Skriptum zur Vorlesung

Analysis I

Hans-Dieter Alber

1998

zuletzt geändert am 15. Mai 2021

Inhaltsverzeichnis

Literatur:

M. Barner, F. Flohr: Analysis I. Berlin: de Gruyter 1987

O. Forster: Analysis I. Vieweg Verlag 2005

1 Grundbegriffe

1 a.) Mengen

Grundlegend ist der von Georg Cantor (1845 – 1918) eingeführte Begriff der Menge. Nach der Definition von Cantor ist eine Menge eine

„Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Dingen zu einem Ganzen."

Diese Dinge werden Elemente der Menge genannt. Mengen kann man auf zwei Arten festlegen:
1.) Man führt alle ihre Elemente in geschweiften Klammern auf: z. Bsp.

$$\begin{aligned} M_1 &= \{1, 2, 3, 4\} \\ M_2 &= \{-1, 2, 4, 6, 7.5\} \\ M_3 &= \{2, 4, 6, 8, 10\}\,. \end{aligned}$$

2.) Oder man gibt eine definierende Eigenschaft an:

$$\begin{aligned} M_4 &= \{x \mid x \text{ ist gerade Zahl zwischen 1 und 10}\} \\ M_5 &= \{a \mid a^2 = 1\} \\ M_6 &= \{x \mid x \text{ ist Primzahl}\}\,. \end{aligned}$$

Es kommt nicht auf die Reihenfolge der Elemente an. Also ist

$$M_1 = \{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 1, 2\}\,.$$

Die Definition der Menge muß so gefaßt sein, daß von jedem Ding feststeht, ob es zu der Menge gehört oder nicht (jedes Element muß „wohlbestimmt" sein). In einer Menge darf ein Element nur einmal vorkommen („wohlunterschieden").

Man sagt, zwei Mengen A und B seien gleich,

$$A = B\,,$$

wenn sie dieselben Elemente enthalten. Also ist

$$M_1 = \{2, 4, 6, 8, 10\} = M_4 = \{x \mid x \text{ ist gerade Zahl zwischen 1 und 10}\}\,.$$

Man sagt, A sei Teilmenge von B,

$$A \subseteq B\,,$$

wenn jedes Element von A auch in B enthalten ist:

$$\begin{aligned} \{1,4\} &\subseteq \{1,2,3,4\}, \\ \{1,2,3,4\} &\subseteq \{a \mid a \text{ ist ganze Zahl}\}\,. \end{aligned}$$

B ist dann Obermenge von A. Für die Aussage, „m ist Element von M“ führt man das Symbol

$$m \in M$$

ein. Die Negation dieser Aussage ist

$$m \notin M\,.$$

Dieses Symbol bedeutet also „m ist nicht Element von M“.

Eine Menge, die kein Element enthält, wird leere Menge genannt. Das Symbol für diese Menge ist $\emptyset$. Es ist sinnvoll, die leere Menge zuzulassen, weil sonst in vielen Aussagen Fallunterscheidungen vorgenommen werden müssen. Die leere Menge $\emptyset$ wird als Teilmenge jeder Menge angesehen.

Für eine Reihe von Mengen hat man Standardbezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1,2,3,\ldots\} \quad \text{(Menge der natürlichen Zahlen)}, \\ \mathbb{Z} &= \{0,1,-1,2,-2,\ldots\} \quad \text{(Menge der ganzen Zahlen)}, \\ \mathbb{Q} &= \{q \mid q \text{ ist rationale Zahl}\}, \\ \mathbb{R} &= \{r \mid r \text{ ist reelle Zahl}\}. \end{aligned}$$

Sei $M_1 \subseteq M$. Dann bezeichnet man die Menge

$$C = \{m \mid m \text{ gehört zu } M \text{ aber nicht zu } M_1\}$$

als Komplement von M_1 in M und schreibt dafür

$$C = M \setminus M_1\,.$$

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M heißt die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M. Insbesondere gilt

$$\emptyset \in \mathcal{P}(M)\,, \quad M \in \mathcal{P}(M)$$

(M ist Teilmenge von sich selbst).

Beispiel. Teilmengen von $\{1,2,3,4\}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \emptyset \\ \{1\},\{2\},\{3\},\{4\} \\ \{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\} \\ \{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\} \\ \{1,2,3,4\} \end{array}\right\} = \mathcal{P}(\{1,2,3,4,\}) .$$

Die Potenzmenge enthält $16 = 2^4$ Elemente.

Der Mengenbegriff ist nicht so scharf definiert, wie man das sonst in der Mathematik gewohnt ist. Er ist ein Grundbegriff, auf dem die Mathematik aufbaut. Jedoch muß man vorsichtig sein, da bestimmte Mengendefinitionen auf Widersprüche führen und daher nicht zugelassen werden können.

Beispiel. „Russelsche Antinomie“ (B. Russell, 1872 – 1970):
Sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten. Gilt $M \in M$?

Aus $M \in M$ folgt $M \notin M$. Umgekehrt folgt aus $M \notin M$ aber $M \in M$. Also kann weder $M \in M$ noch $M \notin M$ gelten. Da jedoch eine der beiden Aussagen richtig sein muß, ergibt sich ein Widerspruch. Diese Mengendefinition ist also nicht zugelassen.

Um diese Widersprüche zu vermeiden, legt man in der „axiomatischen“ Mengenlehre die zwischen Mengen gültigen Relationen durch ein System von formalen Axiomen fest. Meistens stellt man sich aber auf den Standpunkt der „naiven Mengenlehre“ und benützt die Cantorsche Mengendefinition, vermeidet aber auf Widersprüche führende Mengendefinitionen. Auch wir gehen so vor.

Weitere Definitionen und Bezeichnungen: Seien M_1 und M_2 Mengen. Dann bezeichnet man

$$M_1 \cup M_2 = \{x \mid x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$$

als Vereinigungsmenge. Das Wort „oder“ wird hier wie üblich im mathematischen Sprachgebrauch nicht als „exklusives oder“ benutzt. Ein Element x darf also zu beiden Mengen M_1 und M_2 gehören. Für ein beliebiges endliches oder unendliches System S von Mengen schreibt man auch

$$\bigcup_{M \in S} M = \{x \mid \text{Es gibt ein } M \in S \text{ mit } x \in M\} .$$

Man benützt auch die Bezeichnungen

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i = M_1 \cup M_2 \cup \ldots M_n\,; \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots\,.$$

Ebenso definiert man durch

$$M_1 \cap M_2 = \{x \mid x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$$

den Durchschnitt der Mengen M_1 und M_2. Für ein beliebiges Mengensystem S schreibt man

$$\bigcap_{M \in S} M = \{x \mid \text{Für alle } M \in S \text{ gilt } x \in M\}\,.$$

Man benützt auch die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^{n} M_i &= M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n\,, \\ \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i &= M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \ldots\,. \end{aligned}$$

Gilt $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, dann sagt man, die Mengen M_1 und M_2 seien disjunkt.

Beispiele. 1.) Sei $M_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=1}^{n} M_k &= M_n\,, \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k &= \mathbb{N}\,, \\ \bigcap_{k=1}^{n} M_k &= \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k = \{1\}\,. \end{aligned}$$

2.) Sei a eine positive reelle Zahl und sei $M_a = \{x \mid x \text{ reelle Zahl mit } 0 < x < a\}$.
Für

$$S = \{M_a \mid a > 0\}$$

gilt dann

$$\begin{aligned} \bigcap_{M \in S} M &= \emptyset\,, \\ \bigcup_{M \in S} M &= \{x \mid x \text{ ist positive reelle Zahl}\}\,. \end{aligned}$$

3.) Sei a eine positive reelle Zahl und sei

$$M'_a = \{x \mid x \text{ ist reelle Zahl mit } 0 \le x < a\}\,.$$

Für

$$S' = \{M'_a \mid a > 0\}$$

gilt dann

$$\begin{aligned} \bigcap_{M \in S'} M &= \{0\}\,, \\ \bigcup_{M \in S'} M &= \{x \mid x \text{ ist reelle Zahl mit } x \ge 0\}\,. \end{aligned}$$

Regeln von de Morgan. (1806 – 1871) Seien alle Mengen $M \in S$ Teilmenge einer gemeinsamen Obermenge K. Das Komplement von M in K bezeichne ich als M'. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Big(\bigcup_{M \in S} M\Big)' &= \bigcap_{M \in S} M'\,, \\ \Big(\bigcap_{M \in S} M\Big)' &= \bigcup_{M \in S} M'\,. \end{aligned}$$

Cartesisches Produkt. Seien A, B Mengen. Unter dem cartesischen Produkt $A \times B$ der beiden Mengen A, B versteht man die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in A$ und $y \in B$:

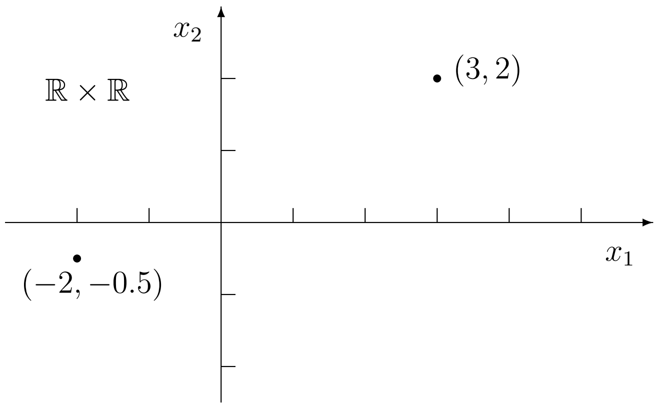
$$A \times B = \{z \mid z = (x, y),\ x \in A,\ y \in B\}\,.$$

Bei geordneten Paaren muß man also die Reihenfolge beachten. Zwei geordnete Paare (x, y) und (x', y') heißen gleich, genau dann wenn $x = x'$ und $y = y'$ gilt.

Mengentheoretisch einwandfrei kann man geordnete Paare folgendermaßen definieren:

$$(x, y) := \big\{x, \{x, y\}\big\}\,.$$

Beispiel. $A = B = \mathbb{R}$. Jeden Punkt der Ebene kann man durch ein Koordinatenpaar $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ festlegen; jeden Punkt des Raumes kann man durch ein Koordinatentripel $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ darstellen.



Relationen. Auf der Menge der reellen Zahlen ist die „kleiner als“ Beziehung $<$ erklärt. Zum Beispiel gilt $1 < 2$. Man kann dies auch so ausdrücken: Die Relation $<$ trifft auf das geordnete Paar $(1, 2)$ zu. Dagegen trifft die Relation $<$ auf das geordnete Paar $(2, 1)$ nicht zu. Die Relation $<$ auf den reellen Zahlen ist also durch die Menge derjenigen geordneten Paare aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bestimmt, auf die $<$ zutrifft. Das legt nahe, $<$ direkt als die Menge aller geordneten Paare

$$\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R} \text{ mit } x < y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

aufzufassen. Allgemein definiert man: Wenn M eine Menge ist, bezeichnet man jede Teilmenge R von $M \times M$ als zweistellige Relation auf M.

Beispiel. Sei M eine Menge. Eine endliche oder unendliche Menge P von Teilmengen von M heißt Partition von M, wenn

$$M = \bigcup_{T \in P} T$$

und $S \cap T = \emptyset$ für alle $S, T \in P$ mit $S \neq T$ gilt. Eine Menge P von Teilmengen von M ist also genau dann eine Partition von M, wenn jedes Element von M in genau einer Menge von P liegt.

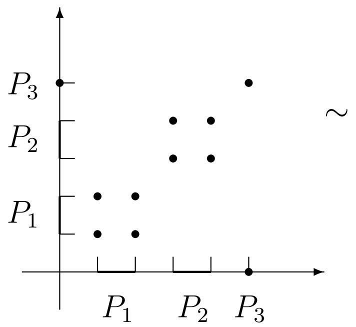
Sei P eine Partition von M. Man nennt zwei Elemente $x, y \in M$ äquivalent und schreibt $x \sim y$, genau dann wenn x und y zur selben Menge von P gehören.

Hierdurch wird eine Relation $\sim$ auf M erklärt:

$$\begin{aligned} \sim \quad &= \quad \{(x, y) \mid (x, y) \in M \times M \text{ und } x \sim y\} \\ &= \quad \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ gehören zur selben Menge aus } P\}. \end{aligned}$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} M &= \{1,2,3,4,5\} \\ P_1 &= \{1,2\}\,, \quad P_2 = \{3,4\}\,, \quad P_3 = \{5\} \\ P &= \{P_1, P_2, P_3\} \quad \text{ist eine Partition}\,. \end{aligned}$$



$\sim$ hat folgende Eigenschaften:
(1) $x \sim x$ $\quad$ ($\sim$ ist reflexiv)
(2) Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ $\quad$ ($\sim$ ist symmetrisch)
(3) Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ $\quad$ ($\sim$ ist transitiv)
Eine Relation, für die (1), (2), (3) gelten, heißt Äquivalenzrelation. Das einfachste Beispiel für eine Äquivalenzrelation ist $\quad = \quad$ (Gleichheit).

1 b.) Verknüpfung von Aussagen

Seien $A, B, C, \ldots$ Aussagen. Eine Aussage kann wahr (W) oder falsch (F) sein. Durch logische Verknüpfung von Aussagen erhält man neue Aussagen. Deren Wahrheitswert hängt allein von den Wahrheitswerten der ursprünglichen Aussagen ab. Ich will die Wahrheitstafeln für die vier Verknüpfungsoperationen $\wedge$ (‚und'), $\vee$ (‚oder'), $\Rightarrow$ (‚Implikation'), $\Leftrightarrow$ (‚Äquivalenz') angeben.

1.) ‚Und' $\wedge$

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
F	W	F
W	F	F
F	F	F

Damit A ‚und' B wahr ist, müssen sowohl A als auch B wahr sein. Man versteht diese

Festlegung besser, wenn man folgendes Beispiel betrachtet: Man kann die Definition einer Menge

$$M = \{m \mid \text{definierende Aussage}\}$$

folgendermaßen auffassen: Es soll $m \in M$ gelten, wenn die definierende Aussage für m richtig ist (den Wahrheitswert W hat), und es soll $m \notin M$ sein, wenn die definierende Aussage für m falsch ist.

Beispiel. Seien M_1, M_2 Mengen. Den Durchschnitt $M_1 \cap M_2$ kann man folgendermaßen definieren

$$M_1 \cap M_2 := \{m \mid (m \in M_1) \wedge (m \in M_2)\} .$$

2.) ‚Oder' $\vee$

A	B	$A \vee B$
W	W	W
F	W	W
W	F	W
F	F	F

Damit A ‚oder' B wahr ist, genügt es, daß eine der beiden Aussagen A, B wahr ist.

Beispiel.

$$M_1 \cup M_2 := \{m \mid (m \in M_1) \vee (m \in M_2)\} .$$

3.) ‚Implikation' $\Rightarrow$ (aus A folgt B)

A	B	$A \Rightarrow B$
W	W	W
F	W	W
W	F	F
F	F	W

In der Umgangssprache interessiert man sich bei der Aussage „aus A folgt B" nur für den Fall, daß A wahr ist. Nur dann macht man eine Aussage über B. Was passiert, wenn A nicht wahr ist, läßt man offen:

Beispiel. „Wenn es regnet, wird die Straße naß." „Wenn es regnet, folgt daß die Straße naß wird." Was passiert, wenn es nicht regnet, bleibt offen. In diesem Fall kann die Straße trocken bleiben, oder aber aus anderen Gründen doch naß werden. Dem wird man in der formalen Festlegung des Wahrheitswertes von $A \Rightarrow B$ gerecht, indem man diese Aussage immer als wahr ansieht, wenn A falsch ist. Die Implikation ist eine „einseitige Aussage".

Beispiel.

$$\begin{aligned} N &= \{m \mid m \in M \wedge (m \in M_1 \Rightarrow m \in M_2)\} = M \cap \big((M \backslash M_1) \cup (M_1 \cap M_2)\big) \\ &= M \cap (M \setminus M_1) \cup (M \cap M_1 \cap M_2) = (M \setminus M_1) \cup (M \cap M_1 \cap M_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \{m \mid m \in M \wedge \big[(m \in M_1 \Rightarrow m \in M_2) \wedge (m \in M_2 \Rightarrow m \in M_1)\big]\} \\ &= M \cap \big[(M \backslash M_1) \cup (M_1 \cap M_2)\big] \cap \big[(M \backslash M_2) \cup (M_1 \cap M_2)\big] \\ &= (M \cap M_1 \cap M_2) \cup \big[M \backslash (M_1 \cup M_2)\big]\,. \end{aligned}$$

4.) ‚Äquivalenz‘ $\Leftrightarrow$ (genau dann, wenn)

A	B	$A \Leftrightarrow B$
W	W	W
F	W	F
W	F	F
F	F	W

Beispiel.

$$M = \{a \mid (a \in \mathbb{R}) \wedge (a^2 > 1 \Leftrightarrow a > 1)\} = \{a \mid a \geq -1\}\,.$$

Sei a eine reelle Zahl. Wenn man sagt „Ich beweise, daß $a^2 > 1$ ist genau dann wenn $|a| > 1$ ist“, dann meint man damit, daß man zeigt, daß $(a^2 > 1) \Leftrightarrow (|a| > 1)$ immer wahr ist. Hierzu muß man beweisen:

1.) Ist $a^2 > 1$ dann ist $|a| > 1$.

2.) Ist $|a| > 1$ dann ist $a^2 > 1$.

Wenn man dagegen sagt „Ich beweise, daß aus $a > 1$ folgt, daß $a^2 > 1$ ist“, dann meint man damit, daß man zeigt, daß $(a > 1) \Rightarrow (a^2 > 1)$ immer wahr ist. Hierzu muß bewiesen werden: Ist $a > 1$ dann ist $a^2 > 1$.

1 c.) Quantoren, Negation von Aussagen

Zur Abkürzung von Aussagen benützt man die Quantoren $\forall, \exists$.

All–Quantor: $\forall$ ‚für alle‘

Existenz–Quantor: $\exists$ ‚es gibt‘

Beispiele:

$$\forall_{a \in \mathbb{R}} \quad \exists_{n \in \mathbb{N}} \quad : \quad n > a.$$

„Für jede reelle Zahl a gibt es (mindestens) eine natürliche Zahl n mit $n > a$.“

$$\forall_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ a > 1}} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \exists_{m \in \mathbb{N}} \quad : \quad n \leq a^m.$$

„Für jede reelle Zahl a, die größer als 1 ist, und für jede natürliche Zahl n gibt es eine natürliche Zahl m so daß $n \leq a^m$ gilt."

Die Negation einer mit Quantoren geschriebenen Aussage kann leicht bestimmt werden. Die Negation der Aussage aus dem ersten Beispiel ist

$$\exists_{a \in \mathbb{R}} \quad \forall_{n \in N} \quad : \quad n \leq a.$$

„Es gibt (mindestens) ein $a \in \mathbb{R}$ so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq a$."
Die Negation der zweiten Aussage ist:

$$\exists_{\substack{a \in \mathbb{R} \\ a > 1}} \quad \exists_{n \in \mathbb{N}} \quad \forall_{m \in \mathbb{N}} \quad : n > a^m.$$

„Es gibt eine reelle Zahl a, die größer als 1 ist, und es gibt eine natürliche Zahl n, so daß für alle natürlichen Zahlen m gilt $n > a^m$."

2 Reelle Zahlen

$$
\begin{aligned}
\frac{10}{7} &= 1,428571\,428571\,\ldots \\
\sqrt{2} &= 1,4142135\,\ldots \\
\pi &= 3,1415926\,\ldots
\end{aligned}
$$

sind reelle Zahlen. Was diese unendlichen Dezimalbrüche eigentlich sein sollen und wie man damit rechnet, soll nun geklärt werden. Dazu muß man genau angeben, was man unter „den reellen Zahlen“ verstehen will, und welche Eigenschaften sie haben sollen. Ich will zunächst das Vorgehen skizzieren:

Zunächst beachte man, daß es gar nicht darauf ankommt, was die reellen Zahlen eigentlich sind, sondern nur wie man damit rechnet. Man stellt daher zunächst eine Liste der Rechenregeln und Eigenschaften auf, die die reellen Zahlen haben sollen. Dann versucht man alle diese Eigenschaften auf möglichst wenige, möglichst klare „Grundsätze“, sogenannte „Axiome“, zurückzuführen. Nachdem man diese Axiome aufgestellt hat, vergißt man die konkrete Vorstellung einer reellen Zahl, die man aus Erfahrung hat, und nimmt an, man hätte irgendeine Menge und Rechenoperation auf dieser Menge, für die diese Axiome gelten. Dann zeigt man, daß wenn man eine zweite solche Menge hat, diese auf die erste in geeignetem Sinn „abgebildet“ werden kann, also in einem gewissen Sinn „äquivalent“ zur ersten Menge ist. Man zeigt also, daß es in diesem Sinn nur eine einzige solche Menge gibt, und diese Menge (zusammen mit den Rechenoperationen, für die die Axiome gelten), nennt man die „reellen Zahlen“. Schließlich muß man sich überlegen, daß die übliche Dezimalbruchdarstellung der reellen Zahlen mit der üblichen Erklärung der Rechenoperationen $+$, $\cdot$, $<$ usw. gerade eine solche Menge ist, ein sogenanntes „Modell“ für die reellen Zahlen darstellt.

Man nennt dies den axiomatischen Aufbau der reellen Zahlen. Man führt also die Eigenschaften der reellen Zahlen auf einige einfache Axiome, d.h. Grundannahmen zurück. Diese Axiome führt man nicht weiter zurück, leitet sie also nicht aus noch einfacheren Annahmen her. Denn irgendwo muß auch die Mathematik beginnen. Natürlich gibt es verschiedene Möglichkeiten, das Axiomensystem zu wählen. Bei der Auswahl der Axiome strebt man zwei Ziele an:

1. Das Axiomensystem soll widerspruchsfrei sein, d. h. es soll nicht möglich sein, daraus sich widersprechende Aussagen abzuleiten,

2. das Axiomensystem soll vollständig sein, d. h. es soll möglich sein, alle zutreffenden

arithmetischen Beziehungen zwischen den reellen Zahlen daraus herzuleiten.

Ich werde gleich ein Axiomensystem angeben. Die Axiome in diesem System machen Aussagen direkt über die reellen Zahlen. In einem anderen bekannten Axiomensystem, das von Guiseppe Peano im Jahr 1889 aufgestellt wurde, machen die Axiome nur Aussagen über die natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Dadurch hat man die natürlichen Zahlen gegeben. Aus diesen natürlichen Zahlen konstruiert man dann die rationalen, und aus den rationalen Zahlen die reellen Zahlen. Man nennt dies den konstruktiven Aufbau der reellen Zahlen. Das Ergebnis ist genau dasselbe. Jedoch spielt der konstruktive Aufbau eine große Rolle, weil es viel einfacher, natürlicher und überzeugender scheint, nur Annahmen über die natürlichen Zahlen zu machen als gleich über die reellen Zahlen. Dieser konstruktive Aufbau erfordert jedoch viel Arbeit. In einem Grundkurs über Infinitesimalrechnung vermeidet man üblicherweise diese Arbeit und beginnt direkt mit den Axiomen für reelle Zahlen. Auch ich folge diesem Vorgehen.

Was jedoch die genannten Ziele angeht, hat Kurt Gödel im Jahr 1931 in einer berühmten Arbeit gezeigt, dass ein Axiomensystem, das widerspruchsfrei ist, nicht vollständig sein kann. Das zweite Ziel kann also nicht erreicht werden (wenigstens wenn man Widersprüche vermeiden möchte).

Als Beispiel nenne ich die Goldbachsche Vermutung, dass jede gerade Zahl größer als 2 die Summe zweier Primzahlen ist. Diese Vermutung wurde 1742 von Christian Goldbach formuliert. Die Gültigkeit der Vermutung wurde schon bis zu sehr großen Zahlen mit Computerhilfe nachgewiesen, aber ein Beweis ist bisher nicht gelungen. Es könnte also sein, dass die Goldbachsche Vermutung wahr ist, aber aus den Axiomen nicht hergeleitet werden kann.

Ich beginne nun mit der Formulierung der Axiome.

2 a.) Körperaxiome

Wir nehmen an, je zwei reellen Zahlen a, b sei eindeutig eine reelle Zahl $a+b$, ihre Summe, und eine andere reelle Zahl $a \cdot b$, ihr Produkt zugeordnet. Für diese Zuordnung, die man

Addition und Multiplikation nennt, soll gelten

Addition

Addition	A1.)	$a + b = b + a$	Kommutativgesetz
	A2.)	$a + (b + c) = (a + b) + c$	Assoziativgesetz
	A3.)	Es gibt genau eine Zahl 0 so daß für alle a gilt $a + 0 = a$	Existenz- und Eindeutigkeit der 0
	A4.)	Zu jedem a gibt es genau ein x so daß gilt $a + x = 0$	Eindeutige Lösbarkeit der Gleichung $a + x = 0$.
Multiplikation	A5.)	$a \cdot b = b \cdot a$	Kommutativgesetz
	A6.)	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	Assoziativgesetz
	A7.)	Es gibt genau eine von 0 verschiedene Zahl 1, so daß für alle a gilt $a \cdot 1 = a$	Existenz- und Eindeutigkeit der 1
	A8.)	Zu jedem $a \neq 0$ gibt es genau ein x, so daß gilt $a \cdot x = 1$	Eindeutige Lösbarkeit der Gleichung $a \cdot x = 1$.
	A9.)	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	Distributivgesetz

Wegen der Assoziativgesetze 2.) und 6.) kann man Klammern weglassen.

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c =: a + b + c \\ a(bc) &= (ab)c =: abc \end{aligned}$$

Folgerungen aus den Körperaxiomen:

1.) Es gilt

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(binomische Formel).

Hierbei sei $c^2 := cc$; $2 := 1 + 1$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(a+b)(a+b) &= (a+b)a + (a+b)b \\
&= a(a+b) + b(a+b) \\
&= (aa+ab) + (ba+bb) \\
&= \big((aa+ab)+ba\big) + bb \\
&= \big(aa+(ab+ba)\big) + bb \\
&= \big(aa+(ab+ab)\big) + bb \\
&= \big(aa+ab(1+1)\big) + bb \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}$$

Nach A4) gibt es genau eine Lösung x zur Gleichung $a + x = 0$. Diese Lösung bezeichnet man mit $(-a)$.

2.) Für reelle Zahlen a, b besitzt die Gleichung $a + x = b$ genau eine Lösung.

Beweis: Addiere zur Gleichung $a + x = b$ die Zahl $-a$. Es folgt

$$x = (-a) + a + x = (-a) + b = b + (-a).$$

Umgekehrt erfüllt diese Zahl auch die Gleichung. Denn es gilt

$$a + \big(b + (-a)\big) = a + (-a) + b = b.$$

Man definiert

$$b - a = b + (-a) \qquad \text{Differenz}.$$

Also ist die Subtraktion definiert.

3.) Dasselbe gilt für die Multiplikaton: Nach A8.) gibt es zu jedem $a \neq 0$ eine Zahl a^{-1} mit $aa^{-1} = 1$; man schreibt auch $a^{-1} = \frac{1}{a}$.
Für $a \neq 0$ besitzt die Gleichung $ax = b$ genau eine Lösung $x = ba^{-1} =: \frac{b}{a}$ (Quotient).

Hiermit ist die Division erklärt.

Daß man in Axiom A8.) $a \neq 0$ voraussetzen muß, folgt aus

4.) Für jedes a gilt $a \cdot 0 = 0$.

Beweis:

$$a \cdot 1 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 + a \cdot 0.$$

Subtraktion von $a = a \cdot 1$ auf beiden Seiten dieser Gleichung ergibt

$$0 = a \cdot 0 \, .$$

Ist in einem Produkt ein Faktor 0 , so ist das Produkt 0 .

Umgekehrt gilt auch:
Ist ein Produkt 0 , so ist mindestens einer der Faktoren Null. Denn sei $ab = 0$ und $a \neq 0$. Dann folgt

$$0 = \frac{1}{a}(ab) = (\frac{1}{a}a)b = 1 \cdot b = b \, .$$

Also gilt: Ein Produkt ist Null, genau dann wenn wenigstens einer der Faktoren Null ist.

5.) Für alle a, b gilt

$$(-a)b = -(ab) \, .$$

Hierbei ist $-(ab)$ nach Definition die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $ab + x = 0$. Andererseits gilt auch

$$ab + (-a)b = \big(a + (-a)\big)b = 0 \cdot b = 0 \, .$$

Also ist auch $(-a)b$ Lösung dieser Gleichung. Nach Voraussetzung A4.) ist diese Lösung eindeutig bestimmt, also ist $(-a)b = -(ab)$.

2 b.) Anordnungsaxiome

Auf der Menge der reellen Zahlen sei eine Relation $<$ definiert, die folgende Eigenschaften habe:

A10.)	Aus $a \neq b$ folgt, daß entweder $a < b$ oder $b < a$ richtig ist	Trichotomiegesetz
A11.)	Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$	Transitivität
A12.)	Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$	Monotoniegesetz der Addition
A13.)	Aus $a < b$ und $0 < c$ folgt $ac < bc$	Monotoniegessetz der Multiplikation.

