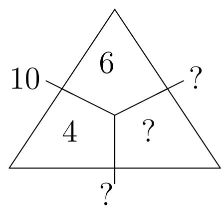
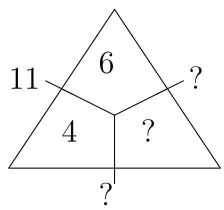
ZAHLENDREIECKE DURCH VERGLEICHEN UND PROBIEREN

Zahlendreiecke, die innen leer sind und aussen durch drei Zahlen aus $0, 1, 2, \ldots$ gegeben sind, lassen sich nicht durch direktes Rechnen lösen. Auch kann es vorkommen, dass es keine Lösung mit Zahlen aus $0, 1, 2, \ldots$ gibt. In Lehrbüchern für die Grundschule wird Probieren zur Lösung empfohlen. Wir wollen hier ein nachvollziehbares Probier-Verfahren darstellen. Begründungen für die Korrektheit des Vorgehens sind unabdingbar (auch im Unterricht!). Sie werden am Ende gegeben. Aus diesen Begründungen lassen sich leicht Beispiele ableiten, die den Begründungszusammenhang sichtbar machen.

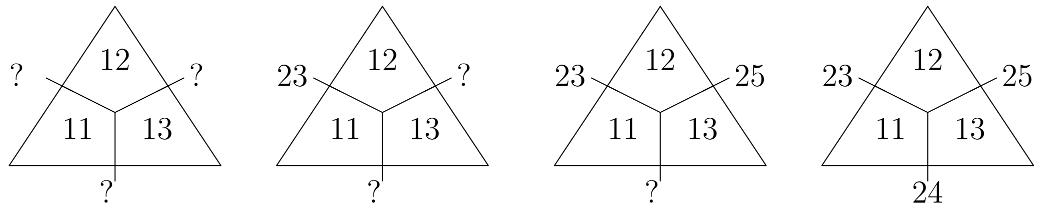
Zuerst beschreiben wir das Verfahren der direkten Rechnung und die ebenfalls beliebte Lösung durch Vergleich.

Wir betrachten nur Dreiecks-Aufgaben bei denen genau 3 Zahlen vorgegeben sind, alle aus $0, 1, 2, \ldots$. Wir verlangen, dass die Dreiecke *allgemein* sind: wir schliessen aus, dass 2 Zahlen in Feldern im Inneren stehen und die dritte aussen neben diesen beiden Feldern wie in

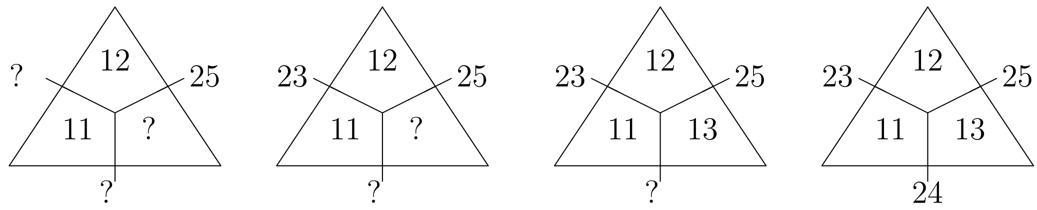




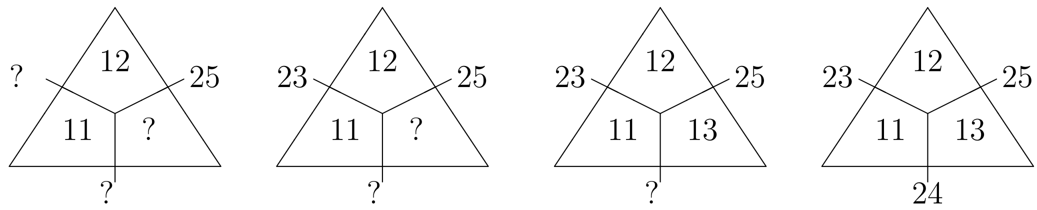
1. Direkte Rechnung und Beispiele



$$23 = 11 + 12,\ 25 = 12 + 13,\ 24 = 13 + 11$$



$$23 = 11 + 12,\ 13 = 25 - 12,\ 24 = 13 + 11$$



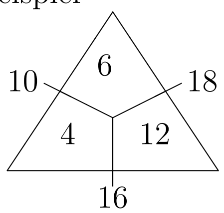
$$23 = 11 + 12,\ 13 = 26 - 12,\ 24 = 13 + 11$$

