ZAHLENMAUERN UND ZAHLENDREIECKE

CHRISTIAN HERRMANN

Korrekturen, Verbesserungsvorschläge und Anregungen bitte an
herrmann “bei” mathematik.tu-darmstadt.de

1. Vorbemerkung

Lösugen von Zahlenmauern und Zahlendreiecken sind Lösugen spezieller Systeme von linearen Gleichungen. Dabei werden in den Klassen 1 bis 3 nur nicht-negative ganzzahlige Lösungen zugelassen. Die Aufgaben werden in der Regel so gestellt, dass es genau eine solche Lösung gibt. Es werden dabei aber auch Aufgaben gestellt, bei denen für die Schüler ein nachvollziehbarer direkter Weg zur Lösung nicht möglich ist und bei denen Lösung durch Probieren mehrere hundert Versuche erfordert.

Zur Vereinfachung der Darstellung lassen wir beliebige Lösungen zu und diskutieren im Einzelfall, ob Lösungen in einem eingeschränkten Zahlbereich bestehen.

2. Mauern bis zur Höhe 3

Zunächst einige Beispiele. Wir notieren leere Kästchen mit ?.

2.1. **Beispiel 1.**

$$\begin{array}{ccccc} & & ? & & \\ & ? & & ? & \\ 11 & & 12 & & 13 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & ? & & \\ & 23 & & ? & \\ 11 & & 12 & & 13 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & ? & & \\ & 23 & & 25 & \\ 11 & & 12 & & 13 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & 48 & & \\ & 23 & & 25 & \\ 11 & & 12 & & 13 \end{array}$$

Die Regel zum Auffüllen der Mauer ergibt: $11 + 12 = 23$, $12 + 13 = 25$ (die Reihenfolge ist hier unwichtig), und dann $23 + 25 = 48$.

2.2. **Beispiel 2.**

$$\begin{array}{ccccc} & & ? & & \\ & 12 & & ? & \\ 7 & & ? & & 13 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & ? & & \\ & 12 & & ? & \\ 7 & & 5 & & 13 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & ? & & \\ & 12 & & 18 & \\ 7 & & 5 & & 13 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & 30 & & \\ & 12 & & 18 & \\ 7 & & 5 & & 13 \end{array}$$

Hier: $12 - 7 = 5$, $5 + 13 = 18$ und $12 + 18 = 30$.

2.3. **Beispiel 3.** Aus dem Arbeitsheft zum Zahlenbuch Klasse 3, S. 20

$$\begin{array}{ccccc} & & 1000 & & \\ & ?y & & ?z & \\ 240 & & ?x & & 160 \end{array}$$

Setze für $?x$ der Reihe nach alle Zahlen von 0 bis 1000, bestimme daraus die Werte für $?y$ und $?z$ und überprüfe, ob deren Summe 1000 ist. Tu das, solange bis es klappt.

$$\begin{array}{ccccc} & & 400 & & \\ & 240 & & 160 & \\ 240 & & 0 & & 160 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 401 & & \\ & 241 & & 161 & \\ 240 & & 1 & & 160 \end{array} \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \begin{array}{ccccc} & & 500 & & \\ & 340 & & 260 & \\ 240 & & 100 & & 160 \end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{ccccc} & & 999 & & \\ & 539 & & 459 & \\ 240 & & 299 & & 160 \end{array} \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \begin{array}{ccccc} & & 1000 & & \\ & 540 & & 460 & \\ 240 & & 300 & & 160 \end{array}$$

2.4. **Sprechweisen.** Wir benötigen einige Sprechweisen, um über das Vorgehen bei der Lösung zu reden. Eine *Masche* besteht aus drei Ziegelsteinen (Kästchen), bei denen der dritte (der "Deckstein") je zur Hälfte auf den beiden ersten liegt. Eine *Zahl-Masche* ist eine Masche bei dem in einige Kästchen eine Zahl eingetragen ist. Sie ist *voll* wenn in jedem Kästchen eine Zahl ist; sie ist *offen*, wenn in genau 2 Kästchen eine Zahl ist. Wir benutzen $A, B, C, \ldots$ um Zahlen zu notieren, die in der Aufgabe gegeben sind oder bei der Lösung hinzukommen.

2.5. **Grundbedingung.** Die *Grundbedingung* für eine geschlossene Zahl-Masche ist, dass die Summe der ersten beiden Einträge gleich dem dritten ist (eine solche Masche heisst auch *korrekt*)

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ A & & B \end{array} \qquad C = A + B$$

Ein vollständig ausgefüllte Mauer ist *korrekt*, wenn jede (volle) Zahl-Masche korrekt ist.

2.6. **Ergänzung.** Es gibt die folgenden Typen von offenen Zahl-Maschen und dazu die *Ergänzung* zu einer korrekten vollen Zahl-Masche

$$\begin{array}{ccc} & ? & \\ A & & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & A+B & \\ A & & B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ A & & ? \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & C & \\ A & & C-A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ ? & & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & C & \\ C-B & & B \end{array}$$

2.7. **Leere Mauern.** Sind alle Kästchen leer, so schreibt man nach Belieben Zahlen in die unterste Zeile und ergänzt dann Zeile für Zeile nach oben fortschreitend. Das Einfachste: Überall 0 einsetzen. Es gibt aber, je nach Höhe der Mauer und zugelassenem Zahlenraum, viele bis unendliche viele Lösungen.