Gilt $0 < a$, so heißt a positiv. Gilt $a < 0$, so heißt a negativ. Eine Beziehung $a < b$ heißt Ungleichung oder Abschätzung.

Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen.
1.) Aus $a < b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$.
Beweis: Aus $a < b$ folgt

$$a + c < b + c \, .$$

Aus $c < d$ folgt

$$b + c < b + d\,.$$

Also folgt aus A11.)

$$a + c < b + d\,.$$

$$\blacksquare$$

2.) Aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $bc < ac$.

Beweis: Zunächst zeige ich

$$c < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < (-c)\,.$$

Denn durch Addition von $-c$ zur Ungleichung $c < 0$ folgt

$$(-c) + c < -c\,, \quad \text{also} \quad 0 < (-c)\,.$$

Umgekehrt folgt durch Addition von c zur Ungleichung $0 < (-c)$

$$c < (-c) + c\,, \quad \text{d.h.} \quad c < 0\,.$$

Also gilt

$$a < b \quad \text{und} \quad 0 < (-c) \quad \Rightarrow \quad (-c)a < (-c)b$$

also

$$-(ca) < -(cb)\,.$$

Durch Addition von $ac + bc$ folgt

$$bc < ac\,.$$

3.) Für jedes $a \neq 0$ gilt $0 < a^2$.

Beweis: Sei $0 < a$. Dann folgt

$$0 = 0 \cdot a < a \cdot a = a^2\,.$$

Sei $a < 0$. Dann folgt $0 < (-a)$, also

$$0 = 0 \cdot (-a) < (-a)(-a) = a \cdot a = a^2$$

Denn $\quad (-a)(-a) = -(a(-a)) = -(-aa) = -(-(aa)) = aa\,.$

4.) Aus $0 < a$ folgt $0 < \frac{1}{a}$.

Beweis: Es gilt $\frac{1}{a} \neq 0$. Denn sonst müßte gelten $1 = a \cdot \frac{1}{a} = 0$. Dies ist ein Widerspruch zu Axiom A7.).

Es kann auch nicht sein, daß $\frac{1}{a} < 0$ gilt. Denn hieraus und aus $0 < a$ könnte man folgern

$$1 = \frac{1}{a} \cdot a < 0 \cdot a = 0\,.$$

Das kann nicht sein wegen $1 = 1 \cdot 1 > 0$, nach 3.) .

5.) Aus $a < b$ und $0 < ab$ folgt $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
Aus $a < b$ und $ab < 0$ folgt $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Beweis: Sei $0 < ab$. Dann folgt $0 < \frac{1}{ab}$. Also erhalten wir aus $a < b$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{a} = a \cdot \frac{1}{ab} \ < \ b \cdot \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{b} = \frac{1}{a}\,.$$

Ebenso folgt aus $ab < 0$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{b} = b \cdot \frac{1}{ab} \ < \ a \cdot \frac{1}{ab} = \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{a} = \frac{1}{b}\,.$$

Man schreibt $a > b$, genau dann wenn $b < a$ gilt. Die Relation $a \leq b$ gilt genau dann, wenn entweder $a < b$ oder $a = b$ ist.

6.) Für alle a, b mit $a \leq b$ gilt

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$$

Beweis: Aus $0 < 1$ folgt $1 < 2$, also $0 < 2$, also $0 < \frac{1}{2}$, also $\frac{a}{2} \leq \frac{b}{2}$, also

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{2}{2}\right)a &&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a \leq \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \\ &\leq \frac{b}{2} + \frac{b}{2} &&= b\,. \end{aligned}$$

Man kann nun Intervalle definieren: Sei $a \leq b$.

$$\begin{array}{lcll} [a,b] & := & \{x \mid a \leq x \leq b\} & \text{abgeschlossenes Intervall} \\ [a,b) & := & \{x \mid a \leq x < b\} & \\ & & & \text{halboffene Intervalle} \\ (a,b] & := & \{x \mid a < x \leq b\} & \\ (a,b) & := & \{x \mid a < x < b\} & \text{offenes Intervall}\,. \end{array}$$

Man bezeichnet auch die folgenden Mengen als Intervalle

$$\begin{aligned} [a,\infty) &:= \{x \mid a \leq x\} \\ (a,\infty) &:= \{x \mid a < x\} \\ (-\infty,a] &:= \{x \mid x \leq a\} \\ (-\infty,a) &:= \{x \mid x < a\} \\ (-\infty,\infty) &:= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$[a,a]$ ist ein einelementiges Intervall und (a,a) ist die leere Menge.

Definition

$$|a| := \begin{cases} a\,, & a \geq 0 \\ -a\,, & a < 0 \end{cases} \quad \text{„Betrag von } a\text{“}$$

Also gilt $|a| \geq 0$ und $-|a| \leq a \leq |a|$.

7.) Es gilt:

a.) $|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$

b.) $|ab| = |a|\,|b|$

c.) $|a+b| \leq |a| + |b|$ Dreiecksungleichung.

Beweis: a.) „$\Longleftrightarrow$“ klar.

b.) Unterscheide vier Fälle:

$$\begin{aligned} a \geq 0\,, &\quad b \geq 0 \\ a \geq 0\,, &\quad b < 0 \\ a < 0\,, &\quad b \geq 0 \\ a < 0\,, &\quad b < 0\,. \end{aligned}$$

Vierter Fall:

$$\begin{aligned} a < 0\,, b < 0 \Rightarrow -a > 0\,, &\quad \Rightarrow \quad -ab < 0 \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow |ab| = ab \\ a < 0\,, b < 0 \Rightarrow |a| &= -a\,, |b| = -b \Rightarrow \\ |a|\,|b| = (-a)\cdot(-b) &= -\big((-a)\cdot b\big) = -\big(-(ab)\big) = ab \end{aligned}$$

Zusammen folgt $|ab| = |a|\,|b|$.

c.) Aus $-|a| \leq a \leq |a|$ und $-|b| \leq b \leq |b|$ folgt

$$-(|a| + |b|) = (-|a|) + (-|b|) \leq a + b \leq |a| + |b|\,.$$

Ist $a + b \geq 0$, dann folgt die Behauptung aus der rechten Seite dieser Ungleichung. Ist $a + b < 0$, so folgt $|a+b| = -(a+b)$. Multiplikation der linken Seite der obenstehenden Ungleichung mit -1 ergibt also

$$|a+b| = -(a+b) \leq |a| + |b|$$

8.) Sei $b \neq 0$. Dann gilt $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.

Beweis: Wegen Behauptung 7b) gilt $|\frac{a}{b}| \cdot |b| = |\frac{a}{b} \cdot b| = |a|$. Division durch $|b|$ ergibt die Behauptung.

9.) $\quad | \, |a| - |b| \, | \leq |a+b|$

Beweis: Sei $c := a + b$. Dann gilt $b = c - a$. Die Dreiecksungleichung ergibt

$$|b| = |c-a| = |c+(-a)| \leq |c| + |-a| = |c| + |a| = |a+b| + |a| \,,$$

also

$$|b| - |a| \leq |a+b| \,.$$

Durch Vertauschen von a, b ergibt sich

$$-(|b|-|a|) = |a| - |b| \leq |a+b| \,,$$

also

$$| \, |a| - |b| \, | \leq |a+b| \,.$$

2 c.) Natürliche Zahlen, vollständige Induktion

Es ist naheliegend zu sagen, man erhalte die natürlichen Zahlen indem man von 1 ausgehend fortgesetzt 1 addiert. Besser definiert man die natürlichen Zahlen folgendermaßen:

Definition: Eine Menge M von reellen Zahlen heißt induktiv, wenn gilt

(a) $\quad 1 \in M$

(b) $\quad$ wenn $x \in M$ gilt, dann ist auch $x + 1 \in M$.

Induktive Mengen existieren. Beispiele sind die Menge aller reellen Zahlen und die Menge der positiven reellen Zahlen. Hat man ein beliebiges System von induktiven Mengen, so ist auch der Durchschnitt aller dieser induktiven Mengen eine induktive Menge. Denn 1 gehört zu jeder induktiven Menge, also auch zum Durchschnitt. Gehört x zum Durchschnitt, dann gehört x auch zu jeder induktiven Menge des Systems, also gehört nach (b) auch $x + 1$ zu jeder dieser Mengen, also auch zum Durchschnitt.

Definition: Der Durchschnitt aller induktiven Mengen reeller Zahlen heißt Menge der natürlichen Zahlen und wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.

1 ist die kleinste natürliche Zahl, weil die Menge aller reellen Zahlen, die größer oder gleich 1 sind, eine induktive Menge ist, und folglich die natürlichen Zahlen Teilmenge diese Menge sein müssen. Dagegen gibt es keine größte natürliche Zahl. Denn zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es noch $n + 1 \in \mathbb{N}$, und wegen $1 > 0$ ist $n + 1 > n$.

Induktionssatz: Sei $W \subseteq \mathbb{N}$, und es gelte

(a) $1 \in W$
(b) gilt $n \in W$, dann gilt auch $n+1 \in W$.
Dann ist $W = \mathbb{N}$.

Beweis: Es gilt nach Voraussetzung $W \subseteq \mathbb{N}$. Andererseits ist W eine induktive Menge. Nach Definition ist $\mathbb{N}$ Teilmenge jeder induktiven Menge, also gilt $\mathbb{N} \subseteq W$, folglich $W = \mathbb{N}$. ■

Dieser Satz ist die Grundlage zur Beweismethode der vollständigen Induktion. Diese Beweismethode verläuft folgendermaßen:

Es sei $A(n)$ eine Aussage über die natürliche Zahl n. Man zeige nun:
(a) Induktionsanfang: $A(1)$ ist richtig
(b) Induktionsschritt: Aus der Annahme, $A(n)$ sei richtig (Induktionsannahme), folgt, daß auch $A(n+1)$ richtig ist.

Wenn dies gezeigt werden kann, ist $A(n)$ für jede natürliche Zahl n richtig. Denn ist W die Menge aller natürlichen Zahlen, für die $A(n)$ richtig ist, so erfüllt W die Bedingungen des Induktionssatzes, also gilt $W = \mathbb{N}$, also ist $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen richtig.

Beispiele für Beweise durch vollständige Induktion. In den folgenden Beispielen treten Summen der Form

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

und Produkte der Form

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_{n-1} \cdot a_n$$

auf. Diese Ausdrücke ergeben zunächst keinen Sinn, weil nicht klar ist, in welcher Reihenfolge die Summation oder die Produktbildung durchzuführen ist. Auf Grund der Assoziativ- und Kommutativgesetze ist der Wert dieser Summen und Produkte jedoch von der Reihenfolge unabhängig. Dies ist jedoch nicht selbstverständlich, sondern muß erst durch vollständige Induktion nach n gezeigt werden. Ich überspringe diesen Beweis.

Weil diese Summen und Produkte von der Reihenfolge unabhängig sind, können zur Abkürzung folgende Symbole eingeführt werden:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + \ldots + a_n .$$
$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot \ldots \cdot a_n .$$

Es ist klar, daß der Summationsindex beliebig umbenannt werden darf. Außerdem definiert man

$$\begin{aligned} a^0 &:= 1 \qquad (0^0 := 1) \\ a^1 &:= a \\ a^2 &:= a \cdot a \\ &\vdots \\ a^n &:= \underbrace{aa\ldots a}_{\text{n Faktoren}} \end{aligned}$$

Beispiel 1. Es sei $a > -1$. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen n die *Bernoullische Ungleichung*

$$(1+a)^n \geq 1 + an\,.$$

Beweis: (a) Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$(1+a)^n = (1+a)^1 = 1 + a \geq 1 + na\,.$$

(b) Induktionsschritt: Angenommen, die Aussage sei für eine natürliche Zahl n bewiesen. Also gelte

$$(1+a)^n \geq 1 + na\,.$$

Zu zeigen ist, daß sie dann auch für $n+1$ gilt. Dies erhält man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) \\ &= 1 + na + a + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2 \\ &\geq 1 + (n+1)a\,, \end{aligned}$$

weil $na^2 > 0$ ist. ■

Beispiel 2. Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1) = n^2\,.$$

Dies kann auch in der Form

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$$

geschrieben werden.

Beweis: (a) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung klar.

(b) Induktionsschritt: Angenommen, die Aussage sei für eine natürliche Zahl n richtig. Also gelte

$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2\,.$$

Zu zeigen ist, daß $\sum_{j=1}^{n+1}(2j-1) = (n+1)^2$ gilt. Dies folgt so:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1}(2j-1) &= \sum_{j=1}^{n}(2j-1) + \big(2(n+1)-1\big)\\ &= n^2 + \big(2(n+1)-1\big) = n^2+2n+1 = (n+1)^2\,.\end{aligned}$$

■

Im folgenden Beispiel werden weitere Bezeichnungen benötigt: Für $n \in (\{0\} \cup \mathbb{N})$ sei

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{für } n = 0,\\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n, & \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$n!$ wird gesprochen als „n Fakultät“. Ist n eine natürliche Zahl und $k \in (\{0\} \cup \mathbb{N})$ mit $0 \le k \le n$, dann setzt man

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

$\binom{n}{k}$ wird gesprochen als „n über k“. Man nennt $\binom{n}{k}$ Binomialkoeffizient.

Für alle natürlichen Zahlen n und für alle natürlichen Zahlen $1 \le k \le n$ gilt zwischen den Binomialkoeffizienten die Gleichung

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Hierbei wird benutzt, daß $k \in \mathbb{N} \wedge k \ge 2 \Rightarrow k-1 \in \mathbb{N}$ gilt. Dies wird weiter unten gezeigt.

Beweis: Die Gleichung ergibt sich durch nachrechnen, die Beweismethode der vollständigen Induktion braucht nicht verwendet zu werden:

$$\begin{aligned}&\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &\qquad = \frac{n!k}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!}\\ &\qquad\qquad = \frac{n!(k+n+1-k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\,.\end{aligned}$$

■

Dies kann nun benutzt werden, um folgende Formel zu beweisen:

Beispiel 3. Es seien a, b reelle Zahlen. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die *binomische Formel*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Für $n = 2$ ergibt sich speziell $(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^2 + 2ab + b^2$.

Beweis: (a) Induktionsanfang: Sei $n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b\,.$$

(b) Induktionsschritt: Sei für ein $n \in \mathbb{N}$ die Formel richtig:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\,.$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1}\,.
\end{aligned}$$

In der zweiten Summe transformiere man den Summationsindex. Dazu setze man $j = k+1$. Dann gilt $k = j-1$, und es folgt mit der oben bewiesenen Formel für die Binomialkoeffizienten, daß

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k\,.
\end{aligned}$$

■

Nun werden einige Eigenschaften der natürlichen Zahlen hergeleitet.

Satz: Ist $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, dann auch $n-1$.

Beweis: Wäre das nicht richtig, gäbe es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 2$, so daß $n_0 - 1$ keine natürliche

Zahl ist. Dann wäre aber $\mathbb{N}\backslash\{n_0\}$ eine induktive Menge, die echte Teilmenge von $\mathbb{N}$ wäre. Dies ist nicht möglich, weil $\mathbb{N}$ die kleinste induktive Menge ist. ■

Satz: Für jede natürliche Zahl n gilt: Es gibt keine natürliche Zahl m mit der Eigenschaft $n < m < n+1$.

Beweis: (a) Induktionsanfang: Die Behauptung ist richtig für $n = 1$. Denn $\{1\} \cup \{x \mid x \geq 2\}$ ist eine induktive Menge, also ist $\mathbb{N}$ eine Teilmenge hiervon.
(b) Induktionsschritt: Es gebe keine natürliche Zahl m mit $n < m < n+1$. Dann kann es auch keine natürliche Zahl m' mit $n+1 < m' < n+2$ geben, denn sonst wäre nach dem vorangehenden Satz $m'-1$ eine natürliche Zahl mit $n < m'-1 < n+1$. ■

Satz: In jeder nichtleeren Menge A von natürlichen Zahlen gibt es ein kleinstes Element. (Die natürlichen Zahlen sind wohlgeordnet.)

Beweis: Betrachte die Menge W von natürlichen Zahlen

$$W = \{n \mid n \leq a \text{ für alle } a \in A\}.$$

Es gilt $1 \in W$. Würde mit jeder natürlichen Zahl n auch $n+1$ zu W gehören, dann wäre $W = \mathbb{N}$. Dies kann nicht sein, weil A nichtleer ist. Denn wenn es in A ein Element a gibt, dann ist $a+1$ eine natürliche Zahl, die nach Definition von W nicht zu W gehören kann.

Also gibt es eine Zahl $k \in W$ mit $k+1 \notin W$. Dieses k ist kleinstes Element von A. Hierzu ist zu zeigen: $k \in A$ und

$$\forall_{a\in A} : k \leq a.$$

Daß $k \leq a$ gilt für alle $a \in A$ ist klar, da $k \in W$ ist. Also muß noch bewiesen werden, daß $k \in A$ ist.

Wegen $k+1 \notin W$ gibt es $a_0 \in A$ mit $k+1 > a_0$, also ist $a_0 \leq k$, weil es keine natürliche Zahl zwischen k und $k+1$ gibt. Also ist

$$\begin{aligned} a_0 &\leq k \\ \text{und} \quad k &\leq a_0, \end{aligned}$$

also $k = a_0$. ■

Oft will man bei Induktionsbeweisen nicht mit der Zahl 1 sondern mit beliebigem n_0 als Induktionsanfang beginnen. Der folgende Satz zeigt, daß dies richtig ist:

Satz: Es sei $W \subseteq \mathbb{N}$ und es gelte
1.) $n_0 \in W$

2.) wenn $n \geq n_0$ und $n \in W$, so $n+1 \in W$.
Dann gilt $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq n_0\} \subseteq W$.

Beweis: Die Menge

$$W' = \{k \mid k \in \mathbb{N} \wedge k \leq n_0 - 1\} \cup W$$

ist eine induktive Menge. Denn es gilt $1 \in W'$. Außerdem gilt: wenn $n \in W'$, dann auch $n+1 \in W'$. Im Beweis muß man drei Fälle unterscheiden:

a.) $n < n_0 - 1$

b.) $n = n_0 - 1$

c.) $n > n_0 - 1$.

Im Fall a.) ist $n+1 < n_0$. Da zwischen $n_0 - 1$ und n_0 keine natürliche Zahl liegt, bedeutet dies $n+1 \leq n_0 - 1$, also $n+1 \in W'$.

Im Fall b.) ist $n+1 = n_0$, also $n+1 \in W \subseteq W'$.

Im Fall c.) ist $n \geq n_0$, da zwischen $n_0 - 1$ und n_0 keine natürliche Zahl liegt. Also ist $n \in W$, und dann gehört $n+1$ zu $W \subseteq W'$ nach Voraussetzung. Somit ist W' eine induktive Menge natürlicher Zahlen, also $W' = \mathbb{N}$. Hieraus folgt die Behauptung. ∎

Als Übung beweise man:

Satz: Es seien m und n natürliche Zahlen. Dann sind $m+n$ und $m \cdot n$ natürliche Zahlen.

Satz: Es seien m, n natürliche Zahlen mit $m > n$. Dann ist auch $m - n$ eine natürliche Zahl.

Man kann nun auch die Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{m \mid m = 0 \text{ oder } m \in \mathbb{N} \text{ oder } -m \in \mathbb{N}\}$$

und die Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \{q \mid q = \frac{m}{n}\,,\ m \in \mathbb{Z}\,,\ n \in \mathbb{N}\}$$

definieren. Man beachte, daß die Darstellung einer rationalen Zahl $q = \frac{m}{n}$ nicht eindeutig ist. Denn es gilt zum Beispiel

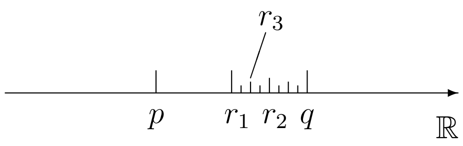
$$q = \frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} = \frac{3m}{3n} = \ldots .$$

Satz: Zu je zwei rationalen Zahlen p, q mit $p < q$ gibt es noch eine dritte rationale Zahl r mit $p < r < q$.

Beweis: Setze $r = \frac{p+q}{2}$. ∎

2 d.) Vollständigkeitsaxiom, Dedekindscher Schnitt

Die rationalen Zahlen erfüllen die Körperaxiome und die Anordnungsaxiome. Man kann also mit den natürlichen Zahlen wie üblich rechnen. Außerdem sieht man aus dem letzten Satz, daß die rationalen Zahlen dicht liegen auf der Zahlengerade:



Es ist jedoch bekannt, daß die rationalen Zahlen die Zahlengerade nicht ausfüllen, und daß dazwischen noch die irrationalen Zahlen liegen. Um dies einzusehen benötigt man einige weitere Grundbegriffe.

Definition: Eine Menge M von reellen Zahlen heißt nach oben beschränkt, wenn gilt

$$\exists_{s \in \mathbb{R}} \quad \forall_{x \in M} : x \leq s \,.$$

M heißt nach unten beschränkt, wenn gilt

$$\exists_{s \in \mathbb{R}} \quad \forall_{x \in M} : s \leq x \,.$$

s heißt obere bzw. untere Schranke. Eine nach oben und unten beschränkte Menge heißt beschränkt.

Aus dieser Definition folgt, daß die leere Menge beschränkt ist.

Definition: Eine obere bzw. untere Schranke von M , die zu M gehört, heißt Maximum beziehungsweise Minimum von M (größte beziehungsweise kleinste Zahl von M).

Jede endliche Menge reeller Zahlen ist beschränkt und besitzt ein Maximum und Minimum. Man beweist dies durch vollständige Induktion nach der Anzahl n der Elemente. Es wurde auch schon gezeigt, daß jede beliebige Teilmenge natürlicher Zahlen nach unten beschränkt ist und ein Minimum besitzt. Dagegen wird später noch gezeigt werden, daß die natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt sind. Beschränkt sind auch die Intervalle

$$[a, b] \,, \quad (a, b) \,, \quad [a, b) \,, \quad (a, b] \,,$$

unbeschränkt sind

$$[a, \infty) \,, \quad (a, \infty) \,, \quad (-\infty, a) \,, \quad (-\infty, a], \quad (-\infty, \infty) = \mathbb{R} \,.$$

Man beachte, daß das Intervall $(0,1)$ nach oben und unten beschränkt ist, jedoch weder Maximum noch Minimum besitzt. Denn es gilt

$$(0,1) = \{x \mid 0 < x < 1\}\,.$$

Wäre $m \in (0,1)$ Maximum, dann müßte gelten

$$0 < m < 1$$

und

$$\forall_{x \in (0,1)} \quad : x \leq m\,.$$

Das kann aber nicht sein, denn es gilt

$$m < \frac{m+1}{2} < 1\,,$$

also $\frac{m+1}{2} \in (0,1)$.

Definition: Sei M eine nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen. Die obere Schranke s_0 heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von M, wenn für jede obere Schranke s von M die Ungleichung

$$s_0 \leq s$$

gilt. Man bezeichnet das Supremum mit $s_0 = \sup\, M$.

Sei M eine nach unten beschränkt Menge reeller Zahlen. Die untere Schranke s_0 heißt größte untere Schranke oder Infimum von M, wenn für jede untere Schranke s die Ungleichung

$$s \leq s_0$$

gilt. Man bezeichnet das Infimum mit $s_0 := \inf\, M$.

Die Menge $(0,1)$ besitzt sowohl Infimum als auch Supremum:

$$\begin{aligned} \inf\,(0,1) &= 0, \\ \sup\,(0,1) &= 1\,. \end{aligned}$$

Denn 1 ist obere Schranke, und gäbe es eine echt kleinere obere Schranke, dann könnte wie oben ein Widerspruch hergeleitet werden.

Man hätte nun gerne, daß jede nach oben beschränkte nichtleere Menge ein Supremum hat und entsprechend jede nach unten beschränkte nichtleere Menge ein Infimum. Später wird sich zeigen, daß dies überaus wichtige Eigenschaften sind. Aus den Körper- und

Anordnungsaxiomen kann man dies aber nicht folgern. Um dies einzusehen beachte man, daß die Menge der rationalen Zahlen die Körper- und Anordnungsaxiome erfüllt. Ich zeige aber jetzt, daß in dieser Menge nicht jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt.

Die Menge $M = \{x \mid x^2 \leq 2\}$ ist nach oben beschränkt. Denn etwa $s = \frac{3}{2}$ ist obere Schranke. Würde es nämlich $x \in M$ geben mit $x > s$, so müßte nach den Anordnungsaxiomen $x^2 > s^2 = \frac{9}{4} > 2$ sein, und dies ist ein Widerspruch zur Annahme $x \in M$.

Diese Menge kann jedoch keine rationale Zahl als Supremum besitzen. Um dies einzusehen beachte man, daß das Supremum s_0, falls es existiert, größer oder gleich 1 sein muß wegen $1 \in M$. Ausserdem muß s_0 die Gleichung $s_0^2 = 2$ erfüllen. Zum Beweis schließt man die Fälle

a.) $s_0^2 > 2$,

b.) $s_0^2 < 2$,

aus. Wäre $s_0^2 > 2$, dann könnte man eine positive Zahl h finden mit $(s_0 - h)^2 > 2$ und mit $s_0 - h > 0$, was wir gleich zeigen werden. Wegen der ersten Ungleichung würde $s_0 - h$ nicht zu M gehören. Zusammen mit der Zweiten folgte $s_0 - h > x$ für alle $x \in M$, also wäre $s_0 - h$ eine obere Schranke von M, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß s_0 die kleinste obere Schranke ist. Eine solche Zahl ist $h = \frac{s_0^2 - 2}{2s_0}$. Denn es gilt

$$s_0 - h = \frac{s_0}{2} + \frac{1}{s_0} > 0 \quad \text{und} \quad (s_0 - h)^2 = s_0^2 - 2s_0 h + h^2 > s_0^2 - 2s_0 h = 2\,.$$

Also folgt $s_0^2 \leq 2$. Wäre $s_0^2 < 2$, könnte man eine positive Zahl h so bestimmen, daß $(s_0 + h)^2 \leq 2$ gelten würde, woraus $s_0 + h \in M$ folgte. Wegen $s_0 + h > s_0$ könnte s_0 nicht obere Schranke von M sein, also auch nicht gleich dem Supremum, im Widerspruch zur Annahme. Ein solche Zahl ist $h = \frac{2 - s_0^2}{2s_0 + 1} > 0$. Denn wegen $s_0 \geq 1$ gilt $h < 1$, also

$$(s_0 + h)^2 = s_0^2 + h(2s_0 + h) \leq s_0^2 + h(2s_0 + 1) = 2\,.$$

Folglich muß $s_0^2 = 2$ gelten.

Als nächstes zeige ich, daß es keine rationale Zahl s_0 gibt mit $s_0^2 = 2$. Denn wäre $s_0 = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, dann müßte

$$\frac{m^2}{n^2} = s_0^2 = 2$$

gelten, oder

$$m^2 = 2n^2\,.$$

Also ist m^2 eine gerade Zahl, woraus folgt, dass auch m gerade sein muss, weil sonst $m = 2m' + 1$ gelten würde für eine geeignete ganze Zahl m', was $m^2 = 4m'^2 + 4m' + 1$ nach sich zöge, also m^2 ungerade wäre. Damit muss $m = 2m'$ sein, folglich würde $4m'^2 = 2n^2$ gelten, also $2m'^2 = n^2$, und hieraus könnte man folgern, daß auch n gerade sein muß. Man kann aber davon ausgehen, daß von vornherein m und n nicht beide gerade sind, weil man sonst kürzen könnte. Also hat die Annahme, s_0 sei rational, zu einem Widerspruch geführt.

Diese Überlegungen zeigen, daß die Menge $M = \{x \mid x^2 \leq 2\}$ in der Menge der rationalen Zahlen kein Supremum besitzt. Also bleibt einem nichts weiter übrig, als ein neues Axiom hinzuzunehmen:

A 14.) **Vollständigkeitsaxiom:** Jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine kleinste obere Schranke.

A1 – A14 sind alle Axiome, die für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ benötigt werden. Jede Menge, auf der Additions- und Multiplikationsoperationen und eine Ordnungsrelation erklärt sind, die die Axiome A1 – A14 erfüllen, heißt vollständiger geordneter Körper, also ist $\mathbb{R}$ ein solcher Körper.

Dedekindscher Schnitt. Natürlich fragt man sich, ob das Vollständigkeitsaxiom sinnvoll ist, d.h. ob es überhaupt eine Menge gibt, die neben den Körper- und Anordnungsaxiomen auch das Vollständigkeitsaxiom erfüllt. Daher will ich an dieser Stelle kurz auf den konstruktiven Aufbau der reellen Zahlen eingehen und zeigen, daß man aus den rationalen Zahlen eine größere Menge, nämlich die Menge der reellen Zahlen konstruieren kann, die dieses Vorständigkeitsaxiom erfüllt. Ich will zeigen, wie man diese Menge mit dem Dedekinschen Schnitt konstruieren kann. Daneben gibt es andere Methoden; beispielsweise kann man Cauchyfolgen oder Intervallschachtelung benutzen.