Das direkte Verfahren hat folgende Schritte

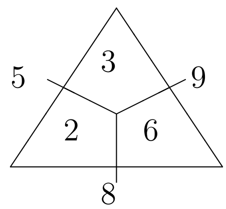
- Zu zwei Zahlen im Inneren schreibe das Ergebnis der Plus-Aufgabe aussen neben die beiden Felder an die zu beiden benachbarte Stelle
- Zu einer Zahl aussen und einer Zahl in einem benachbarten Feld innen schreibe das Ergebnis der Minus-Aufgabe in das andere zur äusseren Zahl benachbarte Feld innen.

2. Vergleich von Dreiecken

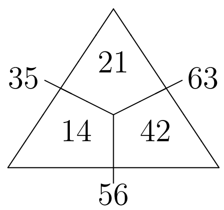
Hast Du ein Dreieck richtig bestimmt, so erhältst Du daraus neue richtige Dreiecke, indem Du alle Zahlen darin mit derselben Zahl malnimmst oder durch dieselbe teilst – wenn das ohne Rest geht. Zum Beispiel



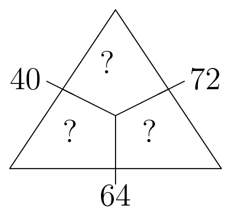
geteilt durch 2 gibt



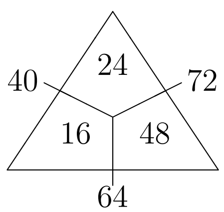
und das mal 7 gibt



Sollst Du nun folgendes Dreieck lösen



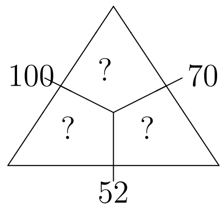
so siehst Du, dass die Zahlen aussen gerade die 8-fachen der Zahlen an der gleichen Stelle im zweiten Dreieck sind. Also rechnest Du die Aufgabe "malnehmen mit 8" für alle Zahlen im zweiten Dreieck und trägst sie an der richtigen Stelle in das neue ein. das ergibt die Lösung



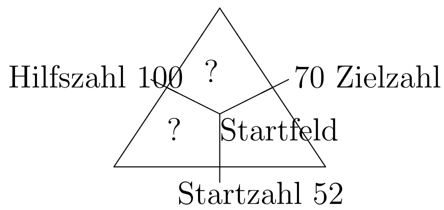
Willst Du bei einer Aufgabe das nächste Dreieck lösen, so schaue erst ob ein Vergleich mit einem schon gelösten Dreieck möglich ist.