2.8. **Direktes Vorgehen.** Das *direkte Vorgehen* beruht auf dem folgenden Schritt, der zuerst auf die Aufgabenstellung angewandt wird und dann wiederholt, solange es geht.

(1) Suche in der Mauer nach einer offenen Zahl-Masche. Wenn Du eine gefunden hast, so trage die Ergänzung ein. Wenn dadurch weitere volle Zahl-Maschen entstehen, so überprüfe für jede von diesen die Grundbedingung.
   - Ist die Grundbedingung für eine dieser Maschen verletzt, so ist die Aufgabe unlösbar.
   - Ist die Grundbedingung für alle diese Maschen erfüllt, so fahre fort.

Endet das Verfahren mit einer vollständig ausgefüllten Mauer, so hat man die (eindeutig bestimmtee) Lösung der Aufgabe.

In den Beispielen 1 und 2 findet man so eine direkte Lösung. Bei Beispiel 3 gibt es in der Aufgabenstellung keine offene Zahl-Masche, also keine Lösung durch dieses Verfahren.

Wenn nötig, markieren wir in jedem Schritt die Masche, die durch Ergänzung entsteht, durch $*$, weitere neu entstandene volle Maschen durch #. Weitere Beispiele

$$\begin{array}{ccccc} & & 48 & & \\ & 23 & & ? & \\ ? & & 12 & & 13 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 48 & & \\ & 23 & \ast & 25 & \\ ? & & 12 & \# & 13 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 48 & & \\ & 23 & & 25 & \\ 11 & \ast & 12 & & 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 48 & & \\ & 23 & & ? & \\ ? & & 12 & & 14 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 48 & & \\ & 23 & \ast & 25 & \\ ? & & 12 & \# & 14 \end{array} \qquad \text{unlösbar}$$

2.9. **Indirektes Vorgehen in Beispiel 3.**

$$\begin{array}{ccccc} & & 1000 & & \\ & ? & & ? & \\ 240 & & ? & & 160 \end{array}$$

Hier gibt es keine offenen Zahl-Masche, durch die wir weitere Zahlen gewinnen könnten. Wir wählen daher ein leeres Kästchen und tragen dort X ein

$$\begin{array}{ccccc} & & 1000 & & \\ & ? & & ? & \\ 240 & & X & & 160 \end{array}$$

Wir suchen nun nach offenen Maschen, in denen wir Einträge, die X enthalten, auch zulassen. Wir bestimmen die Ergänzung und wiederholen diesen Schritt

$$\begin{array}{ccccc} & & 1000 & & \\ & X+240 & & ? & \\ 240 & & X & & 160 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & 1000 & & \\ & X+240 & & X+160 & \\ 240 & & X & & 160 \end{array}$$

Die Grundbedingung für

$$\begin{array}{ccc} & 1000 & \\ X+240 & & X+160 \end{array}$$

ergibt

$$1000 = X + 240 + X + 160$$
$$2X = 1000 - 240 - 160 = 600$$
$$X = 300$$

Wir benutzen diesen Wert für X, um die Mauer auszufüllen und prüfen nach, dass alles stimmt:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1000 & & \\ & 540 & & 460 & \\ 240 & & 300 & & 160 \end{array}$$

2.10. **Beispiel 3 mit beliebigen Zahlen.**

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & ? & & ? & \\ A & & ? & & B \end{array}$$

Hier gibt es keine offenen Zahl-Masche, durch die wir weitere Zahlen gewinnen könnten. Wir wählen daher ein leeres Kästchen und tragen dort X ein

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & ? & & ? & \\ A & & X & & B \end{array}$$

Wir suchen nun nach offenen Maschen, in denen wir Einträge, die X enthalten, auch zulassen. Wir bestimmen die Ergänzung und wiederholen diesen Schritt

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & X+A & & ? & \\ A & & X & & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & X+A & & X+B & \\ A & & X & & B \end{array}$$

Die Grundbedingung für

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ X+A & & X+B \end{array}$$

ergibt

$$C = X + A + X + B$$

$$2X = C - A - B$$

und (weil man hier auch rückwärts rechnen kann) die Lösung

$$\boxed{X = (C - A - B) : 2}$$

und die Mauer

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & (C+A-B):2 & & (C-A+B):2 & \\ A & & (C-A-B):2 & & B \end{array}}$$

2.11. **Eindeutig lösbare Mauern der Höhen 2 und 3.**

> Eine eindeutig bestimmte Lösung gibt es für
> - alle Mauern der Höhe 2 mit 2 Einträgen
> - alle Mauern der Höhe 3 mit 3 Einträgen, die keine volle Zahl-Masche bilden.
>
> Ausgenommen die Mauern wie in Beispiel 3 ergibt sich hier die Lösung durch direktes Vorgehen.
> Ob die Lösung im zugelassen Zahlenraum liegt, ist jeweils zu prüfen.

