UNTERRICHTSENTWICKLUNG

Rechenstörungen als schulische Herausforderung

Handreichung zur Förderung von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnen

Bildungsregion Berlin-Brandenburg

LISUM
Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg

Impressum

Herausgeber:

Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg (LISUM)

14974 Ludwigsfelde-Struveshof

Tel.: 03378 209-200
Fax: 03378 209-232

Internet: www.lisum.berlin-brandenburg.de

Autorinnen und Autoren: Gudrun Klewitz, Dr. Angelika Köhnke, Prof. Dr. Wilhelm Schipper

Redaktionsleitung: Prof. Dr. Wilhelm Schipper

Projektleitung: Bernd Jankofsky

Grafik Titelblatt: Jacky Gleich

Grafiken: Prof. Dr. Wilhelm Schipper

Layout: Christa Penserot

Druck und Herstellung: G & S Druck und Medien GmbH, Potsdam

ISBN: 978-3-940987-35-8

Inhaltsverzeichnis

„Kannst du addieren?“, fragte die Königin. „Wie viel ist eins und eins und eins und eins und eins und eins und eins und eins und eins und eins?“ „Keine Ahnung“, sagte Alice. „Ich hab´ den Faden verloren.“

Lewis Carroll: Hinter den Spiegeln

Vorwort

Seit etwa zehn Jahren rückt das Problem der Rechenstörungen immer stärker in den Blickpunkt von Forschung, Schule und Öffentlichkeit. Inzwischen ist allen Beteiligten bewusst, dass es nicht nur Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Erlernen des Lesens und Rechtschreibens gibt, sondern auch Schülerinnen und Schüler, die besondere Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens haben.

Auf diese Problematik werden Lehrerinnen und Lehrer in aller Regel weder in ihrer ersten oder zweiten Lehrerausbildungsphase noch durch Fort- oder Weiterbildungen vorbereitet. Berlin hat sich deshalb entschieden, seinen Lehrkräften durch eine Ausführungsvorschrift zur Förderung bei besonderen Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens Handlungssicherheit im Umgang mit betroffenen Kindern zu geben. Zugleich sollen die Lehrkräfte mit der vorliegenden Handreichung dabei unterstützt werden, diese Kinder zu diagnostizieren und wirksam zu fördern.

Diese Handreichung versteht Rechenstörungen als eine ureigene Aufgabe von Schule. Der Titel „Rechenstörungen als schulische Herausforderung“ ist zugleich Programm. Kinder werden im Mathematikunterricht auffällig, und genau dort soll ihnen auch adäquate Hilfe zukommen. Das gilt nicht nur für einen guten präventiven Mathematikunterricht, sondern auch und vorrangig für intervenierende Maßnahmen für Kinder, die bereits auffällig geworden sind. Über beides sowie über diagnostische Möglichkeiten informiert diese Handreichung.

Das Kapitel 1 präzisiert zunächst, was unter den Begriffen *Rechenschwäche*, *Rechenstörung*, *Dyskalkulie* zu verstehen ist, diskutiert die Frage möglicher Ursachen und Risikofaktoren und stellt die Symptome für Rechenstörungen vor, auf die im schulischen Unterricht besonders geachtet werden muss.

Im Kapitel 2 werden Kompetenzerwartungen und präventive sowie diagnostische Möglichkeiten im Mathematikunterricht der beiden ersten, Weichen stellenden Schuljahre vorgestellt. Denn wenn wir die mathematischen Lernprozesse der Kinder nicht nur sensibel beobachten, sondern auch fördern und in die richtige Richtung steuern wollen, dann müssen wir die Ziele kennen.

Das Kapitel 3 schließlich stellt diagnostische Möglichkeiten für die Feststellung eines besonderen Förderbedarfs in Mathematik im Sinne der Ausführungsvorschrift für Kinder ab Mitte des zweiten Schuljahres vor. Der Anhang enthält die dafür notwendigen schriftlichen Unterlagen als Kopiervorlagen.

Ich wünsche allen Lehrkräften eine gewinnbringende Lektüre und Erfolg bei der Umsetzung der Anregungen.

Mascha Kleinschmidt-Bräutigam

Leiterin der Abteilung Unterrichtsentwicklung

1 Begrifflichkeit, Symptome und Ursachen

1.1 Das Definitionsproblem

Zur Kennzeichnung besonderer Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens werden vor allem drei Begriffe verwendet, nämlich Rechenschwäche, Rechenstörung und Dyskalkulie. In den Medien werden sie häufig synonym gebraucht. In verschiedenen Wissenschaftsdisziplinen sind jedoch durchaus unterschiedliche Präferenzen erkennbar. So werden die Begriffe Dyskalkulie und (seltener) Arithmasthenie vor allem von Vertretern kommerzieller „Dyskalkulie-Institute" und von Medizinern, teilweise auch von Sonderpädagogen und Psychologen benutzt. „Rechenschwäche" und „Rechenstörung" sind eher im Kontext von Schule und Mathematikdidaktik gebräuchlich. Mit dieser unterschiedlichen Verwendung ist nicht selten ein Zuständigkeits- und Kompetenzanspruch verbunden. Die Begriffe Dyskalkulie und Arithmasthenie suggerieren das Vorhandensein einer Krankheit („Erna *leidet* an Dyskalkulie.") und sollen dokumentieren, dass betroffene Kinder Hilfe nur bei Medizinern, Psychologen oder außerschulischen Lerntherapeuten erhalten können. Mit den Begriffen Rechenschwäche und Rechenstörung sollen dagegen besondere Schwierigkeiten im schulischen Inhaltsbereich Rechnen charakterisiert werden. Verbunden ist damit die Grundüberzeugung, dass den betroffenen Kindern vor allem in der Schule selbst geholfen werden muss und kann. Rechenstörungen sind *schulische Herausforderungen*, die in der Mehrzahl der Fälle mit einem guten, präventiven Mathematikunterricht sowie mit geeigneten Fördermaßnahmen bewältigt werden können.

Die unterschiedliche Verwendung der Begriffe korrespondiert mit unterschiedlichen Typen von Definitionsversuchen. „Dyskalkulie" wird in aller Regel als „erwartungswidrig" schlechte Leistung im Rechnen definiert. Im Sinne dieser *Diskrepanzdefinition* liegt eine Dyskalkulie nur dann vor, wenn die Schwierigkeiten beim Rechnen einseitig sind, d. h. die Leistungen in anderen Fächern bzw. die allgemeine Intelligenz nicht beeinträchtigt sind. Das bedeutet auch, dass bei einem Kind mit einer allgemeinen Lernbehinderung, das auch erhebliche Probleme in Mathematik hat, im Sinne dieser Definition keine „Dyskalkulie" vorliegen kann und entsprechend auch kein Anspruch auf außerschulische Förderung im Sinne des § 35a des Sozialgesetzbuches VIII (SGB VIII) besteht.

Für Schule ist dieser Ansatz nicht akzeptabel. In einem Leistungskontinuum, wie es z. B. die Intelligenz darstellt, wird eine mehr oder weniger willkürliche Grenze (in der Regel bei einem IQ von 85) gezogen. Kinder, die diese Klippe nicht bewältigen, werden von (außerschulischen) Fördermaßnahmen ausgeschlossen. Das ist mit dem pädagogischen Grundsatz, dass *alle* Kinder ein Recht auf Förderung haben (selbstverständlich auch die leistungsstarken), nicht vereinbar.

Für Lehrerinnen und Lehrer sind *phänomenologische Definitionsversuche* weitaus brauchbarer. Bei diesem Ansatz werden Art, Häufigkeit und Dauerhaftigkeit von Fehlleistungen bei der Bewältigung von mathematischen Aufgabenstellungen als Kriterien für die Definition herangezogen. Diese Art der Definition ist jedoch auch nicht ganz unproblematisch, denn sie setzt voraus, dass es möglich sei, zwischen „normalen", zu jedem Lernprozess dazugehörenden Fehlern, und besonders auffälligen Fehlern eine Grenze zu ziehen. Eine solche exakte Grenzziehung ist nicht möglich. Die Fehler der in Mathematik besonders leistungsschwachen Kinder unterscheiden sich *in ihrer Art* nicht von denjenigen, die auch mathematisch leistungsstärkere Kinder machen, wenn sie sich einen neuen Inhaltsbereich aneignen. Der Unterschied besteht darin, dass die leistungsstärkeren Kinder weniger Fehler machen und – vor allem – aus ihnen lernen, sie schließlich überwinden können, während diejenigen Kinder, die in Mathematik besonders auffällig sind, sehr häufig Fehler machen, über ein „großes Repertoire“ unterschiedlicher Fehlerstrategien verfügen und diese über Jahre verfestigen.

1.2 Symptome für Rechenstörungen

Kinder mit Rechenstörungen fallen vor allem durch ihre verfestigten Fehlerstrategien und damit verbundenen Formen der Bearbeitung von mathematischen Aufgaben auf. Sie zeigen typische Muster in der Art der Interaktion mit mathematischen Problemstellungen. Diese Auffälligkeiten werden als *Symptome* für Rechenstörungen bezeichnet. Der Begriff „Symptom“ wird *nicht* zur Kennzeichnung einzelner Fehler verwendet, z. B. für einen bei leistungsschwachen Kindern häufig vorkommenden Fehler *um minus eins* bei Additionsaufgaben (7 + 5 = 11). Er kennzeichnet vielmehr eine Auffälligkeit, die eine ganze Klasse von Fehlern erklären kann. So ist der o. g. Fehler um minus eins bei der Addition ein typischer Fehler, der beim zählenden Rechnen auftreten kann. Entsprechend wird dieser Fehler durch das Symptom „verfestigtes zählendes Rechnen“ erklärt.

In diesem Sinne sind bei Kindern mit Rechenstörungen vier Symptome zu identifizieren, von denen die beiden ersten als Hauptsymptome anzusehen sind.

(1) Verfestigtes zählendes Rechnen

Nahezu jedes Kind, das in Mathematik als besonders leistungsschwach auffällt, ist auch noch im zweiten Schuljahr und den Folgejahren ein zählender Rechner. Verfestigtes zählendes Rechnen ist das Hauptsymptom für Rechenstörungen.

Zu Schulbeginn und im Laufe des ersten Schuljahres bis hin zum Zeitpunkt der Einführung in das Thema Zehnerübergang ist zählendes Rechnen ein völlig erwartungskonformes Verfahren. Rechengeschichten („Du hast drei Äpfel und bekommst noch vier dazu. Wie viele hast du dann?“) und erste kontextfreie Rechenaufgaben (7 – 3 = □) können mit der Methode des *Alleszählens* oder der des *Weiterzählens* mit oder ohne Materialunterstützung gelöst werden. Beim Alleszählen mit Material werden bei der o. g. Rechengeschichte z. B. zunächst drei Plättchen gelegt (oder drei Finger einer Hand ausgestreckt), dann weitere vier Plättchen (bzw. vier Finger an der anderen Hand). Dann wird ausgezählt, wie viele es insgesamt sind. Diese Methode wird im Zahlenraum bis 10 von etwa 90% aller Schulanfängerinnen und Schulanfänger beherrscht. Im Laufe des ersten Schuljahres soll sie weiterentwickelt werden zum Verfahren des Weiterzählens: (3), 4, 5, 6, ***7***. Außerdem sollen die Kinder lernen, auch kontextfreie Aufgaben zu lösen. Für die o. g. Aufgabe zur Subtraktion besteht die Methode des Alleszählens darin, dass zunächst die Zahl 7 (mit Plättchen oder Fingern) dargestellt wird, dann drei entfernt werden und ausgezählt wird, wie viele übrig bleiben. Das Weiterzählen bei dieser Aufgabe besteht aus einem Rückwärtszählen von sieben an um drei Zählschritte, meistens begleitet von einem sukzessiven Aufzeigen von Fingern, bis der dritte Finger gezeigt ist: (7), 6, 5, ***4***.

Diese zählenden Verfahren sollen bei der Behandlung des Themas Zehnerübergang durch operative bzw. heuristische Verfahren ersetzt werden. Die Kinder sollen einerseits lernen, eine Aufgabe wie 6 + 8 mit Hilfe des Verdoppelns zu lösen (6 + 8 = 6 + 6 + 2), andererseits mit dem schrittweisen Rechnen (6 + 8 = 6 + 4 + 4). Ein drittes operatives Verfahren ist das gegensinnige Verändern ($6 + 8 = 7 + 7$), das aber bei weitem nicht von allen Kindern erwartet werden kann.

Wenn den Kindern das Ersetzen des zählenden Rechnens durch diese operativen Strategien nicht spätestens bei der Wiederholung des Zehnerübergangs in den ersten Wochen des zweiten Schuljahres gelingt, sind sie in Gefahr, eine Rechenstörung zu entwickeln. Werden im Laufe des zweiten Schuljahres auch noch Aufgaben wie $38 + 7$ oder $61 - 6$ zählend gelöst, dann ist das ein Alarmsignal. Solche Kinder benötigen dringend eine besondere Förderung im Sinne der Ausführungsvorschriften zu Förderung bei besonderen Schwierigkeiten im Rechen (AV Rechenstörungen).

Kindern, denen die Ablösung vom zählenden Rechnen nicht gelingt, scheitern in der Regel deshalb, weil ihnen die für die Entwicklung operativer Strategien notwendigen Voraussetzungen fehlen. Um das Verdoppeln (bzw. Halbieren bei Subtraktionsaufgaben) nutzen zu können, müssen die Kinder alle Verdoppelungs- und Halbierungsaufgaben im Zahlenraum bis 20 auswendig wissen. Wenn dieses Wissen fehlt, dann *müssen* die Kinder auf zählendes Rechnen zurückgreifen. Für das schrittweise Rechnen ist entsprechend das Auswendigwissen der Zerlegungen aller Zahlen bis einschließlich 10 notwendig. Im Sinne eines präventiven Mathematikunterrichts sind daher Übungen zum Halbieren und Verdoppeln sowie zu Zahlzerlegungen unverzichtbarer Bestandteil der täglichen Kopfrechenübungen.

Kinder, denen die Ablösung vom zählenden Rechnen zu Beginn des zweiten Schuljahres nicht gelingt, entwickeln verschiedene *Folgeprobleme*:

– Ihr Vorrat an auswendig gewussten Aufgaben bleibt gering.

– Arbeitsmittel werden bloß als Zählhilfen verwendet.

– Die Struktur der Arbeitsmittel bleibt unverstanden.

– Das Zahlenrechnen wird durch ein Ziffernrechnen ersetzt. So wird z. B. $34 + 52$ dadurch gelöst, dass $3 + 5$ gerechnet und die Lösung 8 notiert wird, dann die 6 von $4 + 2$ dahinter geschrieben wird: $34 + 52 = 86$. Auf die gleiche Weise kommen Kinder aber bei $28 + 36$ zur Lösung 514, konsequent und regelhaft, aber leider falsch.

– Fehlendes Verständnis wird durch regelhaftes Vorgehen ersetzt.

– Das Stellenwertverständnis entwickelt sich nicht oder nur unzureichend. Dies ist eine Folge sowohl des fehlenden Strukturverständnisses der Arbeitsmittel als auch des ziffernweisen Rechnens.

(2) Probleme bei der Rechts-/Links-Unterscheidung

Ein zweites Symptom für Rechenstörungen sind Unsicherheiten bei der Raumlagewahrnehmung, vor allem bei der Rechts-/Links-Unterscheidung an sich selbst und – erst recht – am Gegenüber. Die Fähigkeit zur sicheren Unterscheidung von links und rechts ist eine wichtige Voraussetzung für ein erfolgreiches Mathematiklernen. Denn alle Arbeitsmittel und Veranschaulichungen im Mathematikunterricht der Grundschule operieren mit Richtung, nicht nur der Zahlenstrahl. So korrespondiert das Addieren eindeutig mit einer Bewegung nach rechts und ggf. nach unten auf der Hunderter-Tafel, aber mit einem Schieben von Perlen von rechts nach links am Rechenrahmen usw. Das Verständnis dieser Materialien und ihre richtige Nutzung setzen voraus, dass die Kinder sicher links und rechts unterscheiden können. Im Sinne einer Prävention von Rechenstörungen sollte diese Fähigkeit möglichst schon in vorschulischen Einrichtungen entwickelt und zu Schulbeginn gesichert werden.

Häufige Begleitphänomene einer Rechts-/ Links-Problematik sind die folgenden:

- Die Ziffern (vor allem 3, 5, 6, 7 und 9) werden spiegelverkehrt geschrieben.
- Es kommt häufiger zu Rechenrichtungsfehlern, d. h. zu einer Verwechselung von Addition und Subtraktion (7 – 2 = 9).
- Zwei- und mehrstellige Zahlen werden invers geschrieben, also so, wie man sie spricht. Bei der Zahl 23 beispielsweise wird zunächst die Ziffer 3 notiert, dann die 2 davor gesetzt.
- Gerade diejenigen Kinder, die von ihren Eltern den falschen Tipp bekommen haben, Zahlen so zu schreiben, wie man sie spricht, produzieren häufig Zahlendreher, d. h. sie schreiben z. B. 32 statt 23.
- Die Unsicherheiten bei der Zahlenschreibweise beeinträchtigen die Entwicklung eines gesicherten Stellenwertverständnisses.

(3) Intermodalitätsprobleme

Wissen lässt sich bekanntlich in drei verschiedenen Formen (Modi) darstellen, nämlich (a) enaktiv (durch Handlungen), (b) ikonisch (mit Bildern) und (c) symbolisch (durch Zeichen und durch Sprache). Mit dem Begriff „Intermodalitätsprobleme“ werden Schwierigkeiten von Kindern beschrieben, zwischen diesen Modi von Wissen flexibel hin und her zu übersetzen. Eine Folge ist z. B., dass konkrete Handlungen an Materialien solchen Kindern nicht schon automatisch bei der Lösung von Aufgaben helfen, erst recht nicht bei der Entwicklung tragfähiger Rechenstrategien aus Handlungen an Materialien (vgl. Rottmann/Schipper 2002).

Diesem Problem ist im Unterricht am besten präventiv zu begegnen, indem den Kindern die Übersetzungsprozesse von kontextgebundenen Aufgaben in kontextfreie Rechenaufgaben und umgekehrt immer wieder bewusst gemacht werden (vgl. Schipper 2003).

(4) Einseitige Zahl- und Operationsvorstellungen

Für manche Kinder ist Mathematik bloß ein Regelspiel, bei dem es darauf ankommt, die richtigen Regeln für die Verknüpfung der geheimnisvollen Zeichen und Symbole zu finden und anzuwenden, um zu einer richtigen Lösung zu kommen. Eine falsche Lösung ist in diesem Verständnis von Mathematik Zeichen dafür, dass die falsche Regel benutzt wurde. Damit wird Mathematik für diese Kinder bedeutungslos im wahrsten Sinne des Wortes.

Ein Beispiel für ein solches regelhaftes Vorgehen zeigt der folgende Ausschnitt aus einem Test im dritten Schuljahr (noch aus DM-Zeiten).

3) 2,40 DM + 4,20 DM = 10,00 DM
6,50 DM + 5,60 DM = 10,00 DM
4,80 DM + 8,40 DM = 10,00 DM
7,75 DM + 5,77 DM = 10,00 DM
8,21 DM + 1,82 DM = 10,00 DM

Die Kinder sollten zu vorgegebenen DM-Beträgen die Ergänzung bis 10,00 DM notieren. Die ersten drei Aufgaben löst Merle dadurch, dass sie die Reihenfolge der beiden ersten Ziffern der gegebenen Zahl vertauscht: 2,40 + 4,20, 6,50 + 5,60 und 4,80 + 8,40. Möglicherweise hat sie sich dabei an die Zerlegungen der Zahl 10 erinnert: 7 + 3 und 3 + 7, 4 + 6 und 6 + 4 usw. und daraus die Regel abgeleitet: „Immer das Gleiche, nur umgekehrt“. Mit dieser Regel versucht sie auch die Aufgabe 4 zu lösen, stellt aber fest, dass dann keine andere Zahl entsteht. Das erscheint ihr nicht plausibel, so dass sie ihre Regel ändert und nun die letzte Ziffer nach vorne stellt: 7,75 + 5,77. Mit dieser Regel löst sie dann auch die fünfte Aufgabe.

Lehrerinnen und Lehrer sollten für alle vier Symptome für Rechenstörungen sensibel sein, ihre Aufmerksamkeit aber schwerpunktmäßig auf die beiden erstgenannten konzentrieren, auf das verfestigte zählende Rechnen und auf die Links-/ Rechts-Problematik. Denn dies sind die Hauptsymptome mit den schwerwiegendsten Folgen, wenn sie nicht erkannt werden. Hinzu kommt, dass sie im Unterricht relativ leicht zu diagnostizieren sind und es zu ihnen gute Anregungen für präventive und intervenierende Maßnahmen gibt (vgl. dazu die Folgekapitel).

1.3 Angebliche Ursachen und tatsächliche Risikofaktoren

Eine Suche im Internet nach Ursachen für Rechenstörungen oder Dyskalkulie liefert eine nahezu unüberschaubare Vielfalt an „Erklärungen". Neben visuellen Teilleistungsstörungen und Störungen der akustischen oder der taktilen Wahrnehmung werden zerebrale Funktionsstörungen, einseitige Hirnhemisphärendominanz, linkshirniges Denken, kortikale Assoziationsdefizite u. a. angeboten. Bei seriöser Betrachtungsweise muss jedoch festgestellt werden, dass die Ursachen für Rechenstörungen unbekannt sind, wenn man den Begriff „Ursache" im Sinne von Kausalität verwendet. Denn wenn z. B. „visuelle Teilleistungsstörungen" im kausalen Sinne Ursachen für Rechenstörungen wären, dann dürfte es kein beim Rechnen unauffälliges Kind geben, das eine Störung im visuellen Bereich hat. Tatsächlich gibt es aber Kinder mit einer festgestellten visuellen Teilleistungsstörung ohne Auffälligkeit in Mathematik.

Damit wird nicht unterstellt, dass Beeinträchtigungen z. B. der visuellen oder auditiven Wahrnehmung sich nicht negativ auf das Mathematiklernen auswirken *können*. Tatsächlich stellt eine solche Beeinträchtigung einen großen Risikofaktor dar, weil Mathematiklernen über weite Strecken gerade über den visuellen Lernkanal stattfindet. Aus dem Risikofaktor „visuelle Teilleistungsstörung" wird für das Kind aber erst dann eine Ursache für Rechenstörungen, wenn die schulische Kompensation dieser Beeinträchtigung (z. B. durch Lernen auch über andere Kanäle) nicht gelingt.