Um aus den rationalen Zahlen die reellen zu konstruieren, muß man zu den rationalen Zahlen neue Zahlen hinzunehmen. Denn die reellen Zahlen sollen ja alle Axiome A 1 – A 14 erfüllen, und hieraus folgt, daß die reellen Zahlen eine Zahl s_0 enthalten müssen, deren Quadrat 2 ist. Diese neuen Zahlen konstruiert man prinzipiell so, daß man zur Menge der rationalen Zahlen neue „Dinge“ hinzunimmt, und auf diesen neuen Dingen die Rechenregeln so erklärt, daß alle Axiome erfüllt sind.

Definition: Ein Paar $(\underline{U}, \overline{U})$ von Teilmengen von $\mathbb{Q}$ heißt ein Dedekindscher Schnitt in $\mathbb{Q}$, wenn folgendes gilt:

1. $\mathbb{Q} = \underline{U} \cup \overline{U}$,

2. $\underline{U} \neq \emptyset$ und $\overline{U} \neq \emptyset$,

3. Aus $\underline{q} \in \underline{U}$ und $\overline{q} \in \overline{U}$ folgt $\underline{q} < \overline{q}$,

4. $\overline{U}$ besitzt kein kleinstes Element.

$\underline{U}$ heißt die Unterklasse, $\overline{U}$ die Oberklasse des Schnittes. (Richard Dedekind, 1831 – 1916.)

Jeder Dedekindsche Schnitt heißt eine reelle Zahl. Eine reelle Zahl $(\underline{U}, \overline{U})$, deren Unterklasse $\underline{U}$ ein größtes Element p besitzt, wird mit der rationalen Zahl p identifiziert. Dadurch erscheint $\mathbb{Q}$ als Teil der Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen (aller Schnitte). Auf der so konstruierten Menge der reellen Zahlen werden die Addition, die Multiplikation und die Ordnungsrelation folgendermaßen erklärt:

Es seien $r_1 = (\underline{U}_1, \overline{U}_1)$ und $r_2 = (\underline{U}_2, \overline{U}_2)$. Die Summe $r_1 + r_2$ sei die reelle Zahl $(\underline{V}, \overline{V})$ mit

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \{q_1 + q_2 \mid q_1 \in \underline{U}_1\,,\ q_2 \in \underline{U}_2\} &=: \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \\ \overline{V} &= \{q_1 + q_2 \mid q_1 \in \overline{U}_1\,,\ q_2 \in \overline{U}_2\} &=: \overline{U}_1 + \overline{U}_2\,. \end{aligned}$$

Es gelte $r_1 < r_2$, genau dann wenn $\underline{U}_1 \subsetneqq \underline{U}_2$ und $\overline{U}_1 \supsetneqq \overline{U}_2$. Für $r_1 \geq 0\,, r_2 \geq 0$ sei das Produkt $r_1 \cdot r_2$ gleich der reellen Zahl $(\underline{V}, \overline{V})$ mit

$$\underline{V} = \{q_1 \cdot q_2 \mid q_1 \in \underline{U}_1\,,\ q_2 \in \underline{U}_2\,,\ q_1 \geq 0\,,\ q_2 \geq 0\} \cup \{q \mid q < 0\}\,.$$

Hiermit definiert man das Produkt für beliebige Zahlen r_1, r_2 durch

$$r_1 \cdot r_2 = \begin{cases} -(|r_1|\,|r_2|)\,, & r_1 < 0\,, \quad r_2 \geq 0, \\ -(|r_1| \cdot |r_2|)\,, & r_1 \geq 0\,, \quad r_2 < 0, \\ \quad |r_1|\,|r_2|\,, & r_1 < 0\,, \quad r_2 < 0\,. \end{cases}$$

Wenn man Addition, Multiplikation und Ordnungsrelation so erklärt, dann sind die Körper– und Anordnungsaxiome erfüllt. Außerdem ist das Vollständigkeitsaxiom erfüllt. Denn sei $M \neq \emptyset$ eine nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen. Diese Menge hat ein Supremum $s_0 = (\underline{V}, \overline{V})$ mit

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \bigcap_{(\underline{U}, \overline{U}) \in M'} \underline{U}\,, \\ \overline{V} &= \bigcup_{(\underline{U}, \overline{U}) \in M'} \overline{U}\,, \end{aligned}$$

wobei $M' = \{r \mid r \text{ ist obere Schranke von } M\}$ sei. Auf der Menge der Dedekindschen Schnitte sind also die Axiome A 1.) – A 14.) erfüllt. Damit ist die Konstruktion der reellen Zahlen abgeschlossen.

2 e.) Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom

Zum Studium von Eigenschaften der reellen Zahlen, die sich aus dem Vollständigkeitsaxiom ergeben, benötigen wir eine Charakterisierung des Supremums, die wir zunächst angeben. Diese Charakterisierung wird bei der Arbeit mit dem Supremum immer wieder gebraucht.

Satz: Die Zahl s ist genau dann das Supremum der Menge M , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
(i) Für jedes $x \in M$ gilt $x \leq s$
(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in M$ mit $s - \varepsilon \leq x \leq s$.

Beweis: Falls s Supremum von M ist, sind beide Bedingungen erfüllt. Denn (i) ist klar. Wäre (ii) nicht erfüllt, so würde es ein $\varepsilon > 0$ geben mit $x < s - \varepsilon$ für alle $x \in M$, und somit wäre $s - \varepsilon$ eine obere Schranke von M, die kleiner wäre als s, im Widerspruch zu Annahme. Sind umgekehrt beide Bedingungen erfüllt, dann muß s obere Schranke von M sein. Wegen (ii) kann es keine kleinere obere Schranke geben. ■

Nun kommen wir zu einigen Eigenschaften der reellen Zahlen, die sich aus dem Vollständigkeitsaxiom ergeben.

2 e1.) Existenz des Infimums und der Quadratwurzel

Satz: Jede nicht leere, nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen hat eine größte untere Schranke.

Beweis: Die Menge $M' = \{x \mid (-x) \in M\}$ ist nach oben beschränkt. Also hat diese Menge ein Supremum s_0' , und $u_0 = -s_0'$ ist das Infimum.
Denn sei $x \in M$. Dann ist $-x \in M'$, also $s_0' \geq (-x)$, also $u_0 = -s_0' \leq x$. Also ist u_0 untere Schranke von M . Gäbe es eine größere untere Schranke u_1 , so wäre $-u_1$ kleinere obere Schranke von M' . ■

Satz: Zu jeder positiven reellen Zahl x gibt es eine eindeutig bestimmte positive reelle Zahl s_0, die die Gleichung $s_0^2 = x$ erfüllt. Diese Zahl wird mit $\sqrt{x}$ bezeichnet.

Beweis: Sei $M_x = \{y \in \mathbb{R} \mid y^2 \leq x\}$. Wir zeigen, dass die Zahl $s_0 = \sup M_x$ die Gleichung $s_0^2 = x$ erfüllt. Der Beweis verläuft ähnlich wie oben für den Fall $x = 2$. Beachte erst, dass 0 zur Menge M_x gehört, nach Aussage (i) in der Charakterisierung des Supremums also $s_0 \geq 0$ ist. Wäre $s_0^2 > x$, dann folgte $s_0 > 0$ und $\varepsilon = \frac{s_0^2 - x}{2s_0} > 0$, und dies würde nach der charakteristischen Eigenschaft (ii) des Supremums die Existenz einer Zahl $z \in M_x$ mit

$s_0-\varepsilon \le z \le s_0$ nach sich ziehen. Aus diesen beiden Eigenschaften von z und aus $s_0-\varepsilon > 0$ folgte $x \ge z^2 \ge (s_0-\varepsilon)^2 = x+\varepsilon^2 > x$, im Widerspruch zu den Ordnungsaxiomen. Also gilt $s_0^2 \le x$. Wäre $s_0^2 < x$, dann ergäbe sich für $\varepsilon = \min\{\frac{x-s_0^2}{2s_0+1}, 1\} > 0$ die Ungleichung $(s_0+\varepsilon)^2 = s_0^2 + 2\varepsilon s_0 + \varepsilon^2 \le s_0^2 + \varepsilon(2s_0+1) \le x$, was $s_0+\varepsilon \in M_x$ implizierte, folglich könnte s_0 nicht das Supremum der Menge M_x sein. Daher muss $s_0^2 = x$ gelten.

Es gibt keine andere positive Zahl y, die diese Gleichung erfüllt. Denn für $0 < y < s_0$ erhält man aus den Ordnungsaxiomen die Ungleichungskette $y^2 < s_0 \cdot y < s_0^2 = x$, und aus $s_0 < y$ erhält man $x = s_0^2 < s_0 \cdot y < y^2$. ∎

2 e2.) Archimedische Anordnung der reellen Zahlen

Satz: Die Menge der natürlichen Zahlen ist nicht beschränkt.

Beweis: Wäre $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt, dann würde für $\mathbb{N}$ eine kleinste obere Schranke s_0 existieren. Also würde gelten

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} : \quad n \le s_0 \,.$$

Nach dem im letzten Abschnitt bewiesenen Satz müßte es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben mit $n_0 > s_0 - 1$, und hieraus würde folgen $n_0 + 1 > s_0$. Da aber $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ ist, könnte s_0 keine obere Schranke sein. ∎

Satz: Zu jedem $a > 0$ und jedem $b \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl n derart, daß gilt

$$na > b \,.$$

($\mathbb{R}$ ist archimedisch angeordnet.)

Beweis: Gäbe es keine solche Zahl n, dann würde für alle $n \in N$ gelten $na \le b$, also

$$n \le \frac{b}{a}$$

also wäre $\mathbb{N}$ beschränkt. ∎

Satz: Ist $a \ge 0$ und gilt für jede natürliche Zahl n die Ungleichung $a \le \frac{1}{n}$, dann ist $a = 0$.

Beweis: Wäre $a > 0$ würde folgen

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} : \quad n \le \frac{1}{a}$$

d.h. $\mathbb{N}$ wäre nach oben beschränkt. ∎

2 e3.) Dichte der reellen Zahlen

Satz: a.) Sind a, b reelle Zahlen mit $a < b$, so gibt es mindestens eine rationale Zahl r mit $a < r < b$.
b.) Sind a, b rationale Zahlen mit $a < b$, dann gibt es mindestens eine irrationale Zahl r mit $a < r < b$.

Beweis:
a.) Sei $a \geq 1$. Wegen $b > a$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot (b-a) > 1$, also $0 < \frac{1}{n} < b - a$. Halte n fest. Betrachte nun die Menge

$$\{m \mid m \in \mathbb{N} \wedge \frac{m}{n} > a\}.$$

Diese Menge ist nicht leer, weil es mindestnes ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $m \cdot \frac{1}{n} > a$, und wegen $a \geq 1$ gilt $m \geq 2$ für alle Elemente der Menge. Außerdem ist sie eine Teilmenge der natürlichen Zahlen, also enthält sie ein kleinstes Element k. Für k gilt

$$a < \frac{k}{n}.$$

Also genügt es zu beweisen, daß $\frac{k}{n} < b$ gilt. Wäre $\frac{k}{n} \geq b$, würde gelten

$$\frac{k-1}{n} = \frac{k}{n} - \frac{1}{n} \geq b - \frac{1}{n} > b - (b-a) = a,$$

also wäre k nicht Minimum. Widerspruch, also gilt

$$a < \frac{k}{n} < b.$$

Für $a < 1$ erhält man die Behauptung durch Verschieben von $[a, b]$.
b.) Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann gäbe es rationale Zahlen a, b mit $a < b$ so daß das Intervall $[a, b]$ ganz aus rationalen Zahlen bestehen würde. Man beachte nun, daß jede reelle Zahl, die sich als Summe zweier rationaler Zahlen darstellen läßt, rational ist, weil $\mathbb{Q}$ ein Körper ist. Also ist $\frac{a+b}{2}$ rational, und folglich besteht das Intervall $[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}]$ nur aus rationalen Zahlen. Denn für $x \in [-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}]$ gilt

$$a = -\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} \leq x + \frac{a+b}{2} \leq \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} = b,$$

also ist $q = x + \frac{a+b}{2} \in [a, b]$, also ist q rational, also ist auch $x = q - \frac{a+b}{2}$ rational.

Man beachte weiter, daß jede reelle Zahl, die sich als Produkt zweier rationaler Zahlen darstellen läßt, rational ist. Insbesondere ist das Produkt einer rationalen Zahl und einer natürlichen Zahl rational. Also besteht jedes der Intervalle

$$[-n\,\frac{b-a}{2}, n\,\frac{b-a}{2}]$$

aus rationalen Zahlen. Sei nun r eine beliebige reelle Zahl. Da $\frac{b-a}{2} > 0$ ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$r \in [-n\,\frac{b-a}{2}\,,\, n\,\frac{b-a}{2}]\,,$$

also ist r rational, also wäre jede reelle Zahl rational. Es wurde aber schon bewiesen, daß $\sqrt{2}$ irrational ist, also hat die Annahme zu einem Widerspruch geführt, und die Behauptung muß richtig sein. ■

Folgerung: Seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$. Dann gibt es mindestens eine irrationale Zahl r mit $a < r < b$.

3 Funktionen

3 a.) Elementare Begriffe

Seien A, B Mengen. Jedem $x \in A$ sei ein eindeutiges Element aus B zugeordnet, das mit $f(x)$ bezeichnet sei. Man sagt, daß durch diese Zuordnung eine Abbildung f von A in B gegeben ist. Zur Bezeichnung von Abbildungen verwendet man die Schreibweisen

$$f : A \to B$$

und, wenn man auf die Elemente abhebt,

$$x \mapsto f(x)\,.$$

Anstelle des Begriffes Abbildung verwendet man auch den Begriff Funktion. Man beachte, daß der Name der Funktion f ist; nicht $f(x)$. Dies ist das eindeutige Element $y = f(x) \in B$, das dem Element $x \in A$ zugeordnet wird.

Jedem $x \in A$ darf nur ein eindeutiges Element $y \in B$ zugeordnet werden. Dagegen darf zwei verschiedenen Elementen $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$ ein und dasselbe $y \in B$ zugeordnet werden: $\quad f(x_1) = f(x_2)\,.$

Beispiele:

1.) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) := 1 \quad$ (Konstante Funktion).

2.) Sei $A = B = \mathbb{R}$. Es werde eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\forall x \in \mathbb{R} : \;\; x \mapsto f(x) := x\,.$$

Diese Abbildung nennt man auch die Identität.

3.) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$x \mapsto g(x) := x^2\,.$$

4.) $h_1 : [0, \infty] \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \sqrt{x}\,; \quad h_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto -\sqrt{x}\,.$

5.) Der Weg s, den ein Körper beim freien Fall zurücklegt, hängt von der Fallzeit t ab. Man sagt, „s ist eine Funktion von t“. Der Zusammenhang ist

$$s = \frac{1}{2} g t^2\,. \quad (g = \text{ Erdbeschleunigung}\,.)$$

Dieser Zusammenhang definiert die Funktion:

$$\begin{aligned} S &: [0, \infty) \to [0, \infty) \\ t &\mapsto S(t) := \frac{1}{2} g t^2\,. \end{aligned}$$

6.) Sei

$$Q : [0, \infty) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}) \quad (\text{Potenzmenge von } \mathbb{R})$$

definiert durch

$$x \mapsto Q(x) := \left\{ \sqrt{x}, -\sqrt{x} \right\} .$$

7.) Sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto G(x) := [x] \quad := \quad$ größte ganze Zahl $\leq x$.

Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, dann nennt man A den Definitionsbereich von f . B heißt Zielmenge, die Menge

$$W(f) = f(A) := \{y \mid \exists_{x \in A} : y = f(x)\} \subseteq B$$

heißt Wertebereich. Man sagt, „die Funktion f hängt von $x \in A$ ab“. Jedes $x \in A$ heißt auch „Argument“ von f . Für $x \in A$ nennt man $y = f(x) \in B$ das „Bild von x unter f “.

Seien $C \subseteq A$ und $D \subseteq B$. Dann heißt

$$f(C) := \{y \in B \mid \exists_{x \in C} : y = f(x)\} \subseteq B$$

das „Bild von C unter f“, und

$$f^{-1}(D) := \{x \in A \mid \exists_{y \in D} : y = f(x)\} \subseteq A$$

„das Urbild von D unter f“. Es gilt

$$\begin{aligned} C &\subseteq f^{-1}\big(f(C)\big) , && \text{für alle} \quad C \subseteq A \\ f\big(f^{-1}(D)\big) &\subseteq D , && \text{für alle} \quad D \subseteq B . \end{aligned}$$

Definition: Zwei Abbildungen f, g heißen gleich, genau dann wenn die Definitionsbereiche $D(f)$ und $D(g)$ der Abbildungen f und g übereinstimmen: $D(f) = D(g) = D$, und wenn für alle $x \in D$ gilt $f(x) = g(x)$.

Seien $A = D(f)$, $B = D(g)$ mit $A \subseteq B$, und für alle $x \in A$ gelte

$$f(x) = g(x) .$$

dann heißt g Forsetzung von f und umgekehrt f Einschränkung von g . Man schreibt auch

$$f = g\big|_A \quad (\text{Einschränkung von } g \text{ auf } A) .$$

Seien $f : A \to B_1, \quad g : B_2 \to C$ Abbildungen mit $B_1 \subseteq B_2$. Dann definiert man die Abbildung $g \circ f : A \to C$ durch

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) .$$

$g \circ f$ heißt Hintereinanderausführung von f und g.

Damit $g \circ f$ erklärt werden kann, muß natürlich der Wertebereich von f im Definitionsbereich von g enthalten sein.

Satz: f, g, h seien Abbildungen, so daß $g \circ f$ und $h \circ g$ erklärt sind. Dann sind auch die Abbildungen $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ erklärt, und es gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

(Assoziativität der Hintereinanderausführung).

Beweis: $h \circ (g \circ f)$ kann definiert werden, wenn $W(g \circ f) \subseteq D(h)$ gilt. Dies ist richtig, denn

$$W(g \circ f) \subseteq W(g) \subseteq D(h)\,,$$

weil nach Voraussetzung $h \circ g$ definiert ist. Ebenso ist $(h \circ g) \circ f$ erklärt, wenn $W(f) \subseteq D(h \circ g)$ gilt. Dies ist richtig, wegen $W(f) \subseteq D(g) = D(h \circ g)$.

Sei nun $x \in D(h \circ (g \circ f))$. Dann gilt

$$\begin{aligned} [h \circ (g \circ f)](x) &= h\big(g \circ f(x)\big) &&= h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) \\ &= h \circ g\big(f(x)\big) &&= [(h \circ g) \circ f](x)\,. \end{aligned}$$

■

Seien A, B Mengen, und id_A bzw. id_B die Identitäten auf A, B. Sei $f : A \to B$. Dann gilt

$$f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f\,.$$

id_A bzw. id_B sind also rechtsneutrale bzw. linksneutrale Elemente bezüglich der Hintereinanderausführung.

Definition: Seien A, B Mengen. $f : A \to B$ heißt
1.) injektiv: $:\Longleftrightarrow \quad (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$
2.) surjektiv: $:\Longleftrightarrow \quad W(f) = B$
3.) bijektiv: $:\Longleftrightarrow \quad f$ ist injektiv und surjektiv.

Sei $f : A \to B$ bijektiv. Dann existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : B \to A$ zu f, die folgendermaßen definiert ist: Für alle $y \in B$ gilt $y \in f(A)$, weil f surjektiv ist, also existiert mindestens ein $x \in A$ mit $f(x) = y$. Da f injektiv ist, existiert genau ein solches x. Sei nun

$$f^{-1}(y) := x\,.$$

Man kann dies auch so schreiben: Sei $y \in W$

$$f^{-1}(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x)\,.$$

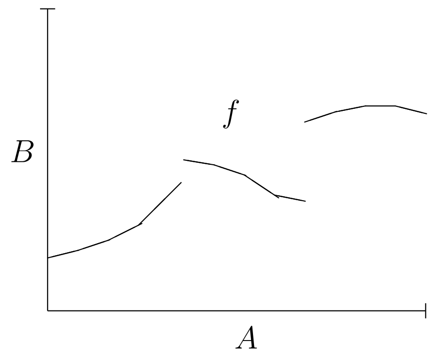
Natürlich sind die Abbildungen $f^{-1} \circ f : A \to A$ und $f \circ f^{-1} : B \to B$ erklärt, und es gilt

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A\,, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B\,.$$

Ist $f : A \to B$ surjektiv, dann sagt man auch, f sei eine Abbildung von A auf B. Ist f injektiv, so sagt man auch, f sei eine eineindeutige Abbildung.

Man kann den nicht präzise definierten Begriff der Funktion auf den nicht präzise definierten Begriff der Menge zurückführen. Dies geht folgendermaßen:

Definition: Seien A, B Mengen. Eine Abbildung f von A in B ist eine Teilmenge von $A \times B$ mit der Eigenschaft: Zu jedem $x \in A$ gibt es genau ein $y \in B$ mit $(x, y) \in f$



Diese Teilmenge von $A \times B$ nennt man auch „Graph der Funktion f“.

3 b.) Reelle Funktionen

Eine Funktion, deren Definitionsbereich und Wertebereich Teilmengen der reellen Zahlen sind, heißt reelle Funktion. Ist nur der Wertebereich der Funktion Teilmenge der reellen Zahlen, dann heißt die Funktion reellwertig.

Beispiele:

1.) Polynome. Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ gegebene Zahlen. Ein Ausdruck der Form

$$\sum_{m=0}^{n} a_m x^m\,.$$

heißt *Polynom vom Grad n*. Die Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ sind die Koeffizienten des Polynoms, a_n ist der führende Koeffizient. Dieses Polynom definiert eine reelle Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$x \mapsto p(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m .$$

Ich nenne p eine Polynomfunktion oder eine *ganzrationale Funktion*. Wie üblich identifiziere ich das Polynom mit der zugehörenden Polynomfunktion p und bezeichne auch das Polynom mit dem Funktionsnamen p. Daß dies gerechtfertigt ist wird gleich gezeigt werden. Mit zwei Polynomen p_1 und p_2 sind auch die Summe $p_1 + p_2$ und das Produkt $p_1 \cdot p_2$ Polynome. Summe und Produkt sind definiert durch

$$(p_1 + p_2)(x) = p_1(x) + p_2(x), \quad (p_1 \cdot p_2)(x) = p_1(x)p_2(x).$$

Dafür gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Grad}(p_1 + p_2) &\leq \max\{\mathrm{Grad}(p_1), \mathrm{Grad}(p_2)\}, \\ \mathrm{Grad}(p_1 \cdot p_2) &= \mathrm{Grad}(p_1) + \mathrm{Grad}(p_2). \end{aligned}$$

Ganzrationale Funktionen, deren Grad höchstens gleich 1 ist, heißen affine Funktionen:

$$x \mapsto a_1 x + a_0 .$$

Auch die linearen Funktionen $x \mapsto a_1 x$ und die konstanten Funktionen $x \mapsto a_0$ sind affine Funktionen. Die konstanten Funktionen sind Polynome vom Grad 0.

Natürlich bestimmt das Polynom in eindeutiger Weise die ihm zugeordnete Polynomfunktion. Durch diese Zuordnung wird also eine Abbildung von der Menge der Polynome in die Menge der reellen Funktionen definiert. Es könnte nun sein, daß zwei verschiedenen Polynomen dieselbe Polynomfunktion zugeordnet wird, daß also diese Abbildung nicht injektiv ist. Wie der nächste Satz zeigt, ist dies nicht möglich. Die Abbildung ist injektiv und die Identifikation eines Polynoms mit seiner Polynomfunktion ist somit gerechtfertigt.

Satz: Es seien

$$p_1(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m, \quad p_2(x) = \sum_{m=0}^{\ell} b_m x^m$$

Polynome mit $p_1(x) = p_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $n = \ell$ und $a_m = b_m$ für alle $m = 0, \ldots, n$.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n \geq \ell$. Ich setze $b_m = 0$ für $m = \ell + 1, \ldots, n$. Dann erfüllt die Funktion $q = p_1 - p_2$ die Gleichung

$$q(x) = \sum_{m=0}^{n} c_m x^m = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $c_m = a_m - b_m$ ist für $m = 0, 1, \dots, n$. Für alle von Null verschiedenen x kann q in der Form

$$q(x) = x^n \Big(c_n + \frac{c_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{c_0}{x^n} \Big)$$

geschrieben werden. Ist $x > 1$, dann folgt aus der umgekehrten Dreicksungleichung wegen $x^k \geq x$ für $k \in \mathbb{N}$, daß

$$\begin{aligned} |q(x)| &\geq x^n \Big(|c_n| - \Big| \frac{c_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{c_0}{x^n} \Big| \Big) \\ &\geq x^n \Big(|c_n| - \Big| \frac{c_{n-1}}{x} \Big| - \ldots - \Big| \frac{c_0}{x^n} \Big| \Big) \geq x^n \Big(|c_n| - \frac{|c_{n-1}| + \ldots + |c_0|}{x} \Big). \end{aligned}$$

Wenn nun c_n von Null verschieden wäre, könnte eine genügend große Zahl x gewählt werden so daß

$$\frac{|c_{n-1}| + \ldots + |c_0|}{x} \leq \frac{1}{2}\, |c_n|$$

gälte. Für diese x erhielte man die Ungleichung

$$0 = |q(x)| \geq x^n \Big(|c_n| - \frac{1}{2}\, |c_n| \Big) \geq \frac{1}{2}\, |c_n|,$$

die der Voraussetzung $|c_n| > 0$ widerspricht. Also muß $c_n = 0$ sein und es folgt $q(x) = \sum_{m=0}^{n-1} c_m x^m$. Mit denselben Argumenten beweist man nacheinander, daß $c_{n-1} = c_{n-2} = \ldots = c_0 = 0$. Damit ergibt sich $a_m = b_m$ for $m = 0, \dots, n$, woraus auch $\ell = n$ folgt. ∎

2.) Gebrochen rationale Funktionen. Es seien g, h ganzrationale Funktionen und M sei die Menge der Nullstellen von h. Die Funktion $r : \mathbb{R} \setminus M \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$x \to r(x) = \frac{g(x)}{h(x)}\,.$$

Dann heißt r *gebrochen rationale Funktion* oder einfach *rationale Funktion*. Jede rationale Funktion kann man in der Form

$$r = \frac{g}{h} = p + \frac{s}{h}$$

darstellen, wobei p und s Polynome sind mit $\mathrm{Grad}(s) < \mathrm{Grad}(h)$. Falls $\mathrm{Grad}(g) \geq \mathrm{Grad}(h)$ ist, gilt

$$\mathrm{Grad}(p) = \mathrm{Grad}(g) - \mathrm{Grad}(h)\,,$$

andernfalls ist $p = 0$.

Diese Darstellung gewinnt man mit dem Algorithmus der Polynomdivision. Das folgende Beispiel für diesen Algorithmus ist selbsterklärend:

Gegeben seien die Polynome $x \mapsto g(x) = x^4 + x^3 - 2$ vom Grad 4 und $x \mapsto h(x) = x^2 - 1$ vom Grad 2. Der Divisionsalgorithmus liefert

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^4 + x^3 - 2) : (x^2 - 1) = x^2 + x + 1 + \frac{x-1}{x^2-1} \\
\underline{-(x^4 - x^2)} \\
\qquad\quad x^3 + x^2 - 2 \\
\qquad \underline{-(x^3 - x)} \\
\qquad\qquad\quad x^2 + x - 2 \\
\qquad\qquad \underline{-(x^2 - 1)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad x - 1
\end{array}
$$

also

$$\frac{x^4 + x^3 - 2}{x^2 - 1} = (x^2 + x + 1) + \frac{x - 1}{x^2 - 1} = (x^2 + x + 1) + \frac{1}{x + 1}\,,$$

wegen $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

Man sieht an diesem Beispiel, daß anders als bei den ganzrationalen Funktionen, eine rationale Funktion sich auf verschiedene Weisen darstellen läßt. Denn für die rationale Funktion $\frac{s}{h}$ aus diesem Beispiel gilt

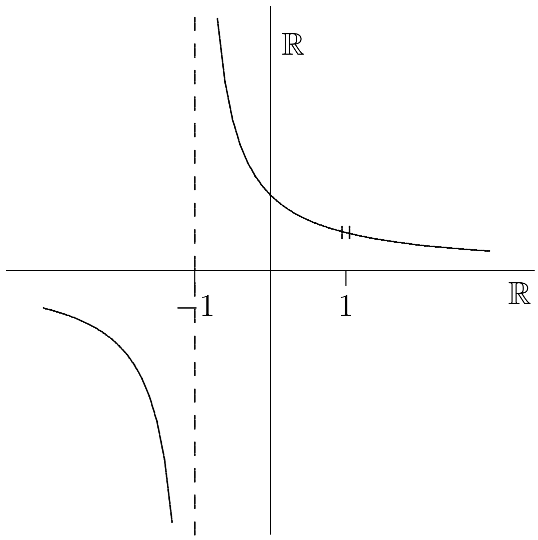
$$\frac{s(x)}{h(x)} = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}\,.$$

Man beachte aber, daß $x^2 - 1$ die Nullstellen $x = \pm 1$ hat. Nach unserer Definition ist also $f_1(x) := \frac{x-1}{x^2-1}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ definiert:

$$f_1 : \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\} \to \mathbb{R}\,.$$

Dagegen hat $x+1$ nur die Nullstelle $x = -1$. Also ist $f_2(x) := \frac{1}{x+1}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ definiert:

$$f_2 : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}\,.$$



Wegen $D(f_1) \subseteq D(f_2)$ und wegen $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in D(f_1)$ ist also f_2 eine Fortsetzung von f_1. Weil der Zähler $x-1$ von f_1 an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle hat, wird die Nullstelle $x = 1$ des Nenners $x^2 - 1$ „kompensiert". f_1 kann „stetig" zu f_2 fortgesetzt werden.