Das sieht man, indem man alle Typen solcher Mauern bis auf die Spiegelung an der Mittelachse auflistet. Wir notieren die vorgegebenen Einträge mit a, b, c, die leeren Kästchen mit x, y, z.

$$2+0 \qquad \begin{array}{ccc} & x & \\ a & & b \end{array} \qquad x = a + b$$

$$1+1 \qquad \begin{array}{ccc} & b & \\ a & & x \end{array} \qquad x = b - a$$

$$3+0+0 \qquad \begin{array}{ccccc} & & z & & \\ & x & & y & \\ a & & b & & c \end{array} \qquad \begin{array}{rclcl} x &=& a+b & & \\ y &=& b+c & & \\ z &=& x+y &=& a+2b+c \end{array}$$

$$2+1+0 \qquad \begin{array}{ccccc} & & z & & \\ & b & & y & \\ a & & x & & c \end{array} \qquad \begin{array}{rclcl} x &=& b-a & & \\ y &=& x+c &=& b+c-a \\ z &=& b+y &=& 2b+c-a \end{array}$$

$$2+1+0 \qquad \begin{array}{ccccc} & & c & & \\ & x & & y & \\ a & & b & & z \end{array} \qquad \begin{array}{rclcl} x &=& a+b & & \\ y &=& c-x &=& c-a-b \\ z &=& y-b &=& c-a-2b \end{array}$$

$$2+0+1 \qquad \begin{array}{ccccc} & & c & & \\ & y & & z & \\ a & & x & & b \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} y &=& a+x \\ z &=& b+x \\ c &=& y+z=a+b+2x \\ x &=& (c-a-b):2 \end{array}$$

$$1+2+0 \qquad \begin{array}{ccccc} & & z & & \\ & b & & c & \\ a & & x & & y \end{array} \qquad \begin{array}{rclcl} x &=& b-a & & \\ y &=& c-x &=& a+2c-b \\ z &=& b+c & & \end{array}$$

$$1+1+1 \qquad \begin{array}{ccccc} & & c & & \\ & b & & y & \\ a & & x & & z \end{array} \qquad \begin{array}{rclcl} x &=& b-a & & \\ y &=& c-b & & \\ z &=& y-x &=& a+c-2b \end{array}$$

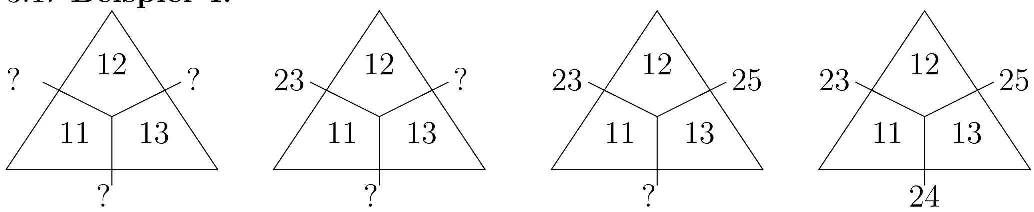
2.12. **Schlussbemerkung.** Wir nehmen an, dass die Mauer nur solche vollen Zahlen-Maschen enthält, die die Grundbedingung erfüllen – andernfalls ist sie unlösbar. Zu einer vollen Zahl-Masche, die die Grundbedingung erfüllt, erhält man durch Weglassen einer Zahl eine Mauer, mit genau denselben Lösungen. Wir nehmen daher an, dass die Mauer keine vollen Zahl-Maschen enthält.

Mauern der Höhe 2 mit 0 oder 1 Zahl und Mauern der Höhe 3 mit 0,1 oder 2 Zahlen haben unendlich viele Lösungen Hat man 4 oder mehr Zahlen, so kann man immer 3 auswählen, zu denen es nach dem voangehenden Abscnnitt eine eindeutige Lösung gibt; stimmt diese nicht mit den gegebenen Zahlen überein, so gibt es keine Lösung.

3. Zahlendreiecke

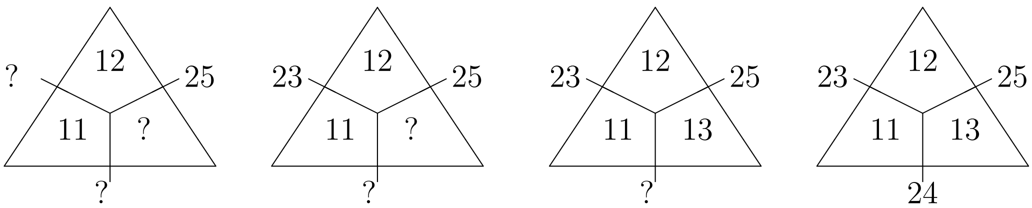
Wieder erstmal ein paar Beispiele

3.1. **Beispiel 4.**



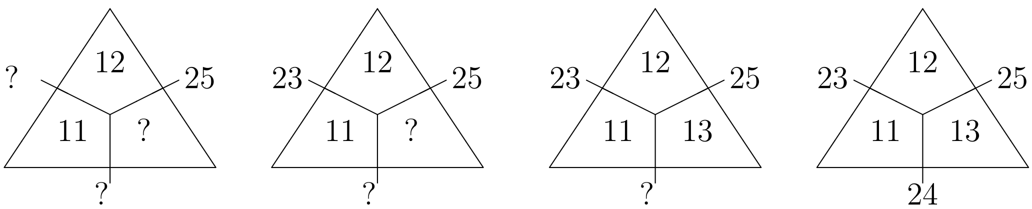
$$23 = 11 + 12,\ 25 = 12 + 13,\ 24 = 13 + 11$$

3.2. **Beispiel 5.**



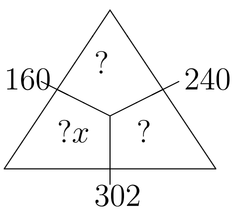
$$23 = 11 + 12,\ 13 = 25 - 12,\ 24 = 13 + 11$$