Risikofaktoren in diesem Sinne dürfen nicht nur beim Kind gesucht werden. Auch das familiäre und soziale Umfeld mit z. B. systematischer Erziehung zur Unselbstständigkeit durch überbehütende Eltern oder mit sozialer Vernachlässigung kann Auslöser für erhebliche Schwierigkeiten beim Mathematiklernen sein. Risikofaktoren können aber auch im schulischen Umfeld liegen, z. B. im Curriculum, im Lehrbuch und nicht zuletzt in einem schlechten Mathematikunterricht, der möglicherweise Folge unzureichender Lehrerausbildung ist (vgl. die Abbildung auf der folgenden Seite). Es kann davon ausgegangen werden, dass bei der Ausbildung einer Rechenstörung in nahezu jedem einzelnen Fall alle drei Risikobereiche mitwirken.

Die Aufmerksamkeit von Lehrerinnen und Lehrern muss sich vor allem auf das schulische Umfeld als Risikobereich konzentrieren, denn hier können sie am ehesten Veränderungen im eigenen Unterricht vornehmen, am einfachsten noch im Sinne von präventiven Maßnahmen. So können z. B. – wie bereits erwähnt – einige Kinder mit Rechenstörungen nicht in angemessener Weise mit den Materialien umgehen, die ihnen beim Rechnenlernen helfen sollen, während die mathematisch leistungsstarken Kinder diese Materialien nicht (mehr) benötigen. Dass die leistungsschwachen Kinder solche Probleme schon bei Materialhandlungen haben, liegt möglicherweise auch daran, dass einige Lehrerinnen und Lehrer nicht in genügender Weise ihre Aufmerksamkeit auf die Handlungen der Kinder am Material konzentrieren und fälschlicherweise davon ausgehen, dass jedwede Materialhandlung schon hilfreich sei. Und dies nehmen sie möglicherweise deswegen an, weil bereits die Lehrerausbildung es versäumt hat, auf den wichtigen Unterschied zwischen einem bloßen Tun und den Grundideen eines handlungsorientierten Unterrichts aufmerksam zu machen. Mit einem Satz wie: „Wer die Aufgaben noch nicht so lösen kann, darf das Material benutzen." ist Kindern mit Rechenstörungen auf jeden Fall nicht geholfen. Im Gegenteil: Auf diese Weise werden Handlungen an Materialien als Tätigkeiten leistungsschwacher Kinder diskriminiert.

Das Individuum

- Fähigkeiten, Interessen, (Vor)wissen
- Sensorische Beeinträchtigungen (visuell, auditiv, taktil ...)
- Anstrengungsbereitschaft
- Motivation, Interesse, Aufmerksamkeit, Konzentration, Gedächtnis
- Angst ...

Schulisches Umfeld

- Lehrerausbildung
- Lehrkraft und ihre Interaktion mit dem Kind
- Unterrichtskonzept
- Lehrbuch
- Umgang mit Material
- Sprache und Gespräche auf der Meta-Ebene
- Förderunterricht
- Mitschülerinnen und Mitschüler ...

Familiäres und soziales Umfeld

- Familiäre Situation (Überbehütung, Vernachlässigung, Scheidung, Konkurrenz zwischen Geschwistern, Beherrschung der deutschen Sprache, Freizeitangebote ...)
- Art der Hausaufgabenbetreuung, Möglichkeiten der Nachhilfe (z. B. auch die finanzielle Situation der Familie), der psychologischen Beratung, der Fähigkeit der Eltern, die Probleme wahrzunehmen ...

Risikofaktoren für die Entwicklung von Rechenstörungen

Zu empfehlen ist daher, die Ursachen für die besonderen Schwierigkeiten eines Kindes zunächst im eigenen Unterricht zu suchen und Handlungskonsequenzen zunächst ebenfalls hier zu ziehen. Dabei dürfen die anderen Ursachenfelder selbstverständlich nicht aus dem Blick verloren gehen. Es mag banal klingen, ist aber trotzdem richtig: Die beste Prävention von Rechenstörungen ist ein guter Mathematikunterricht.

1.4 Eine Begriffsklärung

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels ist bereits auf die Schwierigkeit hingewiesen worden, die Begriffe Rechenschwäche, Rechenstörung und Dyskalkulie exakt zu definieren. Verschiedene Wissenschaftsdisziplinen verwenden sie durchaus tendenziös mit der Absicht, ihren eigenen Bereich zu stärken. Das bedeutet auch, dass es gegenwärtig keine Definitionen dieser Begriffe gibt, die über die Grenzen der einzelnen Disziplinen hinaus Konsens finden. Innerhalb des Systems Schule sollte aber ein Konsens und damit eine Verwendung dieser Begriffe im gleichen Sinne möglich sein. Daher wird hier vorgeschlagen, diese drei Begriffe wie folgt zu verwenden.

(1) Rechenschwäche

Lorenz und Radatz (1993, S. 16) schreiben solchen Kindern eine Rechenschwäche zu, „die einer Förderung jenseits des Standardunterrichts bedürfen". Dadurch werden alle diejenigen Kinder als „rechenschwach" gekennzeichnet, die unabhängig von der Dauer und der Schwere ihrer Beeinträchtigung über den Normalunterricht hinaus weitere (schulische) Fördermaßnahmen benötigen, um das erwartete Niveau zu erreichen. Im Sinne dieser Definition ist etwa 20% aller Kinder eines Jahrgangs eine Rechenschwäche zuzuschreiben.

Kinder mit einer so definierten Rechenschwäche haben (wie alle anderen) Anspruch auf reguläre Förderung, aber keinen auf *besondere* Förderung im Sinne des § 3, Abs. 2 der Ausführungsvorschriften zur Förderung bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen.

(2) Rechenstörung

Aus einer Rechenschwäche kann eine Rechenstörung werden, wenn sich aus den ursprünglichen Problemen dauerhafte und schwerwiegende Beeinträchtigungen beim Erlernen des Rechnens entwickeln. Eine Rechenstörung in diesem Sinne kann anhand von Symptomen (s. o.) diagnostiziert werden. Der Übergang von Rechenschwäche in Rechenstörung ist fließend; eine exakte Grenzziehung ist nicht möglich, Extremfälle lassen sich aber sehr wohl identifizieren. Betroffen von Rechenstörungen sind Schätzungen nach etwa 3% bis maximal 8% der Kinder. Die Mehrzahl der Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler geht von etwa 6% aller Kinder aus. Da verfestigtes zählendes Rechnen das Hauptsymptom für Rechenstörungen ist, ist eine Feststellung von Rechenstörungen im Sinne dieses Definitionsversuches frühestens im zweiten Schuljahr möglich. Das bedeutet auch, dass im ersten Schuljahr in der Regel noch keine besonderen Fördermaßnahmen im Sinne der AV Rechenstörungen durchgeführt werden. Über Ausnahmen kann die Schulleiterin oder der Schulleiter auf Vorschlag der Klassenkonferenz in Absprache mit der Lehrkraft für Rechenstörungen (RS-Lehrkraft) entscheiden.

(3) Dyskalkulie

Entscheidungen über die Gewährung von öffentlichen Mitteln für eine so genannte „Dyskalkulie-Therapie" liegt der § 35a des SGB VIII zugrunde:

§ 35a Eingliederungshilfe für seelisch behinderte Kinder und Jugendliche

(1) Kinder oder Jugendliche haben Anspruch auf Eingliederungshilfe, wenn

1. ihre seelische Gesundheit mit hoher Wahrscheinlichkeit länger als sechs Monate von dem für ihr Lebensalter typischen Zustand abweicht und

2. daher ihre Teilhabe am Leben in der Gemeinschaft beeinträchtigt ist oder eine solche Beeinträchtigung zu erwarten ist.

(2) Die Hilfe wird nach dem Bedarf im Einzelfall

1. in ambulanter Form,

2. in Tageseinrichtungen für Kinder oder in anderen teilstationären Einrichtungen ... geleistet.

Deutlich wird, dass diese Hilfe nur bei Vorliegen oder Bedrohung von einer seelischen Behinderung gewährt wird, nicht schon allein der Rechenstörung wegen. Im Sinne dieser Vergabepraxis öffentlicher Mittel sollte der Begriff Dyskalkulie daher auch nur dann verwendet werden, wenn eine Rechenstörung vorliegt und zugleich festgestellt wurde, dass das betroffene Kind im Sinne des §35a SGB VIII seelisch behindert bzw. von einer solchen Behinderung bedroht ist. Eine solche Feststellung wird in der Regel von Kinder- und Jugendpsychiaterinnen und -psychatern vorgenommen. Da Lehrkräfte (ebenso wenig wie die Verfasserinnen und der Verfasser dieser Handreichung) nicht in der Lage sind, eine seelische Behinderung oder Bedrohung (davon) im Sinne dieses Paragraphen festzustellen, sollte der Begriff Dyskalkulie im Kontext von Schule ganz vermieden werden. Dadurch wird dann auch verhindert, dass mit der gewählten Bezeichnung „Rechenstörungen“ für die besonderen Schwierigkeiten von Kindern beim Erlernen des Rechnens die Annahme einer Krankheit im Sinne einer seelischen Behinderung verbunden wird.

2 Kompetenzerwartungen und präventive sowie diagnostische Möglichkeiten in den beiden ersten Schuljahren

„Die Kinder dort abholen, wo sie stehen!" Jede Lehrerin und jeder Lehrer wird diesen pädagogischen Grundsatz schon (mindestens) einmal gehört haben. Er fordert einen Unterricht, der an die Kompetenzen der Kinder anknüpft und diese – ohne es ausdrücklich zu betonen – in die gewünschte Richtung weiterentwickelt. Was so plausibel und einfach klingt, stellt an Lehrerinnen und Lehrer drei hohe Anforderungen. Sie müssen zunächst einmal wissen, „wo die Kinder stehen", also deren aktuelle Kompetenzen kennen. Zweitens müssen sie wissen, „wohin die Reise gehen soll", d. h. die Ziele des weiteren Unterrichts im Blick haben. Und drittens müssen sie wissen, „wie die Reise zu gestalten ist", wie also jedem Kind geholfen werden kann, den Weg zum Ziel erfolgreich zu bewältigen.

Ziel dieses Kapitels ist es, Lehrerinnen und Lehrern, die in den beiden ersten so wichtigen Schuljahren Mathematik unterrichten, Hilfen für die Erfüllung dieser anspruchsvollen Aufgaben zu geben. Denn die entscheidenden Weichen für ein erfolgreiches Mathematiklernen werden in den beiden ersten Schuljahren gestellt – leider auch die in Richtung Rechenstörungen. Für ausgewählte Zeitpunkte bzw. Unterrichtsabschnitte in den beiden ersten Schuljahren wird dargestellt, über welche arithmetischen Kompetenzen die Kinder in der Regel bereits verfügen und über welche sie verfügen sollten, um erfolgreich weiterlernen zu können. Ergänzt werden diese Ausführungen durch Anregungen, wie die Kompetenzen der Kinder diagnostiziert werden können und welche Möglichkeiten der Weiterentwicklung ihrer Fähigkeiten es gibt. Diese zuletzt genannten konkreten Anregungen für die Unterrichtspraxis können im Rahmen dieser Handreichung natürlich nur exemplarisch sein. Zahlreiche weitere Hinweise findet man in Radatz u. a. (1996, 1998) und nicht zuletzt in den von der Berliner Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung herausgegebenen Materialien zur Lerndokumentation Mathematik (Senatsverwaltung 2006f.). Verwiesen sei auch auf die informativen Modulbeschreibungen des Projekts Sinus-Grundschule zu Themen wie „Umgang mit Aufgaben im Mathematikunterricht", „Erforschen, entdecken und erklären im Mathematikunterricht der Grundschule", „Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern" u. a., die von der Homepage des Projektes kostenlos als pdf-Dateien heruntergeladen werden können (http://www.sinus-grundschule.de). Ebenfalls kostenlos kann aus dem Netz eine Förderkartei für Kinder mit Rechenstörungen bzw. zur Prävention heruntergeladen werden (vgl. den Hinweis bei Schipper 2005a im Literaturverzeichnis).

2.1 Arithmetische Kompetenzen zu Schulbeginn

Schulanfängerinnen und Schulanfänger haben bereits ein mindestens dreijähriges Mathematiklernen hinter sich. Ihre Erfahrungen beziehen sich auf ein breites Spektrum mathematischer Inhaltsbereiche. Gelernt haben sie diese Mathematik „en passant" in Alltags- und Spielsituationen oder systematischer in vorschulischen Einrichtungen.

Zentrales Kennzeichen der mathematischen Kompetenzen von Schulanfängerinnen und Schulanfängern ist die extrem große Leistungsheterogenität. Neben Kindern, die sich schon mehr oder weniger souverän im Zahlenraum bis 20 oder gar darüber hinaus bewegen, gibt es auch solche, die im wahrsten Sinne des Wortes nicht bis fünf zählen können. Wenn arithmetischer Anfangsunterricht tatsächlich an die Vorkenntnisse der Kinder anknüpfen soll, dann müssen die ersten Wochen des ersten Schuljahres intensiv auch für diagnostische Maßnahmen genutzt werden. Die Schwierigkeit ist dabei weniger die Durchführung der Diagnostik als vielmehr die Interpretation der Beobachtungen. Was kann als normal angesehen werden, welche Befunde zeigen Förderbedarf an und was ist als dramatisch zu bewerten?

Diese Interpretationen sind zuverlässiger, wenn die individuellen Befunde mit denen größerer Stichproben verglichen werden. Deshalb werden im Folgenden für ausgewählte Aspekte der Arithmetik Daten aus empirischen Studien vorgestellt, die zeigen, in welchem Maße Schulanfängerinnen und Schulanfänger bereits diese Anforderungen bewältigen. Die jeweils erste Spalte der Tabellen zeigt den Inhaltsbereich, die zweite beschreibt die Aufgabenstellung und die dritte Spalte zeigt den Prozentsatz richtiger Lösungen in der jeweils in Klammern angegeben Studie. Die Befunde entstammen Studien, die am Ende der Kindergartenzeit oder zu Schulbeginn durchgeführt wurden. Sie sind folgenden Publikationen entnommen: (1) Selter (1995), (2) Grassmann u. a. (2002), (3) Rinkens (1996), (4) Schmidt (1982), (5) Hasemann (2003), (6) Caluori (2004), (7) Grüßing (2006).

Kompetenzen von Schulanfängerinnen und Schulanfängern bei der Zahlauffassung und Zahldarstellung

Bereich	*Aufgabe*	*Lösungshäufigkeit und Quelle*
Simultane und quasi-simultane Zahlauffassung	– zum Vergleich mehr/weniger bis zu 5 Objekte simultan auffassen	83% (5)
	– simultane Auffassung der 3	99% (7)
	– simultane Auffassung der 4	97% (7)
	– simultane Auffassung der 5	81% (7)
	– quasi-simultane Auffassung der 9	34% (7)
Zählende Zahlauffassung	– 7 Vögel (im Bild) abzählen	91% (2)
	– 8 Stofftiere (im Bild) abzählen	79% (3)
	– 9 Plättchen (im Bild) abzählen	64% (4)
	– 14 Plättchen abzählen	45% (4)
	– 20 geordnete Klötze abzählen	58% (5)
	– 20 ungeordnete Klötze abzählen	49% (5)
(Zählende) Zahldarstellung	– 4 Plättchen legen	96% (4)
	– 7 Plättchen legen	87% (4)
	– 9 Kringel/Luftballons färben	87% (1); 79% (2); 80% (3)
	– 16 Plättchen legen	60% (4)

Simultane und quasi-simultane Zahlauffassung

Zu diesem Bereich gibt es nur eine geringe Anzahl von Studien. Erst in neuerer Zeit hat die Mathematikdidaktik den Stellenwert dieser Fähigkeit für die Entwicklung von Zahlverständnis erkannt. Das bedeutet auch, dass zu erwarten ist, dass bisher weder in vorschulischen Einrichtungen noch in der Schule selbst systematische Übungen dazu in nennenswertem Umfang durchgeführt werden. Dabei ist insbesondere die Fähigkeit, strukturiert dargebotene Mengen quasi-simultan aufzufassen, für das Verständnis von strukturierten Arbeitsmitteln (z. B. Zwanziger-Rechenrahmen, Zwanziger-Tafel und -Feld im ersten Schuljahr sowie ihre Fortsetzungen im Zahlenraum bis 100 im zweiten Schuljahr) und für die Entwicklung von Rechenstrategien aus Handlungen an ihnen unverzichtbar. Ohne eine solche Fähigkeit werden Kinder immer wieder auf zählende Vorgehensweisen zurückgeworfen.

Zählende Zahlauffassung und Zahldarstellung

Im Zahlenraum bis 10 sind diese Fähigkeiten in der Regel recht gut entwickelt. Dazu mögen Zählanlässe im Alltag und beim Spiel beigetragen haben. Mehr als 10 Objekte vermag aber nur noch etwa jedes zweite Kind zu Schulbeginn sicher abzuzählen. Das bedeutet auch, dass auch noch im ersten Schuljahr Zählanlässe geschaffen und genutzt werden sollen mit Anzahlen größer als zehn. Dabei sollte die Anordnung der Objekte variiert werden. Denn die Art der Anordnung beeinflusst offensichtlich die Schwierigkeit der Aufgabe, wie Befunde von Hasemann (2003) zeigen.

Kompetenzen von Schulanfängerinnen und Schulanfängern beim verbalen Zählen, bei der Ordnung der Zahlen, Mächtigkeitsvergleichen und der ordinalen Verwendung von Zahlen

Bereich	*Aufgabe*	*Lösungshäufigkeit und Quelle*
Verbales Zählen	– vorwärts bis mindestens 5	99% (4) 99% (4)
	– vorwärts bis mindestens 10	97% (4)
	– vorwärts bis mindestens 20	70% (4); 77% (5)
	– vorwärts bis mindestens 30	45% (4)
	– vorwärts bis mindestens 50	28% (4)
	– vorwärts bis mindestens 100	15% (4)
	– weiterzählen von 9 bis 15	72% (5)
	– in Zweierschritten von 2 bis 14	50%
Ordnung der Zahlen und Ordinalzahlen	– Vorgänger der Zahl 7 bestimmen	63% (3)
	– Vorgänger der Zahl 8 bestimmen	63% (1); 59% (2)
	– die achtzehnte Blume zeigen	41% (6)
Mächtigkeitsvergleiche	– ohne Materialverwendung wissen, dass 13 Bonbons mehr als 9 sind	69% (5)
	– 3 mit 4 Teddys vergleichen: Wo sind mehr?	94% (7)
	– 5 mit 6 Plättchen im Bild vergleichen: Wo sind mehr?	95% (4)
	– 14 mit 13 Plättchen im Bild vergleichen: Wo sind mehr?	79% (4)

Verbales Zählen

Fast alle Schulanfängerinnen und Schulanfänger können die Zahlwortreihe bis 10 aufsagen. Bis 20 können das nach Schmidt (1982) 70%, nach Hasemann (2003) 77%. Ob die in der neueren Studie beobachtete größere Häufigkeit tatsächlich als Indikator für einen echten Kompetenzanstieg gedeutet werden kann, ist letztlich nicht entscheidbar. Berücksichtigt man jedoch, dass in den Jahren 1880 bis 1884 nur 66% aller Schulanfängerinnen und Schulanfänger bis 10 zählen konnten (Hartmann 1896), dann kann festgestellt werden, dass sich die Zählkompetenz über einen Zeitraum von gut 100 Jahren deutlich verbessert hat. Erfreulich, aber auch eine besondere Herausforderung für Lehrerinnen und Lehrer ist die Tatsache, dass bereits etwa jedes vierte Kind bis 50 und etwa jedes siebte bis 100 zählen kann. Deutsche Studien zum Rückwärtszählen von x bis y sind nicht bekannt. Auch dies kann – wie beim Thema simultane und quasi-simultane Zahlauffassung – als Indikator dafür gesehen werden, dass diese Thematik weder in der Forschung noch in der praktischen Arbeit mit Kindern bisher besondere Aufmerksamkeit genießt. Dies ist überaus bedauerlich, weil die Vernachlässigung des Rückwärtszählens im vorschulischen Bereich und im ersten Schuljahr die Ablösung des Alleszählens bei der Subtraktion durch die Methode des Rückwärtszählens verhindert bzw. zeitlich sehr verzögert. Eine Langzeitfolge ist, dass Aufgaben zur Subtraktion spätestens im zweiten Schuljahr deutlich mehr Schwierigkeiten bereiten als solche zur Addition. Zu Schulbeginn werden strukturgleiche Additions- und Subtraktionsaufgaben als Rechengeschichten dagegen gleich häufig richtig gelöst.

Ordnung der Zahlen und Ordinalzahlen

Die in der Studie von van den Heuvel-Panhuizen (1995) und den Folgestudien wie z. B. von Selter (1995) mit „Rückwärtszählen“ bezeichneten Aufgaben prüfen nicht das Rückwärtszählen insgesamt, sondern nur die Fähigkeit, den Vorgänger einer Zahl zu bestimmen. Etwa zwei Drittel aller Schulanfängerinnen und Schulanfänger verfügen über diese Fähigkeit, die als ein wichtiger Schritt auf dem Wege zum sicheren Rückwärtszählen anzusehen ist. Vergleicht man diesen Befund mit dem „echten“ Weiterzählen vorwärts von 9 bis 15 in der o. g. Studie von Hasemann (2003), dann wird erneut deutlich, dass beim Rückwärtszählen ein erheblicher Förderbedarf besteht.

Die Verwendung der natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen scheint gegenüber ihrer Nutzung im kardinalen Sinne mehr Schwierigkeiten zu bereiten. Nur 41% der Schulanfängerinnen und Schulanfänger können die achtzehnte Blume bestimmen. Die zeichnerische Darstellung dieser Aufgabe ist aber so komplex, dass dieser niedrige Wert sicher auch auf die Form der Aufgabenpräsentation zurückzuführen ist.

Mächtigkeitsvergleiche

Die Fähigkeit, zwei sichtbare Mengen mit weniger als 10 Elementen zu vergleichen und zu entscheiden, wo mehr sind, ist sehr gut entwickelt. Auch im Zahlenraum bis 20 liefern die empirischen Studien zufrieden stellende Befunde. Etwas schwieriger wird der Vergleich, wenn die beiden Mengen nur noch vorgestellt werden müssen. Dieses Aufgabenformat ist aber gut geeignet, den Übergang von Mächtigkeitsvergleichen zu Zahlvergleichen („13 ist größer als 9.“) zu unterstützen.