Ist g ein Polynom mit $\mathrm{Grad}(g) = n > 0$ und wählt man $h(x) = x - x_1$ mit einer gegebenen Zahl x_1, dann liefert die Polynomdivision die Gleichung $g(x)/h(x) = p(x) + s(x)/(x - x_1)$, wobei s ein Polynom nullter Ordnung, also eine Konstante b ist. Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$g(x) = (x - x_1)\, p(x) + b$$

und setzt $x = x_1$ ein, dann sieht man, daß $b = g(x_1)$ gilt. Ist x_1 eine Nullstelle von g, dann ergibt sich folglich für g die Zerlegung

$$g(x) = (x - x_1)\, p_1(x),$$

wobei p_1 ein Polynom vom Grad $n-1$ ist. Ist x_2 eine Nullstelle von p_1, dann kann man auf dieselbe Weise den Faktor $x - x_2$ von p_1 abspalten. Nach k Schritten erhält man die Darstellung

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)\, p_k(x), \tag{3.1}$$

in der p_k ein Polynom vom Grad $n-k$ ist. Das Verfahren endet, wenn p_k keine Nullstelle besitzt, also spätestens nach n Schritten, weil $\mathrm{Grad}(p_n) = 0$ gilt, also p_n eine Konstante ist. Diese Konstante ist von Null verschieden, weil $\mathrm{Grad}(g) = n > 0$ vorausgesetzt ist. Daher gilt $k \le \mathrm{Grad}(g)$.

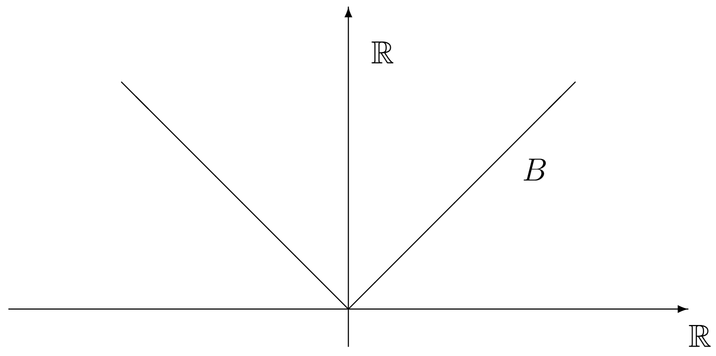
Die Zahlen $x_1, \dots, x_k$ brauchen nicht alle voneinander verschieden zu sein. Kommt der Faktor $x - x_i$ in der Gleichung (3.1) ℓ–fach vor, dann sagt man, x_i sei eine Nullstelle des Polynoms g der Vielfachheit ℓ oder von der Ordnung ℓ. Sind $y_1, \dots, y_m$ paarweise verschiedene Nullstellen von g und ist ℓ_j die Ordnung der Nullstelle y_j, dann folgt

$$\sum_{j=1}^{m} \ell_j = k \le \mathrm{Grad}(g).$$

Folgerung: Die Anzahl der Nullstellen eines von Null verschiedenen Polynoms gezählt mit Vielfachheit ist höchstens gleich dem Grad des Polynoms.

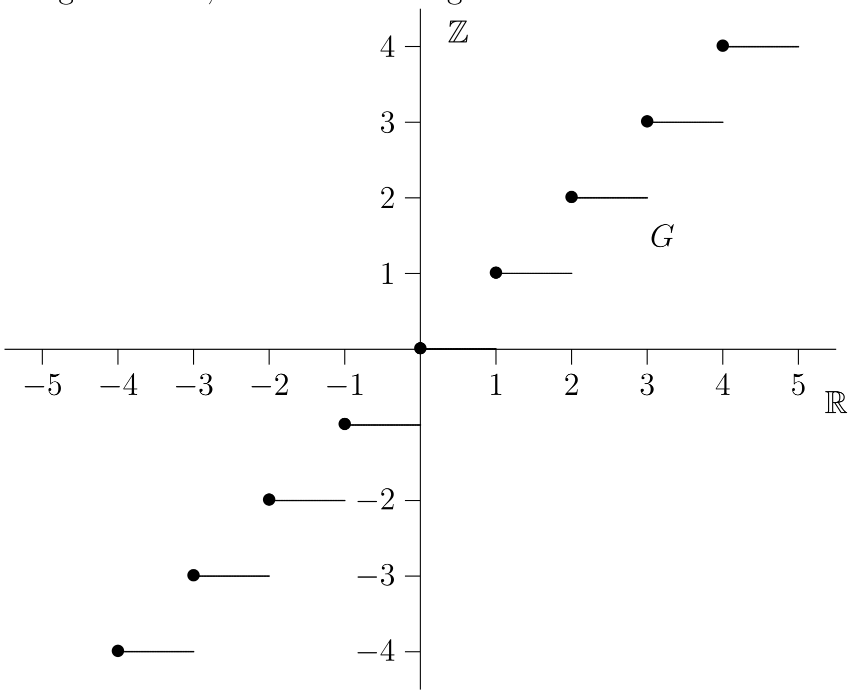
3.) Betragsfunktion. Sei $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$x \mapsto B(x) := |x| = \begin{cases} x\,, & \text{für} \quad x \ge 0 \\ -x\,, & \text{für} \quad x \le 0 \end{cases}$$



B kann auch als Funktion $\hat{B} : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ aufgefaßt werden. $\hat{B}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

4.) „Größte–Ganze–Funktion“. Als Beispiel am Anfang dieses Abschnittes habe ich schon die „Größte–Ganze–Funktion“ eingeführt: Sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto G(x) := [x] :=$ größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich als x ist.



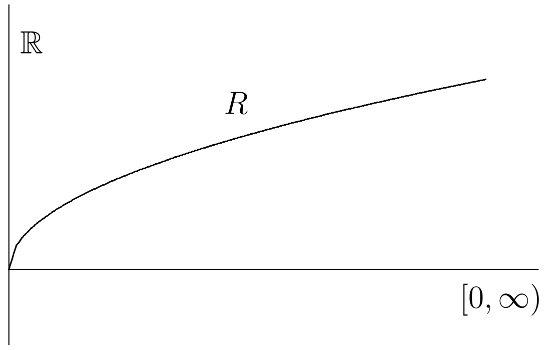
Es gilt $W(G) = \mathbb{Z}$. $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist weder surjektiv noch injektiv. Es gilt beispielsweise $G^{-1}(\{0\}) = [0, 1)$.

5.) Wurzelfunktion. Im Kapitel über die reellen Zahlen wurde gezeigt, dass wegen der Vollständigkeit der reellen Zahlen zu jeder nichtnegativen reellen Zahl x die eindeutige

Wurzel $\sqrt{x}$ existiert. Also kann man die Wurzelfunktion

$$W : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto W(x) := \sqrt{x}$$

definieren.



Für den Wertebereich gilt $W(W) = [0, \infty)$. Denn für jede nichtnegative Zahl a ist auch a^2 nichtnegativ, gehört also zum Definitionsbereich von W. Damit kann die Funktion W auf a^2 angewandt werden und man erhält $W(a^2) = \sqrt{a^2} = a$, folglich ist $a \in W(W)$. Somit gilt $[0, \infty) \subseteq W(W) \subseteq [0, \infty)$, folglich ist $W(W) = [0, \infty)$.

Die Funktion W ist also injektiv, aber nicht surjektiv. Dagegen ist $\hat{W} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto \hat{W}(x) := \sqrt{x}$, nach dem eben Bewiesenen surjektiv und injektiv, also existiert die Inverse $\hat{W}^{-1}$. Natürlich ist die Inverse $\hat{W}^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ gegeben durch $\hat{W}^{-1}(x) := x^2$. Dies bedeutet insbesondere, daß der Wertebereich der Funktion $x \mapsto x^2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ das Intervall $[0, \infty)$ ist.

6.) Dirichlet Funktion. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q} \\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Also ist $W(f) = \{0, 1\}$. Diese Dirichlet Funktion kann nicht gezeichnet werden, weil es zwischen zwei rationalen Zahlen immer noch eine irrationale, und zwischen zwei irrationalen Zahlen immer noch eine rationale gibt.

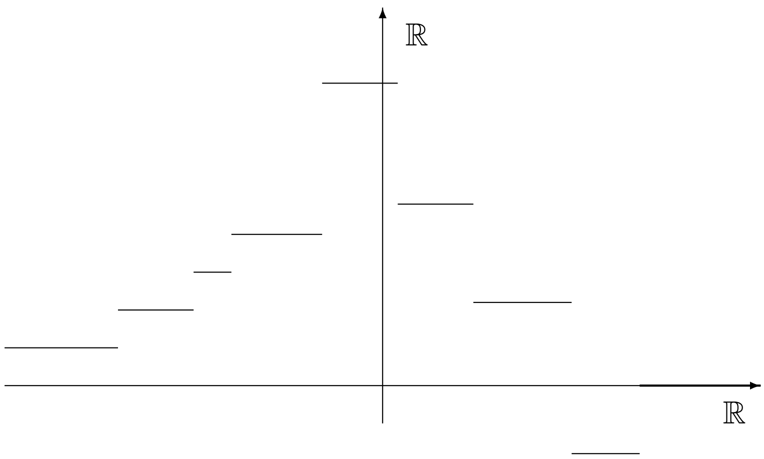
7.) Treppenfunktion. Die *charakteristische Funktion* $\chi_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *einer Menge* $M \subseteq \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus M. \end{cases}$$

Sind $I_1, \ldots, I_m$ Intervalle und $a_1, \ldots, a_m$ gegebene Zahlen, dann heißt die Funktion

$$t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{mit } t(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{I_k}(x)$$

Treppenfunktion. Der Wertebereich $W(t)$ einer Treppenfunktion ist eine endliche Menge und für jedes $y \in W(t)$ ist das Urbild $t^{-1}(\{y\})$ eine Vereinigung von endlich vielen Intervallen.



3 c.) Folgen, Abzählbarkeit

Definition: Abbildungen mit dem Definitionsbereich ℕ heißen Folgen.

Die Bildmenge von Folgen kann irgendeine Menge sein. Ist die Bildmenge die Menge der reellen Zahlen, dann spricht man von Zahlenfolgen. Folgen bezeichnet man folgendermaßen:

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}\,.$$

Hierbei ist a_n das Bild der Zahl $n \in \mathbb{N}$. Man bezeichnet a_n auch als n–tes Element der Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Diese Bezeichnung weicht von den üblichen Bezeichnungen bei Funktionen ab. Man verwechsele nicht die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit der Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dem Wertebereich der Folge.

Einfache Beispiele für Zahlenfolgen:

$$\{0, 0, 0, \ldots\}\,, \quad \{0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots\}\,, \quad \{n\}_{n \in \mathbb{N}}\,, \quad \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}\,, \quad \{\frac{-1}{n^2+1}\}_{n \in \mathbb{N}}\,.$$

Folgen werden oft rekursiv definiert:

Beispiel. Sei die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

1.) $\quad x_1 = 1$

2.) $\quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + \frac{2}{x_n}) \quad$ für $\quad n \geq 1$.

Intuitiv ist klar, daß durch diese Definition eine eindeutig bestimmte Folge definiert wird. Tatsächlich muß aber bewiesen werden, daß es genau eine Folge gibt, die dieser Definition genügt. Wir verzichten auf diesen Beweis.

Mit Folgen definiert man den Begriff der Abzählbarkeit: $\quad$ Sei $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definition: Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $A_n = \{k \mid k < n,\ k \in \mathbb{N}_0\}$ der zu n gehörende Abschnitt von $\mathbb{N}_0$. $\quad (A_0 = \emptyset)$.

Definition: Eine Menge M heißt endlich, wenn es eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ gibt derart, daß eine bijektive Abbildung von A_n auf M existiert. Die Zahl n heißt „die Anzahl der Elemente von M“.

Eine Menge M heißt abzählbar unendlich, wenn eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}_0$ auf M existiert.

Man sagt, zwei Mengen M_1 und M_2 „seien von gleicher Mächtigkeit“, wenn es eine bijektive Abbildung von M_1 auf M_2 gibt.

Also kann man auch sagen, eine Menge M sei abzählbar unendlich, wenn sie von gleicher Mächtigkeit wie die Menge der natürlichen Zahlen ist (da $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ gleiche Mächtigkeit haben).

Definition: Eine Menge heißt abzählbar, wenn sie endlich ist oder abzählbar unendlich ist. Im anderen Fall heißt sie überabzählbar.

Die erste Definition ist sinnvoll wegen des folgenden Satzes:

Satz: Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n > m$. Dann gibt es keine injektive Abbildung $f : A_n \to A_m$.

Hieraus folgt dann auch, daß eine Menge M nicht gleichzeitig endlich und abzählbar unendlich sein kann. Denn sonst gäbe es $m \in \mathbb{N}$ und bijektive Abbildungen $f : A_m \to M$, $g : \mathbb{N}_0 \to M$, also wäre $f^{-1} \circ g : \mathbb{N}_0 \to A_m$ eine bijektive Abbildung. Für $n > m$ wäre dann

$$(f^{-1} \circ g)\big|_{A_n} : A_n \to A_m$$

eine injektive Abbildung, im Widerspruch zum Satz.

Beweis des Satzes:
Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es mindestens einen Abschnitt A_n, der injektiv in einen Abschnitt A_m mit $m < n$ abgebildet werden kann. Dann kann A_n auch injektiv in A_{n-1} abgebildet werden. Weil $n-1 \in \mathbb{N}_0$ gilt, ist $n \in \mathbb{N}$. Die Menge aller $n \in \mathbb{N}$ so daß A_n injektiv in A_{n-1} abgebildet werden kann, ist also nicht leer. In dieser Menge gibt es also ein kleinstes Element k. Wir zeigen, daß hieraus folgt, daß A_{k-1} injektiv in A_{k-2} abgebildet werden kann, und erhalten einen Widerspruch. Sei $f : A_k \to A_{k-1}$ die injektive Abbildung.
Es gibt drei Fälle:

(i) Die Zahl $k-2$ tritt nicht als Bild auf bei der Abbildung f.

(ii) Die Zahl $k-2$ ist Bild von $k-1$ bei der Abbildung f.

(iii) Die Zahl $k-2$ ist Bild einer Zahl j mit $j \leq k-2$ bei der Abbildung f.

In den beiden ersten Fällen ist $f|_{A_{k-1}} : A_{k-1} \to A_{k-2}$ eine injektive Abbildung. Im letzten Fall wird eine injektive Abbildung $g : A_{k-1} \to A_{k-2}$ definiert durch

$$g(\ell) = \begin{cases} f(\ell)\,, & \ell \in A_{k-1}, \ell \neq j \\ f(k-1)\,, & \ell = j\,. \end{cases}$$

Damit erhalten wir den behaupteten Widerspruch.

Satz: Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Beweis: Man ordnet die positiven rationalen Zahlen in ein doppelt unendliches Schema:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & & \frac{4}{1} & \dots & \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & \dots & \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & \dots & \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & \dots & \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Auf diese Weise erhält jede positive rationale Zahl eine Nummer. Sei $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diese Folge.

Alle rationalen Zahlen enthält dann die Folge $\{0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, q_3, -q_3, \dots\}$.

Satz: Die Menge aller reellen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis: Zum Beweis nimmt man an, die Menge $\mathbb{R}$ sei abzählbar. Dann können ihre Elemente in einer Folge geordnet werden (durchnumeriert werden):

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}\,.$$

Man konstruiert nun eine Zahl, die sicher nicht zu dieser Folge gehört, so daß diese Folge doch nicht alle Elemente umfassen kann. Also hat man einen Widerspruch zur Annahme erhalten, und $\mathbb{R}$ muß überabzählbar sein.

Hierzu wähle ein Intervall $I_1 = [a_1, b_1]$ mit $a_1 < b_1$, das x_1 nicht enthält, und zerlege I_1 in drei gleiche abgeschlossene Teilintervalle. x_2 kann nicht in allen drei Teilintervallen zugleich liegen. Wähle aus diesen drei Teilintervallen ein Intervall $I_2 = [a_2, b_2]$ aus, das x_2 nicht enthält. Fahre so fort. Dies ergibt eine Folge von Intervallen $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$$

und mit $x_n \notin I_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt; jedes b_n ist obere Schranke. Also existiert das Supremum s der Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. s gehört zu jedem der Intervalle I_n. Wäre das nicht so, müßte es $n_0 \in \mathbb{N}$ geben mit $s \notin I_{n_0}$, also $s \notin I_n$, für alle $n \geq n_0$, also $s > b_n$, für alle $n \geq n_0$, weil nach Konstruktion für alle n die Ungleichung $s \geq a_n$ gilt. Da aber jedes b_n obere Schranke ist, könnte s nicht kleinste obere Schranke sein. Also gilt $s \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Andererseits gilt $x_n \notin I_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$, also muß $s \neq x_n$ gelten für alle $n \in \mathbb{N}$. ■

3 d.) Vektorräume reeller Funktionen

Sei D eine Menge und sei $F(D) = F(D, \mathbb{R})$ die Menge aller reellwertigen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$.
Auf der Menge $F(D)$ erklärt man eine Verknüpfung von Elementen aus $F(D)$, die „Addition" von Funktionen durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)\,, \quad \forall x \in D\,.$$

Mit dieser Verknüpfung ist $F(D)$ eine kommutative Gruppe, d.h. die Gruppenaxiome (A1) – (A4) sind erfüllt: Es gilt

V1.) $f + g = g + f$
V2.) $f + (g + h) = (f + g) + h$

V3.) Es gibt genau ein neutrales Element, nämlich die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := 0$. Man bezeichnet diese Funktion mit 0.
V4.) Zu jedem f gibt es genau ein g, so daß $f + g = 0$ gilt, nämlich die Funktion

$$x \mapsto g(x) := -f(x)\,.$$

Man bezeichnet diese Funktion mit $-f$.

Man definiert nun noch eine Verknüpfung zwischen Elementen von $F(D)$ und reellen Zahlen. Ist $a \in \mathbb{R}$ und $f \in F(D)$ so definiert man das Produkt $af \in F(D)$ durch

$$x \mapsto (af)(x) := a \cdot f(x)\,.$$

Für diese Multiplikation gelten die Regeln:

V5.) $(a + b)f = af + bf\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,, \quad f \in F(D)$
V6.) $a(f + g) = af + ag \qquad a \in \mathbb{R}\,, \quad f, g \in F(D)$
V7.) $a(bf) = (ab)f$
V8.) $1 \cdot f = f$

Eine Menge, auf der die Addition erklärt ist so daß (V1) – (V4) gelten, und auf der die Multiplikation mit reellen Zahlen erklärt ist so daß (V5) – (V8) gelten, bezeichnet man als (reellen) *Vektorraum*, oder Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zum Vektorraum gehört also eine Menge und zwei Verknüpfungen. Somit ist ein Vektorraum ein Trippel $(V, +, \cdot)$. (Beachte, daß $+, \cdot$ Funktionen sind und wie beschrieben durch Mengen erklärt werden können.)

$(F(D), +, \cdot)$ ist also ein reeller Vektorraum. Man bezeichnet $(U, +, \cdot)$ als Untervektorraum eines Vektorraumes $(V, +, \cdot)$, wenn $U \subseteq V$ gilt, und wenn U mit den durch $(V, +, \cdot)$ auf U induzierten Verknüpfungen ein Vektorraum ist.

In der Analysis spielen eine Reihe von Untervektorräumen des Raumes $F(D)$ eine wichtige Rolle. Ich betrachte einige einfache Beispiele. Weitere Untervektorräume werden später eingeführt.
1.) Die Menge der beschränkten Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum von $F(D)$. Hierbei heißt eine Funktion beschränkt, genau dann wenn

$$\exists_{C>0} \forall_{x \in D} : |f(x)| \le C\,.$$

gilt. Um zu zeigen, daß dies ein Untervektorraum ist, genügt es zu zeigen, daß mit f, g auch $f + g$ sowie mit $a \in \mathbb{R}$ auch af beschränkte Funktionen sind.

Sei

$$\forall_{x\in D} : |f(x)| \le C_1 \,, \quad |g(x)| \le C_2 \,.$$

Dann folgt:

$$\forall_{x\in D} : |f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le C_1 + C_2 \,.$$

Also ist $f+g$ beschränkt. Außerdem folgt

$$\forall_{x\in D} : |af(x)| \le |a|\,|f(x)| \le |a| \cdot C_1 \,.$$

Also ist auch af beschränkt.
Wählt man $D = \mathbb{N}$, dann erhält man den Vektorraum der beschränkten Zahlenfolgen.

Ist die Menge D endlich, dann ist die Dimension des Untervektorraums der beschränkten Funktionen gleich der Anzahl der Elemente von D. Ist D eine unendliche Menge, dann ist auch die Dimension dieses Untervektorraumes unendlich. (Die Dimension eines Vektorraumes wird in der Vorlesung „Lineare Algebra" definiert.)

2.) Die Menge der Polynome ist ein Untervektorraum von $F(\mathbb{R})$. Denn mit zwei Polynomen p_1 und p_2 ist auch die Summe $p_1 + p_2$ ein Polynom und für jede reelle Zahl a ist auch $a \cdot p_1$ ein Polynom. Die Dimension des Untervektorraums der Polynome ist unendlich.

3.) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine gegebene Zahl. Die Menge der Polynome, deren Grad höchstens gleich n ist, ist ein endlichdimensionaler Untervektorraum von $F(\mathbb{R})$. Die Dimension dieses Raumes ist $n+1$.

4.) Die Menge aller Treppenfunktionen ist ein Untervektorraum von $F(\mathbb{R})$. Denn nach Definition ist eine Treppenfunktion eine Linearkombination charakteristischer Funktionen von Intervallen. Sind also $t_1 = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{I_k}$ und $t_2 = \sum_{\ell=1}^n b_\ell \chi_{J_\ell}$ Treppenfunktionen, dann ist auch $t_1 + t_2 = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{I_k} + \sum_{\ell=1}^n b_\ell \chi_{J_\ell}$ eine solche Linearkombination, also wieder eine Treppenfunktion. Ebenso ist für jede Treppenfunktion $t = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{I_k}$ und für jede reelle Zahl a das Produkt $at = \sum_{k=1}^m a a_k \chi_{I_k}$ wieder eine Treppenfunktion.

Die Dimension des Vektorraumes aller Treppenfunktionen ist unendlich.

Auf dem Vektorraum $F(D)$ kann man auch die Multiplikation zweier Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ erklären:

$$\forall_{x\in D} : (fg)(x) := f(x) \cdot g(x) \,.$$

Diese Multiplikation ist assoziativ und kommutativ. Die konstante Funktion $x \mapsto 1$ ist das neutrale Element. Man beachte aber, daß zu einer Funktion $f \in F(D)$ nicht unbedingt ein inverses Element in $F(D)$ existiert, nämlich dann nicht, wenn f Nullstellen hat, d.h.

wenn es $x \in D$ gibt mit $f(x) = 0$. Für die Multiplikation gilt auch das Distributivgesetz.

Also ist $F(D)$ eine kommutative, assoziative Algebra mit Einselement.

Diese Algebra ist nicht nullteilerfrei, denn man kann leicht Funktionen $f, g \in F(D)$ mit $f \neq 0, \quad g \neq 0$ konstruieren, für die aber

$$fg = 0$$

ist.

Alle oben angegebenen Beispiele sind auch Unteralgebren von $F(D)$, bis auf den Vektorraum der Polynome höchstens n–ten Grades. (Die Begriffe „Algebra“, „Unteralgebra“, „nullteilerfrei“ werden in der Vorlesung „Lineare Algebra“ definiert.)

3 e.) Einige einfache Eigenschaften reeller Funktionen

Definition: Eine reelle Funktion f heißt nach oben beschränkt, genau dann wenn die Wertemenge von f nach oben beschränkt ist.
Sie heißt nach unten beschränkt, genau dann wenn die Wertemenge nach unten beschränkt ist.
Also: f ist beschränkt, genau dann wenn f nach oben und unten beschränkt ist.

Definition: Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt monton wachsend, genau dann wenn gilt:

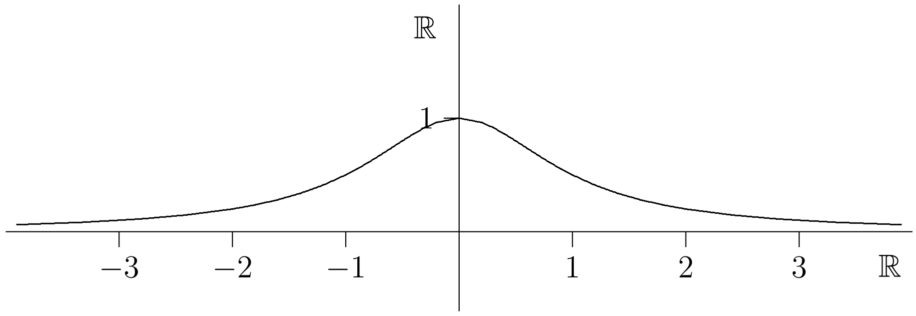
$$\forall_{x_1, x_2 \in D} : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

f heißt streng monoton wachsend, genau dann wenn gilt:

$$\forall_{x_1, x_2 \in D} : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Ebenso definiert man monoton fallend und streng monoton fallend. Eine Funktion heißt (streng) monoton, wenn sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

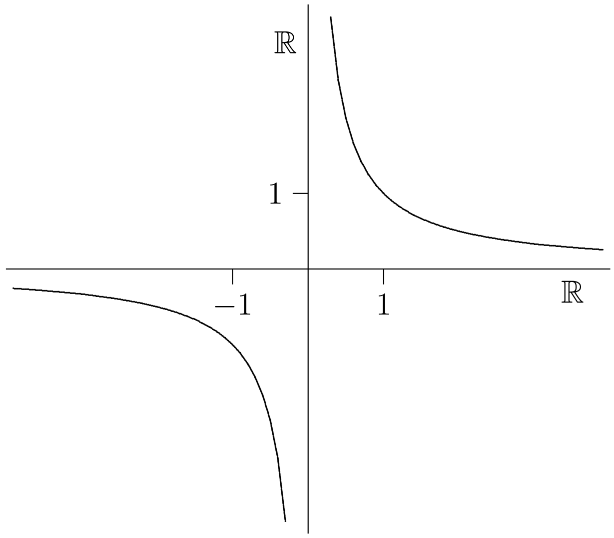
Beispiele:
1.) $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$



Diese Funktion ist beschränkt, aber weder monoton fallend noch monoton wachsend. Jedoch ist die Einschränkung dieser Funktion auf $[0, \infty)$ streng monoton fallend. Denn sei $0 \leq x_1 < x_2$. Es gilt

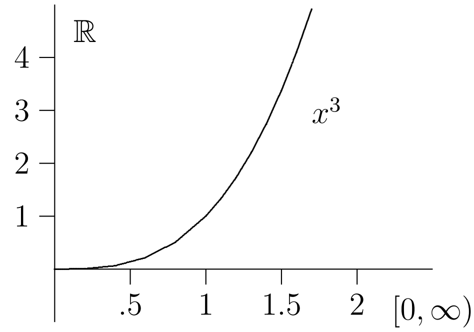
$$x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow 1 + x_1^2 < 1 + x_2^2 \Rightarrow \frac{1}{1 + x_1^2} > \frac{1}{1 + x_2^2}$$

2.) $x \mapsto \dfrac{1}{x}\,, \quad x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\,.$

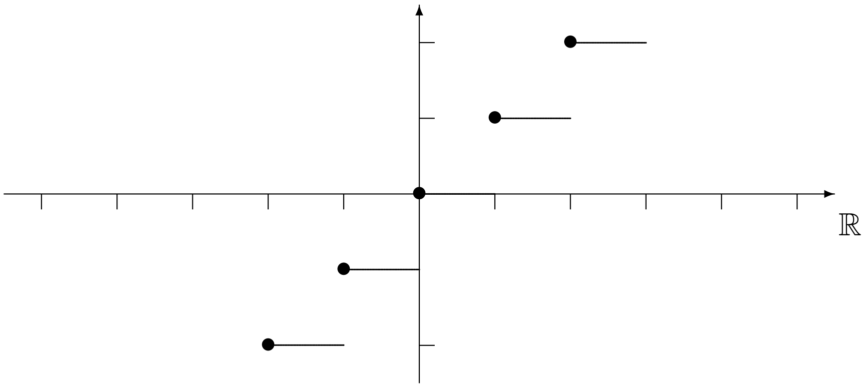


Diese Funktion ist nicht beschränkt. Die Einschränkung dieser Funktion auf $(0, \infty)$ ist jedoch streng monoton fallend, und auch die Einschränkung auf $(-\infty, 0)$.