3.3. **Beispiel 6.**

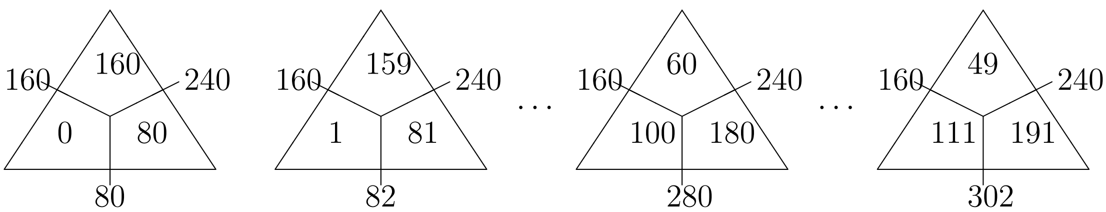


$$23 = 11 + 12,\ 13 = 26 - 12,\ 24 = 13 + 11$$

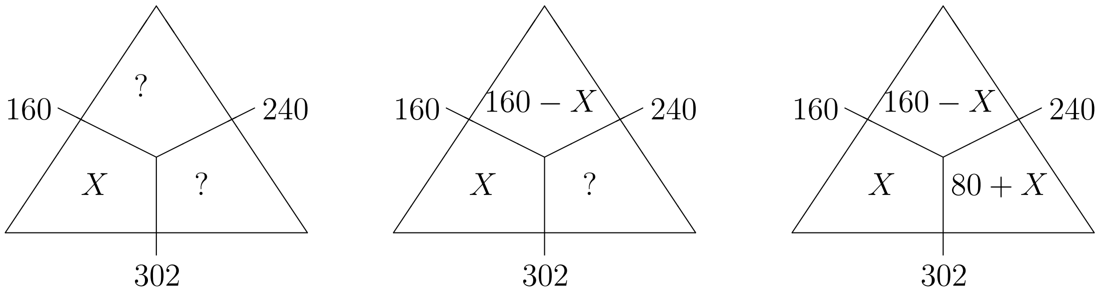
3.4. **Beispiel 7.**



Probiere $0, \dots, 160$ für x

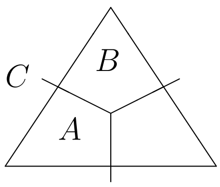


Besser mit dem indirekten Verfahren



$$302 = 2X + 80,\ 2X = 222,\ X = 222 : 2 = 111$$

3.5. **Direktes Verfahren.** Bei einem Zahlendreieck besteht eine *Masche* aus 2 Feldern A, B im Inneren des Dreiecks und der an beide angrenzenden Position C aussen, zum Beispiel

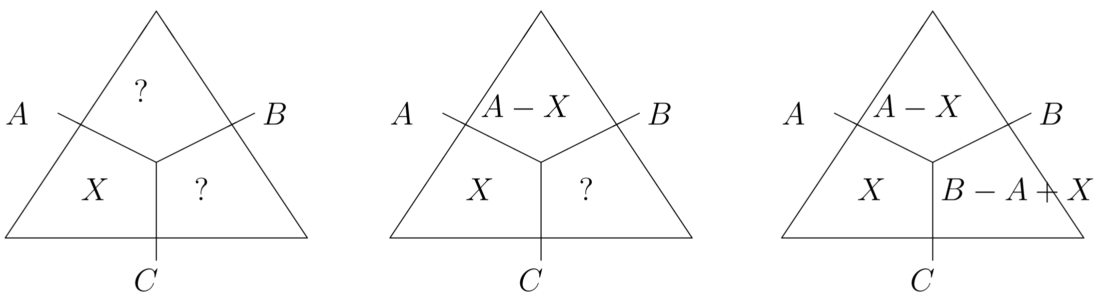


Die Bedingung ist $A + B = C$

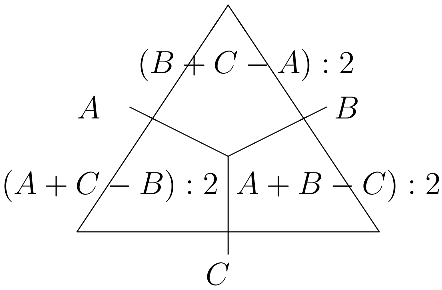
- Im direkten Verfahren sucht man in jedem Schritt nach einer Masche mit 2 Zahlen und ergänzt die dritte als Summe $C = A+B$ beziehungsweise als Differenz $B = C-A$ oder $A = C-B$.

Ein Dreieck mit 3 Zahlen, die nicht alle zu einer Masche gehören, hat eine eindeutige Lösung. Diese erhält man mit dem direkten Verfahren, ausgenommen Dreiecke vom Typ des Beispiels 7. Diese lassen sich mit dem indirekten Verfahren lösen.

3.6. **Indirektes Verfahren.** Dreicecke wie in Beispiel 7 lassen sich nicht mit dem direkten Verfahren lösen. Statt stupidem Probieren benutzt man das indirekte Verfahren



$$C = 2X + B - A,\ 2X = A + C - B$$
$$\boxed{X = (A + C - B) : 2}$$



3.7. **Schlussbemerkung.** Wir nehmen an, dass das Dfreieck nur solche vollen Maschen enthält, die die Grundbedingung erfüllen – andernfalls ist es unlösbar. Zu einer vollen Masche, die die Grundbedingung erfüllt, erhält man durch Weglassen einer Zahl ein Dreieck, mit genau denselben Lösungen. Wir nehmen daher an, dass das Dreieck keine vollen Maschen enthält.