3. Beispiel zum Probieren

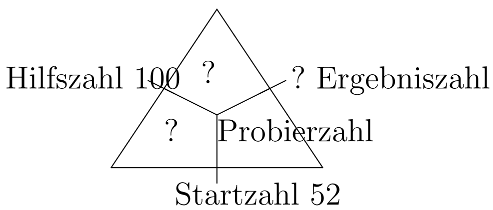
Zu lösen ist



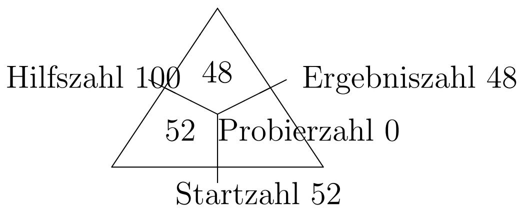
Wir bezeichnen

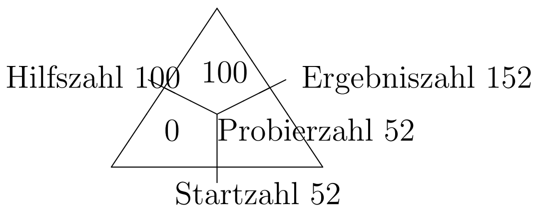


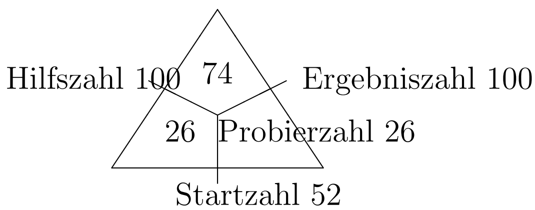
Probier-Dreieck

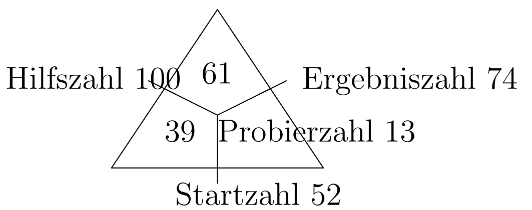


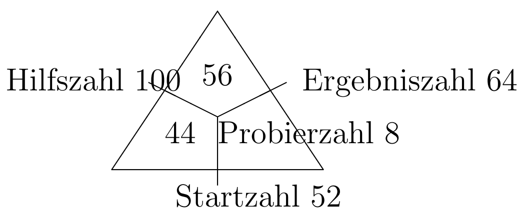
Wir probieren mit den Zahlen $0, 52, 26, 13, 8, 12, 11$. Die kommen aus dem Verfahren, das wir später beschreiben.