3.) $x \to x^n : [0, \infty) \to \mathbb{R}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$



Diese Funktion ist nicht beschränkt, aber streng monoton wachsend. (Zur Übung beweise man dies durch Induktion nach n.)
4.) $x \mapsto [x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.



Diese Funktion ist unbeschränkt, monoton wachsend aber nicht streng monoton wachsend. Sie ist auch nicht injektiv. Es gilt aber:

Satz: Sei f eine reelle, streng monotone Funktion. Dann ist f injektiv, also existiert auf $W(f)$ die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to D(f)$. f^{-1} ist ebenfalls streng monoton.

Beweis: O.B.d.A. sei f streng monoton wachsend. Ist $x_1 \neq x_2$, dann muß entweder $x_1 < x_2$ oder $x_1 > x_2$ sein, also entweder $f(x_1) < f(x_2)$ oder $f(x_1) > f(x_2)$, also $f(x_1) \neq f(x_2)$. Somit ist f injektiv und es existiert $f^{-1} : W(f) \to D(f)$. Auch f^{-1} ist streng monoton wachsend. Denn sonst würde $y_1, y_2 \in W(f)$ existieren mit $y_1 < y_2$ und $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Hieraus würde wegen der strengen Monotonie von f folgen

$$y_1 = f\big(f^{-1}(y_1)\big) \geq f(\big(f^{-1}(y_2)\big) = y_2\,,$$

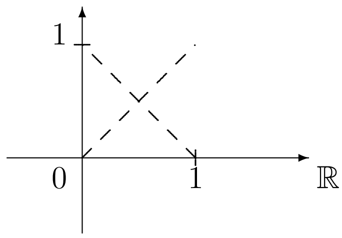
im Widerspruch zu $y_1 < y_2$. ∎

Die strenge Monotonie ist eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für die Umkehrbarkeit einer reellen Funktion. Dies sieht man an folgendem

Beispiel: Sei $D = [0,1]$. $f : D \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$x \to f(x) := \begin{cases} x\,, & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x\,, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Diese Funktion bildet $[0,1]$ bijektiv auf $[0,1]$ ab, ist jedoch in keinem Teilintervall monoton.



Potenzen mit rationalen Exponenten: Im Kapitel über stetige Funktionen wird bewiesen werden, daß der Wertebereich der Funktion $x \mapsto x^n : [0,\infty) \to [0,\infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gleich dem Intervall $[0,\infty)$ ist, die Funktion also surjektiv ist. Für $n = 2$ wurde dies im Abschnitt 3 b.) bereits gezeigt. Wie dort benötigt man auch für allgemeines n zum Beweis die Vollständigkeit der reellen Zahlen. Da diese Funktion auch streng monoton ist, existiert die inverse Funktion

$$x \mapsto x^{1/n} : [0,\infty) \to [0,\infty)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

die auch streng monoton ist. Hiermit ist die Potenzfunktion zum Exponenten $\frac{1}{n}$ erklärt. Die allgemeine Potenz mit rationalem Exponenten $q = \frac{m}{n} > 0$ kann man auf zwei Weisen erklären:

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m \quad \text{oder} \quad x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}\,.$$

Beide Definitionen stimmen überein. Denn es gilt

$$x^m = \left[\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n\right]^m = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n \cdot m} = \left[\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right]^n,$$

also

$$\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Also ist x^q für positives rationales q und $x \geq 0$ erklärt. Für negatives rationales q setzt man

$$x^q := \frac{1}{x^{-q}}\,, \quad x > 0\,.$$

Außerdem definiert man

$$x^0 := 1 \quad \text{für} \quad x \geq 0\,.$$

Mit diesen Definitionen gilt

$$\begin{aligned} x^r \cdot x^s &= x^{r+s} \\ x^r y^r &= (x \cdot y)^r \\ (x^r)^s &= x^{rs} \,. \end{aligned}$$

4 Konvergente Folgen

4 a.) Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

Eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

heißt Zahlenfolge. Als Beispiel betrachte man die Folge

$$\Big\{\frac{1}{n}\Big\}_{n\in\mathbb{N}} = \Big\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\Big\}.$$

Alle Glieder dieser Folge sind größer als Null, aber intuitiv meint man, daß die Folgenglieder sich immer mehr der Null annähern mit wachsendem n. Anders ist dies bei der Folge

$$\Big\{(-1)^n \frac{n}{n+1}\Big\}_{n\in\mathbb{N}} = \Big\{ -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\Big\}.$$

Diese intuitiven Vorstellungen sollen präzisiert werden:

Definition: Eine Zahlenfolge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen die Zahl $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$|a - x_n| < \varepsilon .$$

a heißt Grenzwert der Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Mit Quantoren läßt sich dies auch folgendermaßen schreiben: $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, genau dann wenn

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \quad \forall_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq n_0}} \quad : \quad |a - x_n| < \varepsilon .$$

Führt man den Begriff der „Umgebung“ ein, so läßt sich diese Definition etwas anschaulicher fassen:

Definition: Sei $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$. Als ε–Umgebung von a bezeichnet man die Menge

$$U_\varepsilon(a) := \{x \mid |a - x| < \varepsilon\}.$$

Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt Umgebung von a, wenn es eine ε–Umgebung von a gibt mit $U_\varepsilon(a) \subset U$.

Hiermit läßt sich die Definition der Konvergenz folgendermaßen formulieren:

Eine Zahlenfolge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder Umgebung U von a eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$x_n \in U\,.$$

Mit Quantoren:

$$\forall_{\text{Umgebung } U \text{ von } a} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\geq n_0}} : \quad x_n \in U\,.$$

Wenn eine Zahlenfolge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert a konvergiert, dann schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,.$$

Definition: Eine Zahlenfolge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ heißt Nullfolge.

Aus der Konvergenzdefinition folgt sofort, daß eine Zahlenfolge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, genau dann wenn $\{a - x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge ist.

Satz: Jede Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Seien a, b Grenzwerte von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung gibt es Zahlen $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a - x_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ und $|b - x_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_1$, also gilt $|a - x_n| < \varepsilon\,, \quad |b - x_n| < \varepsilon$ für $n \geq \max(n_0, n_1)$. Für solche n gilt daher

$$|a - b| = |(a - x_n) - (b - x_n)| \leq |a - x_n| + |b - x_n| < 2\varepsilon\,,$$

also folgt $a - b = 0$, weil ε beliebig klein gewählt werden kann, also $a = b$. ■

Eine Zahlenfolge heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt, andernfalls divergent. Abändern von endlich vielen Gliedern einer Zahlenfolge ändert das Konvergenzverhalten dieser Folge nicht. (D.h., hat die Folge den Grenzwert a, so konvergiert auch die abgeänderte Folge gegen a, ist die Folge divergent, so ist auch die abgeänderte Folge divergent.)

Beispiel: Die Folge $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen Null und ist daher Nullfolge.

Beweis: Man muß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ finden so daß $|0 - \frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ ist für alle $n \geq n_0$. Wegen der archimedischen Anordnung der reellen Zahlen gilt

$$\left\{ n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \neq \emptyset$$

also hat diese Menge ein kleinstes Element, das ich mit n_0 bezeichne. Somit gilt für alle $n \geq n_0$, daß $n > \frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Hiermit ist n_0 gefunden. ■

Bevor ich weitere Beispiele betrachte, beweise ich noch einige Sätze über das Rechnen mit Zahlenfolgen, und führe noch weitere Definitionen ein.

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,.$$

Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a - x_n| < 1$ für alle $n \geq n_0$, also

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |a - x_n| + |a| < |a| + 1$$

für alle $n \geq n_0$. Also gilt

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}: \quad |x_n| \leq \max\Big(\Big\{x_n \mid n < n_0\Big\} \cup \Big\{|a| + 1\Big\}\Big)\,.$$

■

Satz: Seien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Zahlenfolgen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Dann sind auch die Folgen $\{x_n + y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_n - y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{x_n y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b\,, \quad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab\,.$$

Wenn alle y_n und der Grenzwert b von 0 verschieden sind, so ist auch die Quotientenfolge $\{\frac{x_n}{y_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}\,.$$

Man beachte, daß für eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und für eine reelle Zahl c nach diesem Satz gilt, daß die Folge $\{cx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ca konvergiert, weil die konstante Folge $\{c\}_{n\in\mathbb{N}}$ natürlich gegen c konvergiert.

Beweis des Satzes: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es existieren $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$, $|b - y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$. Also gilt für $n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$:

$$\begin{aligned}|(a \pm b) - (x_n \pm y_n)| &= |(a - x_n) \pm (b - y_n)| \\ &\leq |a - x_n| + |b - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage über Summe und Differenz bewiesen. Um die Aussage über das Produkt zu beweisen beachte man, daß $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge ist also insbesondere beschränkt ist. Sei $c > 0$ eine obere Schranke für $\{|x_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Falls $b \neq 0$ ist, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$, für $n \geq n_0$. Für $b = 0$ sei $n_0 = 1$. Außerdem existiert $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|b - y_n| < \frac{\varepsilon}{2c}$ für $n \geq n_1$. Also gilt für $n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$

$$\begin{aligned}|ab - x_n y_n| &= |ab - bx_n + bx_n - x_n y_n| \\ &= |b(a - x_n) + x_n(b - y_n)| \leq |b|\,|a - x_n| + |x_n|\,|b - y_n| \\ &< |b|\,\frac{\varepsilon}{2|b|} + c\,\frac{\varepsilon}{2c} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Hiermit ist auch die Aussage für das Produkt bewiesen.

Um die Aussage für den Quotienten zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$$

gilt, weil Produkte bereits behandelt wurden. Zum Beweis dieser Gleichung beachte zunächst, daß die Folge $\{\frac{1}{y_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Denn weil $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ gilt, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß für $n \geq n_0$

$$|b - y_n| < \frac{|b|}{2}, \quad \text{also} \quad |y_n| = |y_n - b + b| \geq |b| - |y_n - b| > \frac{|b|}{2},$$

also $|\frac{1}{y_n}| \leq \frac{2}{|b|}$ gilt. Sei m das Maximum der endlichen Menge $\{|\frac{1}{y_n}| \mid n < n_0\}$. Dann ist $c = \max(m, \frac{2}{|b|})$ eine obere Schranke für $\{|\frac{1}{y_n}|\}_{n\in\mathbb{N}}$. Also folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{y_n}\right| = \left|\frac{y_n - b}{by_n}\right| \leq \frac{c}{|b|}\,|y_n - b|\,.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $|y_n - b| < \frac{|b|}{c}\varepsilon$, also

$$\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{y_n}\right| \leq \frac{c}{|b|}\,|y_n - b| < \varepsilon\,.$$

Hiermit ist der Satz bewiesen. ∎

Man beachte, daß Zahlenfolgen reelle Funktionen sind. Also sind die Summe und das Produkt zweier Zahlenfolgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ erklärt als $\{x_n + y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{x_n y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Folgerung: Die konvergenten Zahlenfolgen bilden einen Vektorraum über $\mathbb{R}$, ebenso die Nullfolgen.

Dies ergibt sich aus dem eben bewiesenen Satz. Als weitere Folgerung ergibt sich

Satz: Sei F eine rationale Funktion mit Definitionsbereich D, und sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine

Folge mit $x_n \in D$ für alle n, die gegen $a \in D$ konvergiert. Dann ist die Folge $\{F(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, es es gilt

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(a)\,.$$

Beweis: Es gilt $F(x) = \frac{a_0+\ldots+a_r x^r}{b_0+\ldots+b_s x^s}$, also

$$F(x_n) = \frac{a_0 + \ldots + a_r x_n^r}{b_0 + \ldots + b_s x_n^s}\,.$$

Nach dem eben bewiesenen Satz sind die Folgen im Zähler und im Nenner konvergent mit Grenzwerten $a_0 + \ldots + a_r a^r$ und $b_0 + \ldots + b_s a^s$. Nach Voraussetzung ist $b_0 + \ldots + b_s x_n^s \neq 0$ für alle n und $b_0 + \ldots + b_s a^s \neq 0$, also kann wieder der eben bewiesene Satz angewendet werden, womit die Behauptung folgt. ■

Satz: Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Dann ist $\{x_n y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Beweis: Sei $c > 0$ eine obere Schranke für $\{|y_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|0 - x_n| = |x_n| < \frac{\varepsilon}{c}$ für alle $n \geq n_0$, und somit auch

$$|0 - x_n y_n| = |x_n y_n| = |y_n|\,|x_n| \leq c|x_n| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon\,.$$

■

Satz: Aus $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ folgt $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, also folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung für alle $n \geq n_0$

$$\big|\,|a| - |x_n|\,\big| \leq |a - x_n| < \varepsilon\,.$$

■

Die Umkehrung ist falsch. Man überlege sich dies anhand eines Gegenbeispiels.

Satz: (i) Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ und $x_n \leq y_n$ für alle n. Dann gilt $a \leq b$.
(ii) Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$, und für die Folge z_n gelte $x_n \leq z_n \leq y_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a\,.$$

Beweis: (i) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existieren $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a - x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und $|b - y_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$. Also gilt für $n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$:

$$\begin{aligned} a = a - x_n + x_n &\leq x_n + \varepsilon \leq y_n + \varepsilon \\ = y_n - b + b + \varepsilon &\leq b + \varepsilon + \varepsilon = b + 2\varepsilon\,, \end{aligned}$$

also

$$a \leq b + 2\varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gwählt war, folgt $a \leq b$.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es existieren $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a-x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, $|a-y_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$, also gilt für alle $n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$:

$$-\varepsilon < -|a-x_n| \leq -(a-x_n) = x_n - a \leq z_n - a \leq y_n - a \leq |y_n - a| < \varepsilon\,,$$

also

$$|z_n - a| \leq \varepsilon\,.$$

■

Definition: Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Abbildung. Dann nennt man die Folge $(n \mapsto x_{\varphi(n)}) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Teilfolge von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ich bezeichne diese Teilfolge auch mit $\{x_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Da φ selber eine Folge ist, benützt man meistens die Bezeichnung $\{x_{j_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $j_n := \varphi(n)$ gesetzt ist.

Satz: Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, und sei $\{x_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge. Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = a\,.$$

Beweis: Zunächst beachte man:
Weil $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton ist, gilt

$$\varphi(n) \geq n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Man beweist dies durch vollständige Induktion:
a.) Induktionsanfang $n = 1$:

$$\varphi(1) \in \mathbb{N} \Longrightarrow \varphi(1) \geq 1\,.$$

b.) Induktionsschritt: Sei die Behauptung richtig für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt, weil φ streng monoton ist,

$$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n\,,$$

also $\varphi(n+1) \geq n+1$.
Nun kann der Satz bewiesen werden: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $|a - x_n| < \varepsilon$ gilt für alle $n \geq n_0$, also auch $|a - x_{\varphi(n)}| < \varepsilon$, wegen $\varphi(n) \geq n \geq n_0$.
Damit ist der Satz bewiesen. ■

Beispiele: 1.) Sei $p \in \mathbb{N}$ (also $p \geq 1$). Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{p}} = 0$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$|0 - n^{-\frac{1}{p}}| = n^{-\frac{1}{p}} < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \varepsilon^{-p}.$$

Die Menge $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > \varepsilon^{-p}\}$ ist nicht leer, und hat somit ein kleinestes Element n_0. Für alle $n \geq n_0$ gilt also $n^{-\frac{1}{p}} < \varepsilon$. ∎

2.) **Folgerung:** Sei $q > 0$ rational. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} n^{-q} = 0.$$

Beweis: Sei $q = \frac{r}{s}$, $r, s \in \mathbb{N}$, und sei die rationale Funktion F erklärt durch

$$x \mapsto F(x) := x^r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Nach 1.) und dem oben bewiesenen Satz folgt

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{r}{s}} = \lim_{n\to\infty} F(n^{-\frac{1}{s}}) = F(0) = 0.$$

∎

3.) Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt für

(i) $|q| < 1 :\ \lim_{n\to\infty} q^n = 0$

(ii) $q = 1 :\ \lim_{n\to\infty} q^n = 1$

(iii) $q = -1 :\ \{q^n\}$ ist divergent

(iv) $|q| > 1 :\ \{q^n\}$ ist divergent.

Beweis: (i) Für $q = 0$ ist die Behauptung richtig. Sei $0 < |q| < 1$. Zu zeigen ist: Es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß für alle $n \geq n_0$

$$|q^n| = |q|^n < \varepsilon$$

gilt.
Sei $h := \frac{1}{|q|} - 1$. Dann (Bernoullische Ungleichung)

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh = n\Big(\frac{1}{|q|} - 1\Big),$$

also

$$|q|^n \leq \frac{1}{n} \frac{|q|}{1-|q|}.$$

Setze
$$n_0 := \min\Big\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \Big(\frac{1}{n}\frac{|q|}{1-|q|} < \varepsilon\Big)\Big\}$$
(ii) $q = 1 \Longrightarrow q^n = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 1$
(iii) $q = -1 \Longrightarrow \quad q^n = (-1)^n \Longrightarrow$
$$\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}\,.$$
Diese Folge enthält als Teilfolgen die beiden konstanten Folgen $\{-1,-1,-1,\ldots\}$ und $\{1,1,1,\ldots\}$, die gegen -1 und gegen 1 konvergieren. Wäre $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, müßten beide Teilfolgen gegen denselben Wert, den eindeutig bestimmten Grenzwert von $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Also ist $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.
(iv) $|q| > 1$: Sei
$$\begin{aligned} h &:= |q| - 1 \\ \Longrightarrow \qquad |q|^n &= (1+h)^n \geq 1 + nh > h = n(|q|-1)\,. \end{aligned}$$
Wegen $|q|-1 > 0$ und weil die reellen Zahlen archimedisch angeordnet sind, folgt hieraus, daß $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, also muß $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergieren. ∎

4.) Die Folge
$$\Big\{(-1)^n \frac{n}{n+1}\Big\}_{n\in\mathbb{N}}$$
diverigert.

Beweis: Diese Folge enthält die Teilfolgen
$$\Big\{\frac{2n}{2n+1}\Big\}_{n\in\mathbb{N}} \quad (n \to 2n)$$
und
$$\Big\{-\frac{2n+1}{2n+2}\Big\}_{n\in\mathbb{N}} \quad (n \to 2n+1)\,.$$
Wir zeigen, daß $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} -\frac{2n+1}{2n+2} = -1$ gilt. Dann muß die ursprüngliche Folge divergieren. Es gilt
$$\frac{2n}{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+1} - \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{2n+1}\,.$$
Da $\{1,1,1,\ldots\}$ gegen 1 konvergiert, und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ gilt, folgt für die Folge aus den Differenzen $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{2n+1}) = 1 - 0 = 1$. Ebenso beweist man die Behauptung für die zweite Folge. ∎

5.) Man betrachte die rekursiv definierte Folge

$$\begin{aligned} x_1 &= b > 0 \\ x_{n+1} &:= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad a > 0\,. \end{aligned}$$

Unter der Annahme, daß diese Folge konvergiert, kann der Grenzwert c bestimmt werden. c muß > 0 sein, weil $(x_n + \frac{a}{x_n}) \geq 2\sqrt{a}$ gelten muß. Denn

$$\begin{aligned} 0 \leq \left(\sqrt{x_n} - \sqrt{\frac{a}{x_n}}\right)^2 &= x_n - 2\sqrt{a} + \frac{a}{x_n}\,, \quad \text{also} \\ x_{n+1} &\geq \sqrt{a} > 0\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $c = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \geq \sqrt{a} > 0$. Da $F(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ eine rationale Funktion ist, folgt aus dem früher bewiesenen Satz und aus der Definition der Folge, daß

$$\begin{aligned} c = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} F(x_n) &= \frac{1}{2}\left(c + \frac{a}{c}\right), \quad \text{also} \\ c &= \sqrt{a}\,. \end{aligned}$$

Falls diese rekursiv definierte Folge konvergiert, kann sie zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{a}$ benützt werden. Konvergenz ergibt sich aus den folgenden Konvergenzkriterien.

4 b.) Konvergenzkriterien, Limes superior, Limes inferior

Eine Folge heißt monoton, wenn sie als Funktion monoton ist. Also ist eine Folge monoton wachsend, wenn

$$x_n \leq x_{n+1}$$

gilt für alle n, und monoton fallend, wenn

$$x_n \geq x_{n+1}$$

gilt für alle n.

Satz: Jede monotone beschränkte Folge ist konvergent.

Beweis: Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende, beschränkte Folge. Sei c das Supremum dieser Folge. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$c - \varepsilon \leq x_{n_0} \leq c\,.$$

Da die Folge monoton wachsend ist, folgt also für alle $n \geq n_0$

$$c - \varepsilon \leq x_n \leq c\,,$$

also $|c - x_n| \leq \varepsilon$. ■

Folgerung: Eine monton wachsende Folge konvergiert gegen ihr Supremum. Ebenso erhält man: Eine monoton fallende Folge konvergiert gegen ihr Infimum.

Beispiel: Nun kann gezeigt werden, daß die Folge

$$\begin{aligned} x_1 &= b > 0 \\ x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \end{aligned}$$

konvergiert.
Hierzu beachte man, daß diese Folge ab $n = 2$ monoton fallend ist. Denn es wurde gezeigt, daß $x_n \geq \sqrt{a}$ für $n \geq 2$ gilt, also $\frac{a}{x_n} \leq x_n$, folglich

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \leq \frac{1}{2}\,x_n + \frac{1}{2}\,x_n = x_n\,.$$

Es wurde schon gezeigt, daß $\min(\sqrt{a}, b)$ untere Schranke ist, also konvergiert diese Folge gegen $\sqrt{a}$.

Satz (Intervallschachtelung): Sei $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $J_n = [a_n, b_n]$ mit

$$J_1 \supseteq J_2 \supseteq \ldots \supseteq J_n \supseteq \ldots\,.$$

Ist $b_n - a_n$ eine Nullfolge, dann enthält der Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$ genau einen Punkt.

Beweis: Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt, denn b_1 ist obere Schranke. Ebenso ist $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt, also konvergieren beide Folgen, und es gilt nach Voraussetzung

$$\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0\,,$$

also $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$. Da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, ist a das Supremum von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und das Infimum von $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, also gilt

$$a_n \leq a \leq b_n\,, \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

also

$$a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n\,.$$

Natürlich ist a der einzige Punkt, der in allen Intervallen liegt. ■

Diese Behauptung gilt nicht, wenn man anstelle abgeschlossener Intervalle offene Intervalle nimmt.

Definition: Eine Zahl a heißt Häufungspunkt der Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wenn zu jeder Umgebung U von a unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $x_n \in U$.

Äquivalent dazu ist: a ist Häufungspunkt, genau dann wenn gilt:

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \exists_{\substack{m\in\mathbb{N} \\ m\geq n}} : \quad |a - x_m| < \varepsilon .$$

Satz: Wenn a Häufungspunkt der Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist, dann gibt es eine Teilfolge $\{x_{j_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

Beweis: Es genügt, die folgende Behauptung zu beweisen:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ kann eine Zahl $j_n \in \mathbb{N}$ gefunden werden mit $j_n > j_{n-1}$ (falls $n \geq 2$), und

$$|a - x_{j_n}| < \frac{1}{n} .$$

Hieraus folgt sofort, daß die so konstruierte Teilfolge $\{x_{j_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. (Beachte, daß $\{x_{j_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist, weil $n \mapsto j_n$ nach Konstruktion eine streng monoton wachsende Folge ist.)

Es soll nun diese Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen werden.

a.) Induktionsanfang: $n = 1$. Da a Häufungspunkt von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist, gibt es n_0 mit

$$|a - x_{n_0}| < 1 .$$

Setze $j_1 := n_0$.

b. Induktionsschritt: Sei j_n gefunden. Weil a Häufungspunkt von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist, gibt es unendlich viele $m \in \mathbb{N}$ mit

$$|a - x_m| < \frac{1}{n+1} ,$$

also insbesondere auch ein solches $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $m_0 > j_n$. Setze $j_{n+1} := m_0$. ∎

Satz von Bolzano und Weierstraß: Jede beschänkte Folge besitzt wenigstens einen Häufungspunkt. *(Bernard Bolzano 1781 – 1848, Karl Weierstraß 1815 – 1897.)*

Beweis: Sei a_1 eine untere Schranke und b_1 eine obere Schranke für $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Halbiert man das Intervall $J_1 = [a_1, b_1]$, dann liegen wenigstens in einem der beiden abgeschlossenen Teilintervalle unendlich viele Glieder der Folge. Man wähle ein solches Teilintervall aus und nenne es J_2. Setzt man dieses Verfahren fort, dann erhält man eine Intervallschachtelung

$J_1 \supseteq J_2 \supseteq \ldots, \quad J_n = [a_n, b_n]$, mit der Eigenschaft daß in jedem Intervall unendlich viele Glieder von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ liegen. Da $b_n - a_n = \frac{b_1-a_1}{2^{n-1}} \to 0$ gilt für $n \to \infty$, enthält der Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$ einen einzigen Punkt c.

c ist Häufungspunkt. Denn sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so groß, daß $b_n - a_n = \frac{b_1-a_1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ ist. Dann gilt wegen $c \in J_n$

$$a_n \geq c - \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} > c - \varepsilon$$

und

$$b_n \leq c + \frac{b_1 - a_1}{2^{n-a}} < c + \varepsilon\,,$$

also

$$J_n = [a_n, b_n] \subseteq (c - \varepsilon, x + \varepsilon)\,,$$

also liegen unendlich viele Glieder von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. ■

Folgerung: Jede beschränkte Zahlenfolge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt. Also kann man eine Teilfolge auswählen, die gegen den Häufungspunkt konvergiert. ■

Im folgenden werde ich ein Konvergenzkriterium angeben, das für alle Folgen anwendbar ist, und mit dem man Konvergenz untersuchen kann, ohne den Grenzwert der Folge zu kennen. Hierzu benötigt man folgende Definition:

Definition: Eine Zahlenfolge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy–Folge wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß für alle $n, m \geq n_0$ gilt

$$|x_n - x_m| < \varepsilon\,.$$

Satz: Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie Cauchyfolge ist.

Beweis: „$\Longrightarrow$“ Angenommen, die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei konvergent. Zu zeigen ist, daß diese Folge Cauchyfolge ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, und sei a der Grenzwert. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|x_n - a| < \varepsilon/2\,,$$

also gilt für $n, m \geq n_0$

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.$$

„$\Longleftarrow$“ Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge. Zu zeigen ist daß $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Zunächst zeigt man, daß jede Cauchyfolge beschränkt ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß für alle $n \geq n_0$

$$|x_n - x_{n_0}| < \varepsilon$$

gilt, also

$$\begin{aligned} |x_n| &= |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| \\ &\leq \varepsilon + |x_{n_0}|\,. \end{aligned}$$

Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| \leq \Big(\max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0}|\}\Big) + \varepsilon\,,$$

also ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Somit hat die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt a.

Als nächstes wird gezeigt, daß a Grenzwert der Folge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge ist, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ für alle $n, m, \geq n_0$. Nach Definition des Häufungspunktes existieren unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \varepsilon/2\,,$$

also existiert auch ein $n_1 \geq n_0$ mit $|x_{n_1} - a| < \varepsilon/2$. Für $n \geq n_0$ gilt also

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_1} + x_{n_1} - a| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - a| < \varepsilon\,.$$

$\varepsilon > 0$ ist beliebig gewählt, also ist a Grenzwert von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. ∎

Beispiel: Sei die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_{n+1} &= \frac{1}{1+x_n}\,, \quad n \geq 1\,. \end{aligned}$$

Diese Folge konvergiert gegen den Grenzwert $a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Zum Beweis beachte man zunächst, daß für alle n gilt

$$\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1\,. \tag{4.1}$$

Dies ergibt sich durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: $n = 1$ ist klar.
Induktionsschritt: Sei die Annahme für n richtig. Dann folgt $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x_n} \leq \frac{2}{3}$, also

$$\frac{1}{2} \leq x_{n+1} \leq \frac{2}{3} \leq 1.$$

Somit ist (4.1) richtig. Aus (4.1) ergibt sich

$$|x_{n+1+k} - x_{n+1}| = \Big|\frac{1}{1+x_{n+k}} - \frac{1}{1+x_n}\Big| = \Big|\frac{x_n - x_{n+k}}{(1+x_{n+k})(1+x_n)}\Big|$$
$$\le \frac{1}{(1+\frac{1}{2})^2}\,|x_{n+k} - x_n| = \frac{4}{9}\,|x_{n+k} - x_n|.$$

Durch vollständige Induktion schließt man aus dieser Ungleichung, daß für alle n und k

$$|x_{n+k} - x_n| \le \Big(\frac{4}{9}\Big)^{n-1} |x_{k+1} - x_1| \le 2\Big(\frac{4}{9}\Big)^{n-1}$$

gilt. Wegen $(\frac{4}{9})^{n-1} \to 0$ für $n \to \infty$ kann nun zum Konvergenzbeweis das Cauchy–Kriterium angewendet werden: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $(\frac{4}{9})^{n-1} < \varepsilon/2$ ist für $n \ge n_0$. Dann folgt für alle $m > n \ge n_0$

$$|x_m - x_n| = |x_{n+(m-n)} - x_n| \le 2\Big(\frac{4}{9}\Big)^{n-1} \le 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

also ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge, also konvergent. Sei a der Grenzwert. Es gilt $\frac{1}{2} \le a \le 1$, also konvergiert $\frac{1}{1+x_n}$ gegen $\frac{1}{1+a}$. Wegen $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ muß also gelten

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x_n} = \frac{1}{1+\lim_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{1+a}\,,$$

also $(1+a)a = a + a^2 = 1$, somit $a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Satz: Die Menge M der Häufungspunkte einer nach oben (bzw. nach unten) beschränkten Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei nicht leer. Dann besitzt M ein Maximum (bzw. ein Minimum).