Dreiecke mit 0,1 oder 2 Zahlen haben unendlich viele Lösungen. Hat man 4 oder mehr Zahlen, so kann man immer 3 auswählen, zu denen es nach dem vorangehenden Abscnnitt eine eindeutige Lösung gibt; stimmt diese nicht mit den gegebenen Zahlen überein, so gibt es keine Lösung.

4. Höhere Mauern

Wir geben einige Hinweise zur Lösung.

4.1. ***X*-Terme.** Ein X-Term ist ein Ausdruck von der Form $A \cdot X + B$, wobei A und B Zahlen sind. Man darf mit X so rechnen, also ob es eine Zahl wäre; aber man darf nicht durch X teilen! Insbesondere gilt

$$A{\cdot}X{+}B{+}C{\cdot}X{+}D = (A{+}C){\cdot}X{+}B{+}D; \quad 0{\cdot}X = X, \quad A{\cdot}X{+}0 = A{\cdot}X$$

Eine X-Term-Masche ist eine Masche, mit X-Termen als Einträgen; sie ist *voll*, wenn alle 3 Kästchen einen Eintrag haben; *offen*, wenn es genau 2 sind. Die *Gleichung* zu einer vollen X-Term-Masche

$$\begin{array}{ccc} & E \cdot X + F & \\ A \cdot X + B & & C \cdot X + D \end{array}$$

ist

$$E \cdot X + F = A \cdot X + B + C \cdot X + D$$

umgeformt zum Beispiel

$$(A + B - E) \cdot X = F - B - D$$

4.2. **Indirektes Vorgehen.** Zu den Schritten des direkten Vorgehens kommen die folgenden hinzu:

(2) Wähle eine Zahl-Masche mit genau einem Eintrag, und schreibe X in eines der leeren Kästchen dieser Masche.
(3) Suche nach einer offenen X-Term-Masche und trage die Ergänzung in die Masche ein.
(4) Suche eine volle X-Term-Masche, die keine Zahl-Masche ist, und stelle die Gleichung auf.
  - Wenn die Gleichung genau einen Wert für X erlaubt, so benutze diesen Wert um alle X-Terme durch Zahlen zu ersetzen. Überprüfe die Grundbedingung für alle dabei neu entstehenden vollen Zahl-Maschen.
    - Sind alle diese Grundbedingungen erfüllt, so fahre fort.
    - Ist eine der Grundbedingungen verletzt, so ist die Aufgabe unlösbar
  - Wenn die Gleichnung keinen (zulässigen) Wert für X erlaubt, so ist die Aufgabe unlösbar.
  - Wenn die Gleichung mehrere Werte für X erlaubt, so fahre fort
(5) Lösche alle X-Terme.
- Erhält man eine vollständig mit (zulässigen) Zahlen ausgefüllte Mauer, so ist das die (eindeutig bestimmte) Lösung.

- Das Verfahren führt zu keinem Ergebnis, falls es noch leere Kästchen gibt, aber keiner der Schritte (1) bis (5) ausführbar ist – vorausgesetzt Schritt (2) und (5) sind so geändert
  (2’) Schritt (2) wird nur ausgeführt, wenn kein Schritt (1) möglich ist. Bei jeder Ausführung von Schritt (2) wird die benutzte Masche markiert. Schritt (2) wird nur auf unmarkierte Maschen angewendet.
  (5’) Schritt (5) wird nur ausgeführt, wenn keiner der Schritte (3) und (4) möglich ist

4.3. **Beispiel 8.**

$$\begin{array}{c} 20 \\ ? \quad ? \\ ? \quad ? \quad ? \\ 1 \quad 2 \quad ? \quad 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 20 \\ ? \quad ? \\ 3 \quad ? \quad ? \\ 1 \quad 2 \quad ? \quad 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 20 \\ ? \quad ? \\ 3 \quad X+2 \quad ? \\ 1 \quad 2 \quad X \quad 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 20 \\ X+5 \quad ? \\ 3 \quad X+2 \quad X+4 \\ 1 \quad 2 \quad X \quad 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 20 \\ X+5 \quad 2X+6 \\ 3 \quad X+2 \quad X+4 \\ 1 \quad 2 \quad X \quad 4 \end{array}$$

$$20 = X + 5 + 2X + 6 = 3X + 11,\ 3X = 9,\ X = 3$$

$$\begin{array}{c} 20 \\ 8 \quad 12 \\ 3 \quad 5 \quad 7 \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array}$$