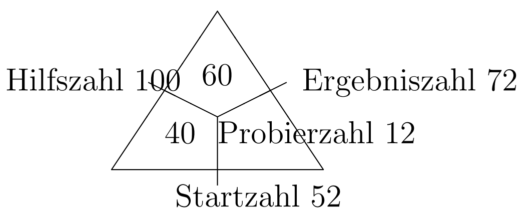


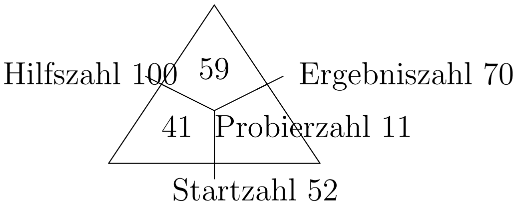








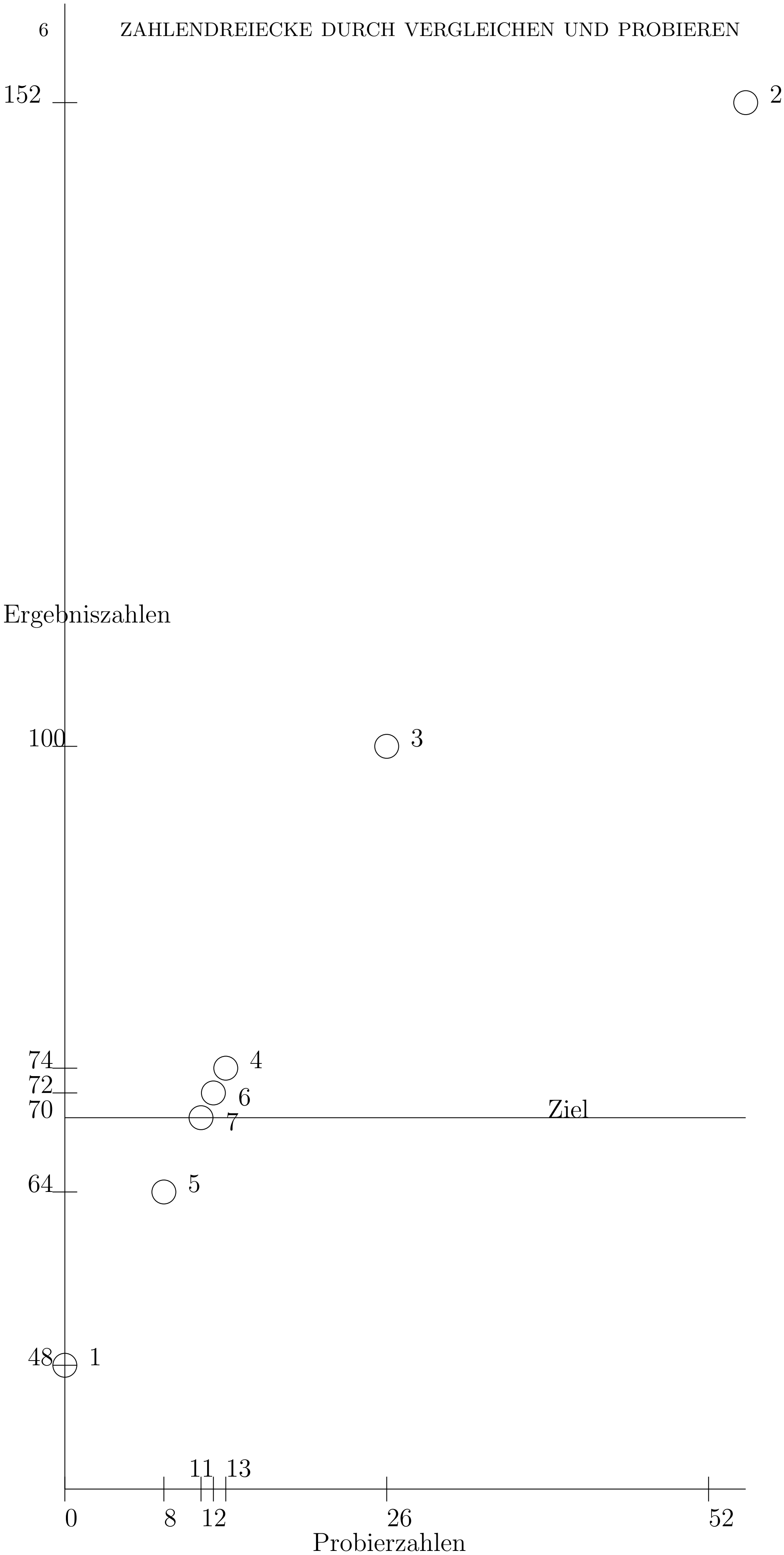




Wir schreiben Probierzahlen und Ergebniszahlen in eine Tabelle

Probierzahl	0	52	26	13	8	12	11
Ergebniszahl	48	152	100	74	64	72	70

Die Zuordnung von Probierzahlen und Ergebniszahlen siehst Du auch in folgender Darstellung. Jeder Kreis verbindet eine Probierzahl mit ihrer Ergebniszahl. Die Kreise sind in der Reihenfolge nummeriert, wie die Probierzahlen gewählt wurden.


Ergebniszahlen
152
100
74
72
70
64
48
1
2
3
4
5
6
7
Ziel
11
13
0
8
12
26
52
Probierzahlen

4. Probier-Verfahren

- Es geht um ein Dreieck, das innen leer ist. Aussen stehen drei Zahlen aus $0, 1, 2, 3, \ldots$.
- Gesucht sind Zahlen aus $0, 1, 2, 3, \ldots$ so, dass das Dreieck korrekt ausgefüllt ist.
- Nenne die (oder eine) kleinste der drei Zahlen aussen die Startzahl
- Wähle eines der Felder im Inneren, das zur Startzahl benachbart ist, und nenne es das Startfeld
- Nenne die zweite zu diesem Feld benachbarte Zahl aussen die Zielzahl
- Nenne die dritte Zahl aussen die Hilfszahl
- Wähle eine Zahl (aus $0, 1, 2, \ldots$), die kleiner oder gleich der Startzahl ist, und nenne sie Probierzahl. Nimm nun das Probier-Dreieck bei dem
  - die Probierzahl im Startfeld steht
  - die Startzahl an ihrem Platz aussen
  - die Hilfszahl an ihrem Platz aussen
  - die Zielzahl ist wegradiert.
  - Versuche dieses Probier-Dreieck durch Rechnen zu lösen
    * Wenn das klappt, nenne die Zahl, die an der Stelle der Zielzahl herauskommt die Ergebniszahl zu Deiner Probierzahl
    * Wenn die Ergebniszahl gleich der Zielzahl ist, hast Du gewonnen
    * Wenn die Ergebniszahl nicht gleich der Zielzahl ist, musst Du es mit einer neuen Probierzahl probieren
    * Wenn sich das Probier-Dreieck nicht durch Rechnen lösen lässt, so ist das Aufgaben-Dreieck unlösbar (mit Zahlen $0, 1, 2, \ldots$)
- Schreibe die von Dir benutzten Probierzahlen auf, damit Du keine zweimal benutzt.
- Hast Du keine Lösung, kannst aber keine neue Probierzahl wählen, so ist das Dreieck unlösbar (mit Zahlen aus $0, 1, 2, \ldots$).
- Das Dreieck ist unlösbar (mit Zahlen $0, 1, 2, \ldots$) und Du kannst auch gleich aufhören, genau dann, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt
  - Startzahl plus Hilfszahl ist kleiner als die Zielzahl
  - Hilfszahl ist grösser als Startzahl plus Zielzahl
  - von Startzahl, Hilfszahl und Zielzal sind
    * alle drei ungerade, also nur mit Rest durch 2 teilbar
    * zwei gerade, eine ungerade