Beweis: Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt. Dann ist auch M nach oben beschränkt, also existiert $s_0 = \sup M$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $a \in M$ mit $a > s_0 - \varepsilon/2$. Da a Häufungspunkt von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist, gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \varepsilon/2\,,$$

also gilt für diese unendlich vielen n

$$\begin{aligned} |x_n - s_0| &= |x_n - a + a - s_0| \\ &\le |x_n - a| + |a - s_0| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

also ist s_0 selbst Häufungspunkt von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, und somit gilt $s_0 \in M$, dies bedeutet

$$s_0 = \max M\,.$$

Für nach unten beschränkte Folgen verläuft der Beweis genauso. ∎

Definition: Das Maximum der Menge M aus dem vorangehenden Satz heißt „oberer Limes“ oder „Limes superior“ von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, das Minimum von M heißt „unterer Limes“ oder “Limes inferior“ von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Den Limes superior bezeichnet man mit

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n ,$$

den Limes inferior mit

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n .$$

Satz: (i) Es gilt $a = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, genau dann wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$(*) \qquad \begin{aligned} &x_n > a - \varepsilon && \text{für unendlich viele } n \\ &x_n < a + \varepsilon && \text{für fast alle } n . \end{aligned}$$

(ii) $b = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, genau dann wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} &x_n < b + \varepsilon && \text{für unendlich viele } n \\ &x_n > b - \varepsilon && \text{für fast alle } n . \end{aligned}$$

(„Fast alle n“ heißt: „Für alle bis auf endlich viele n“.)

Beweis: (i) Sei $a = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, und sei $\varepsilon > 0$.
Im vorangehenden Beweis wurde schon gezeigt, daß dann für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n > a - \varepsilon$. Die Ungleichung $x_n \geq a + \varepsilon$ kann höchstens für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gelten. Denn sonst könnte man eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ konstruieren mit

$$x_{n_k} \geq a + \varepsilon$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Diese Folge wäre auch beschränkt, hätte also einen Häufungspunkt c, und für diesen Häufungspunkt müßte gelten $c \geq a + \varepsilon$, also könnte a nicht das Maximum der Häufungspunkte von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sein, weil auch c Häufungspunkt von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wäre.

Angenommen, die beiden Aussagen $(*)$ seien richtig für eine Zahl $a \in \mathbb{R}$. Dann ist a Häufungspunkt von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wegen der ersten und zweiten Aussage zusammen. Wegen der zweiten Aussage kann $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt haben der größer als a ist, also gilt $a = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.
Teil (ii) des Satzes wird ganz entsprechend bewiesen. ∎

Für eine beschränkte Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existieren $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ und $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ immer, und es gilt

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n .$$

Satz: Es gilt $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ genau dann, wenn die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. In diesem Fall gilt

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \,.$$

Beweis: Gilt $a = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, dann folgt aus dem vorangehenden Satz für alle $\varepsilon > 0$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

für fast alle n , also existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß für alle $n \geq n_0$

$$|a - x_n| < \varepsilon$$

gilt, folglich ist $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Gilt umgekehrt $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, dann folgt

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $a = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, nach dem vorangehenden Satz.

$\blacksquare$

5 Reihen

Ich habe schon endliche Summen der Form

$$\sum_{m=1}^{n} a_m$$

betrachtet. Aus den Assoziativ– und Kommutativgesetzen folgt, daß der Wert dieser Summe nicht von der Reihenfolge der Summanden abhängt. In vielen Fällen stößt man aber auf unendliche Summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.$$

Man kann solchen Summen einen präzisen Sinn geben mit Hilfe des Grenzwertbegriffes.

Definition: Sei $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge, und sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Die Zahlenfolge $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ wird als die zu $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ gehörende unendliche Reihe bezeichnet.
Ist $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent mit dem Grenzwert s, so heißt s die Summe der unendlichen Reihe, und man schreibt

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,.$$

Die Reihe selbst bezeichnet man auch mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Man muß also untersuchen, ob die Reihe $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert, und wenn ja, gegen welchen Grenzwert. Es zeigt sich, daß es hierbei im allgemeinen auf die Reihenfolge der Glieder a_n der Reihe ankommt. Daneben gibt es Reihen, die absolut konvergenten Reihen, die unabhängig von der Reihenfolge der Glieder immer gegen denselben Grenzwert konvergieren.

Beispiel: Sei $|q| < 1$ und sei $a_k = q^k$. Sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. Mann nennt diese Reihe „geometrische Reihe“. Ich möchte die Konvergenz dieser Reihe untersuchen. Es gilt

$$(1-q)s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}\,,$$

also

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}\,.$$

Wegen $q^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$ folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n=\infty} s_n = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \frac{1}{1-q}\,.$$

Aus der Theorie der Folgen ergibt sich folgender Satz:

Satz: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a\,,\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b\,,\quad c \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) &= a + b \\ \sum_{n=1}^{\infty} c a_n &= ca\,. \end{aligned}$$

Gilt $a_n \leq b_n$, dann ist $a \leq b$.

5 a.) Konvergenzkriterien

Aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Folgen erhält man unmittelbar ein Konvergenzkriterium für Reihen:

Satz: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert so daß für alle $n \geq n_0$ und alle $m \geq n$ gilt

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon\,.$$

Folgerung: Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, dann ist $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Nullfolge.

Daß $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist, ist also notwendig für die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, aber nicht hinreichend. Dies sieht man aus folgendem Beispiel:

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. Denn betrachte

$$\begin{aligned} s_{2^m} &= \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\Big) + \ldots + \Big(\frac{1}{2^{i-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^i}\Big) \\ &\quad + \underbrace{\Big(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^m}\Big)}_{2^{m-1}\ \text{Summanden}}\,. \end{aligned}$$

Jede der Klammern enthält 2^{i-1} Summanden, und jeder Summand in der Klammer ist nicht kleiner als $\frac{1}{2^i}$, also ist der Wert jeder der Klammern größer oder gleich $2^{-i} \cdot 2^{i-1} = \frac{1}{2}$, also

$$s_{2^m} \geq 1 + m \cdot \frac{1}{2}\,.$$

Also ist die Teilfolge $\{s_{2^m}\}_{m=1}^{\infty}$ nicht beschränkt, also auch nicht $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$, also divergiert die Reihe.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ heißt harmonische Reihe.

Eine Reihe heißt alternierend, wenn die Glieder abwechselndes Vorzeichen haben.

Satz (Kriterium von Leibniz)**:** Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine alternierende Reihe, und sei $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergent.

Beweis: o.B.d.A. nehme ich an, daß $a_1 \geq 0$ ist. Sei $s_n = \sum_{m=1}^{n} a_n$. Die Teilfolge $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ von $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist monoton wachsend, wegen

$$s_{2(n+1)} = s_{2n} + (a_{2n+1} + a_{2n+2}) \geq s_{2n} ,$$

da nach Voraussetzung

$$a_{2n+1} + a_{2n+2} = |a_{2n+1}| - |a_{2n+2}| \geq 0$$

gilt. Außerdem ist diese Folge durch $s_1 = a_1 \geq 0$ nach oben beschränkt, wegen

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 + (-|a_2| + |a_3|) + (-|a_4| + |a_5|) + \dots \\ &\quad + (-|a_{2n-2}| + |a_{2n-1}|) - |a_{2n}| \\ &\leq a_1 . \end{aligned}$$

Ebenso ist die Folge $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ monoton fallend, und durch $s_2 = a_1 + a_2$ nach unten beschränkt, also sind beide Teilfolgen konvergent. Es gilt

$$s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} .$$

Da $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist, stimmen die Grenzwerte der beiden Teilfolgen überein. Natürlich ist dann auch $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ selbst konvergent gegen denselben Grenzwert s. ■

Aus diesem Beweis folgt

$$s_{2n} \leq s \leq s_{2n-1} , \quad s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1}$$

also, wegen $s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n}$, $\quad s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$,

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}| \, .$$

Dies ist eine „Fehlerabschätzung“ .
Aus diesem Satz folgt, daß die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \quad \text{(Leibnizsche Reihe)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

konvergieren.

5 b.) Umordnung von Reihen, absolut konvergente Reihen

Ich möchte ein Beispiel angeben das zeigt, daß das Konvergenzverhalten und der Grenzwert einer Reihe von der Reihenfolge der Glieder abhängt. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ist konvergent. Ich bezeichne ihren Grenzwert mit s . Es gilt $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$. Man addiere nun die beiden Reihen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + - \ldots = s$$

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + - \ldots = \frac{1}{2} s$$

und erhält

$$1 \quad + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \quad + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \quad + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + - \ldots = \frac{3}{2} s \, .$$

Dies ist eine Umordnung der urspünglichen Reihe, und man sieht, daß auch die umgeordnete Reihe konvergiert, allerdings gegen den Grenzwert $\frac{3}{2} s \neq s$, weil $s \neq 0$ ist.

Definition: Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Satz: Es sei $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiere gegen s . Dann konvergiert auch jede Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ gegen s .

Beweis: Seien $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\quad s_n' = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$.
Die Folgen $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{s_n'\}_{n=1}^{\infty}$ sind beide monoton wachsend. Hieraus folgt, daß der Grenzwert s der Folge $\{s_n\}$ gleich dem Supremum der Menge $\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist. Ich zeige nun, daß $s_n' \leq s$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hierzu wähle zu $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$m = \max\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} .$$

Dann folgt $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$, also

$$s'_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^{m} a_k = s_m \leq s \,,$$

also ist die Folge $\{s'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt also konvergent gegen s' mit $s' \leq s$. Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ durch Umordnung aus $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ hervorgeht, können in diesen Überlegungen jetzt die Rollen von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ vertauscht werden, und es folgt $s \leq s'$, also $s = s'$. ∎

Ich definiere nun absolut konvergente Reihen. Es wird sich zeigen, daß dies genau die Reihen sind, für die jede Umordnung gegen denselben Grenzwert konvergiert.

Definition: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz: Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Beweis: Um zu zeigen, daß $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, verwendet man das Cauchy–Kriterium. Sei $\varepsilon > 0$. Da die Reihe absolut konvergiert, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß für alle $m \geq n \geq n_0$ gilt

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \varepsilon \,,$$

also

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \varepsilon \,.$$

Hierbei habe ich die Dreiecksungleichung angewendet. Also konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. ∎

Satz: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann absolut konvergent, wenn die Folge der Partialsummen $\{\sum_{k=1}^{n} |a_k|\}_{n=1}^{\infty}$ zur Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ beschränkt ist.

Beweis: klar.

Satz: Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Dann ist auch jede Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \,.$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ sei k_n eine natürliche Zahl mit den Eigenschaften $k_n > k_{n-1}$ falls $n \geq 2$, und

$$\{0, 1, \ldots, n\} \subseteq \{\sigma(1), \ldots, \sigma(k_n)\}\,.$$

Sei $s'_{k_n} = \sum_{m=1}^{k_n} a_{\sigma(m)}$, $\quad s_n = \sum_{m=1}^{n} a_m$. Die Differenz $s'_{k_n} - s_n$ enthält nur Reihenglieder a_m mit $m > n$. Da $\sum_{k=1}^{\infty}$ absolut konvergiert, kann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gefunden werden so daß für alle $p \geq \ell \geq n_0$ gilt

$$\sum_{m=\ell}^{p} |a_m| < \varepsilon\,,$$

also folgt für alle $n \geq n_0$

$$|s'_{k_n} - s_n| < \varepsilon\,,$$

also ist $\{s'_{k_n} - s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Man beachte nun, daß $\{s'_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergieren, weil $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma(k)}|$ eine Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist, also konvergiert. Hieraus folgt, daß auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ konvergiert. Sei $s' = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$, $\quad s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Wegen $s'_{k_n} \to s'$, $s_n \to s$ für $n \to \infty$, und da $s'_{k_n} - s_n$ Nullfolge ist, daß $s' = s$ gelten. ■

Darüberhinaus gilt sogar folgender Satz.

Satz: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann absolut konvergent, wenn jede ihrer Umordnungen konvergiert.

Beweis: Es wurde schon bewiesen, daß jede Umordnung konvergiert, falls die Reihe absolut konvergent ist. Zum Beweis des Satzes genügt es also zu zeigen, daß man jede konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert, so umordnen kann, daß sie divergiert. Sei also $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe, die nicht absolut konvergiert. Sei

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{a_k + |a_k|}{2} = \begin{cases} a_k\,, & \text{falls} \quad a_k \geq 0 \\ 0\,, & \text{falls} \quad a_k < 0 \end{cases} \\
c_k &= \frac{a_k - |a_k|}{2} = \begin{cases} 0\,, & \text{falls} \quad a_k > 0 \\ a_k\,, & \text{falls} \quad a_k \leq 0\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Es gilt $a_k = b_k + c_k$. Bis auf zusätzliche Nullen sind die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ die „Teilreihen" aller positiven Glieder beziehungsweise aller negativen Glieder von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Da $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(b_k + c_k)$ gilt, und da $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, können die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ nur beide konvergieren oder beide divergieren. Wegen $|a_k| = b_k - c_k$ müssen beide divergieren, weil sonst $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergieren würde, im

Widerspruch zur Annahme.

Da $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ nur aus nichtnegativen Gliedern besteht und divergiert, kann man zu jedem $C > 0$ und zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $m \geq n_0$ finden so daß

$$\sum_{k=n_0}^{m} b_k \geq C$$

gilt, weil sonst $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{k=1}^{n} b_k\}_{n=1}^{\infty}$ nach oben beschränkt wäre, und foglich als monoton wachsende Folge doch konvergieren würde. Ebenso kann zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $m \geq n_0$ gefunden werden mit

$$\sum_{k=n_0}^{m} c_k \leq -C\,.$$

Nun konstruiere ich die umgeordnete Reihe, die divergiert. Sei k_0 die kleinste natürliche Zahl mit

$$\sum_{k=1}^{k_0} b_k \geq 1\,,$$

sei k_1 die kleinste natürliche Zahl mit

$$\sum_{k=1}^{k_0} b_k + \sum_{k=1}^{k_1} c_k \leq -1\,,$$

und sei k_2 die kleinste natürliche Zahl mit

$$\sum_{k=1}^{k_0} b_k + \sum_{k=1}^{k_1} c_k + \sum_{k=k_0+1}^{k_2} b_k \geq 1\,.$$

Durch Fortsetzung des Verfahrens erhält man eine Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k$$

mit

$$d_k = \begin{cases} b_k & , \quad 1 \leq k \leq k_0 \\ c_{k-k_0} & , \quad k_0 + 1 \leq k \leq k_1 + k_0 \\ b_{k-k_1} & , \quad k_1 + k_0 + 1 \leq k \leq k_2 + k_1 + k_0 \\ \vdots & \end{cases}$$

die eine Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist, weil man zusätzliche Nullen weglassen darf, und für die $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} d_k \geq 1$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} d_k \leq -1$, also $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} d_k \neq$

$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n d_k$ gilt. Folglich konvergiert diese Reihe nicht.
Damit ist der Satz bewiesen. ■

Satz (Großer Umordnungssatz)**:** Sei eine Doppelreihe $\sum_{k,\ell=1}^\infty a_{k\ell}$ gegeben. Es existiere eine Zahl M mit

$$\sum_{k,\ell=1}^m |a_{k\ell}| \le M\,, \quad \text{für alle} \quad m\in\mathbb{N}\,.$$

Dann gilt:
1.) Jede Anordnung der Doppelreihe in eine Einfachreihe ist absolut konvergent mit stets gleicher Summe s.
2.) Die Reihen $\sum_{\ell=1}^\infty a_{k\ell}$ und $\sum_{k=1}^\infty a_{k\ell}$ sind absolut konvergent.
3.) Seien $s_k = \sum_{\ell=1}^\infty a_{k\ell}\,,\quad s'_\ell = \sum_{k=1}^\infty a_{k\ell}$. Die beiden Reihen $\sum_{k=1}^\infty s_k$ und $\sum_{\ell=1}^\infty s'_\ell$ sind absolut konvergent mit Grenzwert s.

Bemerkungen:
Beachte, daß 3.) bedeutet:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^\infty\Big(\sum_{\ell=1}^\infty a_{k\ell}\Big) &= \lim_{m\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^m(\lim_{j\to\infty}\sum_{\ell=1}^j a_{k\ell})\Big)\\
&= \lim_{m\to\infty}\Big(\lim_{j\to\infty}(\sum_{k=1}^m\sum_{\ell=1}^j a_{k\ell})\Big) = \lim_{j\to\infty}\Big(\lim_{m\to\infty}(\sum_{\ell=1}^j\sum_{k=1}^m a_{k\ell})\Big)\\
&= \lim_{j\to\infty}\Big(\sum_{\ell=1}^j(\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^m a_{k\ell})\Big) = \sum_{\ell=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty a_{k\ell}\,.
\end{aligned}$$

Also ist 3.) eine Aussage über Vertauschung von Grenzübergängen.

Die Menge $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ist abzählbar, daß heißt es existiert mindestens eine bijektive Abbildung $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (eine sogenannte Abzählung). Dies sieht man, wenn man die Elemente $(k,\ell)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ in der Form eines doppelt unendlichen Schemas anordnet:

$$\begin{matrix}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots\\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots\\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots\\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{matrix}\,.$$

Natürlich ist σ nicht eindeutig bestimmt. Mit 1.) ist genauer gemeint: Für jede Abzählung σ von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ist die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_{\sigma(k)}$ absolut konvergent mit Grenzwert s.

Beweis: 1.) Sei σ eine Abzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei m die größte natürliche Zahl, die in einem der Paare $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ auftritt. Dann ist

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{\sigma(j)}| \leq \sum_{k,\ell=1}^{m} |a_{k\ell}| \leq M .$$

also ist $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma(j)}$ absolut konvergent. Wenn σ' eine zweite Abzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist, dann ist $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma'(j)}$ eine Umordnung von $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma(j)}$ und ist damit absolut konvergent mit derselben Summe.

2.) Für $k, n \in \mathbb{N}$ sei $m = \max(k, n)$. Dann folgt

$$\sum_{\ell=1}^{n} |a_{k\ell}| \leq \sum_{k,\ell=1}^{m} |a_{k\ell}| \leq M ,$$

also ist $\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell}$ absolut konvergent. Ebenso folgt, daß $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k\ell}$ absolut konvergiert.

3.)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} |s_k| &= \sum_{k=1}^{m} |\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell}| = \sum_{k=1}^{m} |\lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} |\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}| \leq \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k\ell}| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k\ell}| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k,\ell=1}^{n} |a_{k\ell}| \leq M ,
\end{aligned}$$

also ist $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$ absolut konvergent. Ebenso folgt, daß $\sum_{k=1}^{\infty} s'_\ell$ absolut konvergiert. Also bleibt zu zeigen, daß die Grenzwerte beider Reihen übereinstimmen. Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Abzählung und sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = s$ gilt und absolut konvergiert, gibt es $\nu \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{\sigma(k)}| < \varepsilon$ für $n \geq \nu$.

Sei μ die größte natürliche Zahl, die in einem der Paare $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ vorkommt. Sei $m, j \geq \mu$. Die Summe $\sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{j} a_{k\ell} - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$ enthält dann nur Glieder $a_{k\ell}$ mit $(k, \ell) \neq \sigma(j)$ für alle $j = 1, \ldots, n$, also folgt

$$|\sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{j} a_{k\ell} - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{\sigma(k)}| < \varepsilon ,$$

folglich

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell}) - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}| &= |\lim_{m\to\infty}\Big(\lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{j} a_{k\ell}\Big) - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}| \\
&= |\lim_{m\to\infty}\Big(\lim_{j\to\infty}\Big[\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{j} a_{k\ell} - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}\Big]\Big)| \\
&\le \lim_{m\to\infty}|\lim_{j\to\infty}\Big[\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{j} a_{k\ell} - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}\Big]| \\
&\le \lim_{m\to\infty}\lim_{j\to\infty}|\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{j} a_{k\ell} - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}| \\
&\le \lim_{m\to\infty}\lim_{j\to\infty}\varepsilon = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $|\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell}) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}| \le \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, resultiert also

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k\ell}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = s\,.$$

Ebenso ergibt sich

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k\ell}\Big) = s\,.$$

Damit ist der Satz bewiesen. ■

Dieser Satz kann auf Produkte von Reihen angewendet werden. Multipliziert man zwei endliche Summen, dann gilt nach dem Distributivgesetz

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\cdot\Big(\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell\Big) = \sum_{k,\ell=1}^{n}(a_k b_\ell)\,.$$

Die Reihenfolge der Summation ist beliebig. Für absolut konvergente Reihen gilt:

Satz: Jedes Produkt zweier absolut konvergenter Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell$ ist absolut konvergent mit stets gleichem Wert:

$$\sum_{k,\ell=1}^{\infty} b_k c_\ell = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\Big)\Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell\Big)\,.$$

Präziser: Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ eine Abzählung, $\sigma(k) = (\sigma_1(k), \sigma_2(k)) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Dann gilt

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_{\sigma_1(k)}\, c_{\sigma_2(k)} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\Big)\cdot\Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell\Big)\,.$$

Beweis: Die Voraussetzungen des großen Umordnungssatzes sind erfüllt mit $a_{k\ell} = b_k c_\ell$, wegen

$$\begin{aligned}
\sum_{k,\ell=1}^{m} |a_{k\ell}| &= \sum_{k,\ell=1}^{m} |b_k c_\ell| = \sum_{k,\ell=1}^{m} |b_k|\,|c_\ell| \\
&= \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{\ell=1}^{m} |b_k|\,|c_\ell| \Big) = \Big(\sum_{k=1}^{m} |b_k| \Big) \Big(\sum_{\ell=1}^{m} |c_\ell| \Big) \\
&\le \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \Big) \Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} |c_\ell| \Big) =: M
\end{aligned}$$

$(*)$ folgt aus Aussage 3.) des großen Umordnungssatzes wegen

$$\begin{aligned}
s_\ell &= \sum_{\ell=1}^{\infty} b_k c_\ell = b_k \Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell \Big), \\
s'_\ell &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k c_\ell = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Big) c_\ell .
\end{aligned}$$

■

Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ die Abzählung nach den Diagonalen

$$\begin{array}{ccccccc}
(0,0) & & (0,1) & & (0,2) & & \dots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
(1,0) & & (1,1) & & (1,2) & & \dots \\
& \swarrow & & \swarrow & & & \\
(2,0) & & (2,1) & & (2,2) & & \dots \\
\vdots & \swarrow & \vdots & & \vdots & &
\end{array}.$$

Benützt man im vorangehenden Satz diese Abzählung, dann erhält man das Cauchy–Produkt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} b_\ell c_{k-\ell} .$$

Also folgt aus diesem Satz:

Satz: Das Cauchysche Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{\ell=0}^{k} b_\ell c_{k-\ell})$ zweier absolut konvergenter Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ ist absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{\ell=0}^{k} b_\ell c_{k-\ell} \Big) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \Big) \Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \Big) .$$

Beispiel: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ absolut. Denn sei k_0 die kleinste natürliche Zahl k mit $k_0 \geq 2|x|$. Dann folgt für $m > k_0$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} \frac{|x|^k}{k!} &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=k_0}^{m} \frac{|x|^k}{k!} \\
&\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=k_0}^{m} \frac{|x|^k}{k_0^{k-k_0+1}} \\
&\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=k_0}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{k_0^k}{k_0^{k-k_0+1}} \\
&\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{|x|^k}{k!} + k_0^{k_0-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k_0} \sum_{k=0}^{m-k_0} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{|x|^k}{k!} + k_0^{k_0-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k_0-1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-k_0+1}\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{|x|^k}{k!} + \left(\frac{k_0}{2}\right)^{k_0-1} =: M
\end{aligned}$$

also ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ absolut konvergent. Aus dem vorangehenden Satz und aus der binomischen Formel folgt somit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^\ell}{\ell!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\sum_{\ell=0}^{k} \Big(\frac{x^\ell}{\ell!} \frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!} \Big) \Big] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell} \Big] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} .
\end{aligned}$$

Definiert man eine Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, dann folgt also

$(*)$ $$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) .$$

Wegen $\exp(0) = 1$ folgt insbesondere für $y = -x$

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1 ,$$

also

$\binom{*}{*}$ $$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} .$$

Seit Leonhard Euler (1707 – 1783) bezeichnet man die Zahl $\exp(1)$ mit e:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Aus $(*)$ folgt durch vollständige Induktion für alle $x \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$, daß

$$\exp(mx) = \big(\exp(x)\big)^m .$$

Für $x = \frac{1}{m}$ ergibt sich hieraus insbesondere, daß $\exp\left(\frac{1}{m}\right)$ die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung

$$y^m = e$$

ist, also ist $\exp(\frac{1}{m}) = e^{1/m}$ und somit $\exp\left(\frac{n}{m}\right) = e^{n/m}$. Hieraus und aus $\binom{*}{*}$ folgt für jedes rationale q

$$\exp(q) = e^q .$$

Also ist es sinnvoll, für jedes reelle $x \in \mathbb{R}$ zu definieren

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} .$$

$(*)$ und $\binom{*}{*}$ lauten dann

$$e^{x+y} = e^x e^y \,, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} .$$

5 c.) Kriterien für absolute Konvergenz

Definition: Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ eine Reihe mit lauter nichtnegativen Gliedern. Sei heißt Majorante für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, wenn sie konvergiert und wenn außerdem

$$|a_k| \leq c_k$$

gilt für alle k . Sei heißt Minorante für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, wenn sie divergiert und wenn

$$|a_k| \geq c_k$$

gilt für alle k .

Satz: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, genau dann wenn sie eine Majorante besitzt, und nicht absolut konvergent, genau dann wenn sie eine Minorante besitzt.

Beweis: Wenn eine Majorante existiert, gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} c_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k \,,$$

also ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ eine Majorante. Also ist die erste Aussage bewiesen. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ eine Minorante. Dann existiert zu jedem M ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \geq \sum_{k=1}^{n} c_k \geq M\,,$$

also ist $\sum_{k=1}^{n} a_k$ nicht absolut konvergent. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergent, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ eine Minorante. ∎

Satz (Wurzelkriterium)**:** Sei $\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = a\,.$
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist

$$\begin{cases} \text{absolut konvergent}\,, & \text{falls} \quad a < 1 \\ \text{divergent}\,, & \text{falls} \quad a > 1\,. \end{cases}$$

(Falls $\sqrt[k]{|a_k|}$ nicht nach oben beschränkt ist, der Limes superior also nicht existiert, ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.)

Beweis: Falls $a < 1$ ist gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq k_0$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \theta = \frac{a+1}{2} < 1\,,$$

also

$$|a_k| \leq \theta^k$$

gilt. Also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \theta^k$ Majorante.

Wenn $a > 1$ ist, dann gibt es unendlich viele k derart, daß $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$, also $|a_k| \geq 1$ ist. Also ist $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ keine Nullfolge, also kann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht konvergent sein. ∎

Satz (Quotientenkriterium)**:**
a.) Für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gelte $a_k \neq 0$ und es sei

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = b\,.$$

Falls $b < 1$ ist, ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.
b.) Für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gelte $a_k \neq 0$ und

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1\,.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Beweis: a.) Sei $b < 1$ und sei $\theta = \frac{b+1}{2} < 1$. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so daß für alle $k \geq k_0$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \theta ,$$

also $a_{k+1} \leq \theta a_k$ gilt. Durch vollständige Induktion folgt hieraus $a_k \leq \theta^{(k-k_0)} a_{k_0}$, also ist $\frac{a_{k_0}}{\theta^{k_0}} \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k$ eine Majorante (eventuell nach Vergrößerung der ersten $k_0 - 1$ Glieder), also konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut, somit ist a.) bewiesen.

b.) Da $|a_{k+1}| \geq |a_k|$ gilt für fast alle k, und da $|a_k| \neq 0$ ist für fast alle k, kann $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ keine Nullfolge sein, also muß $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergieren. ■

Beispiel: $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(\frac{\nu}{\nu+1}\Big)^{\nu^2}$ ist konvergent. Der Beweis kann mit dem Wurzelkriterium geführt werden:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{(\frac{\nu}{\nu+1})^{\nu^2}} &= \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \Big(\frac{\nu}{\nu+1}\Big)^{\nu} \\ = \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{\nu})^{\nu}} &\leq \overline{\lim}_{\nu\to\infty} \frac{1}{1+\nu\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

nach der Bernoullischen Ungleichung.