4.4. **Beispiel 9.**

$$\begin{array}{c} ? \\ ? \quad ? \\ 48 \quad ? \quad 48 \\ ? \quad ? \quad ? \quad ? \\ 11 \quad ? \quad 13 \quad ? \quad 11 \end{array} \qquad \begin{array}{c} ? \\ ? \quad ? \\ 48 \quad ? \quad 48 \\ X+11 \quad ? \quad ? \quad ? \\ 11 \quad * \quad X \quad 13 \quad ? \quad 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} ? \\ ? \quad ? \\ 48 \quad ? \quad 48 \\ X+11 \quad ? \quad ? \quad ? \\ 11 \quad * \quad X \quad 13 \quad ? \quad 11 \end{array} \qquad \begin{array}{c} ? \\ ? \quad ? \\ 48 \quad ? \quad 48 \\ X+11 \quad X+13 \quad ? \quad ? \\ 11 \quad * \quad X \quad * \quad 13 \quad ? \quad 11 \end{array}$$

$$48 = X + 11 + X + 13 = 2X + 24,\ 2X = 24,\ X = 12$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & ? & & & & \\
 & & & ? & & ? & & & \\
 & & 48 & & ? & & 48 & & \\
 & 23 & & 25 & & ? & & ? & \\
11 & * & 12 & * & 13 & & ? & & 11
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & ? & & & & \\
 & & & ? & & ? & & & \\
 & & 48 & & ? & & 48 & & \\
 & 23 & & 25 & & ? & & ? & \\
11 & * & 12 & * & 13 & & X & * & 11
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & ? & & & & \\
 & & & ? & & ? & & & \\
 & & 48 & & ? & & 48 & & \\
 & 23 & & 25 & & X+13 & & X+11 & \\
11 & * & 12 & * & 13 & * & X & * & 11
\end{array}
$$

$$48 = X + 11 + X + 13 = 2X + 24,\ 2X = 24,\ X = 12$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & ? & & & & \\
 & & & ? & & ? & & & \\
 & & 48 & & r & & 48 & & \\
 & 23 & & 25 & & 25 & & 23 & \\
11 & * & 12 & * & 13 & * & 12 & * & 11
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 196 & & & & \\
 & & & 98 & & 98 & & & \\
 & & 48 & & 50 & & 48 & & \\
 & 23 & & 25 & & 25 & & 23 & \\
11 & * & 12 & * & 13 & * & 12 & * & 11
\end{array}
$$

4.5. **Mauern der Höhe 4.** Eine (leere) Mauer der Höhe 4

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & ? & & & \\
 & & ? & & ? & & \\
 & ? & & ? & & ? & \\
? & & ? & & ? & & ?
\end{array}
$$

enthält 3 Teilmauern der Höhe 3, markiert durch $*$:

$$
\text{links}\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & ? & & & \\
 & & * & & ? & & \\
 & * & & * & & ? & \\
* & & * & & * & & ?
\end{array}
$$

$$
\text{rechts}\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & ? & & & \\
 & & ? & & * & & \\
 & ? & & * & & * & \\
? & & * & & * & & *
\end{array}
$$

$$
\text{oben}\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & * & & & \\
 & & * & & * & & \\
 & * & & * & & * & \\
? & & ? & & ? & & ?
\end{array}
$$

- Eine Teilmauer der Höhe 3 enthält eine Masche ganz oder genau eines ihrer Kästchen.
- Zwei verschieden Maschen haben ein oder kein Kästchen gemeinsam, jenachdem ob sie in einer Teilmauer von Höhe 3 liegen oder nicht.

Wir untersuchen Mauern der Höhe 4 für die gilt

- 4 Einträge a, b, c, d sind vorgegeben
- Es gibt keine volle Zahl-Masche geben, das heisst keine volle Teil-Mauer der Höhe 2.
- Keine der 3 Teilmauern der Höhe 3 enthält schon alle 4 Einträge

Für solche Mauern benutzen wir folgendes Vorgehen

(a) Gibt es 2 offene Zahl-Maschen, die kein Kästchen gemeinsam haben, so führt das direkte Verfahren zu der (eindeutig bestimmten) Lösung

(b) Es gebe eine Teilmauer der Höhe 3, in der 3 Zahlen stehen.
   - Für diese Teilmauer hat man eine eindeutig bestimmte Lösung mit dem direkten oder dem indirekten Verfahren.
   - Die Lösung für die gesamte Mauer ergibt sich dann daraus durch das direkte Verfahren.

(c) Gibt es genau eine offene Zahl-Masche und eine Teilmauer der Höhe 3, die von dieser Masche nur das leere Kästchen enthält, und die 2 Zahlen enthält, so schreibe die Ergänzung in das leere Kästchen und mache wie in (b) weiter.

- Andernfalls haben alle Teilmauern der Höhe 3 höchstens 2 Zahlen.
  - Es gibt eine Teilmauer der Höhe 3 mit genau 2 Zahlen
  - Wähle ein davon.
  - Diese Teilmauer hat (mindestens) eine Masche (Teilmauer der Höhe 2) mit genau einer Zahl.
  - Wähle eine solche Masche und trage in eines der leeren Kästchen X ein.
  - Mache nun mit Schritt (3) und (4) aus Abschnitt 4.2 weiter
- Man erhält so die (eindeutig bestimmte) Lösung, ausgenommen für Mauern wir in Beispiel 10.
- In Beispiel 10 gibt es
  - keine Lösung falls $D \neq 3A + B + C$
  - unendlich viele Lösungen, falls $D = 3A + B + C$. Diese erhält man, indem man in eines der leeren Kästchen eine beliebige Zahl schreibt und dann das direkte Verfahren anwendet.