Kompetenzen von Schulanfängerinnen und Schulanfängern beim ersten Rechnen

Bereich	*Aufgabe*	*Lösungshäufigkeit und Quelle*
Erstes Rechnen: Addition im Sachkontext mit Bild und mit der Möglichkeit, die Lösung durch Abzählen im Bild zu ermitteln	– 4 + 5 im Sachkontext mit Bild (mit Abzählmöglichkeit) – 8 + 6 im Sachkontext mit Bild (mit Abzählmöglichkeit)	74% (3) 54% (3)
Erstes Rechnen: Addition im Sachkontext mit Bild, aber ohne Möglichkeit, die Lösung durch Abzählen im Bild zu ermitteln	– 3 + 4 im Sachkontext mit Bild (ohne Abzählmöglichkeit) – 7 + 3 im Sachkontext mit Bild (ohne Abzählmöglichkeit)	66% (1); 55% (2) 54% (3)
Erstes Rechnen: Subtraktion im Sachkontext mit Bild und mit der Möglichkeit, die Lösung durch Abzählen im Bild zu ermitteln	– 7 – 5 im Sachkontext mit Bild (mit Abzählmöglichkeit) – 8 – 3 im Sachkontext mit Bild (mit Abzählmöglichkeit)	93% (2) 68% (3)
Erstes Rechnen: Subtraktion im Sachkontext mit Bild, aber ohne Möglichkeit, die Lösung durch Abzählen im Bild zu ermitteln	– 9 – 3 im Sachkontext mit Bild (ohne Abzählmöglichkeit) – 10 – 6 im Sachkontext mit Bild (ohne Abzählmöglichkeit) – 10 – 7 im Kontext Geld mit Bild (ohne Abzählmöglichkeit) – 10 – 8 im Sachkontext mit Bild (ohne Abzählmöglichkeit)	44% (3) 42% (2) 29% (3) 50% (1)
Verdoppeln und Halbieren	– die Hälfte von 4 Kästchen färben – das Doppelte von 4 Kästchen färben	65% (2) 33% (2)

Addieren und Subtrahieren

Die Grundlagen des ersten Rechnens entwickeln sich bereits im Alter von etwa drei Jahren mit der Fähigkeit, zwei Teilmengen zusammenzulegen und als Ganzheit zu betrachten bzw. von einer Gesamtheit einen Teil abzutrennen: Zwei Puppen habe ich bereits. Zum Geburtstag habe ich noch eine bekommen. Jetzt habe ich drei Puppen. Von vier Bonbons esse ich eines auf; jetzt habe ich nur noch drei.

Zusammen mit der Weiterentwicklung der Zählkompetenz entwickelt sich auch die Fähigkeit, solche kontextgebundenen Aufgaben zu lösen. Dabei sind die Kinder zunächst auf das Vorhandensein konkreter bzw. bildlich dargestellter Gegenstände zum Abzählen angewiesen. Diese Situation ist in solchen Testaufgaben für Schulanfängerinnen und Schulanfänger gegeben, in denen die Objekte der Rechengeschichte alle abgebildet sind. So zeigen Grassmann u. a. (2002, S. 10) den Kindern ein Bild mit acht Vögeln auf einer Leitung sowie weiteren sechs in der Luft und formulieren dazu mündlich die folgende Aufgabe: „Auf einer Leitung sitzen acht Vögel. Sechs Vögel kommen angeflogen. Wie viele Vögel sind auf dem Bild?“ Solche Aufgaben mit direkter Abzählmöglichkeit werden von etwa 50% bis

75% der Schulanfänger gelöst, auch wenn der Zahlenraum bis 10 überschritten wird wie in dem angeführten Beispiel. Rechengeschichten mit einem Subtraktionskontext (z. B. Vögel, die wegfliegen) werden nicht seltener richtig gelöst als solche mit einem Additionskontext. Tendenziell ist eher das Gegenteil zu beobachten. So wird die Aufgabe 7 – 5 (insgesamt sieben Vögel, davon fliegen fünf weg) von 93% der Schulanfängerinnen und Schulanfänger richtig gelöst. Bei dieser Art von Aufgaben ist insgesamt davon auszugehen, dass die Art der bildlichen Präsentation – unstrukturiert vs. strukturiert – Einfluss auf die Lösungshäufigkeit ausübt. Solche Aufgaben prüfen also nicht nur das Grundverständnis für Addition und Subtraktion, sondern zugleich auch die Fertigkeit beim Abzählen.

Wenn die Möglichkeit des Abzählens im Bild nicht gegeben ist, weil die Gegenstände der Rechengeschichte nicht abgebildet sind, verändert sich die Lösungshäufigkeit von Aufgaben mit Additionskontexten kaum. Beide o. g. Aufgaben dieses Typs werden von etwa der Hälfte bzw. zwei Drittel der Kinder gelöst. Dagegen liegen bei den Subtraktionsaufgaben ohne Abzählmöglichkeiten im Bild die Lösungshäufigkeiten nur noch unter 50%. Dieser Befund ist vermutlich auf die gegenüber dem Vorwärtszählen geringere Fähigkeit zum Rückwärtszählen zurückzuführen (s. o.) und macht noch einmal darauf aufmerksam, wie wichtig es ist, auch das Rückwärtszählen zu automatisieren.

Verdoppeln und Halbieren

Vergleichbar mit dem Zusammenlegen und Abtrennen als Grundkonzepte für Addieren und Subtrahieren sind das Verdoppeln und Halbieren. Diese Operationen bilden die konzeptionellen Grundlagen für das Multiplizieren und Dividieren. Im ersten Schuljahr können mit ihrer Hilfe Additions- und Subtraktionsaufgaben ökonomisch bewältigt werden, z. B. 6 + 7 über „Doppelsechs plus eins“ oder 15 – 7 über „die Hälfte von vierzehn plus eins“.

Die Entwicklung des Verständnisses für das Verdoppeln und Halbieren ist bei weitem nicht so intensiv erforscht worden wie die für das Addieren und Subtrahieren. Erst in neuerer Zeit hat Rottmann (2006, 2007) aufgezeigt, wie sich dieses Begriffsverständnis entwickelt und welche Faktoren (z. B. sprachliche Formulierungen, unterschiedliche Darstellungen) dabei eine wichtige Rolle spielen.

Die in der Tabelle S. 19 referierten Befunde zum Verdoppeln und Halbieren zeigen einen größeren Erfolg bei der Halbierungsaufgabe. Das ist vermutlich auf die Größe der Zahlen zurückzuführen. Denn in der Regel können Kinder etwas früher verdoppeln als halbieren.

Kompetenzen von Schulanfängerinnen und Schulanfängern beim Lesen von Ziffern und Zahl(en)

Bereich	*Aufgabe*	*Lösungshäufigkeit und Quelle*
Zahlzeichen	– die Ziffer 3 lesen	95% (1)
	– die Ziffer 5 lesen	91% (2)
	– die Ziffer 7 lesen	88% (3)
	– alle Ziffern von 0 bis 9 lesen	78% (4)
	– die Zahl 13 lesen	62% (3)

Ziffern und Zahlen lesen

In einem eingeschränkten Verständnis mancher Eltern ist das Lesen und Schreiben von Ziffern und Zahlen ein Ausweis mathematischer Kompetenzen „ihrer Kleinen“. Solchen Eltern sollte schon in vorschulischen Einrichtungen, spätestens aber in der Schule bewusst gemacht werden, dass das Zählen und Rechnen in Alltags- und Spielsituationen weitaus bessere Gelegenheiten bieten, frühe arithmetische Fähigkeiten zu entwickeln als ein Training im Lesen und Schreiben von Zahlen bzw. Ziffern. Schulanfänger können ihre Erkenntnisse über die Anzahl der Objekte in einem Bild z. B. auch mit einer Strichliste darstellen. Dass Kinder weitaus früher Ziffern lesen als schreiben können (Schmidt 1982), ist sicher darauf zurückzuführen, dass unsere Umwelt voll von solchen Ziffern und Zahlen ist. Der Ziffernschreibkurs sollte aber der Schule überlassen bleiben. Hier empfehlen wir eine Ziffernschreibweise, die auf „Schnörkel“ weitgehend verzichtet. Geeignet ist z. B. eine Schreibweise in der Schulausgangsschrift.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

2.2 Schwerpunkte der Förderung von Zahlverständnis vor und zu Schulbeginn

Die große Leistungsheterogenität vor und zu Schulbeginn erfordert Übungsformate, die hinsichtlich ihrer Anforderungsniveaus vielfältig variiert werden können. Solche Variationen vertrauter Formate sind sicher sinnvoller, als den Kindern immer wieder neu zu erlernende Aufgabentypen anzubieten. Gleiche Aufgabenformate mit unterschiedlichem Schwierigkeitsniveau bieten zudem den Vorteil, dass alle Kinder den gleichen Aufgabentyp auf dem je eigenen Niveau bearbeiten können. Dies begünstigt auch die Möglichkeit des Voneinander-Lernens. Aus diesem Grunde werden im Folgenden zwei für die Prävention von Rechenstörungen wichtige Aufgabenformate vorgestellt und Möglichkeiten ihrer Variation aufgezeigt.

Mit Hilfe der vorgestellten Aufgabenformate sollen nicht bloß die Fertigkeiten der Kinder verbessert werden. In erster Linie geht es darum, das Verständnis für Zahlen zu vertiefen. Die Kinder sollen insbesondere eine immer tiefere Einsicht in die *Beziehungen der Zahlen zueinander* gewinnen und ihre Zahlkompetenzen in zunehmend erweiterten Anwendungssituationen nutzen können.

Simultane und quasi-simultane Zahlauffassung

Für Übungen zur simultanen und quasi-simultanen Zahlauffassung bieten sich Zahldarstellungen an den Händen, als Würfelbilder und mit Hilfe von Dominosteinen an.

- Drei Finger werden ausgestreckt und sofort wieder eingeklappt. Wer hat die Zahl erkannt? Wer erkennt auf diese Weise auch schon ’große Zahlen’ wie 7, 8, oder 9? Bei solchen quasi-simultanen Auffassungen größerer Zahlen sollte stets nachgefragt werden, woran die Kinder erkannt haben, dass es z. B. die Acht war. So wird die Chance genutzt, den Kindern bewusst zu machen, dass sich die Zahl 8 aus 5 und 3 zusammensetzt. Ganz pfiffige Kinder werden die Acht daran erkennen, dass zwei Finger noch eingeklappt waren: 10 – 2 = 8.
- Nun umgekehrt: Die Lehrerin sagt eine Zahl (oder zeigt eine Ziffernkarte) und alle Kinder stellen die Zahl mit ihren Fingern dar. „Welche Zahl habe ich, wenn ich nun einen Finger einklappe, welche, wenn ich noch zwei weitere Finger ausstrecke?“
- „Stell dir vor, du hast schon 6 Finger ausgestreckt. Dann streckst du noch 3 Finger aus (klappst 4 Finger ein). Wie viele Finger sind dann noch zu sehen?“ Diese Aufgabe sollte zu-

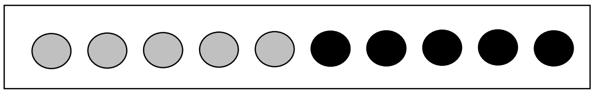
nächst in der Vorstellung gelöst, dann durch konkrete Handlung kontrolliert werden.

– Wir würfeln mit einem Würfel im Knobelbecher. Dieser wird nur für sehr kurze Zeit angehoben. „Welche Zahl hast du gesehen? Sage die Zahl und zeige sie gleichzeitig mit deinen Fingern.“
– Anspruchsvoller ist die gleiche Übungsform mit zwei Würfeln gleichzeitig. Das Anforderungsniveau kann mit präparierten Würfeln leicht variiert werden. Zunächst kommen zwei Würfel in den Becher, die beide nur die Zahlen 1 bis 3 je zweimal zeigen. Wieder wird der Becher nur für kurze Zeit angehoben. „Welche Zahlen hast du gesehen, wie viele Punkte sind das zusammen?“ In der Endform wird mit zwei normalen Spielwürfeln operiert und auf diese Weise bis 12 addiert.
– Alle Dominosteine werden verdeckt auf den Tisch gelegt. Ein Stein wird für nur sehr kurze Zeit aufgedeckt. „Wer hat eine der beiden Zahlen erkannt, wer sogar beide Zahlen? Wer weiß, wie viel das zusammen ist?“

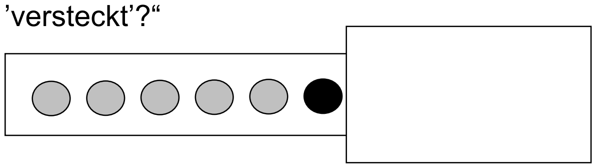
Alle diese Übungen können auch per Tageslichtprojektor oder Computer präsentiert werden. Mit Hilfe von PowerPoint kann man sie selbst erstellen. Es gibt aber auch kommerziell angebotene Programme, z. B. das „Schnelle Sehen“ als Teil des Programms „F09 – Fehleranalyse“ bei Sowosoft (www.sowosoft.de).

Abgedecktes Zählen

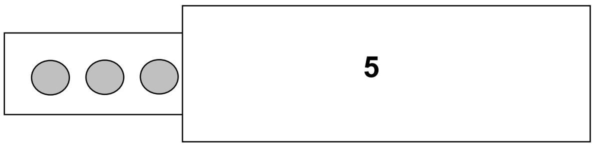
Ein wichtiges Ziel aller Übungen zur Zahlauffassung und Zahldarstellung ist es, den Anteil des konkreten Handelns nach und nach zu reduzieren zugunsten eines Operierens in der Vorstellung. Diesem Ziel dient das Übungsformat *„Abgedecktes Zählen“*. Es fördert das Weiterzählen ab einer gegebenen Zahl (als Ablösung von der Methode des Alleszählens), liefert einen Beitrag zu Zahlzerlegungen und lässt sich in Richtung Addition und Subtraktion erweitern. Benötigt werden strukturierte Zahlenstreifen bis 10 und Abdeckblätter. Zunächst wird durch quasi-simultane Zahlauffassung oder durch Abzählen festgestellt, wie viele Punkte auf dem Zahlenstreifen sind.



Dann werden Teile des Streifens abgedeckt. „Wie viele Punkte sind ’versteckt’?“

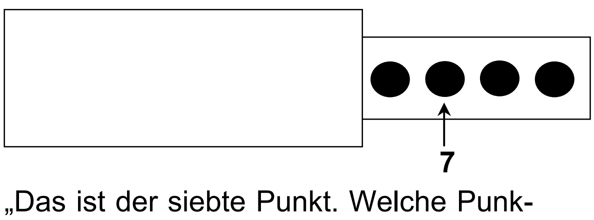


Hier liegt ein anderer Zahlenstreifen. Fünf Punkte sind abgedeckt. „Wie viele Punkte hat der Streifen insgesamt?“



Diese Aufgabe kann sicher auf sehr unterschiedliche Weise gelöst werden, z. B. durch Darstellung der Drei an der einen Hand, der Fünf an der anderen. Nahe gelegt wird aber auch ein Weiterzählen von drei an um fünf weitere *vorgestellte* Punkte oder von fünf vorgestellten Punkten aus an den drei sichtbaren Punkten weiter.

Das Rückwärtszählen mit Ordnungszahlen und ein Verständnis des Zusammenhangs zwischen Ordnungs- und Kardinalzahlen werden gefordert, wenn der vordere Teil eines Zahlenstreifens verdeckt und der Rangplatz eines sichtbaren Punktes angegeben wird.



„Das ist der siebte Punkt. Welche Punkte kannst du sehen? *Welche* Punkte sind verdeckt? *Wie viele* Punkte sind versteckt?“

Schließlich können Additions- und Subtraktionsaufgaben bzw. Aufgaben zur additiven Ergänzung in diesem Aufgabenformat „Abgedecktes Zählen“ gestellt werden.

Links sind vier Punkte versteckt, rechts drei. „Wie viele Punkte hat der Streifen insgesamt?“

4	**3**

Der neue Streifen hat sieben Punkte. Unter dem rechten Blatt sind zwei Punkte versteckt. „Wie viele sind unter dem linken Blatt?“

?	**2**

2.3 Weiterentwicklung von Zahlverständnis im ersten Schuljahr

Der Arithmetikunterricht im ersten Schuljahr hat drei große Aufgaben, nämlich (1) die Weiterentwicklung des Zahlverständnisses auch in den Zahlenraum bis 20 hinein, (2) die Vertiefung des Verständnisses für Addition und Subtraktion bis hin zur kontext- und materialunabhängigen Lösung solcher Aufgaben im Zahlenraum bis 20 sowie (3) die Erarbeitung der für dieses Rechnen notwendigen Grundlagen. Dem Bereich Addition und Subtraktion werden die folgenden Abschnitte ab 2.4 gewidmet. In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf die Aufgaben (1) und (3). Das bedeutet konkret, dass an dieser Stelle nur die folgenden Themen behandelt werden:

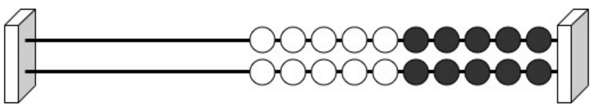
– Arbeitsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht,
– Zahlenräume im ersten Schuljahr,
– Analogie – eine zentrale Idee, die das Lernen stützt,
– Zahlzerlegungen.

Arbeitsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht

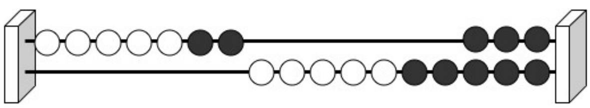
Das Angebot an Arbeitsmitteln für den arithmetischen Anfangsunterricht ist überaus groß: Wendeplättchen, Steckwürfel, Rechenketten, Rechenstäbe, -streifen, -rahmen u. a. In einer sicher nicht ganz trennscharfen Differenzierung kann man drei Typen solcher Materialien unterscheiden, nämlich

– unstrukturierte Materialien wie Kastanien, Wendeplättchen, Steckwürfel, Muggelsteine, kleine Würfel u. Ä.,
– strukturierte Materialien wie z. B. Zahlenstreifen und Zahlenstäbe sowie
– Mischformen wie der Rechenrahmen.

Welche Materialien für den Anfangsunterricht geeignet sind, hängt entscheidend von ihrem spezifischen Verwendungszweck ab. Es gibt kein Material, das universell für alle Aufgaben im Bereich der Arithmetik problemlos genutzt werden kann. Und es gibt kein Material, das *selbst-verständlich* ist. Didaktische Materialien enthalten Konventionen, die den Kindern erst einmal bewusst gemacht werden müssen. Ein Beispiel: Welche Zahl ist hier am Rechenrahmen eingestellt, die 20 oder die 0?



Wir empfehlen, diese Darstellung als Null zu interpretieren. Denn dann kann eine eingestellte Zahl, z. B. die 7, in Leserichtung von links nach rechts als 5 + 2 aufgefasst werden.



Wichtig ist vor allem, dass in einer Lerngruppe die gleiche Konvention herrscht. Denn sonst verstehen die Kinder einander nicht, wenn sie ihre Rechenwege mit Hilfe von Handlungen an Materialien erläutern.

Die *unstrukturierten Materialien* können gut genutzt werden, wenn es um kleine Anzahlen bis etwa 4 oder 5 geht, z. B. bei ersten Zahlzerlegungen. *Strukturierte Materialien* erlauben eine quasisimultane Zahlauffassung über fünf hinaus. So kann z. B. ein Achterstab auf einen Blick erfasst werden, wenn er als „Fünfer plus drei" hergestellt worden ist – und die Kinder auch wissen, dass (solche) Stäbe größer als fünf aus einem Fünfer und „dem Rest" bestehen. Auch ein solches Material muss also zunächst selbst Unterrichtsgegenstand sein, damit alle Kinder es verstehen und dann auch erfolgreich nutzen können. Mit den *Mischformen* wird versucht, jeweils die Vorteile der beiden anderen Typen zu erhalten, ohne ihre Nachteile dafür in Kauf nehmen zu müssen. So können die Kugeln des oben dargestellten Rechenrahmens einzeln abgezählt werden, seine Struktur erlaubt aber auch eine quasi-simultane Zahlauffassung. Die Kugeln können also wie unstrukturierte Materialien verwendet, aber auch als Ganzheiten „mit einem Griff" dargestellt werden. Diese Form der Zahldarstellung wird vor allem dann wichtig, wenn die Kinder den Zehnerübergang ohne Zählen bewältigen sollen (s. u.). Deshalb wird dieses Material in der Bielefelder Beratungsstelle für Kinder mit Rechenstörungen genutzt.

Hinsichtlich des Einsatzes des *Zahlenstrahls* im ersten Schuljahr gibt es unterschiedliche Konzeptionen. Auf Dauer benötigen wir sicher beides, sowohl Zahlenfelder (z. B. Zwanziger-Feld und -Tafel), die besonders die dezimale Struktur unserer natürlichen Zahlen repräsentieren, als auch den Zahlenstrahl, der die Unendlichkeit und damit die Idee des „Immer-eins-Weiter" ausdrückt. Wir empfehlen aber aus zwei Gründen, den Zahlenstrahl erst ab dem zweiten Schuljahr einzusetzen. Erstens haben manche Kinder Schwierigkeiten zu verstehen, dass die Zahlen am Zahlenstrahl nicht durch die Abschnitte zwischen den Markierungen (im Sinne von Kardinal- oder Maßzahlen), sondern durch die mit Strichen dargestellten Punkte repräsentiert werden. Zweitens – und wichtiger noch – besteht die Gefahr, dass beim Rechnen am Zahlenstrahl das zählende Rechnen verfestigt wird. Daher halten wir seine Einführung im zweiten Schuljahr mit der Zahlenraumerweiterung bis 100 für den geeigneten Zeitpunkt. Denn dann sollten die Kinder sich bereits vom zählenden Rechnen gelöst haben.

Zahlenräume im ersten Schuljahr

Die Debatte, in welcher Reihenfolge bzw. in welchen Abschnitten die Zahlen behandelt werden sollen, ist annähernd 200 Jahre alt. Bis vor etwa 25 Jahren war es selbstverständlich, im ersten Schuljahr zunächst die Zahlen bis 5 bzw. 6 (des Würfels wegen), dann bis 10, schließlich bis 20 zu behandeln. Vor allem die Studien zu Vorkenntnissen von Schulanfängerinnen und Schulanfängern in den neunziger Jahren haben diesen Aufbau in Frage gestellt und eine „ganzheitliche Behandlung der Zahlen bis 20 vom ersten Schultag an" gefordert.

Welches Modell zu bevorzugen ist, wird deutlicher, wenn man sich Klarheit darüber verschafft, was mit dem Begriff „Behandlung" gemeint ist. Ein extremes Beispiel: Niemand wird einer Schulanfängerin/einem Schulanfänger, der stolz verkündet, er wohne in der Hauptstraße 256, die Nennung dieser Zahl mit der Begründung verbieten, solche Zahlen würden erst in der dritten Klasse behandelt. Es käme aber auch niemand auf die Idee, diesem Kind schon ein tiefes Verständnis der Zahl 256 zuzusprechen. Das Kind wird wohl kaum wissen, dass 256 durch 2, 4, 8 usw. teilbar, das Quadrat der Zahl 16 und um 44 von der 300 entfernt ist, um nur einige Eigenschaften dieser Zahl zu nennen.