Dagegen ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\frac{\nu}{\nu+1})^{\nu}$ divergent.

5 d.) g-adische Darstellung der reellen Zahlen

Sei $g \geq 2$ eine gegebene natürliche Zahl. Die ganzen Zahlen a mit $0 \leq a < g$ nennt man g–adische Ziffern. Es sei

$$\sum_{i=\ell}^{\infty} \frac{a_i}{g^i}$$

eine Reihe mit g–adischen Ziffern a_i und einer ganzen Zahl ℓ. Diese Reihe konvergiert, denn die geometrische Reihe $\sum_{i=\ell}^{\infty} \frac{1}{g^{i-1}}$ ist Majorante. Gilt

$$x = \sum_{i=\ell}^{\infty} \frac{a_i}{g^i},$$

dann nennt man diese Reihe g–adische Entwicklung von x oder Darstellung von x als g–adischen Bruch. ($g = 10$: Dezimalbruchentwicklung oder dekadische Entwicklung, $g = 2$: Dualbruchentwicklung oder dyadische Entwicklung.) Weil die Ziffern den g–adischen Bruch eindeutig bestimmen, schreibt man ihn üblicherweise in der Form $a_\ell \ldots a_0, a_1, \ldots$.

Jede reelle Zahl hat eine Darstellung als g–adischen Bruch. Der Einfachheit halber beweise ich dies nur für Zahlen aus dem halboffenen Intervall $[0, 1)$ und lasse die Verallgemeinerung auf alle reellen Zahlen als Übung. Im Beweis benötige ich Eigenschaften von Ausdrücken der Form $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{g^i}$, die ich als n–stellige g–adische Brüche bezeichne. Im folgenden Satz und in den beiden anschließenden technischen Lemmata werden diese n–stelligen Brüche studiert, bevor ich zum Hauptsatz dieses Abschnittes komme.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$M_n = \big\{ \frac{k}{g^n} \mid k = 0, 1, \dots, g^n - 1 \big\}.$$

Satz M_n ist die Menge aller Zahlen $x \in [0, 1)$, die eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{g^i}$ als g–adischen Bruch mit n Stellen haben.

Beweis: Jeder g–adische Bruch mit n Stellen gehört zu M_n. Denn es gilt $x = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{g^i} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i g^{n-i}}{g^n} \in M_n$, wegen

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i g^{n-i} \leq \sum_{i=1}^{n} (g-1) g^{n-1} = (g-1) \sum_{j=0}^{n-1} g^j = (g-1) \frac{g^n - 1}{g - 1} = g^n - 1.$$

Umgekehrt kann auch jedes $x \in M_n$ als g–adischer Bruch mit n Stellen dargestellt werden. Dies beweist man durch Induktion: Für $n = 1$ ist dies klar wegen $M_1 = \{0, \frac{1}{g}, \dots \frac{g-1}{g}\}$. Zum Beweis, daß die Aussage für $n + 1$ richtig ist, wenn sie für n gilt, sei $x \in M_{n+1}$ und

$$y = \max\{z \in M_n \mid z \leq x\}.$$

Dann gehört x zum Intervall $[y, y + \frac{1}{g^n})$, also gilt

$$x \in M_{n+1} \cap \big[y, y + \frac{1}{g^n}\big) = \Big\{ y, y + \frac{1}{g^{n+1}}, \dots, y + \frac{g-1}{g^{n+1}} \Big\},$$

folglich gibt es eine g–adische Ziffer a_{n+1}, so daß $x = y + \frac{a_{n+1}}{g^{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{g^i}$ gilt, wobei $y = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{g^i}$ die nach Voraussetzung mögliche Darstellung von $y \in M_n$ als g–adischer Bruch ist. ∎

Lemma 1 Sei $x = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{g^i} \in M_n$, und für $k \leq n$ sei $x_k = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{g^i}$. Dann gilt

$$x_k \leq x \leq x_k + \frac{1}{g^k} - \frac{1}{g^n}. \tag{5.1}$$

Beweis: Es gilt

$$x_k \leq x = x_k + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{a_i}{g^i} \leq x_k + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{g-1}{g^i} = x_k + \frac{g-1}{g^{k+1}} \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{1}{g^i} = x_k + \frac{1}{g^k} - \frac{1}{g^n},$$

wegen $\sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{1}{g^i} = \big(1 - \frac{1}{g^{n-k}}\big) / \big(1 - \frac{1}{g}\big) = \frac{g}{g-1}\big(1 - \frac{1}{g^{n-k}}\big)$. ∎

Lemma 2 Seien $x = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{g^i}$ und $y = \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{g^i}$ g–adische Brüche mit $m \geq n$. Gehört y

zum Intervall $[x, x+\frac{1}{g^n})$, dann gilt $b_i = a_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Beweis: Angenommen, in der g–adischen Darstellung $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{g^i}$ von x gebe es eine Zahl i mit $a_i \neq b_i$. Sei k die kleinste derartige Zahl. Wäre $a_k > b_k$, dann würde sich mit $y_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i}{g^i}$ und mit (5.1), angewandt auf y, die Ungleichungskette

$$y < y_k + \frac{1}{g^k} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i}{g^i} + \frac{a_k - b_k}{g^k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{g^i} \leq x$$

ergeben. Dies widerspricht der Voraussetzung $x \leq y$, also gilt $a_k \leq b_k$. Wäre $a_k < b_k$, dann würde sich für $x_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{g^i}$ die Ungleichungskette

$$y \geq y_k \geq x_k + \frac{1}{g^k} \geq x + \frac{1}{g^n}$$

ergeben, wobei das dritte Ungleichheitszeichen aus (5.1) folgt. Diese Ungleichungskette widerspricht jedoch der Voraussetzung $y < x + \frac{1}{g^n}$, also muss $a_i = b_i$ für alle $i = 1, \ldots n$ gelten. ∎

Satz Jede Zahl $x \in [0, 1)$ kann als g–adischer Bruch $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{g^i}$ dargestellt werden.

Beweis: Ich konstruiere zunächst eine Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in M_n$, die gegen x konvergiert. Dazu setze

$$z_n = \max \{y \in M_n \mid y \leq x\}.$$

Wegen $M_n \subseteq M_{n+1}$ ist die Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, also gilt

$$z_n \leq z_m \leq x, \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N},\ n \leq m. \tag{5.2}$$

Weil die Elemente von M_n äquidistante Teilpunkte des Intervalls $[0, 1]$ sind, die dieses Intervall in Teilintervalle der Länge $1/g^n$ unterteilen, gilt $|z_n - x| < \frac{1}{g^n}$, woraus $\lim_{n\to\infty} z_n = x$ folgt. Zusammen mit (5.2) folgt hieraus auch, daß für $m \geq n$ die Zahl z_m zum Intervall $[z_n, z_n + \frac{1}{g^n})$ gehört. Nach Lemma 2 bedeutet dies, daß die Ziffern im g–adischen Bruch zu $z_n \in M_n$ mit den ersten n Ziffern im g–adischen Bruch zu $z_m \in M_m$ übereinstimmen. Wenn also $z_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{g^i}$ die g–adische Darstellung von z_m ist, dann ist $z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{g^i}$ die g–adische Darstellung von z_n.

Damit sind die Ziffern a_i eindeutig bestimmt. Mit diesen Ziffern bilde man die unendliche Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{g^i}$. Für die Partialsummen s_n dieser Reihe gilt $s_n = z_n$, also konvergiert die Folge der Partialsummen gegen x, also ist $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{g^i}$ eine Darstellung von x als g–adischer Bruch. ∎

Satz Für $x \in [0, 1) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ ist die Darstellung als g–adischer Bruch eindeutig.

Beweis: Es seien $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{g^i}$ und $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{g^i}$ zwei g–adische Darstellungen von x. Setze $x_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{g^i}$ und $y_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i}{g^i}$. Die Ungleichung (5.1) liefert nach Grenzübergang $n \to \infty$ die Abschätzung

$$x_k \leq x \leq x_k + \frac{1}{g^k}. \tag{5.3}$$

In beiden Ungleichungen in (5.3) kann das Gleichheitszeichen nicht gelten, weil sonst im ersten Fall $x = x_k \in M_k$ und im zweiten Fall $x = x_k + \frac{1}{g^k} \in M_k \cup \{1\}$ folgte, was beidemal der Voraussetzung widerspricht. Also kann in beiden Abschätzungen nur das Ungleichheitszeichen richtig sein. Da die Folge $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ monoton wächst und gegen x konvergiert, schließen wir aus (5.3), daß zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, das größer oder gleich k gewählt werden kann, so daß

$$x_k < y_m \leq x < x_k + \frac{1}{g^k}$$

gilt. Somit gehört y_m zum Intervall $[x_k, x_k + \frac{1}{g^k})$, und dies bedeutet nach Lemma 2, daß $b_i = a_i$ gelten muss für $i = 1, \ldots, k$. Weil k beliebig gewählt werden kann, folgt $b_i = a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. ■

$x \in [0, 1) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ bedeutet, daß x nicht durch einen endlichen g–adischen Bruch dargestellt werden kann. Für $x \in M_n$ ist der obenstehende Eindeutigkeitsbeweis nicht gültig, weil die Gleichheitszeichen in (5.3) nicht ausgeschlossen werden können. Für positive $x \in M_n$ ist die Darstllung durch g–adische Brüche auch nicht eindeutig, weil es dann eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{g^i}$ als endlichen Bruch mit $a_k > 0$ und eine zweite Darstellung als unendlichen periodischen Bruch

$$x = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{g^i} + \frac{a_k - 1}{g^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{g-1}{g^i}$$

gibt, wegen $\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{g-1}{g^i} = \frac{g-1}{g^{k+1}} \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{g})^i = \frac{1}{g^k}$. Die Darstellung durch einen endlichen Bruch ist natürlich auch deswegen nicht eindeutig, weil beliebig viele Nullen an den g–adischen Bruch angehängt werden können ohne den Wert zu ändern.

6 Stetige Funktionen

6 a.) Topologie von $\mathbb{R}$

In Kapitel 2 wurden die Begriffe offenes, abgeschlossenes und halboffenes Intervall eingeführt, in Kapitel 4 die Begriffe Umgebung und Häufungspunkt. Diese Begriffe sollen nun in einen allgemeinen Rahmen gestellt werden.

Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.
(i) $x \in \mathbb{R}$ heißt innerer Punkt von M, wenn es eine Umgebung U von x gibt, die in M enthalten ist.
(ii) $x \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von M, wenn es in jeder Umgebung von x ein $y \in M$ gibt mit $x \neq y$.

Die erste Eigenschaft kann man auch so formulieren: x ist innerer Punkt von M, genau dann wenn M Umgebung von x ist. Ein innerer Punkt von M gehört stets zu M. Ein Häufungspunkt von M braucht dagegen nicht zu M zu gehören. Es wurde schon der Begriff Häufungspunkt einer Folge eingeführt. Man beachte den Unterschied. Ein Häufungspunkt einer Folge braucht nicht Häufungspunkt des Wertebereiches der Folge zu sein. Ein innerer Punkt ist stets Häufungspunkt von M.

Beispiel: Betrachte das Intervall (a, b) mit $a < b$. Dann sind a und b Häufungspunkte, aber keine inneren Punkte. Das Intervall besteht nur aus inneren Punkten. Auch für das Intervall $[a, b]$ sind a, b Häufungspunkte, die diesmal zum Intervall gehören, jedoch sind auch hier a, b keine inneren Punkte.

Jede reelle Zahl x ist Häufungspunkt der Menge $\mathbb{Q}$. Jedoch hat $\mathbb{Q}$ keine inneren Punkte.

Definition: (i) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt offen, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.
(ii) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von M zu M gehört.

Beispiele: Jedes offene Intervall (a, b) ist eine offene Menge. Offene Mengen sind auch $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $(a, b) \cup (c, d)$. Nicht offen sind zum Beispiel $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.
Jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$ ist abgeschlossen (auch die einpunktigen Mengen $[a, a] = \{a\}$ sind abgeschlossen). Abgeschlossen sind auch die Intervalle

$$(-\infty, a], \quad [b, \infty), \quad (-\infty, \infty) = \mathbb{R}, \quad \emptyset,$$

und die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$, dagegen nicht $\mathbb{Q}$, weil jede reelle Zahl Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$ ist.

Satz: Eine Menge M ist genau dann abgeschlossen, wenn ihre Komplementärmenge offen ist.

Beweis: Sei M abgeschlossen, und sei $x \in \mathbb{R}\backslash M$. Dann ist x nicht Häufungspunkt von M, also existiert eine Umgebung U von x mit $U \cap M = \emptyset$, also $U \subseteq \mathbb{R}\backslash M$, also ist x innerer Punkt von $\mathbb{R}\backslash M$, also ist $\mathbb{R}\backslash M$ offen. Sei umgekehrt $\mathbb{R}\backslash M$ offen, und sei x Häufungspunkt von M. Dann gibt es in jeder Umgebung von x ein Element aus M, also ist x kein innerer Punkt von $\mathbb{R}\backslash M$, also gilt $x \notin \mathbb{R}\backslash M$, da $\mathbb{R}\backslash M$ nur aus inneren Punkten besteht, also $x \in M$, also ist M abgeschlossen. ∎

Satz: Die Vereinigung eines beliebigen Systems offener Mengen ist eine offene Menge. Der Durchschnitt eines endlichen Systems offener Mengen ist eine offene Menge. Der Durchschnitt eines beliebigen Systems abgeschlossener Mengen ist eine abgeschlossene Menge. Die Vereinigung eines endlichen Systems abgeschlossener Mengen ist eine abgeschlossene Menge.

Beweis: Sei S ein System offener Mengen, und sei $x \in \bigcup_{M \in S} M$. Dann gibt es $N \in S$ mit $x \in N$. Da N offen ist, gibt es eine Umgebung U von x, die ganz zu N gehört, also auch zu $\bigcup_{M \in S} M$, also ist diese Menge offen.

Seien $M_1, \ldots, M_n$ offene Mengen, und sei $x \in \bigcap_{i=1}^n M_i$. Dann gilt $x \in M_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, und da M_i offen ist, gibt es $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, mit $U_{\varepsilon_i}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| < \varepsilon_i\} \subseteq M_i$. Sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Es gilt $\varepsilon > 0$, und $U_\varepsilon(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_{\varepsilon_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^n M_i$, also ist $\bigcap_{i=1}^n M_i$ offen.

Die Aussagen über die abgeschlossenen Mengen folgen aus den de Morganschen Regeln

$$\mathbb{R}\backslash\Big(\bigcap_{M \in S} M\Big) = \bigcup_{M \in S} (\mathbb{R}\backslash M)\,, \quad \mathbb{R}\backslash\Big(\bigcup_{M \in S} M\Big) = \bigcap_{M \in S} (\mathbb{R}\backslash M)\,,$$

und aus dem vorangehenden Satz. ∎

Beachte, daß der Durchschnitt eines unendlichen Systems offener Mengen nicht offen zu sein braucht, und die Vereinigung eines unendlichen Systems abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen zu sein braucht.

Beispiele:

$$\begin{aligned}\bigcap_{a>0}(-a,a) &= \{0\}\\ \bigcup_{0<a<1}[0,a] &= [0,1)\,.\end{aligned}$$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Betrachte die Menge S aller abgeschlossener Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $M \subseteq A$. Es gibt mindestens eine solche Menge, nämlich $\mathbb{R}$. Also ist $S \neq \emptyset$, also ist $\overline{M} = \bigcap_{A\in S} A \supseteq M$, und $\overline{M}$ ist eine abgeschlossene Menge.

Definition: $\overline{M}$ heißt die abgeschlossene Hülle von M.

Satz: $\overline{M}$ besteht aus den Punkten von M und aus allen Häufungspunkten von M.

Beweis: Da $M \subseteq \overline{M}$ gilt, muß $\overline{M}$ mindestens aus den im Satz angegebenen Punkten bestehen, weil $\overline{M}$ sonst nicht abgeschlossen wäre. (Ein Häufungspunkt von M muß auch Häufungspunkt von $\overline{M}$ sein wegen $M \subseteq \overline{M}$.)

Sei umgekehrt $x \notin M$, und sei x kein Häufungspunkt von M. Dann ist x innerer Punkt von $\mathbb{R} \setminus M$, also existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus M$, also $U_\varepsilon(x) \cap M = \emptyset$. Da $U_\varepsilon(x)$ offen ist, ist $\mathbb{R} \setminus U_\varepsilon(x)$ abgeschlossen, also folgt aus $M \subseteq \mathbb{R} \setminus U_\varepsilon(x)$ daß auch $\overline{M} \subseteq \mathbb{R} \setminus U_\varepsilon(x)$ gelten muß, folglich ist $x \notin \overline{M}$. ■

Definition: (i) x heißt Berührungspunkt von $M \subseteq \mathbb{R}$, wenn in jeder Umgebung U von x ein $y \in M$ liegt.
(ii) x heißt isolierter Punkt von M, wenn $x \in M$ und wenn eine Umgebung U von x existiert, die außer x keine weiteren Punkte von M enthält.
(iii) x heißt Randpunkt von M, wenn in jeder Umgebung U von x ein $y \in M$ und ein $z \in \mathbb{R} \setminus M$ liegen.

Ähnlich wie für Folgen gilt:

Satz: a ist Häufungspunkt einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ genau dann, wenn es eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ von lauter verschiedenen Zahlen $x_n \in M$ gibt, die gegen a konvergiert.

Beweis: Übung

Satz von Bolzano und Weierstraß für Mengen: Jede beschränkte unendliche Zahlenmenge M besitzt wenigstens einen Häufungspunkt.

Beweis: Da M unendlich ist, gibt es eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ aus lauter verschiedenen Zahlen $x_n \in M$. Nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß für Folgen besitzt die beschränkte

Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ einen Häufungspunkt a (im Sinne von Folgen). Außerdem besitzt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Teilfolge, die gegen a konvergiert. Nach dem vorangehenden Satz ist dann a auch Häufungspunkt von M (im Sinne von Zahlenmengen). ■

Definition: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt kompakt, genau dann wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiele: Abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ $(a, b \neq \infty)$ und alle endlichen Mengen sind kompakt. Eine endliche Vereinigung kompakter Mengen ist wieder kompakt. Nicht kompakt ist $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, aber kompakt ist $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Satz: Eine nichtleere kompakte Menge besitzt ein Minimum und ein Maximum.

Beweis: Da M beschränkt ist, existieren $s = \sup M$ und $u = \inf M$. Es muß gezeigt werden, daß $s, u \in M$ gilt. Für das Supremum s gilt entweder $s \in M$, oder s ist Häufungspunkt von M. Für kompakte Mengen gehört also s immer zu M. Genauso folgt dies für das Infimum u. ■

Als Folgerung aus dem Satz von Bolzano und Weierstraß gilt:

Satz: Jede unendliche Teilmenge einer kompakten Menge M gesitzt einen Häufungspunkt in M.

Die folgenden beiden Sätze geben Charakterisierungen kompakter Mengen:

Satz: Eine Menge M ist genau dann kompakt, wenn jede Folge mit Werten in M eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M besitzt.

Beweis: Aus dem vorangehenden folgt, daß eine kompakte Menge diese Eigenschaft besitzt. Also muß bewiesen werden, daß M kompakt ist, wenn jede Folge eine in M konvergente Teilfolge hat. Zunächst ist klar, daß dann M beschränkt sein muß. Denn sonst gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$ mit $|x_n| > n$. Für die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ könnte keine Teilfolge konvergieren. Denn für die Teilfolge $\{x_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ muß gelten $n_m \geq m$, also $|x_{n_m}| > m$, also ist jede Teilfolge unbeschränkt.

Außerdem muß M abgeschlossen sein. Denn sei x Häufungspunkt von M. Nach einem der vorangehenden Sätzen gibt es dann eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in M, die gegen x konvergiert. Diese Folge besitzt eine Teilfolge, die gegen ein $y \in M$ konvergiert. Da aber $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ schon gegen x konvergiert, konvergiert also auch jede Teilfolge gegen x, also $x = y \in M$, somit ist M abgeschlossen. ■

Ich komme nun zur zweiten Charakterisierung. Dazu benötige ich die folgende Definition:

Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Ein System $\mathcal{U}$ offener Teilmengen von $\mathbb{R}$ heißt offene Überdeckung von M, wenn $M \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ gilt.

Satz: (Heine–Borelsche Überdeckungseigenschaft) Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn man aus jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von M endlich viele Mengen $U_1, \ldots, U_n$ auswählen kann, die bereits zur Überdeckung von M ausreichen:

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i\,.$$

(Eduard Heine 1821–1881, Émile Borel 1871–1956)

Beweis: Sei M kompakt. Angenommen, M hätte nicht die Heine – Borelsche Überdeckungseigenschaft. Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung, aus der nicht endlich viele Mengen zur Überdeckung von M ausgewählt werden können. Da M beschränkt ist, existieren $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ mit $M \subseteq [a_1, b_1] =: J_1$. Sei $m = \frac{a_1+b_1}{2}$. Nach Annahme sind wenigstens zur Überdeckung einer der beiden Mengen $[a_1, m] \cap M$ und $[m, b_1] \cap M$ unendlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ notwendig, weil sonst M doch durch endlich viele überdeckt werden könnte. Wähle das entsprechende Intervall $[a, m]$ oder $[m, b]$ aus und bezeichne es mit J_2. Nun halbiere das Intervall J_2 und fahre mit der Konstruktion fort. Dies ergibt eine Folge $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Intervallen $J_n = [a_n, b_n]$ mit

$$J_1 \supseteq J_2 \supseteq J_3 \supseteq \ldots$$

und mit $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$, so daß zur Überdeckung jeder Menge $M \cap J_n$ unendlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ notwendig sind. Oben wurde bewiesen, daß es für diese Intervallschachtelung genau ein $s \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ gibt. Es gilt $s \in M$, weil jede der Mengen $J_n \cap M$ unendlich viele Elemente der Menge M enthält, also s Häufungspunkt von M ist, folglich zu M gehört. Also gibt es eine offene Menge $U \in \mathcal{U}$ mit $s \in U$. Als offene Menge enthält U eine ε–Umgebung $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ von s. Da die Intervallfolge $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ sich auf s zusammenzieht, gibt es ein Intervall $J_{n_0} = [a_{n_0}, b_{n_0}]$ mit $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$. Aus $s \in J_{n_0}$ folgt für alle $x \in J_{n_0}$, daß $|x - s| \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$ gilt, also gehört x zu $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$, und folglich gilt $J_{n_0} \subseteq (s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subseteq U$. Somit genügt zur Überdeckung von $M \cap J_{n_0}$ im Widerspruch zur Konstruktion nur eine einzige Menge U aus $\mathcal{U}$, also muß die kompakte Menge M doch die Heine–Borelsche Überdeckungseigenschaft haben.

Umgekehrt habe M die Heine–Borelsche Überdeckungseigenschaft. Zu zeigen ist, daß M kompakt ist. Dazu beachte man, daß das System

$$\mathcal{U} = \{U_1(x) \mid x \in M\}$$

aller 1–Umgebungen eine offene Überdeckung von M ist. Nach der Heine–Borel Eigenschaft genügen bereits endlich viele dieser Umgebungen zu Überdeckung von M, also ist M in der Vereinigung von endlich vielen beschränkten Mengen enthalten, also ist M selbst beschränkt. Wäre M nicht abgeschlossen, dann würde es einen Häufungspunkt a von M geben mit $a \notin M$. Dann würde die folgende offene Überdeckung von M nicht die Heine–Borelsche Überdeckungseigenschaft haben:

Für $x \in M$ setze $\varepsilon(x) := \frac{1}{2}|x-a| > 0$. Die Menge $\mathcal{U} = \{U_{\varepsilon(x)}(x) \mid x \in M\}$ ist eine offene Überdeckung von M, aber zur Überdeckung von M reichen nicht endlich viele Umgebungen $U_{\varepsilon(x_1)}(x_1), \ldots, U_{\varepsilon(x_n)}(x_n)$ aus. Denn setze

$$\varepsilon := \min\{\varepsilon(x_1), \ldots, \varepsilon(x_n)\} > 0 .$$

Dann gilt

$$U_\varepsilon(a) \cap U_{\varepsilon(x_i)}(x_i) = \emptyset ,$$

für alle $i = 1, \ldots, n$, aber es gibt $x \in M$ mit $x \in U_\varepsilon(a)$, weil a Häufungspunkt von M ist, also ist M nicht Teilmenge von $\bigcup_{i=1}^n U_{\varepsilon(x_i)}(x_i)$. Damit also M die Heine–Borel Eigenschaft haben kann, muß M abgeschlossen sein. ∎

6 b.) Stetigkeit von Funktionen

Bei sehr vielen Funktionen, die in der Mathematik und ihren Anwendungen vorkommen, ändert sich der Funktionswert nur wenig, wenn man das Argument der Funktion nur wenig ändert. Diese Funktionen nennt man stetige Funktionen. Genau werden stetige Funktionen folgendermaßen definiert:

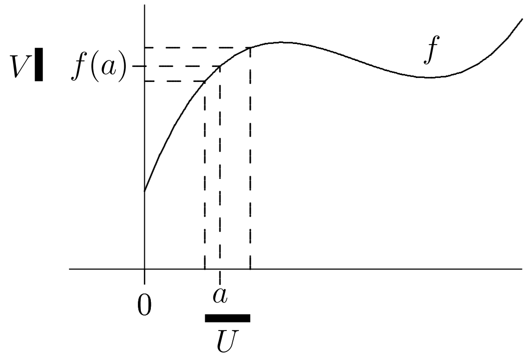
Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $a \in D$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so daß für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Mit Quantoren:

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{\delta>0} \quad \forall_{\substack{x\in D \\ |x-a|<\delta}} \quad : \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Äquivalent dazu ist folgende Definition:

Definition: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $a \in D$, wenn zu jeder Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung U von a existiert so daß gilt $f(U \cap D) \subseteq V$.



Beispiele: 1.) Die identische Abbildung $(x \mapsto \mathrm{id}\,(x) = x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta = \varepsilon$. Dann folgt trivialerweise für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$

$$|\,\mathrm{id}\,(x) - \mathrm{id}\,(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon\,.$$

2.) Die Quadratwurzelfunktion $Q : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto Q(x) = \sqrt{x}\,,$$

ist in jedem $a \in \mathbb{R}_0^+$ stetig.

Beweis: Zunächst sei $a = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta = \varepsilon^2 > 0$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ mit $|x - a| = x < \delta$ daß gilt

$$|Q(x) - Q(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon\,,$$

wegen der strengen Monotonie der Quadratwurzel.

Sei $a > 0$ und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Um $\delta > 0$ zu finden, betrachte man folgende Rechnung

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\,.$$

Hieraus folgt, daß $\delta = \sqrt{a} \cdot \varepsilon$ gewählt werden kann. Denn für $x \in \mathbb{R}_0^+$ und $|x - a| < \delta$ folgt dann

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \le \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\varepsilon = \varepsilon\,.$$

3.) Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{für irrationales } x \\[2ex] \dfrac{1}{p+q}\,, & \text{für } x = \dfrac{p}{q} \text{ mit teilerfremden Zahlen } p, q \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Dann ist f unstetig in jedem rationalen $x > 0$, aber stetig in jedem irrationalen $x > 0$.

Denn sei $x = \frac{p}{q}$ rational. Um zu zeigen, daß f in x unstetig ist muß man zeigen, daß die Aussage in der Stetigkeitsdefinition falsch ist für rationales x, also daß die Negation dieser Aussage wahr ist. Diese Negation lautet

$$(*) \qquad \exists_{\varepsilon>0} \quad \forall_{\delta>0} \quad \exists_{\substack{y\in\mathbb{R}^+ \\ |y-x|<\delta}} \quad : \quad |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon \,.$$

Es gilt $f(x) = \frac{1}{p+q} > 0$. Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{1}{p+q} > 0$. Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ noch eine irrationale Zahl y mit $x < y < x + \delta$, also mit $|x - y| < \delta$, weil zwischen zwei reellen Zahlen immer noch eine irrationale liegt. Für dieses y gilt

$$|f(x) - f(y)| = |\frac{1}{p+q} - 0| = \frac{1}{p+q} = 2\varepsilon > \varepsilon \,,$$

also ist $(*)$ wahr, und die Funktion f kann in rationalem x nicht stetig sein.
Sei nun x irrational. Dann ist $f(x) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Gesucht ist $\delta > 0$. Es gibt höchstens endlich viele Paare (p, q) natürlicher Zahlen mit $p + q \leq \frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{p+q} \geq \varepsilon$.