4.6. **Beispiel 10.**

$$\begin{array}{ccccccc} & & & D & & & \\ & & ? & & ? & & \\ & ? & & A & & ? & \\ B & & ? & & ? & & C \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & D & & & \\
 & & X+A+B & & ? & & \\
 & X+B & & A & & ? & \\
B & & X & & A-X & & C
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & D & & & \\
 & & X+A+B & & 2A+C-X & & \\
 & X+B & & A & & A+C-X & \\
B & & X & & A-X & & C
\end{array}$$

In einer korrekten Mauer muss $D = 3A + B + C$ gelten. Dann kann man für X eine beliebige Zahl einsetzen.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 100 & & & \\
 & & ? & & ? & & \\
 & ? & & 30 & & ? & \\
4 & & ? & & ? & & 5
\end{array} \qquad \text{unlösbar}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 99 & & & \\
 & & ? & & ? & & \\
 & ? & & 30 & & ? & \\
4 & & ? & & ? & & 5
\end{array} \qquad \text{hat Lösungen}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 99 & & & \\
 & & 34 & & 65 & & \\
 & 4 & & 30 & & 35 & \\
4 & & 0 & & 30 & & 5
\end{array} \quad \cdots \quad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 99 & & & \\
 & & 64 & & 35 & & \\
 & 34 & & 30 & & 5 & \\
4 & & 30 & & 0 & & 5
\end{array}$$

4.7. **Weitere Beispiele.** Wir geben bis auf Spiegelung alle Beispiele an, die nicht zu (a), (b), (c) oder Beispiel 10 gehören. Die vierte Zeile muss 3 oder 2 Einträge haben. Wir notieren die möglichen Fälle und dann die Möglichkeiten für die anderen Zeilen. Die Masche, die die Gleichung für X ergibt, ist mit $*$ markiert.

$$\begin{array}{ccccccc} &&&D&&& \\ &&?&&?&& \\ &?&&?&&?& \\ A&&B&&?&&C \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} &&&D&&& \\ &&X+A+B&*&2X+B+C&& \\ &A+B&&X+B&&X+C& \\ A&&B&&X&&C \end{array}$$

$$X = (A + 2B + C - D) : 3$$

$$\begin{array}{ccccccc} &&&D&&& \\ &&?&&?&& \\ &?&&?&&C& \\ A&&B&&?&&? \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} &&&D&&& \\ &&X+A+2B&*&X+B+C&& \\ &A+B&&X+B&&C& \\ A&&B&&X&&C-X \end{array}$$

$$X = (D - A - 3B - C) : 2$$

$$\begin{array}{ccccccc} &&&D&&& \\ &&?&&?&& \\ &?&&?&&C& \\ A&&?&&B&&? \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} &&&D&&& \\ &&2X+A+B&*&X+B+C&& \\ &X+A&&X+B&&C& \\ A&&X&&B&&C-B \end{array}$$

$$X = (D - A - 2B - C) : 3$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & D & & & \\
 & & ? & & ? & & \\
 & C & & ? & & ? & \\
A & & ? & & ? & & B
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & D & & & \\
 & & X+2C-A & * & 2X+B+C-A & & \\
 & C & & X+C-A & & X+B & \\
A & & C-A & & X & & B
\end{array}$$

$$X = (2A + D - B - 3C) : 3$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & ? & & & \\
 & & C & & D & & \\
 & ? & & ? & & ? & \\
A & & ? & & ? & & B
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & C+D & & & \\
 & & C & & D & & \\
 & X+A & & C-A-X & * & B+C-A-X & \\
A & & X & & C-A-2X & & B
\end{array}$$

$$X = (B + 2C - 2A - D) : 2$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & D & & & \\
 & & C & & ? & & \\
 & ? & & ? & & ? & \\
A & & ? & & ? & & B
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & D & & & \\
 & & C & & D-C & & \\
 & X+A & & C-A-X & * & B+C-A-2X & \\
A & & X & & C-A-2X & & B
\end{array}$$

$$X = (B + 3C - 2A - D) : 3$$

5. Ein bisschen Theorie

5.1. **Das Mauer-Gleichungssystem.** Wir betrachten eine leere Mauer und setzen für jedes eine Variable, z.B. so

$$\begin{array}{ccccccc} & & & x_{10} & & & \\ & & x_6 & & x_9 & & \\ & x_3 & & x_5 & & x_8 & \\ x_1 & & x_2 & & x_4 & & x_7 \end{array}$$

Die Mauerbedingungen ergeben das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccccccl} x_1+ & x_2- & x_3 & & & & & & & & = 0 \\ & x_2+ & & x_4- & x_5 & & & & & & = 0 \\ & & x_3+ & & x_5- & x_6 & & & & & = 0 \\ & & & x_4+ & & & x_7- & x_8 & & & = 0 \\ & & & & x_5+ & & & x_8- & x_9 & & = 0 \\ & & & & & x_6+ & & & x_9- & x_{10} & = 0 \end{array}$$

Allgemein gilt:

(1) Zu eine Mauer der Höhe n hat man $1 + \ldots + n = (n(n+1) : 2$ Variable, und $1+\ldots+n-1 = n(n-1) : 2$ unabhängige lineare homogene Gleichungen.
(2) Somit bilden die korrekten Mauern der Höhe n mit rationalen Einträgen einen n-dimensionalen Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{n(n*1):2}$.
(3) Insbesondere findet man n Kästchen so, dass zu allen rationalen Einträgen in diese Kästchen eindeutig bestimmte rationale Lösungen existieren.
(4) Diese System von Kästchen bzw. der zugehörigen Variablen, sind gerade die Systeme *freier Parameter* des Gleichungssystems.
(5) Ein System freier Parameter besteht immer aus n Variablen.
(6) Die n-letzten Variablen $x_{n(n-1):2+1}, \ldots, x_{n(n+1):2}$ bilden ein System freier Parameter.
(7) Die Variablen der untersten Zeile bilden ein System freier Parameter
(8) Ist ein System freier Parameter gegeben, so bildet eine weitere Auswahl von n Variablen ein System freier Parameter genau dann, wenn sich die Variablen des gegebenen Systems mithilfe der Gleichungen als Linearkombinationen der ausgewählten Variablen darstellen lassen.
(9) Ein System von n Variablen ist kein System freier Parameter genau dann, wenn sich 0 mithilfe der Gleichungen als Linearkombination der Variablen des Systems darstellen lässt.