Wir müssen also bei der Frage, welche Zahlenräume im ersten Schuljahr behandelt werden sollen, zwischen einem

In-Gebrauch-Nehmen von Zahlen und einer systematischen Behandlung zur Vertiefung des Zahlverständnisses unterscheiden. Schulanfängerinnen und Schulanfänger dürfen selbstverständlich alle Zahlen vom ersten Tag des ersten Schuljahres an in Gebrauch nehmen. Das bedeutet aber nicht, dass damit systematische Übungen zur Festigung und Vertiefung des Verständnisses kleinerer Zahlen überflüssig werden. Denn die Kinder müssen mit den Zahlen ihre Binnenstruktur (z. B. die Zahlzerlegungen) und ihre Beziehungen zu anderen Zahlen (kleiner, größer, Hälfte, Doppeltes) lernen. Die Kenntnis einzelner Zahlen muss zu einem Verständnis des *Zahlennetzwerkes* ausgebaut werden. Das ist der Grund, warum es in den allermeisten Mathematikbüchern für das erste Schuljahr doch noch „Zahlenräume" gibt, die systematisch durchstrukturiert werden, in der Regel zunächst die Zahlen bis 10, dann bis 20. Dass diese „Grenzen" nicht strikt einzuhalten sind, sondern immer auch ein „Blick über den Zaun" erlaubt ist, ja sogar herausgefordert werden soll, ist selbstverständlich.

Analogie – eine zentrale Idee, die das Lernen stützt

Die Erweiterung des Zahlenraums bis 20 im ersten Schuljahr bietet erstmals die Chance, eine zentrale Idee zu thematisieren, die große Teile des Mathematikunterrichts vom zweiten Schuljahr an trägt, nämlich die Idee der *Analogie*. Analogieverständnis hilft, Strukturen in erweiterten Zahlräumen zu verstehen und zu nutzen, so dass Mathematiklernen wirklich als Weiter- und nicht als Neulernen stattfinden kann. Die Chance, Analogien zu thematisieren und den Kindern bewusst zu machen, sollte bei der Behandlung der Zahlen über 10 im ersten Schuljahr offensiv als präventive Maßnahme genutzt werden. Denn Kinder mit Rechenstörungen zeichnen sich u. a. auch dadurch aus, dass sie kaum ein Verständnis für Analogien entwickelt haben. Dazu ein paar Anregungen:

- 13 ist kleiner als 14, *weil* 3 kleiner als 4 ist.
- Der Unterschied zwischen 12 und 18 beträgt 6, *weil* der Unterschied zwischen 2 und 8 auch 6 beträgt. Wie groß ist dann wohl der Unterschied zwischen 22 und 28?
- Zu 3 Cent lege ich ein 10-Cent-Stück dazu. Wie viel Cent sind es dann? Wie viel Geld ist es, wenn ich noch ein 10-Cent-Stück dazu lege?
- Kann schon jemand in Zehnerschritten weiterzählen? 3, 13, ...
- 13 + 4 = 17, *weil* 3 + 4 = 7.
- Rechenpäckchen:

5 + 3 =	15 + 3 =
7 + 2 =	17 + 2 =
9 – 4 =	19 – 4 =

Zahlzerlegungen

Auch noch Dritt- und Viertklässler, die als zählende Rechner identifiziert werden, haben fast immer ein Merkmal gemeinsam: Sie kennen nicht die Zerlegungen der Zahlen bis 10 auswendig. Weil sie dies nicht können, greifen sie auf zählendes Rechnen beim Zehnerübergang (6 + 8, 78 + 5, 322 – 7) zurück. Das Auswendigwissen der Zerlegungen aller Zahlen bis 10 ist die wichtigste Voraussetzung für die Ablösung vom zählenden durch das schrittweise Rechnen. Daher sollte zum Zeitpunkt der Einführung in das Thema Zehnerübergang diese Voraussetzung bei allen Kindern gesichert sein. Damit ist das Thema Zahlzerlegungen ein Dreivierteljahr lang im ersten Schuljahr eines der wichtigsten Themen, das im Unterricht immer wieder angesprochen werden und beim täglichen Kopfrechnen gefestigt werden muss.

Recht früh im ersten Schuljahr werden Übungen zur Sicherung des Grundverständnisses für Zahlzerlegungen behandelt. Sechs Kinder bilden zwei Gruppen, z. B. eine Zweier- und eine Vierergruppe oder zwei Dreiergruppen. Welche Möglichkeiten gibt es noch?

Weitere Übungen können an Materialien durchgeführt werden. Fünf Plättchen können auf unterschiedliche Weise auf zwei Teller verteilt werden, dort 3, hier 2; dort 1, hier 4; dort 0, hier 5 usw.

Das Ergebnis der vorgenommenen Handlungen kann systematisch im „Haus der 5“ notiert werden. Ergänzende Übungen sind mit „Zahlzerlegungskästen“ bzw. „Schüttelkästen“ möglich, die in zahlreichen Ausfertigungen von der Lehrmittelindustrie angeboten werden.

5	
5	0
4	1
3	2
2	3
1	4
0	5

Das eigentliche Ziel dieser Übungen, dass nämlich die Kinder auf Dauer mit dem Hören z. B. der Zahl 10 sofort die „Zehnerfreunde“ 2 – 8, 7 – 3, 5 – 5 usw. mitdenken, gerät in Gefahr, konterkariert zu werden, wenn die Übungen zu Zahlzerlegungen so gestaltet sind, dass die Kinder die beiden Teilsummanden immer wieder durch Abzählen bestimmen können. Nach anfänglichen Aktivitäten zur Sicherung des Grundverständnisses, bei denen zählendes Vorgehen noch akzeptabel ist, sind daher Übungen wichtig, die den Kindern helfen, sich von zählenden Verfahren zu lösen und zu einem Auswendigwissen zu gelangen. In der Bielefelder Beratungsstelle für Kinder mit Rechenstörungen haben sich für diesen Zweck Übungen zu *Zahlzerlegungen an den Händen* bewährt, die ausführlich in Schipper (2005b, S. 38ff.) beschrieben sind und in Schipper (2005a) als Karteikarten vorliegen.

Verdoppeln und Halbieren

Neben der Nutzung des schrittweisen Rechnens sollen Kinder beim Zehnerübergang auch lernen, geeignete Aufgaben mit Hilfe des Verdoppelns bzw. Halbierens zu lösen. Diese operative Strategie ist immer dann nahe liegend, wenn beide Summanden etwa gleich groß sind (7 + 8 = 7 + 7 + 1 oder 7 + 8 = 8 + 8 – 1) bzw. der Subtrahend ungefähr der Hälfte des Minuenden entspricht (14 – 6 = 14 – 7 + 1 bzw. 14 – 6 = 12 – 6 + 1). Um diese Verfahren nutzen zu können, müssen die Kinder alle Verdoppelungs- und Halbierungsaufgaben im Zahlenraum bis 20 auswendig wissen.

In manchen Schulbüchern wird das Verdoppeln und Halbieren erst unmittelbar vor der Behandlung des Zehnerübergangs thematisiert. Das ist deutlich zu spät, um neben der Sicherung des Grundverständnisses die Kinder noch zu einem Auswendigwissen dieser Aufgaben zu führen. Zu empfehlen ist, das Verdoppeln und Halbieren bereits bei der systematischen Erarbeitung der Zahlen bis 10 einzuführen, regelmäßig in Kopfrechenphasen zu wiederholen und mit der Behandlung der Zahlen bis 20 in diesem Zahlenraum zu erweitern.

Für schriftlich gestellte operative Übungen sind recht gut Tabellen geeignet:

Zahl	3	2	5			
Doppeltes				8	12	20

Zahl	8	10	4			
Hälfte				7	9	6

Eine Möglichkeit der Thematisierung des Zusammenhangs dieser beiden Operationen bietet das Aufgabenformat „Ich denke mir eine Zahl ...“. Drei Beispiele:

- Ich denke mir eine Zahl und halbiere sie. Dann habe ich 5. Welche Zahl habe ich mir gedacht?
- Ich denke mir eine Zahl und verdoppele sie. Dann habe ich 18.
- Ich denke mir eine Zahl, verdoppele sie, verdoppele dann das Ergebnis und halbiere diese Zahl. Dann habe ich die Zahl 8.

2.4 Erstes Rechnen

Erstes Rechnen ist immer ein zählendes Rechnen. Mindestens die Methode des Alleszählens beherrschen etwa 90 bis 95 % aller Schulanfängerinnen und Schulanfänger, wenn der Wert der Summe bzw. Differenz (und nicht etwa die Veränderung oder der Ausgangswert) gesucht ist, außerdem die Aufgabe in einen Kontext eingebunden ist („Rechengeschichte“) und die Zahlen nicht größer als 10 sind. Bis etwa Mitte des ersten Schuljahres sollten möglichst alle Kinder auch das Weiterzählen gelernt haben, nämlich das Vorwärtszählen bei Additionsaufgaben [3 + 5 über (3), 4, 5, 6, 7, **8** oder vom größeren Summanden aus über (5), 6, 7, **8**] und das Rückwärtszählen [7 – 5 über (7), 6, 5, 4, 3, **2**] bzw. das ergänzende Zählen [7 – 5 über (5), 6, **7**] bei Subtraktionsaufgaben.

Die Ablösung vom zählenden Rechnen am Ende des ersten bzw. zu Beginn des zweiten Schuljahres wird nicht dadurch bewirkt, dass zählende Verfahren zuvor tabuisiert oder gar verboten werden. Im Gegenteil: Sicheres (weiter)zählendes Rechnen vergrößert den Vorrat an auswendig gewussten Aufgaben, die für die Entwicklung heuristischer bzw. operativer Strategien („derived facts“) beim Zehnerübergang dringend benötigt werden. Es mag paradox klingen, ist aber dennoch richtig: Eine gute Voraussetzung für die Ablösung vom zählenden Rechnen ist das sichere Beherrschen des zählenden Rechnens. Daher sollte auch das Verfahren des Weiterzählens im Laufe des ersten Schuljahres offensiv thematisiert werden. Das ist auch deshalb wichtig, weil die Kinder bei einer fehlenden Thematisierung zwei unterschiedliche Verfahren des Rückwärtszählens entwickeln und durch die Kombination dieser beiden je für sich richtigen Verfahren zu zahlreichen ±1-Fehlern kommen.

Recht verbreitet sind der *Plus-Eins-Fehler bei der Subtraktion* (8 – 3 = 6) und der *Minus-Eins-Fehler bei der Addition* (4 + 5 = 8). Beide Fehler entstehen dadurch, dass der Zählprozess fälschlicherweise bereits mit dem ersten Summanden bzw. dem Minuenden beginnt. So wird bei 8 – 3 schon bei der 8 ein erster Finger ausgestreckt: 8, 7, **6**. Eine gute Hilfe besteht darin, den Kindern zu zeigen, dass das Aussprechen des Zahlwortes 8 mit geschlossener Faust erfolgt, hier angedeutet durch die in Klammern gesetzte 8: (8), 7, 6, **5**.

Daneben gibt es aber auch den *Minus-Eins-Fehler bei der Subtraktion*: 8 – 3 = 4. Wie er entsteht, zeigt das Beispiel Thomas.

Thomas 15 – 3 = 11 und 17 – 4 = 12

L.: 15 – 3?

T.: Da habe ich die 14 und die 13 und die 12 weggenommen, dann bleiben nur noch 11 übrig.

L.: 17 – 4?

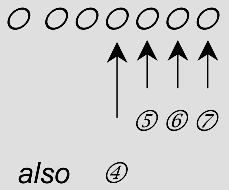
T.: 17 hab ich. Die 16 und die 15 und die 14 und die 13 weg.

L.: Hm, und was kommt raus?

T.: 12 bleiben noch übrig, weil ich die 13 noch weggenommen habe.

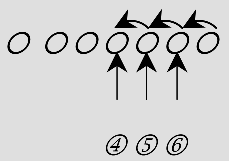
Wie Thomas denkt, kann aus seiner Formulierung „dann bleiben nur noch 11 übrig“ geschlossen werden. Sein Rückwärtszählen ist offensichtlich mit der *Vorstellung des Wegnehmens* von Plättchen verbunden, eine Vorstellung, die für die Methode des Alleszählens kennzeichnend ist. Dahinter steht eine kardinale Vorstellung; es geht um Anzahlen von Plättchen. Zum echten Rückwärtszählen passt dagegen die ordinale Vorstellung von Schritten auf einem Weg. Beide Vorstellungen können mit einem verbalen Rückwärtszählen verbunden sein, unterscheiden sich aber deutlich hinsichtlich des Beginns des Zählens und hinsichtlich der Frage, welches Zahlwort die Lösung liefert. Diese Unterschiede sollen am Beispiel der Aufgabe 7 – 3 erläutert werden.

7 – 3 mit Rückwärtszählen im Sinne des Wegnehmens (kardinale Verwendung der Zahlen)



Der Rückwärtszählprozess beginnt beim (vorgestellten) letzten, dem siebten Plättchen. Dieses und die mit 6 und 5 belegten Plättchen werden (in Gedanken) entfernt, so dass das Plättchen davor, das vierte, die (richtige) Lösung liefert.

7 – 3 mit Rückwärtszählen im Sinne des Rückwärtsgehens (ordinale Verwendung der Zahlen)



Der Rückwärtszählprozess beginnt mit dem Zahlwort sechs, das dem vorletzten Plättchen zugeordnet wird; der erste Schritt endet hier. Das Rückwärtszählen ist mit dem dritten ausgesprochenen Zahlwort, der vier, beendet. Diese Zahl liefert richtigerweise die Lösung, nicht erst die nächste Zahl.

Thomas beginnt den Rückwärtszählprozess bei der Aufgabe 15 – 3 mit der Zahl 14, was für die Idee des Rückwärtsgehens richtig ist. Das dritte Zahlwort, im Beispiel die 12, liefert dann eigentlich schon die richtige Lösung. Fälschlicherweise greift Thomas jetzt aber noch auf die Idee des Wegnehmens zurück, so dass erst „der Nächste“ für ihn die richtige Lösung darstellt. Diese Idee: „Der Nächste liefert die Lösung.“ führt zum Minus-Eins-Fehler bei der Subtraktion (15 – 3 = 11) und – übertragen auf die Addition – dann auch zum Plus-Eins-Fehler bei der Addition (8 + 4 = 13). Am besten lassen sich solche Fehler vermeiden, wenn die Kinder ein „echtes“ weiterzählendes Rechnen im ordinalen Sinne lernen und sie sich angewöhnen, beim Aussprechen der ersten Zahl eine geschlossene Faust zu zeigen.

2.5 Der Zehnerübergang

Etwa ein Dreivierteljahr lang ist zählendes Rechnen im ersten Schuljahr das vorherrschende und absolut akzeptable Verfahren. Das ändert sich mit der Behandlung des Themas Zehnerübergang, denn Aufgaben wie 6 + 8 oder 13 – 7 bieten in verstärktem Maße die Chance, operative Strategien zu nutzen. Diese Chance nicht zu ergreifen und stattdessen die Kinder auf Dauer mit ihren zählenden Verfahren über den Zehner rechnen zu lassen, ist ein schwerer didaktischer Fehler, der verfestigtes zählendes Rechnen und damit eine Rechenstörung zur Folge haben kann.

Aufgaben der o. g. Art können mit vier verschiedenen operativen Strategien gelöst werden, nämlich

- im Sinne des schrittweisen Rechnens,
- mit Hilfe des Verdoppelns bzw. Halbierens,
- über das gleich- bzw. gegensinnige Verändern sowie
- mit Hilfe des Ergänzens bei Subtraktionsaufgaben.

Alle vier operativen Strategien zeichnen sich dadurch aus, dass sie gegenüber den zählenden Verfahren die mentale Belastung (Kontrolle des Weiterzählprozesses) reduzieren und die Lösungsgeschwindigkeit deutlich erhöhen. Allerdings setzten sie einen Vorrat an auswendig gewussten Aufgaben sowie ein solides Verständnis der Eigenschaften und Beziehungen von Zahlen voraus.

Die beiden letztgenannten Strategien werden im Folgenden nicht ausführlicher besprochen, weil sie für das erste Schuljahr nur eine eingeschränkte Bedeutung haben bzw. einen Spezialfall einer anderen, ausführlicher behandelten Strategie darstellen. So ist das Nutzen des gegensinnigen Veränderns bei der Addition [6 + 8 = 7 + 7 aus (6 + 1) + (7 – 1)] sowie des gleichsinnigen Veränderns bei der Subtraktion [11 – 5 = 10 – 4 aus (11 – 1) – (5 – 1)] konzeptionell so schwierig, dass es nicht von allen Kindern gefordert werden kann. Dieses Verfahren bietet erst ab dem zweiten Schuljahr bei Aufgaben wie 43 + 45 = 44 + 44 oder 56 – 39 = 57 – 40 einen breiten Anwendungsbereich mit großen rechnerischen Vorteilen. Das ergänzende Rechnen bei der Subtraktion (12 – 8 = 4, weil 8 + **4** = 12) ist ein Spezialfall des schrittweisen Rechnens und wird dort mitbehandelt.

Schrittweises Rechnen

Das schrittweise Rechnen ist ein höchst mächtiges Verfahren. Es ist das einzige der im ersten Schuljahr thematisierten Verfahren, das zugleich fortsetzbar und universell ist, d. h. immer genutzt werden kann, unabhängig von der spezifischen Zahlenkonstellation. Die Aufgabe 6 + 8 z. B. wird dadurch gelöst, dass zunächst bis zehn (6 + 4 = 10) und dann weiter (10 + 4 = 14) gerechnet wird. Entsprechend wird bei der Subtraktion vorgegangen: 12 – 7 = 12 – 2 – 5.

Eine besondere Form des schrittweisen Rechnens wird allgemein als *Hilfsaufgabe* bezeichnet. Gerechnet wird dabei im ersten Schritt eine andere leichtere Aufgabe, häufig mit einem vollen Zehner, um dann in einem zweiten Schritt die so entstandene Abweichung zu korrigieren. So kann die Aufgabe 6 + 8 auch über 6 + 10 – 2 gelöst werden. Auch Hilfsaufgaben können im ersten Schuljahr angesprochen werden. Sie entfalten ihre Vorzüge aber erst richtig im Zahlenraum bis 100 und darüber hinaus.

Ein weiterer Spezialfall des schrittweisen Rechnens ist das *Ergänzen bei Subtraktionsaufgaben*. So kann die Aufgabe 16 – 14 in einem Schritt über 14 + **2** = 16 gelöst werden. Auch bei Aufgaben mit Zehnerüberschreitung kann das Ergänzen eine Erleichterung sein, weil die einzelnen Rechenschritte mit kleineren Zahlen durchgeführt werden können, etwa bei der Aufgabe 12 – 8, die (etwas) einfacher über 8 + 2 + 2 gelöst werden kann.

Über keine heuristische Strategie ist in den letzten zwei Jahrzehnten in Deutschland so heftig gestritten worden wie über das schrittweise Rechnen. Kritisiert wird es z. B. als ein völlig veraltertes Verfahren, manchmal sogar verbunden mit einer Diffamierung von Lehrkräften als „ewig Gestrige“, weil sie diese Strategie noch immer unterrichten. Gefordert wird stattdessen, dass die Kinder mit ihren „individuellen Verfahren“ über den Zehner rechnen, ohne genauer zu erläutern, ob auch zählendes Rechnen auf Dauer als „individuelles Verfahren“ akzeptiert wird oder nicht. Daneben gibt es etwas differenziertere Sichtweisen, die vor einer „ausschließlichen Nutzung“ oder einer „voreiligen Festlegung“ warnen (vgl. Krauthausen/Scherer[3]2007). Die Folgen sind u. a., dass Lehrerinnen und Lehrer sich kaum noch trauen, offen für diese Strategie einzutreten, und dass es Lehrbücher gibt, die sie kaum thematisieren.

Diese Diskussion läuft in die falsche Richtung. Dass eine Rechenstrategie schon weit mehr als 100 Jahre im Unterricht thematisiert wird, spricht nicht gegen sie, eher dafür, dass sie erfolgreich ist. Und den „individuellen Verfahren“ sind da Grenzen zu setzen, wo die „Individualität“ zu einem Abgleiten in die Rechenstörung führt, weil die Kinder auch noch im zweiten Schuljahr und darüber hinaus Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Weiterzählen lösen.

Die Warnung vor einer ausschließlichen Nutzung des schrittweisen Rechnens ist dagegen berechtigt, trifft aber kaum noch neuere Lehrwerke, die sich dem Ziel der Förderung des flexiblen Rechnens verpflichtet fühlen und entsprechend mehrere Strategien thematisieren. Ähnlich verhält es sich mit der Warnung vor einer voreiligen Festlegung auf dieses Verfahren. Neuere Lehrwerke vermeiden dies z. B. dadurch, dass sie Rechenkonferenzen anregen, in denen die Vor- und Nachteile (Ökonomie, Universalität, Fortsetzbarkeit) der Verfahren besprochen werden sollen. Wenn Kinder dann aus mehreren heuristischen Verfahren auswählen und flexibel rechnen können, dürfen und sollen sie tatsächlich mit ihren „individuellen (nicht-zählenden!) Verfahren" rechnen.

Unter diesen „individuellen Verfahren" ist das schrittweise Rechnen eines der mächtigsten. Seine Grundidee, eine der beiden Zahlen zu zerlegen und die Aufgabe in leichteren Schritten zu lösen, ist eine für das Rechnen insgesamt zentrale Idee, die auch noch beim großen Einmaleins greift, indem beispielsweise die Aufgabe $14 \cdot 16$ über $10 \cdot 16 + 4 \cdot 16$ gelöst wird.

Erarbeitet wird das schrittweise Rechnen – wie andere operative Verfahren auch – über Handlungen an Materialien. Die konkreten Handlungen werden verinnerlicht und so zu mentalen Rechenverfahren, die der Unterstützung durch Materialhandlungen nicht mehr bedürfen. Bei einigen Kindern stimmen diese Theorie und ihre Praxis tatsächlich überein. Es gibt aber auch solche, die sich dieser Theorie anscheinend hartnäckig widersetzen. Trotz intensiver Arbeit an Materialien gelangen sie nicht zu einer leistungsstarken Kopfrechenstrategie, sondern zählen, sobald sie das Material nicht mehr zur Hand haben.

Der wesentliche Grund dafür ist, dass gerade die leistungsschwachen Kinder Materialien bloß als *Lösungshilfen* nutzen, indem sie am Material zählend die Aufgabe lösen. Diese Materialien sollen aber *Lernhilfen* bei der Entwicklung von Rechenstrategien sein. Das bedeutet, dass ein bloßes „Machen" mit Material für das angestrebte Ziel Kopfrechnen eher kontraproduktiv ist, weil es die Kinder immer wieder auf das Zählen zurückwirft.

Ein guter *handlungsorientierter Mathematikunterricht* mit dem Ziel der Entwicklung von Rechenstrategien berücksichtigt daher zwei wichtige Grundsätze.