5. Einschliessungssverfahren

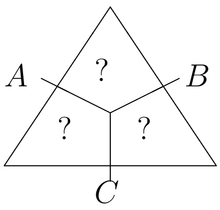
- Um gezielter zu probieren, wählen wir die Probierzahlen besser aus.
- Mach Dir eine Liste bei der in jeder Zeile zwei Probierzahlen stehen: *klein* links und *gross* rechts
- Eine Ergebniszahl zu *klein* heisse kleine Ergebniszahl. Eine Ergebniszahl zu *gross* heisse grosse Ergebniszahl
- In die erste Zeile kommen 0 und die Startzahl.
- Das Dreieck unlösbar (mit Zahlen aus $0, 1, 2, , \ldots$), falls einer der folgenden Fälle vorliegt
  - Die kleine Ergebniszahl ist grösser als die Zielzahl
  - Die grosse Ergebniszahl ist kleiner als die Zielzahl
- Die Liste wird so aufgebaut: Ist für die zuletzt bestimmte Zeile *gross* grösser als *klein* plus 1, so
  - wähle eine neue Probierzahl, die zwischen *klein* und *gross* aus der vorangehenden Zeile liegt (und von beiden verschieden ist). Nenne sie *neu*
  - Am Anfang wähle *neu* ungefähr in der Mitte zwischen *klein* und *gross*
  - Liegt die kleine Ergebniszahl näher bei der Zielzahl als die grosse Ergebniszahl, wähle *neu* näher bei *klein*
  - Liegt die grosse Ergebniszahl näher bei der Zielzahl als die kleine Ergebniszahl, so wähle *neu* näher bei *gross*
  - Wenn Du zu der Probierzahl *neu* eine Ergebniszahl berechnen kannst, so vergleiche sie mit der Zielzahl
    * Ist die Ergebniszahl gleich der Zielzahl, so hast Du gewonnen.
    * Ist die Ergebniszahl grösser als die Zielzahl, so kommen *klein* und *neu* in die neue Zeile und *neu* wird ab jetzt *gross* genannt
    * Ist die Ergebniszahl kleiner als die Zielzahl, so kommen *neu* und *gross* in die neue Zeile und *neu* wir ab jetzt *klein* genannt
  - Wenn sich das Probier-Dreieck nicht durch Rechnen lösen lässt, so ist das Aufgaben-Dreieck unlösbar (mit Zahlen $0, 1, 2, \ldots$)
- Setze das Verfahren fort bis Du für eine Probierzahl eine Ergebniszahl bekommst, die gleich der Zielzahl ist. Die Rechnung zu dieser Probierzahl gibt Dir die Lösung des Dreiecks
- Kommst Du auf diesem Weg zu einer Zeile mit *gross* gleich *klein* plus 1, wobei keine der Ergebniszahlen die Zielzahl ist, so ist das Dreieck unlösbar (mit Zahlen aus $0, 1, 2, , \ldots$).