Die letzten beiden Punkte sind zu präzisieren: Man betrachtet den Vektorraum mit folgender Präsentierung: Die Variablen sind die Erzeuger und die Gleichungen die Relationen. (D.h. man betrachtet erst einen Vektorraum, der die Menge der Variablen als Basis hat und faktorisiert dann nach dem von den linken Seiten des Gleichungssystems erzeugten Untervektorraum. Weniger formal: man identifiziert 2 Elemente des Vektorraums, wenn man die Gleichheit aus dem Gleichungssystem herleiten kann.) Eine Auswahl von n Variablen ist ein System freier Parameter genau dann, wenn es eine Basis dieses Raums ist. In (8) its Das gegebene System also eine Basis dieses Raums. Man zeigt, dass das neue System von n Variablen ein Erzeugendensystem ist, also ebenfalls eine Basis.

5.2. **Problem.** Zahlenmauern sind in einer graphischen Form gegeben. Wie kann man Systeme freier Parameter in einer entsprechenden Form charakterisieren?

Eine notwendige Bedingung ist offenbar: Hat man eine Auswahl von n Kästchen in einer Mauer der Höhe n, die ein System feier Parameter bilden, so darf für $m = 2, \dots n-1$ keine Teilmauer der Höhe m mehr als m dieser Kästchen dieser Auswahl enthalten.

Das ist hinreichend für $n = 2, 3$ aber nicht für $n = 4$ wie Beispiel 10 zeigt.

5.3. **Nochmal Beispiel 10.** Die X-Terme in Bespiel 10 kann man auch so bestimmen, dass ein *Umlauf* entsteht:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & D & & & \\
 & & X+A+B & & D-A-B-X & & \\
 & X+B & & A & & D-2A-B-X & \\
B & & X & * & D-2A-B-C-X & & C
\end{array}$$

$$X = 3A+B+C-D+X$$

Wir beschreiben das nun allgemeiner: Ist eine Mauer mit einigen Buchstabeneinträgen $A, B, \dots$ gegeben, so betrachten wir die leeren Kästchen als die Knoten eines ungerichteten Graphen. Zwei Knoten v_1, v_2 sind durch eine Kante verbunden, wenn v_1 und v_2 die leeren Kästchen einer Masche sind, deren drittes Kästchen einen Buchstaben enthält. Die Kante wird *markiert*, wenn die beiden leeren Kästchen nebeneinander liegen.

In Beispiel 10 sieht das so aus (die Richtung der Pfeile ist nicht wichtig)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & D & & & \\
 & & ? & \Rightarrow & ? & & \\
 & \nearrow & & & & \searrow & \\
 & ? & & A & & ? & \\
 & \nwarrow & & & & \swarrow & \\
B & & ? & \Leftarrow & ? & & C
\end{array}$$

Ein *Umlauf* besteht nun aus paarweise verschieden Knoten $v_1, \ldots, v_k$ so, dass v_i und v_{i+1} durch eine Kante verbunden sind ($i = 1, 2, \ldots, k-1$ und ebenso v_k mit v_1.

- Gibt es einen Umlauf mit einer geraden Zahl markierter Kanten, so gehören die Kästchen mit den Buchstaben-Einträgen nicht zu einem System freier Parameter.

Dazu überlegt man sich: Man trägt in einen Knoten des Umlaufs ein X ein und bestimmt dan die X-Terme für die anderen Knoten des Umlaufs, indem man diesen in einer Richtung durchläuft. Dabei erhält man für jeden Knoten einen Ausdruck *Zahl*$+X$ oder *Zahl*$-X$ wobei *Zahl* für eine ganzzahlige Linearkombination der Buchstabeneinträge $A, B, \ldots$ steht (also eine Zahl, wenn man die Buchstaben $A, B, \ldots$ durch Zahlen ersetzt). Geht man von eine Knoten zum nächsten in dem Umlauf, so kann sich *Zahl* ändern; aber

- Ist die Kante unmarkiert, so bleibt das Vorzeichen von X erhalten
- Ist die Kante markiert, so ändert sich Vorzeichen von X

Hat man also einen Umlauf mit einer geraden Anzahl markierter Kanten, so bekommt man für das Kästchen, in das man X eingetragen hat, auch einen Ausdruck *Zahl*$+X$. Gehörten die Variablen zu den Kästchen der $A, B, \ldots$ zu einem System freier Parameter so müsste es zu jeder Ersetzung durch Zahlen einen Wert von X geben, so dass

$$X = \mathit{Zahl} + X, \quad \text{also } 0 = \mathit{Zahl}$$

erfüllt wird. Dann sind aber diese Variablen linear abhängig. Widerspruch.