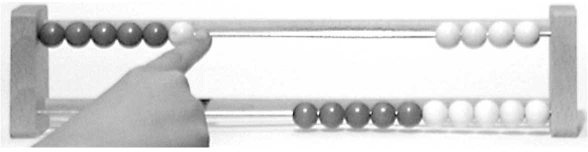
Zwei Grundsätze einer handlungsorientierten Erarbeitung operativer Strategien:

<u>1. Grundsatz:</u> Handlung und angestrebter Operation müssen strukturell übereinstimmen;

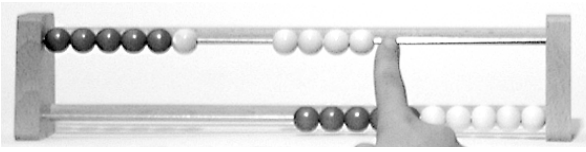
<u>2. Grundsatz:</u> Besonders bei leistungsschwachen Kindern muss der Prozess der Verinnerlichung durch geeignete Maßnahmen unterstützt werden.

Anders als Steckwürfel oder Wendeplättchen, die von den Kindern immer wieder zählende Zahldarstellungen fordern, ermöglicht der Rechenrahmen Zahldarstellungen mit einem „Fingerstreich", die im Sinne des ersten Grundsatzes strukturell mit der angestrebten Kopfrechenstrategie übereinstimmen. Das sei an der Beispielaufgabe 6 + 8 verdeutlicht.

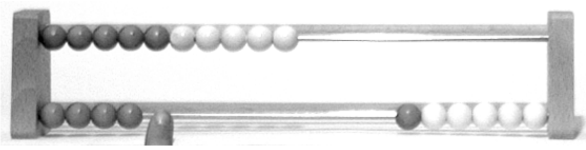
Zunächst sechs Perlen oben ...



... dann noch vier (von acht) auf der oberen Stange ...

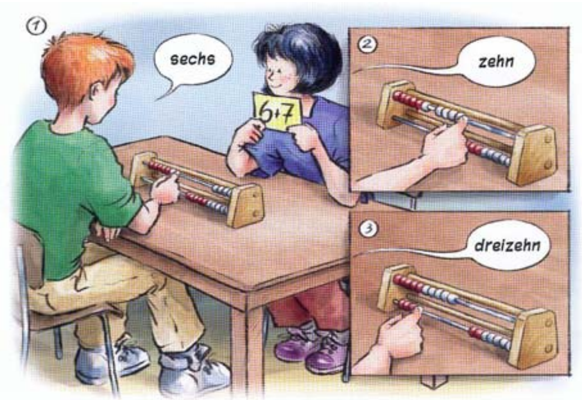


... und noch die fehlenden vier auf der unteren.



Sechs plus acht gleich vierzehn.

Diese Handlungen sollen möglichst mit einer Kurzsprechweise „Sechs – zehn – vierzehn“ begleitet werden. Dass diese Übung auch gut mit einem Partner zusammen durchgeführt werden kann, zeigt die folgende Abbildung am Beispiel der Aufgabe 6 + 7.



Aus: Schipper (2005 a)

Manchen Kindern reichen einige wenige konkrete Übungen dieser Art. Dann sind sie bereits in der Lage, dieses schrittweise Rechnen ohne Hilfe der Materialhandlungen nur noch „im Kopf“ zu vollziehen. Andererseits gibt es aber Kinder, die trotz zahlreicher konkreter Handlungen den Prozess der Verinnerlichung anscheinend nicht vollziehen können. Sobald sie eine Aufgabe ohne Materialhilfe lösen sollen, fallen sie auf ihr gewohntes zählendes Rechnen zurück. 6 + 8 zu lösen gelingt ihnen mit Material und sprachlicher Begleitung „sechs – zehn – vierzehn“, ohne Material wird 6 + 8 über (6), 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, **14**, also mit der Methode des Weiterzählens gelöst. Offensichtlich bedürfen diese Kinder einer weiteren Hilfe, die es ihnen möglich macht, aus den konkreten Handlungen tatsächlich mentale Vorstellungen zu entwickeln. Hier wird die Beachtung des o. g. zweiten Grundsatzes notwendig; der Prozess der Verinnerlichung muss unterstützt werden.

Gute Möglichkeiten, solchen Kindern beim Aufbau mentaler Vorstellungen zu helfen, bestehen darin, erstens den Prozess der Ablösung vom Material behutsam zu vollziehen, zweitens dem Kind diesen Prozess bewusst zu machen und drittens die *Vorstellung der Handlungen* am Material auch dann zu erhalten, wenn die Aufgabe ohne Materialhilfe gelöst wird. Wenn die Kinder gelernt haben, Aufgaben wie 6 + 8 bzw. im zweiten Schuljahr 37 + 8 mit Hilfe entsprechender Handlungen am Zwanziger- bzw. Hunderter-Rechenrahmen und sprachlicher Begleitung zu lösen, dann besteht die nächste Anforderung darin, dass die Kinder bei vergleichbaren Aufgaben den Rechenrahmen nur noch anschauen, nicht mehr anfassen. Sie können ihre Handlungen in der Vorstellung „sehen“, ohne sie auszuführen. Das Ausweichen auf die Routine des Zählens wird durch diese Vorstellung vermieden.

Noch einen Schritt weiter kommt man mit der hier abgebildeten Maßnahme, die den Kindern die Sicht auf das Material nimmt, dennoch aber dafür Sorge trägt, dass das Denken des Kindes weiterhin an *vorgestellte Materialhandlungen* gebunden bleibt.

Aus: Schipper (2005 a)

Dem Kind werden die Augen verbunden oder der Rechenrahmen wird hinter einem Sichtschirm verdeckt. Der Partner stellt dem Kind eine Aufgabe mit Zehnerüberschreitung, das Kind diktiert diesem Partner die Handlungen am Material, die dieser ausführt.

So ist sichergestellt, dass auch bei der Lösung der Aufgabe ohne konkrete Handlungen am Material die Vorstellung der Materialhandlung erhalten bleibt und kein Ausweichen in Richtung zählendes Rechnen erfolgt. Dass mit diesem Verfahren auch andere Zehner im Zahlenraum bis 100 überschritten werden können, zeigt die Abbildung oben.

Die oben beschriebene Handlungsfolge stimmt strukturell mit dem Verfahren des schrittweisen Rechnens überein. Sie kann protokolliert werden in folgenden bekannten Schreibformen:

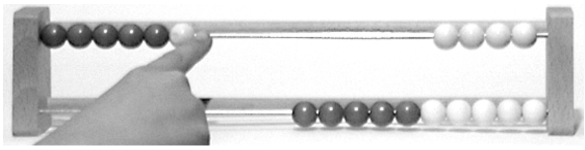
$\underline{7 + 9 = \square}$		7 + 9 = 16
7 + 3 = 10	oder	7 + 3 = 10
10 + 6 = 16	verkürzt	$\underline{10 + 6 = 16}$
7 + 9 = 16		

Das Verfahren des schrittweisen Rechnens ist in den letzten Jahren zum Teil heftig kritisiert worden (s. o.). Wenn sich die Kritik auf ein fast schon drillmäßiges Einüben einer Schreibweise bezieht, wenn selbst von Kindern, die diese Art der Rechnung bereits souverän im Kopf vollziehen, weiterhin diese Notationsform verlangt wird, dann ist diese Kritik berechtigt. Denn diese Notation ist bloß ein Protokoll des Lösungsweges, das Kinder daran erinnern kann, wie die Aufgabe gelöst wurde. Den Lösungsweg selbst müssen sie sich aber aus Handlungen an geeignetem Material erarbeiten. Kinder, die dies noch nicht können, lernen es auch nicht durch seitenweises Aufschreiben solcher Rechenpäckchen. Vielmehr besteht dann die Gefahr, dass sie dabei die äußere Form („bis zehn und dann weiter“) lernen, die einzelnen Teilberechnungen aber weiterhin zählend durchführen und so ihr zählendes Rechnen verfestigen

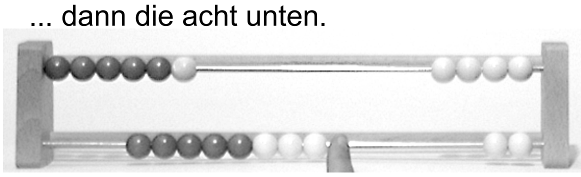
Verdoppeln bzw. Halbieren nutzen

Auch die Idee, das Verdoppeln zu nutzen, lässt sich gut aus Handlungen an Materialien gewinnen. Nicht wenige Kinder stellen von sich aus die beiden Summanden einer Additionsaufgabe getrennt voneinander auf den beiden Stangen des Zwanziger-Rechenrahmens dar:

Die sechs Perlen oben ...

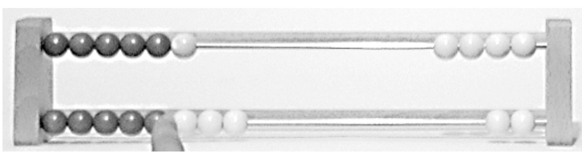


... dann die acht unten.



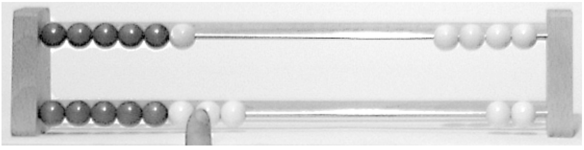
Entscheidend ist dann, wie die Kinder den Wert der Summe ermitteln.

Sechs plus acht ist ...



... fünf plus fünf plus eins plus drei.

Oder:



... sechs plus sechs plus zwei.

Solche guten Lösungen unter Ausnutzung des Verdoppelns setzen voraus, dass übereinander angeordnete und nicht nur linear aufeinander folgende Zahldarstellungen im vorhergehenden Unterricht thematisiert worden sind. Wichtig dabei ist insbesondere, dass die Kinder gelernt haben, die 10 nicht nur als Doppel-Fünf nebeneinander, sondern auch untereinander darzustellen und aufzufassen.

2.6 Grundaufgaben auswendig wissen

Neben zählendem Rechnen und dem Nutzen operativer Strategien können Kinder im ersten Schuljahr Additions- und Subtraktionsaufgaben auch per Auswendigwissen („number facts“) lösen. Der Prozess des mehr oder minder bewussten Einprägens der Grundaufgaben beginnt schon in der Vorschulzeit und sollte im Laufe des ersten Schuljahres u. a. durch tägliches Kopfrechnen weiterentwickelt werden. Am Ende dieses Schuljahres sollen möglichst alle Kinder alle Aufgaben des kleinen Einspluseins und Einsminuseins im Zahlenraum bis 10 auswendig wissen. Spätestens zu Beginn der Erarbeitung der schriftlichen Rechenverfahren zur Addition und Subtraktion im 3. Schuljahr sollen solche Aufgaben auch im Zahlenraum bis 20 auswendig gewusst sein.

Die Bedeutung des Auswendigwissens ist in den letzten etwa 20 Jahren in der Mathematikdidaktik manchmal unterschätzt worden. In dem berechtigten Bemühen, mit dem Schlagwort „Mathematik entdecken“ eine Unterrichtsgestaltung herbeizuführen, die den Kindern mehr eigenständiges Lernen erlaubt, ist ein wenig aus dem Blick geraten, dass ohne eine solide Basis auswendig gewusster Fakten ein solches eigenständiges Lernen und Entdecken von Mathematik kaum möglich ist. Das Auswendigwissen ist das ökonomischste und mental am wenigsten belastende Lösungsverfahren. Es hält den Kopf frei für andere anspruchsvollere Aufgaben und ist ein Kennzeichen der in Mathematik leistungsstarken Kinder. Das zeigt auch die Studie von Gray (1991; vgl. auch Radatz u. a. 1998, S. 76f.), der untersucht hat, wie unterschiedlich leistungsstarke Sieben- bis Zwölfjährige Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 10 bzw. 20 lösen. Zentrales Merkmal der als leistungsschwach eingestuften Kinder ist das zählende Rechnen, zentrales Merkmal der leistungsstarken das Auswendigwissen.

Mit dieser Feststellung soll nicht für eine Rückkehr zu alten Drillmethoden plädiert werden. Es gibt intelligentere Verfahren des Übens, die auf einem konzeptionellen Verständnis und einer sicheren Beherrschung der Rechenoperation basieren und dadurch Kinder zu (fast immer) richtigen Lösungen befähigen. Denn das Faktenwissen ist weniger das Resultat eines vom Rechnen losgelösten Prozesses des Auswendiglernens einzelner Aufgaben und ihrer Lösungen als vielmehr das Ergebnis einer durch häufiges richtiges Lösen von Aufgaben hergestellten Verbindung zwischen Aufgabe und Lösung. Das erklärt auch, warum gerade solche Kinder, die zählend rechnen und dabei viele Fehler machen, in der Regel nur über einen geringen Vorrat an auswendig gewussten Aufgaben verfügen. Die zahlreichen Fehler verhindern eine stabile Verbindung zwischen Aufgabe und richtiger Lösung.

Besondere Bedeutung kommt beim Erlernen der Grundaufgaben solchen Übungsformen zu, die die Zusammenhänge zwischen Aufgaben herausarbeiten, z. B. Untersuchungen an der Einspluseins-Tafel. Denn wir verstehen einen Sachverhalt erst dann wirklich, wenn wir seine Beziehungen und Zusammenhänge mit anderen Sachverhalten erkennen und bei der Lösung weiterer Aufgaben nutzen. Grundaufgaben sollen daher nicht als (isolierte) Fakten auswendig gelernt, sondern als Fakten-Netzwerke aufgebaut werden.

Zusammenfassung: Arithmetische Kompetenzen am Ende des ersten Schuljahres

Um erfolgreich weiterlernen zu können, sollten alle Kinder am Ende des ersten Schuljahres über folgende Kompetenzen verfügen:

- im Zahlenraum bis (mindestens) 20 schnell und sicher vor- und rückwärts zählen,
- alle Zerlegungen aller Zahlen bis 10 auswendig wissen,
- alle Aufgaben des kleinen Einspluseins und Einsminuseins im Zahlenraum bis 10 auswendig wissen,
- alle Aufgaben zum Verdoppeln und Halbieren im Zahlenraum bis 20 auswendig wissen,
- Additions- und Subtraktionsaufgaben des Typs ZE ± E im Zahlenraum von 10 bis 20 mit Hilfe von Analogien lösen: 14 +3 = 17, *weil* 4 + 3 = 7,
- Subtraktionsaufgaben des Typs ZE - ZE auch mit Hilfe des Ergänzens lösen: 18 – 16 = 2, *weil* 16 + 2 = 18
- Alle Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Zehnerüberschreitung mit Hilfe operativer Strategien (das Verdoppeln bzw. Halbieren nutzen sowie schrittweises Rechnen) lösen.

2.7 Addition und Subtraktion im zweiten Schuljahr

Die Probleme der Kinder, die selbst über das erste Drittel des zweiten Schuljahres hinaus Aufgaben zum Zehnerübergang immer noch weiterzählend lösen, nehmen dramatisch zu. Die Anzahl und der Variantenreichtum der Fehler werden größer; die Kinder versagen in immer mehr Inhaltsbereichen. Der Abstieg in die Rechenstörung schreitet voran.

Zählende Rechner beginnen, ihr Verfahren zu verbergen. Dabei sind ihrem Ideenreichtum kaum Grenzen gesetzt. Die Hände werden unter dem Tisch, den Oberschenkeln oder im dichten Haar verborgen; weitergezählt wird an den Blumentöpfen auf der Fensterbank oder an den Buntstiften in der Federtasche, nicht selten begleitet mit rhythmischen Kopfbewegungen. Wem auch dies noch zu offensichtlich ist, der kontrolliert seinen Weiterzählprozess nur noch im Kopf ohne externe Hilfen: 7 + 6: (7), 8 ist 1, 9 ist 2, 10 ist 3, 11 ist 4, 12 ist 5, 13 ist 6. Diese Form des Zählens des Zählens belastet die mentale Kapazität stark. Die Folge ist eine Zunahme von Fehlern; 7 + 6 ist mal 12, mal 13, ein anderes Mal 14. Diese Fehlerhäufung verhindert ein Auswendiglernen solcher Aufgaben. Das auf diese Weise dürftig bleibende Repertoire an auswendig gewussten Aufgaben zwingt die Kinder wiederum zum zählenden Rechnen. Ein Teufelskreis ist in Gang gesetzt.

Die Behandlung des Aufgabentyps ZE ± E mit Stellenüberschreitung (27 + 8, 54 – 7) bietet eine erneute Chance, Aufgaben mit Zehnerübergang zu thematisieren und die Verfahren der Kinder zu prüfen. Die Lehrkraft sollte die Methode des lauten Denkens nutzen, indem sie sich in Stillarbeitsphasen zu solchen Kindern setzt, die durch viele Fehler um ± 1 oder direkt beobachtbares zählendes Rechnen auffallen. Sie sollte erneut prüfen, ob diese Kinder inzwischen die Zahlzerlegungen bis 10 sowie die Verdoppelungs- und Halbierungsaufgaben im Zahlenraum bis 20 beherrschen. Ebenso sind auch noch Aufgaben zum Übergang über den ersten Zehner (4 + 7, 15 – 8) zu empfehlen.

Zählendes Rechnen verlangt die ganze Aufmerksamkeit der Kinder für die Kontrolle des Weiterzählprozesses. Eine Folge kann sein, dass die Kinder am Ende oder sogar während des Zählprozesses die Aufgabe vergessen haben. Sind Kinder in der Klasse, die bei mündlich gestellten Aufgaben häufiger um Widerholung der Aufgabe bitten, kann dies daran liegen, dass die hohe mentale Belastung beim Weiterzählen zum Vergessen der Aufgabe geführt hat. Es ist zu prüfen, ob diese Kinder tatsächlich zählend rechnen.

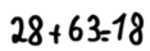
Viele zählende Rechner „sehen“ auch keine Analogien. 3 + 4, 13 + 4, 23 + 4, ... 93 + 4 sind immer wieder neue Aufgaben, die neu „erzählt“ werden müssen. Die Lehrkraft sollte daher prüfen, ob das Analogieverständnis der Kinder bei solchen Aufgabenserien ausgeprägt ist. Ebenso bleibt zu prüfen, ob die Kinder den Zusammenhang zwischen 3 + 5 und 30 + 50 sehen.

Dauerhaftes zählendes Rechnen verhindert das Verständnis der Strukturen von Arbeitsmitteln. Auch nicht-linear angeordnete Materialien wie die Hunderter-Tafel, das Hunderter-Feld oder der Hunderter-Rechenrahmen werden von zählenden Rechnern ohne Berücksichtigung der Zehnerstruktur oft nur für ein Abzählen in Einerschritten genutzt. Die Folge ist, dass diese Kinder nur ihr zählendes Rechnen noch weiter verfestigen. Gerade diejenigen Kinder, die die Hilfe der Arbeitsmittel am dringendsten benötigen, profitieren von ihnen nicht, weil sie deren Strukturen nicht verstanden haben. Hier zeigt sich ein weiterer Teufelskreis: Zählendes Rechnen verhindert ein Verständnis der Strukturen der Arbeitsmittel, und dieses fehlende Verständnis wirft die Kinder wieder auf das zählende Rechnen zurück.

Es ist zu prüfen, ob die auffälligen Kinder ein strukturelles Verständnis solcher Arbeitsmittel entwickelt haben. Die einfachste Form besteht darin, sich z. B. das Feld 37 auf der (bezifferten) Hunderter-Tafel zeigen zu lassen. Längeres Kreisen mit dem Finger über der Hunderter-Tafel deutet auf fehlendes Strukturverständnis hin. Kinder, die die Hunderter-Tafel verstanden haben, sind in der Lage, einzelne Felder sehr schnell zu identifizieren. Weitere Prüfungen können auf der leeren Rückseite der Hunderter-Tafel oder auf dem Hunderter-Feld vorgenommen werden. Zunächst wird geklärt, wo die 1, die 10 und die 100 stehen müssten. Dann soll das Kind zeigen, in welches Feld die 27 geschrieben werden müsste. Überlegt es sehr lange? Macht es Zeilenfehler, indem es die 27 in der zweiten Reihe auf Platz 7 (also auf Feld 17) verortet? Macht es einen Zahlendreher und stellt die 27 auf Feld 72 dar?

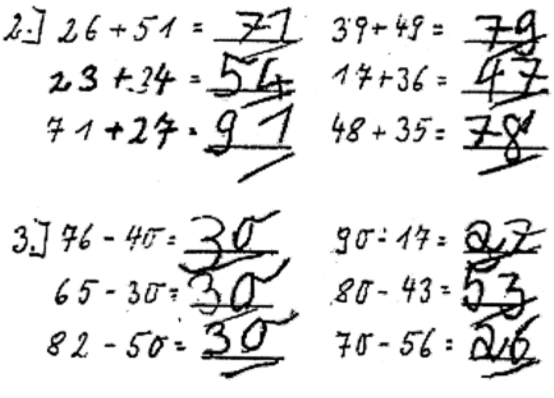
Additions- und Subtraktionsaufgaben im ersten Schuljahr können zählend gerechnet werden, ohne dass der Zeitaufwand dafür erheblich größer ist als bei der Nutzung operativer Strategien. Bei nicht wenigen Kindern, die auf Dauer zählend rechnen, findet man daher im Zeugnis am Ende des ersten Schuljahres eine Anmerkung wie: „Uli rechnet noch etwas langsam.“ Nach der Zahlenraumerweiterung im zweiten Schuljahr führt zählendes Rechnen zu erheblichen Verlängerungen der Bearbeitungszeit. Viele dieser Kinder vermeiden daher das zeitaufwändige Rechnen mit den Zahlen und ersetzen es durch ein regelhaftes Rechnen mit einzelnen Ziffern. Auf diese Weise entstehen Lösungen, die auf den ersten Blick manchmal unverständlich erscheinen und fälschlicherweise als „Zufallsfehler“ gedeutet oder auf „Unkonzentriertheit“ zurückgeführt werden, tatsächlich aber auf eine streng eingehaltene individuelle Regel zurückzuführen sind. Dazu einige Beispiele:

Julia kommt Ende des zweiten Schuljahres bei der Aufgabe 28 + 63 zu der Lösung 18. Dass das



Ergebnis kleiner ist als jeder der beiden Summanden fällt ihr nicht auf, weil sie *ziffernweise* und nicht mit den Zahlen rechnet. Sie weiß, dass sie „die richtigen Zahlen zusammenrechnen“, also die Ziffern gleicher Stellenwerte verrechnen muss. So beginnt sie mit 8 + 3 und erhält 10, ein typischer Zählfehler. Dann rechnet sie 2 + 6 = 8 und addiert beide Teilsummen: 10 + 8 = 18.

Daniel löst in einem Test zu Beginn des dritten Schuljahres (hier ein kleiner Ausschnitt) fast alle Aufgaben falsch, aber



streng nach einer Regel, die er im Zusammenhang mit Aufgaben des Typs ZE + Z von seiner Mutter gelernt hat: Addiere die beiden Zehner(ziffern) und hänge die Einerziffer an. Genau diese Regel befolgt er auch bei diesen Aufgaben: 26 + 51 = 71 (2 + 5 = 7 „und dann noch die 1“); 17 + 36 = 47 (1 + 3 = 4 „und dann noch die 7“); 76 – 40 (7 – 4 = 3 „und dann noch die 0“); 70 – 56 = 26 (7 – 5 = 2 „und dann noch die 6“).

