring Theory, Academic Press, Boston, 1988.
[22] S.K. Berberian, Baer $*$-Rings, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 195, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
[23] E.S. Pyle, On maximal ring of quotients of a finite Baer $*$-rings, Ph.D. Thesis, University of Texas, Austin, 1972.
[24] I. Kaplansky, Projections in Banach algebras, Ann. Math. 53 (1951) 235-249.
[25] G. Elek, E. Szabó, Sofic groups and direct finiteness, J. Algebra 280 (2004) 426-434.
[26] N.P. Brown and N. Ozawa, C^*-algebras and finite-dimensional approximations, Graduate Studies in Mathematics 88, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
[27] I.N. Herstein, Rings with Involution, Univ. Chicago Press, Chicago, 1976.

(Кристиан Херрманн) Fachbereich Mathematik, Technische Universität Darmstadt, Schlossgartenstr. 7, 64289 Darmstadt, Germany
E-mail address: herrmann@mathematik.tu-darmstadt.de

(Марина Семенова) Институт математики СО РАН, пр. Ак. Коптюга. 4, 630090 Новосибирск, Россия и Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 2, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail address: udav17@gmail.com; semenova@math.nsc.ru