Wir schreiben die wichtigen Zahlen aus dem Beispiel in eine Tabelle

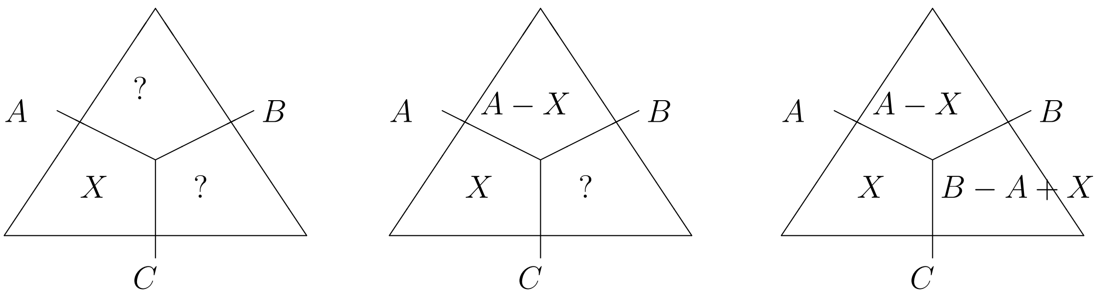
Probierzahl *klein*	Probierzahl *gross*	kleines Ergebnis	Ziel	grosses Ergebnis
0	52	48	70	152
0	26	48	70	100
0	13	48	70	74
8	13	64	70	74
8	12	64	70	72
8	11	64	70	70

6. Indirektes Verfahren

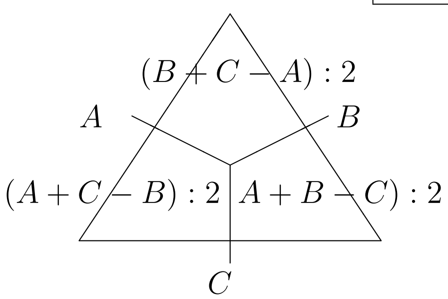
Um das Einschliessungsverfahren weiter unten zu rechtfertigen, zeigen wir, wie man zu jedem solchen Dreieck eine Gleichung in einer unbekannten X aufstellen kann und aus dieser die richtige Probierzahl gewinnt. Daraus bekommt man die (eindeutig bestimmte) Lösung für das Dreieck, möglicherweise mit Zahlen, die nicht zu $0, 1, 2, \ldots$ gehören. Gegeben seien Buchtaben A, B, C, die für bestimmte Zahlen stehen, und das Dreieck



Setze den Buchstaben X z.B. in die linke Ecke und bestimme für die anderen Felder Ausdrücke, also ob A, B, C, X ein Zahlen wären (Bustabenrechnung)



$$C = 2X + B - A,\ 2X = A + C - B$$
$$\boxed{X = (A + C - B) : 2}$$

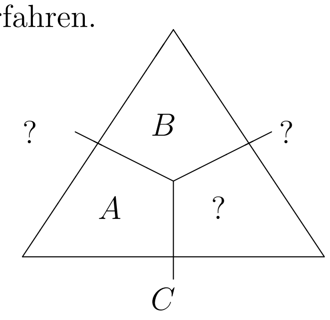


7. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

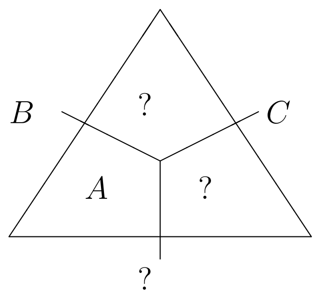
(1) Ein allgemeines Dreieck hat genau eine Lösung mit rationalen Zahlen, höchstens eine mit natürlichen Zahlen.
(2) Bis auf Drehung und Spiegelung gibt es genau 2 Typen von Dreiecken mit mindestens 1 Zahl im Innern.
(3) Bei Dreiecken us (2) gibt es genau eine Lösung mit ganzen Zahlen
(4) Typ I bzw. II hat eine Lösung mit natürlichen Zahlen genau dann, wenn $A \leq C$ bzw. $A \leq B$ und $B \leq A + C$.

Beweis: (2) durch Betrachtung der 12 möglichen Fälle. (3) und (4) folgen durch direkte Buchstabenrechnung. (1) folgt dann mit der Formel zum indiekten Verfahren.

Typ I



Typ II



8. Begründung zum Vergleich

- Gegeben ein richtig ausfülltes Dreieck
- Gegeben eine Zahl
- Rechne mit dieser Zahl für jeden Eintrag des Dreiecks die Malaufgabe und trage das Ergebnis an dieser Stelle ein
- Im alten Dreieck ist für je zwei Zahlen im Inneren die Summe die Zahl am Rand
- Das gilt dann genauso im neuen Dreieck (das folgt aus dem Distributivgesetz für die Malaufgabe)
- Also ist das neue Dreieck richtig ausgefüllt

und

- Gegeben ein richtig ausfülltes Dreieck
- Gegeben eine Zahl
- Teile jeden Eintrag des Dreiecks durch diese Zahl und trage das Ergebnis an dieser Stelle ein
- Im alten Dreieck ist für je zwei Zahlen im Inneren die Summe die Zahl am Rand
- Das gilt dann genauso im neuen Dreieck (das folgt aus dem Distributivgesetz für die Geteilt-Aufgabe)
- Also ist das neue Dreieck richtig ausgefüllt