In manchen Fällen können solche Fehler mit Hilfe einer Fehleranalyse identifiziert werden; die auf diese Weise gewonnene Hypothese über den Denkvorgang des Kindes sollte aber auf jeden Fall mit der Methode des lauten Denkens überprüft werden. Es gibt aber durchaus auch Fälle, in denen man mit der Fehleranalyse nicht weiterkommt. So rechnet z. B. Kristina folgendermaßen: 34 + 28 = 64; 46 – 25 = 76; 72 – 24 = 102. Auch diesen Fehlern liegt eine einheitliche Vorgehensweise zugrunde, die man mit einer Fehleranalyse aber kaum erkennen kann. Kristinas „Strategie“ kann etwa folgendermaßen beschrieben werden: Nimm irgendwelche zwei Ziffern aus der Aufgabe, addiere oder subtrahiere sie unabhängig vom Rechenzeichen in der Aufgabe und mache dabei manchmal einen Zählfehler; hinter dieses Ergebnis schreibe eine der vier Ziffern. Beispiele: 46 – 25 = 76, denn: 6 + 2 = 7 „und dann noch die 5“; 72 – 24 = 102, denn: 7 + 4 = 10 „und dann noch die 2“. (Dieser Fall ist übrigens – wie auch alle anderen Fälle – authentisch.)

3 Diagnose und Förderung bei Verdacht auf Rechenstörungen

Das Kapitel 2 dieser Handreichung beschreibt an vielen Stellen, welche unterrichtlichen Schwerpunkte im Sinne einer Prävention von Rechenstörungen gesetzt werden sollten und worauf im Unterricht besonders zu achten ist. Leistungsheterogenität ist aber auch in einem solchen Unterricht nicht zu vermeiden. Es wird immer leistungsstärkere und leistungsschwächere Kinder geben. Spätestens ab Mitte des zweiten Schulbesuchsjahres sollte daher überprüft werden, ob die mathematischen Probleme der Kinder der letztgenannten Gruppe so schwerwiegend sind, dass von einer Rechenstörung gesprochen werden muss, die eine *besondere Förderung* erforderlich macht. In diesem Kapitel werden für diese Kinder und für solche, die evtl. noch später auffällig werden, Möglichkeiten der Diagnostik und der Entwicklung und Durchführung eines Förderplans aufgezeigt.

3.1 Möglichkeiten und Grenzen aktueller Diagnoseverfahren

In zahlreichen Fortbildungsveranstaltungen für Lehrerinnen und Lehrer sowie für Lern- und Ergotherapeuten wird immer wieder nach einer umfassenden Diagnostik für Kinder mit Schwierigkeiten in Mathematik gefragt. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer äußern, dass sie im Bereich der Lese- und Rechtschreibschwäche recht gut auch über Diagnoseverfahren informiert seien, dass aber ihre Kenntnisse über die Symptomatik sowie Diagnostik und Förderung rechenschwacher Kinder erheblich geringer seien. Solche Äußerungen spiegeln den Bedarf, aber auch den zeitlichen Rückstand in der Forschungs- und Entwicklungsarbeit im Bereich besonderer Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens gegenüber dem Bereich Lese- und Rechtschreibschwierigkeiten wider. Diagnostische Verfahren, die für sich in Anspruch nehmen, Rechenstörungen aufdecken zu können, sind erst in den letzten etwa zehn Jahren in nennenswertem Maße entwickelt worden. In einer sicher nicht ganz trennscharfen Einteilung lassen sich drei Typen von Verfahren unterscheiden.

(1) Etikettierungstest

Dieser Typ von Diagnostik hat vor allem das Ziel, eine eindeutige, auch einem Prozess vor einem Verwaltungsgericht standhaltende Feststellung zu treffen, ob bei einem Kind eine so genannte Dyskalkulie vorliegt oder nicht. Von dieser Entscheidung kann es abhängen, ob öffentlich finanzierte Hilfe nach § 35a SGB VIII (Eingliederungshilfe für seelisch behinderte Kinder und Jugendliche) gewährt wird. Solche Tests, aus denen in der Regel keine Förderpläne für betroffene Kinder abgeleitet werden können, sind für den schulischen Einsatz unbrauchbar. Denn die Funktion schulischer Diagnostik ist nicht, die Kinder „abzustempeln“ („Dyskalkuliker“) und so eine Grundlage für Selektion und Segregation zu schaffen, sondern ein auf die Probleme des Kindes abgestimmtes Förderprogramm zu entwickeln.

(2) Tests zum Auffinden von Risikokindern

Dieser Typ von Diagnoseverfahren kann helfen, frühzeitig auf Risikokinder aufmerksam zu werden. Das ist z. B. wichtig zu Schulbeginn, wenn die Lehrerin bzw. der Lehrer die neue Lerngruppe noch nicht kennt. Für diesen Zeitpunkt ist z. B. der OTZ – Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (Van Luit/Van de Rijt/Hasemann 2001) – gut geeignet. Die Ergebnisse des einzelnen Kindes werden unter Berücksichtigung seines Alters fünf verschiedenen Niveaus der Zahlbegriffsentwicklung – von A bis E –

zugeordnet. D- und E-Kinder im Sinne dieser Kategorisierung gelten als Risikokinder. Der Nachteil des Tests ist, dass er nicht als Gruppentest durchgeführt werden kann; für die Überprüfung eines Kindes werden etwa 30 Minuten benötigt. Dieser Aufwand lohnt auf jeden Fall für solche Kinder, bei denen man nach etwa vier bis sechs Wochen Anfangsunterricht den Eindruck hat, dass sie in Mathematik besonders leistungsschwach sind. Denn der Test muss nicht unbedingt mit der ganzen Klasse durchgeführt werden. Er eignet sich auch gut für die Diagnostik einzelner Kinder.

(3) Prozessorientierte Diagnose

Diese Form der Diagnostik ist immer dann zu bevorzugen, wenn nicht nur festgestellt werden soll, in welchen Inhaltsbereichen die Kinder Auffälligkeiten zeigen, sondern auffällige Vorgehensweisen identifiziert und auf dieser Basis ein Förderplan entwickelt werden soll. Schulnahe Einrichtungen wie das ABAKÜS(S)CHEN in Potsdam oder die Beratungsstelle für Kinder mit Rechenstörungen an der Universität Bielefeld praktizieren eine solche prozessorientierte Diagnostik, in deren Rahmen Kinder Aufgaben gestellt werden, die geeignet sind, auf das Vorliegen von Symptomen für Rechenstörungen aufmerksam zu machen.

Eine solche Diagnostik kann und soll einerseits von der Fachlehrkraft im Sinne einer informellen Prüfung *unterrichtsbegleitend* im regulären Mathematikunterricht oder im Förderunterricht durchgeführt werden. Der Abschnitt 3.2 zeigt, welche Typen von Aufgaben den Kindern gestellt und auf welche Besonderheiten der Bearbeitung und Lösung der Aufgaben durch die Kinder dabei geachtet werden sollte. Im Abschnitt 3.3 wird ein etwas formelleres Prüfverfahren beschrieben, das als Grundlage für schulische Entscheidungen über einen besonderen Förderbedarf im Sinne der AV Rechenstörungen durchzuführen und zu dokumentieren ist. Die Befunde aus der informellen Prüfung im Sinne von 3.2 können und sollen durchaus auch in die Auswertung im Sinne von 3.3 einfließen.

3.2 Unterrichtsbegleitende prozessorientierte Diagnostik

In vielen Mathematikstunden gibt es Übungsphasen, in denen Aufgaben aus dem Buch oder Aufgabenblätter bearbeitet werden. Diese Phasen sollten Lehrerinnen und Lehrer auch für diejenigen Kinder nutzen, die ihnen in Mathematik als leistungsschwach aufgefallen sind. Bei dieser unterrichtsbegleitenden Diagnostik ist es wichtig, nicht nur Fragen zum aktuellen Unterrichtsinhalt zu stellen, sondern auch Aufgaben aus zurückliegenden Inhaltsbereichen. Dafür werden im Folgenden Vorschläge unterbreitet. Sie konzentrieren sich auf solche Bereiche, die für ein erfolgreiches Weiterlernen besonders kritisch sind.

Zählen und Ordnung der Zahlen

Im Laufe des ersten Schuljahres sollte die Fähigkeit, die Zahlwortreihe bis mindestens 20 vor- *und rückwärts* aufsagen zu können, automatisiert sein. Analoges gilt für den Zahlenraum bis 100 im zweiten Schuljahr. Ebenso sollten die Vorgänger bzw. Nachfolger von Zahlen („Welche Zahl kommt beim Zählen vor bzw. nach x?“) mühelos benannt werden können. Leistungsschwache Kinder haben nicht selten Probleme beim Rückwärtszählen. Eine Folge ist, dass ihnen der Übergang vom Alleszählen zum Weiterzählen bei der Subtraktion – anders als bei der Addition – kaum gelingt und dadurch Subtraktionsaufgaben – anders als zu Schulbeginn – auf Dauer schwerer werden als Additionsaufgaben. Daher sollte insbesondere bei denjenigen Kindern, die bei Subtraktionsaufgaben deutlich mehr Probleme haben als bei Additionsaufgaben, die Fertigkeit geprüft werden, schnell und sicher (automatisiert) rückwärts zu zählen.

Zahlendiktat

Abhängig vom aktuellen Schuljahr werden Kindern ein- bis dreistellige Zahlen diktiert, die sie aufschreiben sollen. Dabei ist darauf zu achten, in welcher Reihenfolge die Ziffern geschrieben werden (inverse Zahlschreibweise, also zunächst die Einer, dann die Zehner?), ob Zahlendreher entstehen und ob einzelne Ziffern spiegelverkehrt geschrieben werden. Alle drei Auffälligkeiten können Indikatoren für eine Links-/Rechts-Problematik sein.

Rechts-/Links-Orientierung

Die Fähigkeit, links und rechts sicher zu unterscheiden, sollte auch direkt überprüft werden. Sie ist für das Mathematiklernen wichtig, weil alle im Unterricht eingesetzten Arbeitsmittel und Veranschaulichungen nur dann richtig verstanden werden können, wenn die Kinder sicher in der Rechts-/Links-Unterscheidung sind. Geprüft wird diese Fähigkeit zur Unterscheidung von links und rechts mit drei Aufgabenformaten, erstens an dem Kind selbst („Zeige mir deine rechte Hand."), zweitens am Gegenüber („Wo ist mein linkes Bein?") und drittens an einer Puppe, die zunächst in Blickrichtung des Kindes aufgestellt wird („Wo ist der linke Fuß der Puppe?"), dann um 180 Grad gedreht wird („Wo ist der linke Fuß der Puppe jetzt?").

Kopfrechnen im Zahlenraum bis 20

Beim Thema Zehnerübergang im ersten Schuljahr stehen den Kindern neben dem grundsätzlich denkbaren, aber konzeptionell sehr schweren Verfahren des gegen- bzw. gleichsinnigen Veränderns (6 + 8 = 7 + 7 bzw. 12 – 5 = 10 – 3) nur zwei operative Strategien zur Verfügung, das schrittweise Rechnen (6 + 8 = 6 + 4 + 4 bzw. 12 – 5 = 12 – 2 – 3) und das Verdoppeln (6 + 8 = 2 · 6 + 2) bzw. Halbieren (16 – 9 = 16 – 8 – 1). In der Diagnostik sollen Aufgaben zum Zehnerübergang und weitere zu Zahlzerlegungen und zum Verdoppeln und Halbieren gestellt werden. Damit soll einerseits geprüft werden, ob die Kinder über die für diese beiden Verfahren grundlegenden Kenntnisse verfügen, nämlich über das Auswendigwissen der Zerlegungen aller Zahlen bis 10 sowie das Beherrschen der Verdoppelungs- und Halbierungsaufgaben im Zahlenraum bis 20. Andererseits soll festgestellt werden, wie Kinder über den Zehner rechnen: mit operativen Strategien oder per Weiter- bzw. Rückwärtszählen.

Kopfrechnen im Zahlenraum bis 100

Analog zum Zehnerübergang im Zahlenraum bis 20 werden Aufgaben zum Übergang über weitere Zehner im Zahlenraum bis 100 gestellt, darüber hinaus Aufgaben des Typs ZE ± Z sowie gegen Ende des zweiten Schuljahres des Typs ZE ± ZE. Auch hier gilt die Aufmerksamkeit den von den Kindern verwendeten Strategien. Daher werden sie gebeten, diese Aufgaben möglichst „laut" zu rechnen. An Aufgaben des Typs ZE ± ZE lässt sich feststellen, ob die Kinder gute Strategien verwenden oder bereits Formen des *Ziffernrechnens* entwickelt haben. Bei den Aufgaben ZE – ZE mit Zehnerüberschreitung ist vor allem darauf zu achten, ob die Kinder stellen- oder ziffernweise rechnen und den dafür typischen Fehler machen, die absolute Differenz an der Einerstelle zu berechnen (71 – 24 = 53).

Verständnis der Hunderter-Tafel

Ein zentrales Arbeitsmittel für das Verständnis der Zahlen bis 100 sowie für das Rechnen in diesem Zahlenraum, insbesondere für den Aufgabentyp ZE±Z, ist die Hunderter-Tafel. Sie wird für die Kinder jedoch nur dann zu einer wirksamen Hilfe, wenn sie ein strukturelles Verständnis für dieses Arbeitsmittel entwickelt haben. Dies zu prüfen, ist die

Funktion der folgenden Aufgaben. Die Kinder werden gebeten, auf der (bezifferten) Hunderter-Tafel eine Zahl, z. B. die 37, zu zeigen. Beobachtet wird, ob die Kinder schnell und zielgenau das Feld 37 zeigen oder über eine längere Zeit recht ziellos die Hunderter-Tafel absuchen. Danach wird die Hunderter-Tafel umgedreht, so dass nur noch 100 Felder ohne Zahlen zu sehen sind. Nach der Klärung, in welche Felder die Zahlen 1, 10 und 100 zu schreiben sind, wird das Kind gebeten, das Feld zu zeigen, in das z. B. die Zahl 45 zu schreiben ist. Neben der Beobachtung typischer, auf Unverständnis der Struktur der Hunderter-Tafel hinweisender Zeilenfehler (45 wird in der vierten Reihe an Platz 5 dargestellt) wird auch darauf geachtet, ob das Kind bei der Lösung der Aufgaben auf Abzählprozesse zurückgreift.

Raumvorstellung

Es wird geprüft, ob die Kinder (ab Klasse 3) feststellen können, wie viele Würfel notwendig sind, um ein vorgegebenes, als zweidimensionales Bild dargestelltes Würfelbauwerk nachzubauen. Geachtet wird vor allem darauf, ob die Kinder tatsächlich die Anzahl der Würfel und nicht der Würfeloberflächen ermitteln, ob sie die nur teilweise sichtbaren Würfel und auch nicht sichtbare Würfel berücksichtigen. Außerdem wird versucht festzustellen, wie die Kinder die Anzahl ermitteln, über ein Abzählen in Einerschritten oder über ein strukturiertes Zählen unter Ausnutzung kongruenter Stangen bzw. Platten.

Größenverständnis

Kinder, die ab dem zweiten Schuljahr das Zahlenrechnen durch ein Rechnen mit Ziffern ersetzen, entwickeln kaum ein Verständnis für die Größe von Zahlen. So lässt diese Kinder eine Lösung wie 36 + 28 = 514 nicht stutzen, weil sie nur mit den Ziffern gerechnet haben (3 + 2 = 5; 6 + 8 = 14) und weder mit den beiden Summanden noch mit der Summe eine Größenvorstellung verbinden. Diese beeinträchtigte oder gar fehlende Größenvorstellung findet man dann auch häufig bei den Größenbereichen Geldwerte, Längen, Uhrzeiten und Zeitspannen sowie Gewichte. Dazu werden Aufgaben der folgenden Art gestellt: „Wie groß bist du?“ – „Wie schwer bist du?“ – „Wie hoch ist diese Tür?“ – „Wie teuer ist eine Kugel Eis?“ – „Was kostet ein Kinderfahrrad?“ Als auffällig werden nur solche Antworten gewertet, bei denen die Angaben völlig außerhalb des Größenbereichs liegen („Die Tür ist 360 Meter hoch.“).

3.3 Diagnostik zur Feststellung eines besonderen Förderbedarfs in Mathematik – Informationen zum Verfahren

Ab Mitte des zweiten Schuljahres sollte bei solchen Kindern, die in Mathematik Schwächen zeigen, eine Diagnostik zur Feststellung eines besonderen Förderbedarfs in Mathematik im Sinne der AV Rechenstörungen durchgeführt werden. Auch diese Diagnostik ist prozessorientiert. Sie soll darüber informieren, wie die Kinder Aufgaben bearbeiten, welche Denkansätze sie offenbaren, welche Rechenstrategien sie verwenden und welche Handlungen am Material sie zeigen. Besondere Beobachtungen (z. B. „nimmt zur Lösung die Hunderter-Tafel und zählt in Einerschritten“) sollten individuell protokolliert werden. Für die am häufigsten vorkommenden Verhaltensweisen bietet der Auswertungsbogen (vgl. Anhang) Möglichkeiten zum Ankreuzen. Das bedeutet auch, dass es zwei Formen der Protokollierung gibt, nämlich das Ankreuzen im Beobachtungsbogen und das ausführliche individuelle Protokoll.

Wichtige Fragen und Aufforderungen der diagnostizierenden Lehrkraft werden immer wieder folgende sein:

– „Wie hast du das gerechnet?“

- „Könntest du das auch noch anders rechnen?“
- „Rechne die nächste Aufgabe sofort laut, damit ich mithören kann.“
- „Du darfst auch Material benutzen, wenn du das möchtest. Erkläre dabei, was du machst und warum du es tust.“

Am Ende einer solchen Diagnostik stehen keine Punktwerte, sondern steht die Erkenntnis, wie das Kind Aufgaben löst, welche Strategien es aktiv nutzt, ob und welche Materialien es dabei auf welche Weise verwendet und welche Vorstellungen sein Vorgehen prägen. Ein besonderer Förderbedarf ist immer dann gegeben, wenn die Vorgehensweisen des Kindes erheblich von den Erwartungen abweichen. Das gilt z. B. dann, wenn ein Kind auch noch in der Mitte des zweiten Schuljahres Aufgaben wie 3 + □ = 10 *in der Regel* zählend löst oder Aufgaben wie 26 + 18 *überwiegend* ziffernweise rechnet. Wichtig ist dabei die Feststellung, ob solche Vorgehensweisen für das Kind typisch sind und es über keine oder kaum eine andere Möglichkeit verfügt. Ein zählendes oder ziffernweises Rechnen im Einzelfall rechtfertigt also noch keine besonderen Fördermaßnahmen im Sinne der AV Rechenstörungen. Wichtig ist das Gesamtbild, das die Lehrkraft sich vom Kind macht.

Bei der Durchführung des diagnostischen Gesprächs haben sich folgende Regeln bewährt.

- Die Diagnostik wird am besten von zwei Lehrkräften durchgeführt. Eine von ihnen arbeitet mit dem Kind, die andere protokolliert. Sehr hilfreich für eine genauere Auswertung sind Videoaufzeichnungen, die noch einmal nachträglich angeschaut (und mit Einverständnis der Eltern für Lehrerfortbildungen genutzt) werden können. Erst dann, wenn die Lehrkraft über große diagnostische Erfahrung verfügt, sollte sie solche Überprüfungen auch allein durchführen.
- Zu Beginn sollte dem Kind verdeutlicht werden, dass es das Ziel der Überprüfung ist, ihm in Mathematik zu helfen. „Das kann ich aber nur, wenn ich weiß, wie du Aufgaben löst. Deshalb sollst du einige Aufgaben lösen; ich frage immer wieder nach, wie du das gemacht hast. Am besten rechnest du sofort laut.“
- In einer angenehmen Gesprächsatmosphäre ohne Zeitdruck sollte es außerdem gelingen, dem Kind die Angst zu nehmen. Dazu kann auch die Information beitragen, dass es alle Hilfsmittel (auch die eigenen Finger) benutzen darf. Es darf sich aussuchen, womit es rechnen möchte. Die wichtigsten Materialien (Zwanziger- und Hunderter-Rechenrahmen, Hunderter-Tafel und Hunderter-Feld sowie Steckwürfel oder Wendeplättchen) sollten daher vorhanden sein.
- Die Aufgabenkarten (vgl. Anhang) werden dem Kind einzeln vorgelegt. Mögliche Ergänzungsaufgaben (s. u.) können auf der Rückseite bearbeitet werden.
- Dem Kind muss genügend Zeit zur Lösung der Aufgabe zur Verfügung gestellt werden. Dazu gehört auch – und das ist wohl die schwierigste Aufgabe bei der Diagnostik – geduldig zu sein und sich selbst mit Interventionen zurückzuhalten, um die Gedanken des Kindes nicht zu stören. Wenn auch nach längerer Zeit das Kind nicht reagiert, könnte eine erste Intervention darin bestehen, dass es gefragt wird, ob es verstanden hat, was es tun soll. Denn solche Interventionen haben ausschließlich das Ziel, das Kind zu veranlassen, die Aufgabe zu bearbeiten. Sie haben nicht das Ziel, dem Kind während der Diagnostik ein Lösungsverfahren zu zeigen.

- Im Rahmen der Diagnostik erhalten die Kinder keine Rückmeldung darüber, ob ihre Lösung richtig ist oder nicht. Es werden Rückmeldungen ausschließlich in Form von Ermunterungen gegeben, auch die nächste Aufgabe zu bearbeiten. Beispiele: „Schön, das hast du gut erklärt." „Ich habe gut verstanden, wie du die Aufgabe gelöst hast." „Das hast du prima gemacht. Die nächste Aufgabe wirst du sicher auch schaffen."
- Nachfragen sollten nur dann gestellt werden, wenn die diagnostizierende Lehrkraft nicht verstanden hat, wie das Kind die Aufgabe gelöst hat: „Ich habe nicht verstanden, wie du das gemacht hast. Kannst du mir das noch einmal erklären?" „Kannst du die nächste Aufgabe sofort laut lösen?" „Wie würdest du deiner kleinen Schwester erklären, wie man eine solche Aufgabe löst?"

Die AV Rechenstörungen fordert eine Dokumentation der Überprüfung. Aus diesem Grunde und der Vergleichbarkeit wegen sollten die Aufgaben für alle Kinder gleich sein und ihnen schriftlich präsentiert werden. Das bedeutet aber in keiner Weise, dass die Diagnose in Sprachlosigkeit durchgeführt wird. Ganz im Gegenteil sollte das Kind immer wieder zum „lauten Denken" ermuntert werden. Das bedeutet ebenfalls nicht, dass ausschließlich diese Aufgaben gestellt werden dürfen. Sie stellen einen Mimimalkanon dar, der von jedem Kind bearbeitet werden soll, aber durchaus individuell ergänzt werden kann. Solche Ergänzungen in Form von Aufgaben des gleichen Typs sind immer dann angebracht, wenn die diagnostizierende Lehrkraft den Lösungsweg des Kindes nicht verstanden hat. Die Ergänzungsaufgaben können unmittelbar danach gestellt werden. Wenn das Kind ganz erhebliche Schwierigkeiten hatte, kann es aber auch günstiger sein, am Ende der Überprüfung noch einmal eine solche Aufgabe des gleichen Typs zu stellen. In jedem Fall ist das Vorgehen der Kinder auch bei den Ergänzungsaufgaben festzuhalten.

Bereits erwähnt wurde, dass während der Durchführung des diagnostischen Gesprächs wichtige Arbeitsmittel (Rechenrahmen etc.) zur Verfügung stehen müssen. Darüber hinaus werden für die Diagnostik und den zu erstellenden Förderplan folgende Unterlagen benötigt, die mehrheitlich der Anlage dieser Handreichung entnommen werden können:

- Aufgabenkarten (Anlage),
- Auswertungsbogen zur prozessorientierten Diagnostik (Anlage),
- Ausführliche individuelle Aufzeichnungen der diagnostizierenden und/oder beobachtenden Lehrkraft,
- Auswertungsbericht in Kurzform (Anlage),
- Förderplan (Anlage).

3.4 Diagnostik zur Feststellung eines besonderen Förderbedarfs in Mathematik – Aufgaben und Beobachtungsschwerpunkte

Insgesamt orientieren sich die Aufgaben an den Symptomen für Rechenstörungen (vgl. Kap. 1.2), schwerpunktmäßig an den beiden Hauptsymptomen, dem verfestigten zählenden Rechnen und der Links-/Rechts-Problematik. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick, welche Aufgaben für die Erfassung welcher Symptomatik geeignet sind.

Symptombereiche	**Aufgaben**
Verfestigtes zählendes Rechnen	1, 8 und 9
Unterscheidung von links und rechts sowie Orientierung	2, 3, 5, 6 und 7
Einseitige Zahl- und Operationsvorstellungen sowie Intermodalitätsprobleme	4, 6 und 7

Im Folgenden werden die Aufgaben vorgestellt und Hinweise gegeben, worauf die Beobachtungen sich während der Bearbeitung durch das Kind konzentrieren sollten. Diese Darstellung erfolgt nicht in der Reihenfolge der Aufgabenkarten, sondern sortiert nach Symptombereichen. Zum besseren Verständnis wird der Leserin bzw. dem Leser empfohlen, parallel den Auswertungsbogen aus dem Anhang zur Hand zu nehmen.

Verfestigtes zählendes Rechnen

Aufgabe Nr. 1

a)	b)
7 + ___ = 10	13 + ___ = 20
3 + ___ = 10	70 + ___ = 100
c)	d)
70 + 8 = ___	50 – 6 = ___
26 + 18 = ___	43 – 16 = ___

Bei den beiden Ergänzungsaufgaben bis 10 sollte besonders auf Indikatoren für zählendes Rechnen (offensichtliches oder verborgenes Nutzen der Finger, rhythmische Kopfbewegungen etc.) geachtet werden. Ein Indikator dafür ist auch die Bearbeitungszeit. Wenn die Bearbeitung der Aufgabe 3 + __ = 10 deutlich länger dauert als die der ersten, dann kann zählendes Vorgehen angenommen werden.

Die Aufgaben zum Ergänzen bis 20 bzw. 100 sollen auch prüfen, ob das Kind Analogien nutzt. Bei diesen Aufgaben sollte gefragt werden, wie das Kind sie gelöst hat und Hinweise beachtet werden, die auf eine Analogienutzung hindeuten können. Es kann auch nachfragt werden, ob dem Kind bei den ersten vier Aufgaben etwas aufgefallen ist. Die beiden Aufgaben 70 + 8 und 50 – 6 prüfen das Rechnen mit vollen Zehnerzahlen. Die Lösung der ersten Aufgabe sollte auswendig gewusst sein, die der zweiten Aufgabe mit Hilfe der Zerlegung der Zahl 10 in 6 + 4 („also 44“) bzw. über Analogie zu 10 – 6 ermittelt werden. Zählende Vorgehensweisen sind in beiden Fällen als problematisch anzusehen.

Bei den beiden Aufgaben 26 + 18 bzw. 43 – 16 soll festgestellt werden, ob und ggf. welche Strategie das Kind sicher, recht unsicher oder sehr unsicher nutzt oder ob es zählend bzw. ziffernweise rechnet. Wenn dies bei der Bearbeitung dieser beiden Aufgaben nicht deutlich wird, können ergänzende Aufgaben wie 37 + 18 oder 71 – 14 gestellt werden.

Aufgabe Nr. 9

6 + 7 = __	7 + 8 = __	9 + 6 = __
16 – 9 = __	15 – 8 = __	14 – 6 = __

Auch bei diesen Aufgaben geht es um die Frage, ob das Kind sie mit guten Strategien (schrittweises Rechnen, Verdoppeln bzw. Halbieren) löst, ob es die Lösungen vielleicht schon auswendig weiß oder auf zählendes Rechnen (Alleszählen, Weiterzählen vorwärts oder rückwärts) zurückgreift. Der Beobachtungsbogen sieht eine getrennte Auswertung nach Additions- und Subtraktionsaufgaben vor, um die Fähigkeiten der Kinder differenzierter erfassen zu können. Es sollte auch darauf geachtet werden, wie viel Zeit die Kinder jeweils für die drei Additions- bzw. Subtraktionsaufgaben benötigen. Eine erkennbar längere Bearbeitungszeit verbunden mit zählendem Rechnen bei der Subtraktion kann ein Indikator dafür sein, dass das Rückwärtszählen nicht automatisiert ist.

Mit der folgenden Aufgabe 8 wird zunächst geprüft, ob das Kind die Begriffe Hälfte und Doppeltes versteht. Außerdem soll festgestellt werden, auf welche Weise das Kind diese Aufgaben löst. Zu den jeweils ersten drei Aufgaben sollte es die Lösungen auswendig wissen bzw. beim Verdoppeln von 20 die Analogie zum Doppelten von 2 nutzen. Wenn es die Aufgaben nicht durch Auswendigwissen bewältigt, ist zu prüfen, ob es sie zählend oder durch ziffernweises Rechnen löst.

Aufgabe Nr. 8

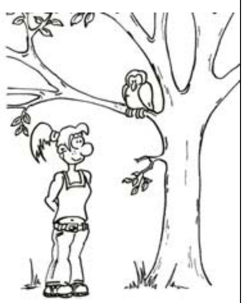
Die Hälfte von …

Zahl	Die Hälfte
8	
12	
18	
30	

Das Doppelte von …

Zahl	Das Doppelte
3	
8	
20	
25	

Links-/Rechts-Unterscheidung und -Orientierung

Aufgabe Nr. 3	
 Welche Hand? O rechts O links	 Welcher Daumen? O rechts O links
 Welcher Arm ist oben? O rechts O links	 Welcher Arm ist oben? O rechts O links
 Wo sieht Jan den Hasen? O rechts O links	 Wo sieht Nina den Uhu? O rechts O links

Diese Aufgaben (aus Schipper/Wartha i.V.) prüfen die Links-/Rechts-Unterscheidung in drei verschiedenen Formaten, nämlich

– als Eigenschaft von Körperteilen,

– als Eigenschaft von Körperteilen auch am Gegenüber und

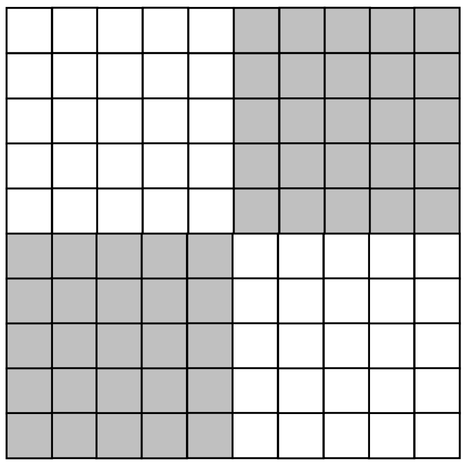
– als Eigenschaft einer Relation zwischen zwei Objekten.

Zu beobachten ist, wie sicher das Kind in seinen Entscheidungen ist.

Während der gesamten Diagnostik ist auch auf die Schreibweise der Ziffern und Zahlen zu achten. Insbesondere soll festgestellt werden, ob das Kind die Zahlen sicher von links nach rechts schreibt, ob spiegelverkehrte Ziffern vorkommen, Zahlendreher oder ob das Kind Zahlen invers schreibt bzw. uneinheitlich, also mal von links nach rechts, mal invers. Entsprechende Beobachtungen können im Auswertungsbogen im Anschluss an die Aufgabe 3 vermerkt werden.

Aufgabe Nr. 2

Schreibe diese Zahlen in die richtigen Felder: 25, 37, 63, 87.



Diese Aufgabe prüft das strukturelle Verständnis der Hunderter-Tafel. Zu beobachten ist insbesondere, ob das Kind die Fünfer-Struktur des Materials nutzt oder für jede Platzierung einer

Zahl in den Zeilen und Spalten neu zählt. Außerdem ist darauf zu achten, ob Zeilenfehler oder Zahlendreher (z. B. 25 auf Feld 52) vorkommen.

Aufgabe Nr. 5

Welche Zahl kommt davor, welche kommt danach?

davor	Zahl	danach
	6	
	24	
	30	
	33	
	59	
	71	

Zu beachten ist, wie sicher und schnell das Kind diese Aufgaben löst. Mögliche Schwierigkeiten in der Nähe voller Zehner oder bei der Zahl mit zwei gleichen Ziffern sind zu registrieren.

Einseitige Zahl- und Operationsvorstellungen sowie Intermodalitätsprobleme

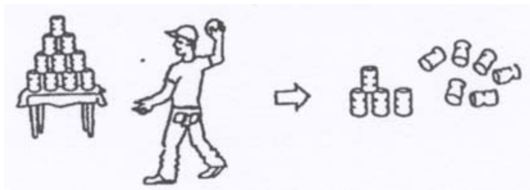
Mit der folgenden Aufgabe 4 wird geprüft, ob das Kind in der Lage ist, zu dem jeweiligen Bild eine *plausible* Rechenaufgabe zu finden. Es kommt also nicht so sehr darauf an, dass das Kind genau die in die Darstellung hineingedachte Interpretation angibt; auch alternative Erklärungen werden akzeptiert, wenn sie bei gutem Willen in dem Bild zu erkennen sind. So wird bei (a) nicht nur $10 - 6 = 4$ akzeptiert, sondern auch $10 - 4 = 6$ und $4 + 6 = 10$. In gleicher Weise werden bei (b) neben $3 + 2 = 5$ auch beide zugehörigen Subtraktionen anerkannt. Bei (c) können sowohl die Additionsaufgabe $(6 + 6 + 6)$ als auch die Multiplikationen $3 \cdot 6$ und $6 \cdot 3$ als sinnvolle Interpretationen angesehen werden. Die Lösungen der Aufgaben werden nicht gefordert.

Als bedenklich zu interpretieren sind Äußerungen, die den Inhalt des Bildes mit oder ohne Zahlenangaben beschreiben, aber nicht zu einer Rechenaufgabe führen.

Aufgabe Nr. 4

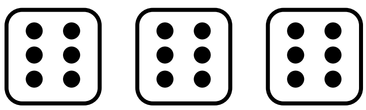
Schreibe zu jedem Bild eine passende Rechenaufgabe!

a)



b)

c)



Aufgabe Nr. 6

Löse die Aufgaben wie im Beispiel.

Beispiel

Jonas hat 7 Kirschen. Er schenkt davon 3 seinem Bruder. Wie viele Kirschen hat er noch?

Rechnung: 7 – 3 = 4

a) Maike bekommt zu Ostern 12 Eier von ihrem Onkel und 6 Eier von ihrer Oma. Wie viele hat sie insgesamt bekommen?

Rechnung: __________

b) Paul hat 14 Autos. Er schenkt Felix 6 davon. Wie viele hat er noch?

Rechnung: __________

c) Lisa hat 9 Erdbeeren, Jonas hat 3 Erdbeeren. Wie viele Erdbeeren hat Lisa mehr als Jonas?

Rechnung: __________

d) Laura hat einige Bonbons. Sie isst 3 davon auf und hat dann noch 6. Wie viele Bonbons hatte sie zu Anfang?

Rechnung: __________

Bei der Aufgabe 6 wird zunächst an Hand der Beispielaufgabe das Aufgabenformat erklärt. Danach wird jede Aufgabe dem Kind einzeln vorgelesen, anschließend wird es jeweils gebeten, die Aufgabe selbst noch einmal zu lesen. Dann soll es die Rechnung mit Lösung aufschreiben.

Diese Aufgaben prüfen die Fähigkeit, eine Rechengeschichte in eine Aufgabe zu übersetzen (und anschließend auch noch zu lösen). Entsprechend gilt die Aufmerksamkeit vorrangig der Aufgabenformulierung, erst nachrangig der Lösung.

Zu den beiden ersten Aufgaben sollte das Kind die passenden Rechenaufgaben (12 + 6 bzw. 14 – 6) auf Anhieb finden. Schwierigkeiten oder Auffälligkeiten bei deren *Lösung* sollten gesondert protokolliert werden. Grundsätzlich sollten auch die Aufgabe c) und d) gelöst werden können; mehr Bedenkzeit bei diesen Aufgaben ist aber nicht kritisch zu werten.

Aufgabe Nr. 7

Male zu jeder Aufgabe ein passendes Bild.

3 + 5

6 – 3

Bei der Interpretation und Bewertung der Bilder zu Aufgabe 7 sind folgende Typen zu unterscheiden:

Typ A

Das Bild zeigt eine konkrete, dynamische Situation, in der die Rechnungen durch Situationen des Dazukommens, Zusammenfügens oder Abtrennens dargestellt sind. Beispiel: Ein Kind legt 3 Äpfel auf den Tisch, ein anderes 5 Äpfel.

Typ B

Das Bild enthält Abbildungen von didaktischen Materialien (Plättchen, Kringel etc.). Die Addition ist z. B. durch unterschiedliche Formen oder Farben zu erkennen, die Subtraktion z. B. durch Durchstreichen kenntlich gemacht.

Beispiel:

Typ C

Das Bild entspricht Abbildungen des Typs B, jedoch werden die Operationen durch die Operationszeichen „+“ bzw. „–“ dargestellt.

Beispiel:

Typ D

Das Bild lässt keine Bezüge zur Rechenaufgabe erkennen („Drudel“).

Typ E

Das Bild setzt nur die symbolische Notation 3 + 5 bzw. 6 – 3 um, indem die Ziffern und Rechenzeichen (mit oder ohne „Ausschmückung“) wiedergegeben werden.

Die Typen A und B deuten auf ein entwickeltes bis akzeptables Operationsverständnis hin, die Typen C bis D auf ein mehr oder weniger eingeschränktes bis kaum vorhandenes Verständnis. Zu berücksichtigen ist aber, dass die Befunde dieses Prüfverfahrens immer im Kontext der Befunde bei den Aufgaben 4 und 6 gesehen werden sollten.

4 Literatur

Caluori, F. (2004): Die numerische Kompetenz von Vorschulkindern – Theoretische Modelle und empirische Befunde. Hamburg: Verlag Dr. Kovač.

Grassmann, M. u. .a. (2002): Mathematische Kompetenzen von Schulanfängern, Teil 1: Kinderleistungen – Lehrererwartungen. Potsdam: Universität.

Gray, E. M. (1991): An analysis of diverging approaches to simple arithmetic: preferences and its consequences. Educational Studies in Mathematics 22, pp. 551–574.

Grüßing, M. (2006): Handlungsleitende Diagnostik und mathematische Frühförderung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule. In: Grüßing, M./Peter-Koop, A. (Hrsg.): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten – Fördern – Dokumentieren. Offenburg: Mildenberger, S. 122 – 132.

Hartmann, B. (1896): Die Analyse des kindlichen Gedankenkreises als die naturgemässe Grundlage des ersten Schulunterrichts. Leipzig/Frankfurt a. M.: Kesselringsche Hofbuchhandlung.

Hasemann, K. (2003): Anfangsunterricht Mathematik. Heidelberg/Berlin: Spektrum.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1995): Leistungsmessung im aktiv-entdeckenden Mathematikunterricht. In: Brügelmann, H./Balhorn, H. & L. Füssenich (Hrsg.) (1995): Am Rande der Schrift. Lengwil: Libelle Verlag, S. 87 – 107.

Krauthausen, G./Scherer, P. (2007): Einführung in die Mathematikdidaktik. München: Elsevier.

Lorenz, J. H./Radatz, H. (1993): Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Hannover: Schroedel.

Lorenz, J. H./Schipper, W. (Hrsg.) (2007): Hendrik Radatz – Impulse für den Mathematikunterricht. Braunschweig: Schroedel.

Radatz, H./Schipper, W. (1983): Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel.

Radatz, H./Schipper, W./Dröge, R. & A. Ebeling (1996): Handbuch für den Mathematikunterricht – 1. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Radatz, H./Schipper, W./Dröge, R. & A. Ebeling (1998): Handbuch für den Mathematikunterricht – 2. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Radatz, H./Schipper, W./Dröge, R. & A. Ebeling (1999): Handbuch für den Mathematikunterricht – 3. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Rinkens, H.-D. (1996): Arithmetische Fähigkeiten am Schulanfang. (http://www.rinkens-hd.de/_data/AritFaeh.pdf)

Rottmann, T. (2006): Das kindliche Verständnis der Begriffe „die Hälfte“ und „das Doppelte“. Hildesheim: Franzbecker.

Rottmann, T. (2007): Kindliche Vorstellungen zu dem Begriff „die Hälfte“ – Zum Einfluss von Veranschaulichungen. In: Lorenz/Schipper (2007), S. 69 – 78.

Rottmann, T./Schipper, W. (2002): Das Hunderter-Feld – Hilfe oder Hindernis beim Rechnen im Zahlenraum bis 100? In: Journal für Mathematik-Didaktik, 23, Heft 1, S. 51 – 74.

Schipper, W. (2003): Lernen mit Material im arithmetischen Anfangsunterricht. In: Baum, M./Wielpütz, H. (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule – Ein Arbeitsbuch. Seelze: Kallmeyer, S. 221 – 237.

Schipper, W. (2005a): Übungen zur Prävention von Rechenstörungen. In: Die Grundschulzeitschrift 19, H. 182, Karteikarten 1 – 16. Seelze: Erhard Friedrich Verlag. Kostenloses Download unter: http://www.friedrichonline.de:80/?acton=ShowProd&prod_uuid=F35BZK3C91EQ994B8PNUMS8CFN5AP9L2&continue=FFSearch&&query=Lese-%2C+Schreib+und+ Rechenschwierigkeiten& m=friedrichonline.de &view=grid

Schipper, W. (2005b): Rechenstörungen als schulische Herausforderung. Basispapier zum Modul G 4: Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern. Kiel: IPN. (http://www.sinus-grundschule.de/).

Schipper, W./Wartha, S. (i.V.): BIRTE – Bielefelder Rechentest. Braunschweig: Schroedel.

Schmidt, R. (1982): Zahlkenntnisse von Schulanfängern. Wiesbaden: Hess. Institut für Bildungsplanung und Schulentwicklung.

Selter, Ch. (1995): Zur Fiktivität der “Stunde Null“ im arithmetischen Anfangsunterricht. In: Mathematische Unterrichtspraxis II/1995, S. 11 – 19.

Selter, Ch. (2005): Mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten: Erforschen, entdecken und erklären im Mathematikunterricht der Grundschule. Basispapier zum Modul G 2: Entdecken, Erforschen, Erklären. Kiel: IPN. (http://www.sinus-grundschule.de/)

Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2006f.): Bildung für Berlin. Beobachten – Dokumentieren – Fördern. Lerndokumentation Mathematik.

Van Luit, H./Van de Rijt, B. /Hasemann, K. (2001): OTZ – Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung. Göttingen: Hogrefe.

Walther, G. (2005): Umgang mit Aufgaben im Mathematikunterricht. Basispapier zum Modul G 1: Gute Aufgaben. Kiel: IPN. (http://www.sinus-grundschule.de/)

5 Anhang

Aufgabe Nr. 1

a)

7 + ___ = 10

3 + ___ = 10

b)

13 + ___ = 20

70 + ___ = 100

c)

70 + 8 = ___

26 + 18 = ___

d)

50 – 6 = ___

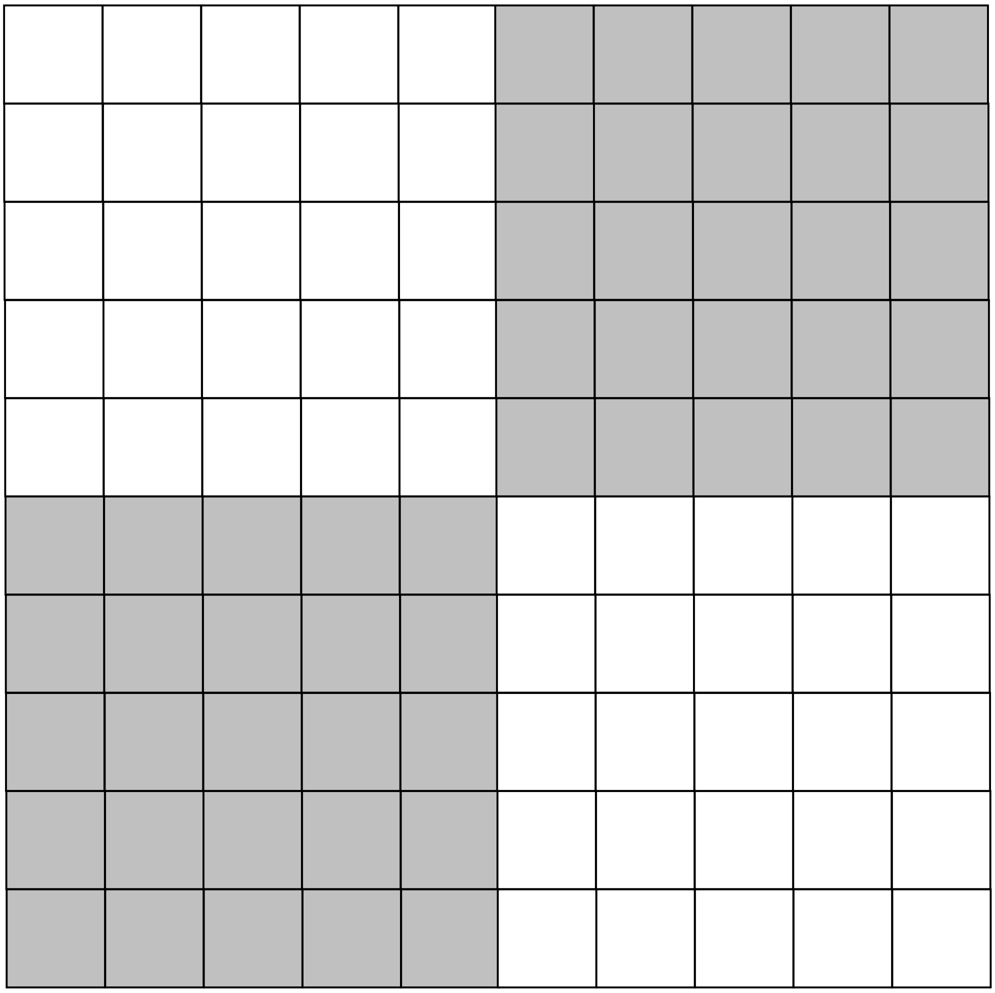
43 – 16 = ___

✂ ....