9. Korrektheitsbeweis zur Einschliessung

Wie betrachten das indirekte Verfahren mit

Startwert A
Hilfswert B
Zielwert

Für einen Probierwert X haben wir nach dem indirekten Verfahren den Ergebniswert

$$f(X) = 2X + B - A$$

Gesucht ist für diese Funktion f ein X_0 mit

$$f(X_0) = C.$$

Auflösen der Gleichung zeigt, dass eine solche rationale Zahl X_0 existiert und eindeutig bestimmt ist. Die Funkton f ist linear und wegen des positiven Faktors bei X streng monoton wachsend. Das Verfahren hat folgende Eigenschaften

(1) Die erste Zeile hat den kleinen Ergebniswert $B - A$ und den grossen Ergebniswert $A + B$
(2) Der kleine Ergebniswert ist immer kleiner oder gleich dem Zielwert
(3) Der grosse Ergebniswert ist immer grösser oder gleich dem Zielwert
(4) Der Abstand zwischern *klein* und *gross* wird mit jedem Schritt mindestens um 1 kleiner
(5) Alle berechneten Werte sind Zahlen aus $0, 1, 2, \ldots$

Dass (2) und (3) auf die erste Zeile zutreffen, folgt aus der Abbruchbedingung. Dass diese korrekt ist, folgt aus der Monotonie von f und der Forderung $0 \leq X_0 \leq A$; diese ergibt sich aus der Beschränkung auf Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ Für die weiteren Zeilen folgen (2) und (3) aus der Konstruktion. Wgen (4) erreicht man nach endlich vielen Schritten eine Zeile so, dass

$$gross \ - \ klein \ \leq 1$$

Ist einer der beiden Ergebniswerte der Zielwert, so hat man die Lösung (das für die Rechnung benutzte Dreieck). Andernfalls hat man

$$\text{kleines Ergebnis} < \text{Zielwert } C = f(X_0) < \text{grosses Ergebnis}$$

und somit wegen der Monotonie von f

$$klein < X_0 < gross < klein + 1$$

d.h. X_0 ist keine der zugelassenen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$.

10. Kommentar

Zahlendreiecke und Zahlenmauern, die sich durch direktes Rechnen lösen lassen, sind ein legitimes, in jedem Fall aber unschädliches Mittel, um Addition und Subtraktion zu üben, spannende Bäume im einem verfremdeten Graphen zu finden und systematisch abzuarbeiten.

Anders sieht es aus, wenn direktes Rechnen nicht zur Lösung führt. Hier ist der Sache nach Probieren ein absurder Zugang. Wenn man dennoch solche Aufgaben stellt, müssen sie durch hinführende Aufgaben und Erklärungen begleitet werden. Dazu gehören insbesondere praktische Beispiele von monotonen funktionalen Abhängigkeiten und Aufgabenlösungen durch Näherungs- und Einschliessungsverfahren. Z.B.: Wahl eines Schraubenschlüssels; Anprobieren von Kleidung oder Schuhen; Stimmen eines Instruments; Einstellen von Lautstärke; Steuern des Fahrradlenkers; Flächeninhalt oder Volumen nach Archimedes. Bei Zahlenbeispielen ist die Funktion durch Tabelle und graphische Darstellung sichtbar zu machen.

Viele Aufgabentypen für Zahlendreiecke und Zahlenmmauern suggerieren, dass solche Probleme immer eine eindeutig bestimmte Lösung haben oder dass Lösungen durch Zufallsbeobachtungen bzw. durch Suche nach konstruierten, nicht durch natürliche Gesetzmässigkeiten bedingten, Mustern zu finden seien. Das ist eine sehr einseitige Konditionierung auf die Sichtweisen und Vorlieben der Autoren und wenig hilfreich für die Entwicklung mathematischer Kompetenz und selbstständigen Erkennens und Denkens.