Aufgabe Nr. 2

Schreibe diese Zahlen in die richtigen Felder:

25, 37, 63, 87.



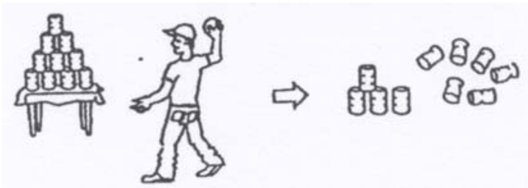
Aufgabe Nr. 3

 Welche Hand? ○ rechts ○ links	 Welcher Daumen? ○ rechts ○ links
 Welcher Arm ist oben? ○ rechts ○ links	 Welcher Arm ist oben? ○ rechts ○ links
 Wo sieht Jan den Hasen? ○ rechts ○ links	 Wo sieht Nina den Uhu? ○ rechts ○ links

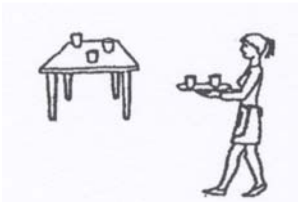
Aufgabe Nr. 4

Schreibe zu jedem Bild eine passende Rechenaufgabe.

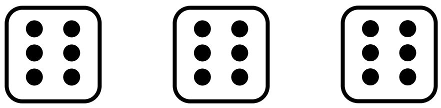
a)



b)



c)



✂..

Aufgabe Nr. 5

Welche Zahl kommt davor, welche kommt danach?

davor	Zahl	danach
	6	
	24	
	30	
	33	
	59	
	71	

Aufgabe Nr. 6

Löse die Aufgaben wie im Beispiel.

Beispiel

Jonas hat 7 Kirschen. Er schenkt davon 3 seinem Bruder. Wie viele Kirschen hat er noch?

Rechnung: ____7 – 3 = 4________

a) Maike bekommt zu Ostern 12 Eier von ihrem Onkel und 6 Eier von ihrer Oma. Wie viele hat sie insgesamt bekommen?

Rechnung: ____________________

b) Paul hat 14 Autos. Er schenkt Felix 6 davon. Wie viele hat er noch?

Rechnung: ____________________

c) Lisa hat 9 Erdbeeren, Jonas hat 3 Erdbeeren. Wie viele Erdbeeren hat Lisa mehr als Jonas?

Rechnung: ____________________

d) Laura hat einige Bonbons. Sie isst 3 davon auf und hat dann noch 6. Wie viele Bonbons hatte sie zu Anfang?

Rechnung: ____________________

✂...

Aufgabe Nr. 9

6 + 7 = ___	7 + 8 = ___	9 + 6 = ___
16 – 9 = ___	15 – 8 = ___	14 – 6 = ___

Aufgabe Nr. 7

Male zu jeder Aufgabe ein passendes Bild.

3 + 5

6 – 3

Aufgabe Nr. 8

Die Hälfte von …

Zahl	Die Hälfte
8	
12	
18	
30	

Das Doppelte von …

Zahl	Das Doppelte
3	
8	
20	
25	

Name: ______________________ Klasse: _____ Datum: ____________

Auswertungsbogen zur prozessorientierten Diagnostik

Symptom-bereich	**Aufgabe**	**Zusammenfassung der Auffälligkeiten**
Verfestigtes zählendes Rechnen	**Aufgabe 1** a) Ergänzen bis 10	❑ deutlich mehr Zeit ❑ etwas mehr Zeit bei 3+☐=10 ❑ erkennbar zählend ❑ richtig ❑ falsch gelöst
	b_1) Ergänzen bis 20	❑ nutzt die Analogie ❑ nutzt die Analogie nicht ❑ erkennbar zählend ❑ richtig ❑ falsch gelöst
	b_2) Ergänzen bis 100	❑ nutzt die Analogie ❑ nutzt die Analogie nicht ❑ erkennbar zählend ❑ richtig ❑ falsch gelöst
	c_1) 70 + 8	❑ löst die Aufgabe schnell ❑ löst sie zählend
	c_2) 50 – 6	❑ löst die Aufgabe schnell ❑ löst sie zählend
	d_1) 26 + 18	❑ nutzt eine Strategie, nämlich __________________ ❑ sehr sicher ❑ recht unsicher ❑ sehr unsicher ❑ erkennbar zählend ❑ richtig ❑ falsch gelöst ❑ erkennbar ziffernweise ❑ richtig ❑ falsch gelöst
	d_2) 43 – 16	❑ nutzt eine Strategie, nämlich __________________ ❑ sehr sicher ❑ recht unsicher ❑ sehr unsicher ❑ erkennbar zählend ❑ richtig ❑ falsch gelöst ❑ erkennbar ziffernweise ❑ richtig ❑ falsch gelöst ❑ ± 1 Fehler ❑ bildet absolute Differenz bei Einern ❑ nutzt eine oder mehrere Strategien, nämlich ____
	Aufgabe 9 Addition mit Zehnerübergang	❑ weiß die Lösungen auswendig ❑ rechnet zählend, nämlich ❑ Alleszählen ❑ Weiterzählen ❑ macht Fehler um minus eins ❑ macht Fehler um plus eins ❑ nutzt eine oder mehrere Strategien, nämlich ____

Symptom-bereich	**Aufgabe**	**Zusammenfassung der Auffälligkeiten**
	Subtraktion mit Zehnerübergang	❑ weiß die Lösungen auswendig ❑ rechnet zählend, nämlich ❑ Alleszählen ❑ Weiterzählen ❑ macht Fehler um minus eins ❑ macht Fehler um plus eins ❑ braucht für die Subtraktion erkennbar mehr Zeit
	Aufgabe 8 Hälfte	❑ versteht ❑ versteht nicht den Begriff Hälfte ❑ kennt die ersten drei Lösungen auswendig ❑ löst Aufgaben zählend ❑ löst Aufgaben ziffernweise
	Doppeltes	❑ versteht ❑ versteht nicht den Begriff Doppeltes ❑ kennt die ersten drei Lösungen auswendig ❑ löst Aufgaben zählend ❑ löst Aufgaben ziffernweise
Links-/ Rechts-Unterschei-dung sowie – Orientie-rung	**Aufgabe 3** Hand/Daumen	❑ richtig und sicher ❑ richtig und unsicher ❑ teilweise richtig ❑ falsch
	Arm	❑ richtig und sicher ❑ richtig und unsicher ❑ teilweise richtig ❑ falsch
	Jan/Nina	❑ richtig und sicher ❑ richtig und unsicher ❑ teilweise richtig ❑ falsch
	Aufgabe 2 Hunderter-Tafel	❑ nutzt die Struktur und löst die Aufgaben sicher ❑ nutzt die Struktur teilweise und löst die Aufgaben un-sicher ❑ zählt in den Zeilen und Spalten in Einerschritten ❑ Zeilenfehler ❑ Zahlendreher ❑ keine richtigen Lösungen
	Schreibweise von Ziffern und Zahlen	❑ sicher und richtig von links nach rechts ❑ spiegelverkehrte Ziffern ❑ Zahlendreher ❑ inverse Zahlschreibweise ❑ uneinheitlich
	Aufgabe 5 Vorgänger und Nachfolger	❑ löst die Aufgaben schnell und sicher ❑ löst die Aufgaben teilweise unsicher ❑ Vorgänger erkennbar schwieriger als Nachfolger ❑ Schwierigkeiten in der Nähe voller Zehner ❑ Schwierigkeiten bei der Zahl mit gleichen Ziffern (33)

<table>
<tr><th>Symptom-bereich</th><th>Aufgabe</th><th>Zusammenfassung der Auffälligkeiten</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Einseitiges Zahl- und Operations-verständnis sowie Inter-modalitäts-probleme</td><td>Aufgabe 4
Bildaufgaben</td><td>❑ findet plausible Rechenaufgaben zu den Bildern
❑ nennt im Bild vorhandene Anzahlen, findet aber keine Rechenaufgabe
❑ äußerst sich zu den Situationen, ohne Anzahlen zu benennen oder eine Rechenaufgabe zu formulieren</td></tr>
<tr><td>Aufgabe 6
Rechengeschichten
Zu a) und b)</td><td>❑ findet auf Anhieb die passenden Rechenaufgaben
❑ braucht für die Rechenaufgaben längere Zeit
❑ formuliert nicht passende Rechenaufgaben
❑ findet keine Rechenaufgaben</td></tr>
<tr><td>Zu c)</td><td>❑ findet auf Anhieb die passende Rechenaufgabe
❑ braucht für die Rechenaufgabe längere Zeit
❑ formuliert eine nicht passende Rechenaufgabe
❑ findet keine Rechenaufgabe</td></tr>
<tr><td>Zu d)</td><td>❑ findet auf Anhieb die passenden Rechenaufgaben
❑ braucht für die Rechenaufgabe längere Zeit
❑ formuliert eine nicht passende Rechenaufgabe
❑ findet keine Rechenaufgabe</td></tr>
<tr><td>Aufgabe 7
Bilder zu Rechengeschichten
Bild zu 3 + 5</td><td>Das Kind zeichnet ein Bild des folgenden Typs:
Typ A ❑ Typ B ❑ Typ C ❑ Typ D Typ E ❑
kein Bild ❑</td></tr>
<tr><td>Bild zu 6 – 3</td><td>Das Kind zeichnet ein Bild des folgenden Typs:
Typ A ❑ Typ B ❑ Typ C ❑ Typ D Typ E ❑
kein Bild ❑</td></tr>
<tr><td>weitere Beobach-tungen</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Bericht über die Diagnostik wegen Verdachts auf Rechenstörungen

Name der Schule	Name, Vorname des Kindes	Klasse	Prüferin/Prüfer	Datum

❍ **Der Diagnostik sind *keine Hinweise* auf einen *besonderen* Förderbedarf im Sinne der AV Rechenstörungen zu entnehmen.**

❍ **Sie zeigt aber, in welchen Bereichen eine weitere schulinterne Förderung sinnvoll ist. (Vgl. dazu den Auswertungsbogen und die individuellen Aufzeichnungen der Prüferinnen und der Prüfer.)**

❍ **Der Diagnostik sind *Hinweise auf einen besonderen Förderbedarf* im Sinne der AV Rechenstörungen zu entnehmen. Es zeigten sich Auffälligkeiten in folgenden Bereichen:**

❍ **1. Verfestigtes zählendes Rechnen**

- Das Kind rechnet ganz überwiegend bis ausschließlich zählend.
- Dabei macht es Fehler um plus bzw. minus eins.
- Durch das zählende Rechnen kommt es zu langen Bearbeitungszeiten.
- Zweistellige Zahlen werden ziffernweise verrechnet.
- Bei der Subtraktion bleibt häufig unberücksichtigt, ob die Einerstelle des Minuenden oder des Subtrahenden größer ist (Bilden absoluter Differenz).
- Andere Rechenstrategien sind teilweise bekannt, werden aber nicht oder nur selten genutzt.
- Die Zahlzerlegungen bis 10 werden noch nicht auswendig gewusst.
- Aufgaben zum Halbieren und Verdoppeln im Zahlenraum bis 20 werden noch nicht auswendig gewusst.
- Das Verstehen und Nutzen von Analogien bedarf noch weiterer Förderung.
- Das Erkennen und Nutzen von Strukturen bei Zahlen und Zahlrepräsentanten gelingt noch nicht.

❍ **2. Probleme bei der Rechts-/Links-Unterscheidung und der -Orientierung**

- Es zeigen sich Unsicherheiten bei der Orientierung, vor allem bei der Links-/ Rechts-Unterscheidung.
- Diese Schwierigkeiten zeigen sich auch bei der Nutzung von Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen.
- Ein sicheres Verständnis für Stellenwerte ist noch nicht vorhanden.
- Das Kind macht auf der Hunderter-Tafel Zeilenfehler.
- Das Kind macht Zahlendreher beim Lesen bzw. Schreiben zweistelliger Zahlen.
- Das Kind schreibt Zahlen invers.
- Das Kind schreibt Ziffern spiegelverkehrt.

❍ **3. Einseitige Zahl- und Operationsvorstellungen bzw. Intermodalitätsprobleme** o Anzahlen werden bevorzugt in Ziffernform dargestellt; quantitative Vorstellungen von Zahlen gelingen kaum. o Mengen werden durch + Zeichen verbunden. o Die Interpretation von Bildaufgaben und die Lösung von Rechengeschichten gelingen kaum. o Materialhandlungen stützen den Lernprozess nicht, weil das Material nur als Abzählhilfe genutzt wird.
Empfohlene Maßnahmen: ❑ **Förderung im Rahmen des binnendifferenzierten Unterrichts bzw. durch Teilnahme am allgemeinen Förderunterricht,** ❑ **besondere Förderung im Sinne der AV Rechenstörungen,** ❑ **Beratung durch den schulpsychologischen Dienst.**

Name: Klasse: Förderlehrkraft:

Förderplan

Fördermaßnahmen	**Zeitraum**	**Bemerkungen**
❍ Zahlauffassung und Zahldarstellung bis 20		
❍ „Schnelles Sehen“ (Quasi-simultane Zahlauffassung) bis 20		
❍ „Schnelles Sehen“ (Quasi-simultane Zahlauffassung) bis 100		
❍ Auswendigwissen von Zahlzerlegungen bis 10		
❍ Halbieren und Verdoppeln bis 20		
❍ Verständnis der Hunderter-Tafel und Orientierung im Hunderterraum		
❍ Zehnerübergang mit Hilfe des schrittweisen Rechnens am Rechenrahmen		
❍ Übungsformen zum Bewusstmachen des Beziehungsgeflechts der Grundaufgaben der Addition und Subtraktion; Einprägestrategien		
❍ Addition und Subtraktion voller Zehner an der Hunderter-Tafel		
❍ Rechnen von Aufgaben des Typs ZE $\pm$ ZE über Vorstellungen von Handlungen an Materialien		
❍ Übungen zur Links-/Rechts-Unterscheidung		
❍ Rechengeschichten – Vorstellungen von Zahlen und Operationen		

Sonstige Anmerkungen:

Anregungen für Fördermaßnahmen

In der Spalte „Hilfen und Materialien“ werden folgende Abkürzungen verwendet:

FK: Förderkarten (Schipper 2005a)	**HR:** Diese Handreichung LISUM 2008
BfB: Bildung für Berlin, Lerndokumentation Mathematik	**SIN:** Sinus Modul 4 (Schipper 2005 b)

Förderschwerpunkte	Hilfen und Materialien
❍ **Zahlauffassung und Zahldarstellung (bis 20 und 100) sowie „Schnelles Sehen“ (Quasi-simultane Zahlauffassung) bis 20 und 100** – Weiterzählen/Rückwärtszählen – Fühlen/Sehen von Anzahlen und Bilden von Summen – Schnelles Sehen am Zwanziger- und Hunderter-Rechenrahmen **Ziele**: – Reduzierung des Anteils des konkreten Handelns zugunsten eines Operierens in der Vorstellung – Förderung des Weiterzählens als Ablösung vom Alleszählen (vor allem auch des Rückwärtszählens bei der Subtraktion)	**FK 1 bis 4** (Holzwürfel, Tücher, Sichtschutz, strukturierter Zwanziger-Rechenrahmen) **HR Kap. 2.2** (Finger, Würfel, Ziffernkarten, Würfelbecher, Dominosteine, Computerprogramme „Schnelles Sehen“, strukturierte Zahlenstreifen bis 10 und Abdeckblätter für „Verdecktes Zählen“) **SIN S. 39 – 41** **BfB Karteikarten,** z. B. **„**Fingerblitz“, „Klatsch in die Hände“, „ Mathematik-Domino“, „Zahlenmemory“
❍ **Zahlzerlegungen sowie Verdoppeln und Halbieren** – Alle Zerlegungen bis 10 (an Fingern – an vorgestellten Fingern) – Verdecktes Zählen – Auswendiglernen – Verdoppeln und Halbieren bis 20 **Ziele:** – Gedächtnismäßiges Beherrschen aller Zerlegungen bis 10 als Voraussetzung für den Zehnerübergang mit schrittweisem Rechnen – Gedächtnismäßiges Beherrschen aller Verdoppelung- und Halbierungsaufgaben bis 20 als Voraussetzung für den Zehnerübergang mit Hilfe des Verdoppelns/Halbierens	**FK 5 bis 8** (Finger, Stift, Tuch, Ziffernkarten 0–10, 20 zweifarbige Plättchen, Abdeckblatt) **HR Kap. 2.3** (Zahlenhäuser, Schüttelkästen, Klappenspiel …) **HR Kap. 2.5** (Zwanziger-Rechenrahmen) **SIN S. 41 – 43** **BfB Karteikarten,** z. B. „Links vom Stift und rechts vom Stift“, „ Verdeckte Plättchen“

❍ **Verständnis der Struktur der Hunderter-Tafel – Orientierung im Hunderterraum** – Kenntnis der Zahlen bis 100, insbesondere das Wissen über Stellenwerte, Nachbarschaftsbeziehungen, über Zehnernachbarschaften und über Analogien – Verständnis der Struktur der Hunderter-Tafel **Ziele:** – Veränderung des Modells der Hunderter-Tafel zu einer „Hunderter-Tafel im Kopf" – Flexibles Bewegen im Zahlenraum bis 100, so dass mühsame Einzelschritte beim Rechnen mit ZE überwunden werden	**Hunderter-Tafel** (mit Ziffernseite/leere Rückseite) mit klar erkennbarer Fünferstruktur wasserlösliche Stifte, Wendeplättchen zum Abdecken, Ausschnitte aus der Hunderter-Tafel, 4-Felder–Quadrate , „Lochschablone" mit quadratischem Fenster, durchsichtige Chips **HR Kap. 2.7**
❍ **Zehnerübergang mit operativen Strategien** – Handhabung des Rechenrahmens als Lernhilfe, nicht als Lösungshilfe – Zahldarstellungen mit einem „Fingerstreich" – Begleitung der Handlungen durch Kurzsprechweisen – Verinnerlichung von Materialhandlungen zu Vorstellungen **Ziele:** – Sicheres, materialunabhängiges Beherrschen des schrittweisen Rechnens als operative Strategie (Minimalstrategie) – Thematisieren der Nutzen des Verdoppelns bzw. Halbierens	**HR Kap. 2.5** **FK 9 und 10** (20 zweifarbige Plättchen, 2-mal Ziffernkarten 1–10, Abdeckblatt) **FK 11 bis 14** (Zwanziger-Rechenrahmen, Hunderter-Rechenrahmen, Tuch zum Verbinden der Augen) **SIN S. 43 – 46**
❍ **Übungsformen zum Bewusstmachen des Beziehungsgeflechts der Grundaufgaben der Addition und Subtraktion; Einprägestrategien** – Kernaufgaben – Aufgabenfamilien (vier Aufgaben: Aufgabe, Tauschaufgabe und beide Umkehraufgaben) – Nachbaraufgaben, die durch Veränderung um eins bei einem der beiden Summanden entstehen	**HR Kap. 2.6** (Einspluseinseins-Tafel) **SIN S. 32 – 34**

Ziele: – Verständnis der Systematik aller Aufgaben; operativen Zusammenhänge – Gedächtnismäßige Beherrschung aller Grundaufgaben	
❍ **Rechnen mit vollen Zehnern an der Hunderter-Tafel** – Markierung der Rechenwege auf der Hunderter-Tafel – Beschreibung der Handlungen auf der Hunderter-Tafel mit verbundenen Augen **Ziele:** – Darstellung und Vorstellung der Addition und Subtraktion voller Zehner als Wege nach unten bzw. oben – Erkennen der Analogie in ZE + Z (Beispiel: 35 + 40) zu E + E (hier: 3 + 4) und Nutzung bei der Lösung (35 + 40 = 30 + 40 + 5)	**FK 15 und 16** (Hunderter-Tafel, zwei verschiedenfarbige transparente Chips) **HR Kap. 2.7** **SIN S. 46**
❍ **Rechnen von Aufgaben des Typs ZE + ZE über *Vorstellungen* von Handlungen an Materialien** – Übungen weniger Aufgaben ohne Materialhandlungen **Ziele:** – Aufgaben sollten nur noch mit der Vorstellung der Hunderter-Tafel beim ersten Teilschritt (ZE+Z) und der Vorstellung des Rechenrahmens beim zweiten Teilschritt (ZE+E) gelöst werden.	**HR Kap. 2.7 (ohne Material)** Sprachliche Begleitung (Kurzform!) der verinnerlichten Handlungen **SIN S. 46 – 47**
❍ **Übungen zur Links-/Rechts-/Unterscheidung** – als Eigenschaft von Körperteilen – als Eigenschaft von Körperteilen auch am Gegenüber – als Eigenschaft einer Relation zwischen zwei Objekten **Ziele:** – Sichere Unterscheidung von links und rechts als Voraussetzung für eine verständnisvolle und richtige Nutzung der Arbeits- und Veranschaulichungsmittel, da diese mit Richtung operieren	**HR Kap. 1.2** **SIN S. 47 – 49** (Taschenrechner) **BfB Karteikarten,** z. B. „Im Labyrinth“, „Kranspiel“, „Rechte Hand auf linkes Knie“, „Rechts und links“, „Schachtelspaziergang“

❍ **Rechengeschichten – Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen** – Übersetzung von Sachkontexten in Materialhandlungen – Spielhandlungen mit den Originalgegenständen und mit ihren Vertretern – Übersetzung von Materialhandlungen in bildliche Darstellungen – Zur bildlichen Darstellung die symbolische Notation in Gleichungsform finden – Begleitende Versprachlichung bei allen Aktivitäten – Umgekehrte Transferleistungen (zu einem Bild eine Rechengeschichte erzählen, zu einer Gleichung oder einem Term Handlungen mit Material durchführen, zu Handlungen mit Plättchen Rechengeschichten verschiedenen Inhalts erfinden…) **Ziele:** – Befähigung der Kinder zu immer abstrakteren Darstellungen der im Sachkontext gegebenen arithmetischen Beziehungen – Befähigung der Kinder, Kontext, Handlungen mit den Originalgegenständen, Handlungen mit deren Stellvertretern, Bild und symbolische Notation sowie Gleichungen aufeinander zu beziehen sowie diese Beziehungen versprachlichen zu können	**HR Kap. 1.2** **SIN S. 49 – 55** (Originalgegenstände, Handlungen mit deren Stellvertreter, z. B. Plättchen, Bild und symbolische Notationen)