Sei

$$\delta = \frac{1}{2} \min \left\{ |\frac{p}{q} - x| \;\Big|\; \frac{1}{p+q} \geq \varepsilon \right\} > 0 \,,$$

oder $\delta = 1$, falls es kein solches Paar gibt. Für alle rationalen $y = \frac{p}{q}$ mit $|y - x| < \delta$ gilt also

$$|f(x) - f(y)| = f(y) = \frac{1}{p+q} < \varepsilon \,.$$

Für alle irrationalen y mit $|x - y| < \delta$ gilt sowieso $|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon$, also ist f stetig in irrationalem x.

4.) Die Dirchlet–Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q} \\ 0\,, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\,, \end{cases}$$

ist natürlich in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig.

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Satz: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in $a \in D$ stetig genau dann, wenn für jede Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(a)\,.$$

(Insbesondere bedeutet dies, daß für stetige Funktionen das Funktionssymbol mit dem Grenzwertsymbol vertauscht werden darf.)

Beweis: Sei f in $a \in D$ stetig, und sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $x_n \in D$ und mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Es muss gezeigt werden, dass $\{f(x_n)\}$ gegen $f(a)$ konvergiert. Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Zu zeigen ist, daß $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dazu verwende man, dass weil f in a stetig ist, ein $\delta > 0$ existiert mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $|x - a| < \delta$. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \delta$ für alle $n \geq n_0$, also

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon\,, \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0\,.$$

Sei umgekehrt f in $a \in D$ nicht stetig. Zu zeigen ist, daß es dann eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ gibt mit $x_n \in D$ und mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, für die aber $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ nicht gegen $f(a)$ konvergiert. Dazu verwende man, daß weil f nicht stetig ist in a, die Aussage

$$\exists_{\varepsilon>0} \quad \forall_{\delta>0} \quad \exists_{\substack{x\in D \\ |x-a|<\delta}} \quad : \quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$

gilt. Also gibt es $\varepsilon > 0$, so daß man für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu $\delta = \frac{1}{n}$ ein x_n mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ und mit $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ finden kann. Die so konstruierte Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen a wegen

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}\,,$$

aber wegen $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ nicht gegen $f(a)$. ∎

Folgerung: Alle rationalen Funktionen sind stetig.

Beweis: Sei $F : D \to \mathbb{R}$ rationale Funktion. Es wurde gezeigt daß $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(\lim_{n\to\infty} x_n)$ gilt für alle $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n \in D$. Also ist F in ganz D stetig nach dem vorangehenden Satz. ∎

Im nächsten Satz und auch später benötigen wir die folgende einfache, aber wichtige Eigenschaft von stetigen Funktionen.

Lemma Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ stetig und sei $y \in \mathbb{R}$. Gilt $f(a) > y$ (beziehungsweise $f(a) < y$), dann gibt es eine Umgebung U von a mit $f(x) > y$ (beziehungsweise $f(x) < y$) für alle $x \in U \cap D$. Ist $f(a) \neq 0$, dann gibt es eine Umgebung U von a mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in U \cap D$.

Beweis: Gilt $f(a) > y$, dann gibt es zu $\varepsilon = f(a) - y > 0$ eine Zahl $\delta > 0$, so daß $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ist für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$. Für die Umgebung $U = U_\delta(a) =$

$(a-\delta, a+\delta)$ und für $x \in U \cap D$ ergibt sich also

$$f(x) = f(x) - f(a) + f(a) \geq f(a) - |f(x) - f(a)| > f(a) - (f(a) - y) = y.$$

Ist $f(a) < y$, dann ist die Funktion $-f$ größer als $-y$ in einer Umgebung von a, also ist f kleiner als y in dieser Umgebung. Damit ist die erste Behauptung im Lemma bewiesen. Die zweite Behauptung folgt aus der ersten. ■

Satz: Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ stetig. Dann sind auch die in D erklärten Funktionen

$$f+g\,, \quad cf \quad (c \in \mathbb{R})\,, \quad f \cdot g, \quad |f|$$

an der Stelle $a \in D$ stetig.

Gilt $f(a) \neq 0$, dann ist auch die Funktion $\frac{1}{f}$ an der Stelle a stetig.

Beachte, daß $\frac{1}{f}$ auf der Menge $D' = \{x \mid x \in D \text{ und } f(x) \neq 0\}$ erklärt ist. Wenn $f(a) \neq 0$ ist, gibt es nach dem vorangehenden Lemma eine Umgebung U von a, so daß die gesamte Menge $U \cap D$ zum Definitionsbereich von $\frac{1}{f}$ gehört.

Beweis des Satzes: Für jede Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in D$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)\,, \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a)\,,$ also gilt auch

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \Big(f(x_n) + g(x_n)\Big) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)\,, \\ \lim_{n\to\infty} (cf)(x_n) &= c \lim_{n\to\infty} f(x_n) = (cf)(a)\,, \end{aligned}$$

also sind $f+g$ und cf stetig. Ebenso folgt dies für $f \cdot g$ und $|f|$. Wenn $f(a) \neq 0$ ist, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(x_n) \neq 0$ für $n \geq n_0$. Die Folge $\{\frac{1}{f(x_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert dann gegen $\frac{1}{f(a)}$, also ist auch $\frac{1}{f}$ stetig. ■

Folgerung: Die Menge aller Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, die an der Stelle $a \in D$ stetig sind, ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ebenso ist die Menge $C(D)$ aller in D stetigen Funktionen ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Satz: Seien $f : D_1 \to \mathbb{R}\,, g : D_2 \to \mathbb{R}\,(D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R})$ und sei $g \circ f$ definiert. Sei f an der Stelle $a \in D_1$ stetig und g an der Stelle $b = f(a)$. Dann ist $g \circ f$ an der Stelle a stetig.

Beweis: Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $x_n \in D_1$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \in D_2$ und $f(x_n) \in D_2$, also auch $\lim_{n\to\infty}(g \circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$, also ist $g \circ f$ an der Stelle a stetig. ■

6 c.) Abbildungseigenschaften stetiger Funktionen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann braucht $f(D)$ nicht offen zu sein.

Beispiel: $x \mapsto x^2$ bildet das offene Intervall $(-1, 1)$ auf das halboffene Intervall $[0, 1)$ ab.

Wenn D abgeschlossen ist, muß $f(D)$ nicht abgeschlossen sein.

Beispiel: $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ bildet $\mathbb{R}$ auf $(0, 1]$ ab.

Es gilt jedoch:

Satz: Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $f(D)$ kompakt.

Beweis: Ich zeige, daß mit D auch $f(D)$ die Heine – Borel Überdeckungseigenschaft hat. Dazu sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von $f(D)$. Es muß gezeigt werden, daß bereits endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ genügen um $f(D)$ zu überdecken.

Zur Konstruktion dieser endlich vielen Mengen sei $x \in D$ beliebig gewählt. Wegen $f(D) \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ gibt es eine Menge $U_x \in \mathcal{U}$ mit $f(x) \in U_x$. Weil U_x offen ist, ist U_x eine Umgebung von $f(x)$, also gibt es wegen der Stetigkeit von f eine Umgebung $V(x)$ von x mit $f(D \cap V(x)) \subseteq U_x$. Die Umgebung $V(x)$ kann offen gewählt werden. Dann ist $\{V(x)\}_{x \in D}$ eine offene Überdeckung von D, also reichen wegen der Kompaktheit von D bereits endlich viele Umgebungen $V(x_1), \ldots, V(x_n)$ zur Überdeckung von D aus. Dann gilt auch $D = \big(V(x_1) \cap D\big) \cup \ldots \cup \big(V(x_n) \cap D\big)$, folglich ergibt sich

$$\begin{aligned} f(D) = f\Big(\big(V(x_1) \cap D\big) \cup \ldots \cup \big(V(x_n) \cap D\big)\Big) \\ = f\big(V(x_1) \cap D\big) \cup \ldots \cup f\big(V(x_n) \cap D\big) \subseteq U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n} . \end{aligned}$$

Also hat $f(D)$ die Heine – Borel Eigenschaft, also is $f(D)$ kompakt. ∎

Folgerung: Ist $D \neq \emptyset$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, dann nimmt f das Minimum und das Maximum in D an, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in D$ mit $f(x_1) = \min f(D)$ und $f(x_2) = \max f(D)$.

Beweis: klar, weil $f(D) \neq \emptyset$ Minimum und Maximum besitzt als kompakte Menge. ∎

Die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion muß nicht stetig sein. Es gilt aber

Satz: Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig. Dann ist auch

$$f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$$

stetig.

Beweis: Ich nehme an, f^{-1} sei in $b \in f(D)$ nicht stetig. Dann gibt es eine Folge $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $y_n \in f(D)$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, so daß $\{x_n = f^{-1}(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ nicht gegen $a := f^{-1}(b)$ konvergiert. Die Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist beschränkt und besitzt daher Häufungspunkte, nach dem Satz von Bolzano und Weierstraß. Es gibt mindestens einen Häufungspunkt $a' \in D$ mit $a' \neq a$, denn sonst wäre

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a\,,$$

also $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, im Widerspruch zur Annahme. Sei $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ eine Teilfolge von $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, die gegen a' konvergiert. Wegen der Stetigkeit von f folgt dann

$$f(a') = f(\lim_{j\to\infty} x_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} y_{n_j} = b\,,$$

also $a' = f^{-1}(b) = a$, im Widerspruch zur Annahme $a \neq a'$. Also muß f^{-1} in jedem Punkt $b \in f(D)$ stetig sein. ■

Satz (Zwischenwertsatz): Seien $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu jeder Zahl y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein z mit $a < z < b$, so daß $f(z) = y$ gilt.

Anders formuliert: Gilt $f(a) \le f(b)$ (beziehungsweise $f(b) \le f(a)$), dann gehört das Intervall $[f(a), f(b)]$ (beziehungsweise $[f(b), f(a)]$) zum Wertebereich von f.

Beweis: Für $f(a) = f(b)$ ist nichts zu zeigen. Sei also zuerst $f(a) < f(b)$ und $f(a) < y < f(b)$. Um ein Urbild z von y zu konstruieren, setze $M_y = \{x \mid f(x) \le y,\ a \le x \le b\}$. Diese Menge ist durch b nach oben beschränkt und nicht leer wegen $a \in M_y$. Also existiert das Supremum $z = \sup M_y$. Wir zeigen, dass $f(z) = y$ gilt und somit z ein Urbild von y ist. Dazu schließen wir die Fälle

1.) $f(z) > y$,

2.) $f(z) < y$.

aus. Falls $f(z) > y$ zuträfe, dann würde nach einem Lemma aus Kapitel 6 b.) eine Umgebung U von z existieren mit $f(x) > y$ für alle $x \in U \cap [a, b]$. Nach der in Kapitel 2 e.) bewiesenen charakteristischen Eigenschaft des Supremums enthält jede Umgebung von z einen Punkt von M_y, also gibt es einen Punkt $x \in U \cap M_y$. Dieser Punkt erfüllt $f(x) > y$, weil $x \in U$ gilt, und $f(x) \le y$, weil $x \in M_y$ gilt, was unmöglich ist. Also muß $f(z) \le y$ richtig sein. Falls $f(z) < y$ zuträfe, gäbe es eine Umgebung U von z mit $f(x) < y$ für alle $x \in U \cap [a, b]$, woraus $(U \cap [a, b]) \subseteq M_y$ folgte. Wegen $z < b$ gibt es einen Punkt $x \in U \cap [a, b]$ mit $z < x$. Weil $x \in M_y$ gilt, kann z nicht obere Schranke von M_y sein, was der Konstruktion von z als Supremum von M_y widerspricht. Also muss die Gleichung $f(z) = y$ richtig sein.

Falls schließlich $f(a) > f(b)$ gilt, wende man das vorangehende Resultat auf die Funktion $-f$ an. ■

Folgerung: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besteht der Wertebereich der Potenzfunktion $x \mapsto f_n(x) := x^n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ aus dem Intervall $[0, \infty)$.

Dieses Ergebnis wurde bereits in Kapitel 3 e.) zur Konstruktion der n–ten Wurzel verwendet.

Beweis: Da f_n stetig ist und $f_n(0) = 0$ gilt, gehört für jede natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ das Intervall $[f_n(0), f_n(m)] = [0, f_n(m)]$ zum Wertebereich $W(f_n)$. Da f_n monoton wachsend und unbeschränkt ist, gibt es zu jedem $x \in [0, \infty)$ eine natürliche Zahl m mit $x \in [0, f_n(m)]$, folglich gilt $[0, \infty) \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} [0, f_n(m)] = W(f_n)$. ■

Folgerung: Ist f in $[a, b]$ stetig und gilt $f(a) \cdot f(b) < 0$, dann besitzt f eine Nullstelle. Insbesondere besitzen alle ganzrationalen Funktionen mit ungeradem Grad mindestens eine Nullstelle.

Beweis: Sei zum Beispiel $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Dann gilt $0 \in [f(a), f(b)]$, also folgt die erste Behauptung aus dem Zwischenwertsatz.

Es sei

$$p(x) = a_{2n+1}\, x^{2n+1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ein Polynom ungeraden Grades mit $a_{2n+1} > 0$. Dann gilt

$$p(x) = x^{2n+1} \Big[a_{2n+1} + \frac{a_{2n}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \Big] .$$

Für genügend große $|x|$ ist

$$a_{2n+1} + \frac{a_{2n}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^{2n+1}} > 0 ,$$

also ist $p(x) > 0$ für genügend große $x > 0$, und $p(x) < 0$ für genügend kleine $x < 0$, also hat p eine Nullstelle. ■

Satz: Das stetige Bild eines kompakten Intervalls ist ein kompaktes Intervall.

Beweis: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Weil die Bildmenge $f([a, b])$ kompakt ist, existieren $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) = c = \min f([a, b])$ und $f(x_2) = d = \max f([a, b])$. Natürlich gilt

$$f\big([a, b]\big) \subseteq [c, d] .$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt

$$[c,d] \subseteq f\big([a,b]\big)\,,$$

also

$$[c,d] = f\big([a,b]\big)\,.$$

■

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Dann ist f streng monoton in $[a,b]$.

Eine in einem Intervall definierte stetige Funktion ist also genau dann injektiv, wenn sie streng monoton ist.

Beweis: Es gilt entweder $f(a) < f(b)$ oder $f(a) > f(b)$. Wir betrachten den ersten Fall und zeigen zunächst, daß das Minimum von f an der Stelle a angenommen wird. Würde das Minimum an der Stelle $x > a$ angenommen, dann müßte wegen der Injektivität von f für das Minimum $f(x) < f(a) < f(b)$ gelten. Nach dem Zwischenwertsatz gäbe es somit $y \in (x,b)$ mit $f(y) = f(a)$, also könnte f nicht injektiv sein. Ebenso folgt, daß das Maximum von f an der Stelle b angenommen wird.

Wäre f nicht streng monoton wachsend, gäbe es $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) > f(x_2)$. Wegen

$$f(a) < f(x_2) < f(x_1)$$

müßte es dann im Intervall (a, x_1) ein y geben mit $f(y) = f(x_2)$, also wäre f nicht injektiv, also muß f doch streng monoton wachsend sein. Der Beweis im Fall $f(a) > f(b)$ verläuft analog. ■

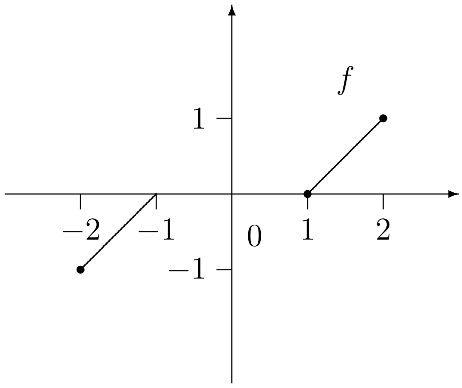
Satz: Sei D offen und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Dann ist $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Sei $y \in f(D)$, und sei U eine Umgebung von $x = f^{-1}(y)$. Da D offen ist, kann man $U \subseteq D$ voraussetzen. Sei $[a,b] \subseteq U$ ein abgeschlossenes Intervall, das x als inneren Punkt enthält. Da f stetig und injektiv, also streng monoton auf $[a,b]$ ist, wird $[a,b]$ durch f auf ein Intervall abgebildet, das $y = f(x)$ als inneren Punkt enthält. Sei V eine Umgebung von y, die in diesem Intervall enthalten ist. Dann gilt $f^{-1}(V) \subseteq U$, also ist f^{-1} stetig in jedem beliebigen $y \in f(D)$. ■

In diesem Satz kann die Voraussetzung, dass D offen sei, nicht weggelassen werden. Dies zeigt das folgende Beispiel.

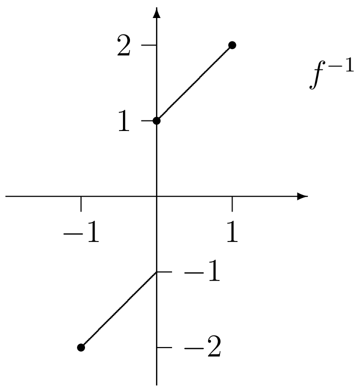
Beispiel Es sei $D = [-2, -1) \cup [1, 2]$. Die stetige, streng monoton wachsende Funktion $f : D \to [-1, 1]$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x + 1\,, & \text{für } x \in [-2, -1) \\ x - 1\,, & \text{für } x \in [1, 2]. \end{cases}$$



Die Inverse $f^{-1} : [-1, 1] \to D$ ist

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1\,, & \text{für } x \in [-1, 0) \\ x + 1\,, & \text{für } x \in [0, 1]\,. \end{cases}$$



f^{-1} ist nicht stetig.

6 d.) Grenzwerte von Funktionen, gleichmäßige Stetigkeit

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, und sei a ein Häufungspunkt von D, der nicht zu D gehört. Wann kann f zu einer stetigen Funktion auf $D \cup \{a\}$ fortgesetzt werden? Zu dieser Frage betrachte man folgende drei Beispiele: Es seien $a = 0$, $D = [-1, 0) \cup (0, 1]$ und

1.) $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{|x|}\,,$

2.) $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{|x|}\,,$

3.) $x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$.

Alle drei Funktionen sind auf D stetig, aber in den Fällen 1.) und 2.) existiert keine stetige Funktion $g : D \cup \{a\} = [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $g|_D = f$. Im ersten Fall ist dies sofort klar, weil $[-1,1]$ kompakt ist, also g beschränkt sein müßte, also auch f . Im zweiten Fall sieht man dies folgendermaßen: Wenn g existierte, müßte für alle Folgen $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ wegen $g(x_n) = f(x_n)$ auch

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a)$$

gelten. Das zweite Beispiel erfüllt diese Bedingung nicht, denn für $\{(-1)^n \frac{1}{n}\}_{n=1}^\infty$ gilt $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{1}{n} = 0$, aber $\{f((-1)^n \frac{1}{n})\}_{n=1}^\infty = \{(-1)^n\}_{n=1}^\infty$ konvergiert nicht.

Lemma: Sei a ein Häufungspunkt von D und $f : D \to \mathbb{R}$. Falls für alle Folgen $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ die Bildfolgen $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ konvergieren, dann konvergieren alle Bildfolgen gegen denselben Grenzwert.

Beweis: Sind $\{x'_n\}_{n=1}^\infty$ und $\{x''_n\}_{n=1}^\infty$ Folgen mit $x'_n, x''_n \in D$ und mit $\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x''_n = a$, dann konvergiert auch die Folge $\{x_n\}_{n=1}^\infty = \{x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, x'_3, x''_3, \ldots\}$ gegen a, und folglich konvergiert die Bildfolge $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$. Diese Folge enthält die Teilfolgen $\{f(x'_n)\}_{n=1}^\infty$ und $\{f(x''_n)\}_{n=1}^\infty$, die daher beide gegen den Grenzwert von $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ konvergieren müssen. Also müssen die Grenzwerte von $\{f(x'_n)\}_{n=1}^\infty$ und $\{f(x''_n)\}_{n=1}^\infty$ übereinstimmen. $\blacksquare$

Definition: Sei a ein Häufungspunkt von $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Wenn für jede Folge $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ mit $x_n \in D\setminus\{a\}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ die Folge $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ konvergiert, dann sagt man, die Funktion f habe einen Grenzwert an der Stelle a. Der gemeinsame Grenzwert b aller Folgen $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ heißt Grenzwert von f an der Stelle a, und man schreibt

$$\lim_{x\to a} f(x) = b\,.$$

Beachte, daß f im Punkt a nicht definiert zu sein braucht. Ist f in a definiert, dann kann trotzdem $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$ gelten.

Folgerung: Sei a ein Häufungspunkt von D, der zu D gehört, und sei $f : D \to \mathbb{R}$. Genau dann ist f in a stetig, wenn

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

gilt.

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, sei a ein Häufungspunkt von D, der nicht zu D gehört, und sei $f : D \to \mathbb{R}$. Genau dann gibt es eine in a stetige Fortsetzung g von f auf die Menge $D \cup \{a\}$, wenn f einen Grenzwert an der Stelle a besitzt. Der Wert $g(a)$ ist eindeutig bestimmt durch

$$g(a) = \lim_{x \to a} f(x) .$$

Beweis: Sei g eine Fortsetzung von f auf die Menge $D \cup \{a\}$. Nach Definition des Funktionsgrenzwertes hat g einen Grenzwert in a genau dann wenn f einen Grenzwert in a hat, und für die Grenzwerte gilt

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x).$$

Aus dieser Gleichung und aus der vorangehenden Folgerung ergibt sich, daß g im Punkt a stetig ist, genau dann wenn f einen Grenzwert in a hat und für den Wert von g im Punkt a die Gleichung $g(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ gilt. ∎

Ebenso wie im Fall der Stetigkeit kann man bei der Definition des Grenzwertes von Funktionen auch mit ε und δ arbeiten. Denn es gilt:

Satz: Sei a ein Häufungspunkt einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$, sei $f : D \to \mathbb{R}$ und sei $b \in \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so daß für alle $x \in D \setminus \{a\}$ mit $|x - a| < \delta$ gilt

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Die zweite Aussage kann mit Quantoren folgendermaßen formuliert werden:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\delta > 0} \quad \forall_{\substack{x \in D \setminus \{a\} \\ |x-a| < \delta}} : \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Mit dem Umgebungsbegriff kann die Aussage des Satzes auch folgendermaßen formuliert werden: f hat in a den Grenzwert b, genau dann wenn zu jeder Umgebung U von b eine Umgebung V von a existiert mit $f\big((V \cap D) \setminus \{a\}\big) \subseteq U$.

Beweis des Satzes: Sei die Funktion $g : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} f(x) , & x \in D \setminus \{a\} \\ b , & x = a. \end{cases}$$

Nach dem vorangehenden Satz ist g genau dann in a stetig, wenn die Aussage (i) richtig ist. Andererseits ist nach Definition der Stetigkeit die Funktion g in a stetig, genau dann wenn die Aussage (ii) richtig ist. Also sind (i) und (ii) äquivalente Aussagen. ■

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, sei a ein Häufungspunkt von D und sei $f : D \to \mathbb{R}$. Genau dann hat f einen Grenzwert in a, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so daß $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt für alle $x, y \in D \setminus \{a\}$ mit $|x - a| < \delta$, $|y - a| < \delta$.

Dies ist das Cauchykriterium für die Existenz eines Grenzwertes von f in a. Mit Quantoren kann das Cauchykriterium auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{\delta>0} \quad \forall_{\substack{x,y\in D\setminus\{a\} \\ |x-a|<\delta \\ |y-a|<\delta}} : \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \,.$$

Beweis: Gilt $\lim_{x\to a} f(x) = b$, dann existiert nach dem vorangehenden Satz zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in D \setminus \{a\}$ mit $|x - a| < \delta$. Also folgt für alle $x, y \in D \setminus \{a\}$ mit $|x - a| < \delta$, $|y - a| < \delta$, daß

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - b + b - f(y)| \leq |f(x) - b| + |f(y) - b| < \varepsilon$$

gilt. Somit ist das Cauchykriterium erfüllt.

Sei umgekehrt das Cauchykriterium erfüllt und sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $x_n \in D\setminus\{a\}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Die Folge $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ist dann eine Cauchy–Folge. Denn zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$, so dass $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ gilt für alle $x, y \in D\setminus\{a\}$ mit $|x-a| < \delta$, $|y-a| < \delta$. Es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Für alle $n, m \geq n_0$ gilt dann

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \,,$$

also ist $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyfolge und damit konvergent. Hieraus folgt, dass f einen Grenzwert in a besitzt. ■

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn f in jedem Häufungspunkt von D einen Grenzwert besitzt, dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung g von f auf die abgeschlossene Hülle $\overline{D}$. Hinreichend dafür, daß f diese Eigenschaft hat, ist die gleichmäßige Stetigkeit von f.

Definition: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so daß

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

ist für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$.

Mit Quantoren lautet diese Bedingung

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{\delta>0} \quad \forall_{\substack{x,y\in D\\ |x-y|<\delta}} : \quad |f(x)-f(y)|<\varepsilon\,.$$

Jede gleichmäßige stetige Funktion f ist stetig. Denn hält man $y=a\in D$ fest, dann folgt aus der Definition, daß f stetig ist in a. Bevor ich Beispiele betrachte, beweise ich folgenden Satz:

Satz: Sei $D\subseteq \mathbb{R}$ und sei $f: D\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann besitzt f eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung auf $\overline{D}$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß f in jedem Punkt $a\in\overline{D}$ einen Grenzwert besitzt. Da f gleichmäßig stetig ist, existiert zu $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ mit $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ für $x,y\in D$ mit $|x-y|<\delta$. Für $x,y\in D\setminus\{a\}$ mit $|x-a|<\delta/2$ und $|y-a|<\delta/2$ gilt $|x-y|=|x-a+a-y|\le|x-a|+|y-a|<\delta$, also $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, also besitzt f nach dem vorangehenden Satz einen Grenzwert in a. ∎

Beispiele: 1.) Sei die Funktion $f: D=[-1,0)\cup(0,1]\to\mathbb{R}$ definiert durch $x\mapsto f(x)=\frac{x^2}{|x|}$. Diese Funktion ist gleichmäßig stetig und hat also eine stetige Fortsetzung auf $\overline{D}=[-1,1]$. Diese Fortsetzung ist gegeben durch

$$x\mapsto g(x)=|x|.$$

Um nachzuweisen, daß f gleichmäßig stetig ist, sei $\varepsilon>0$. Setze $\delta=\varepsilon$. Dann gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung für alle $x,y\in D$ mit $|x-y|<\delta$

$$|f(x)-f(y)|=\big|\,|x|-|y|\,\big|\le|x-y|<\varepsilon.$$

also ist f gleichmäßig stetig.

2.) Nicht gleichmäßig stetig ist die Funktion $x\mapsto f(x)=\frac{1}{|x|}$ mit Definitionsbereich $D=[-1,0)\cup(0,1]$. Zum Beweis wird gezeigt, daß für diese Funktion die Negation zur Aussage in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit richtig ist:

$$\exists_{\varepsilon>0} \quad \forall_{\delta>0} \quad \exists_{\substack{x,y\in D\\ |x-y|<\delta}} : \quad |f(x)-f(y)|\ge\varepsilon.$$

Sei $\varepsilon=1$. Dann folgt für $x>0$ und $y=\frac{1}{2}x$, daß

$$|x-y|=\frac{1}{2}x \quad \text{und} \quad |f(x)-f(y)|=|\,\frac{1}{|x|}-\frac{1}{|y|}\,|=\frac{1}{x}$$

gilt, also ergibt sich: Sei $\delta > 0$. Wähle $x = \min(\delta, 1)$ und $y = \frac{1}{2}x = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\delta)$. Dann folgt

$$|x - y| \leq \frac{\delta}{2} < \delta\,, \quad |f(x) - f(y)| = \frac{1}{x} \geq 1 = \varepsilon\,,$$

also sind zu $\varepsilon = 1$ und zu beliebigem δ Zahlen x, y mit der behaupteten Eigenschaft gefunden.

Satz: Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis: Angenommen, f sei nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $x_n, y_n \in D$ existieren mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $f(x_n) - f(y_n) \geq \varepsilon$. Da D kompakt ist, besitzt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ mit Grenzwert $x_0 \in D$. Auch die Folge $\{y_{n_j}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen x_0, denn zu $\eta > 0$ existiert $j_0 \in \mathbb{N}$, so daß für für $j \geq j_0$ die Ungleichung

$$|x_{n_j} - x_0| < \eta/2$$

gilt. Sei j_1 die kleinste natürliche Zahl mit $j_1 \geq \frac{2}{\eta}$. Für $j \geq j_1$ gilt wegen $n_j \geq j$ die Ungleichung $\frac{1}{n_j} \leq \frac{1}{j} \leq \frac{1}{j_1} \leq \frac{\eta}{2}$. Somit folgt für $j \geq \max(j_0, j_1)$

$$|x_0 - y_{n_j}| \leq |x_0 - x_{n_j}| + |x_{n_j} - y_{n_j}| < \eta/2 + \frac{1}{n_j} < \eta,$$

also $\lim_{j\to\infty} y_{n_j} = x_0$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_0) - f(x_0) \\ &= \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) - \lim_{j\to\infty} f(y_{n_j}) \\ &= \lim_{j\to\infty} \big(f(x_{n_j}) - f(y_{n_j})\big) \geq \lim_{j\to\infty} \varepsilon = \varepsilon > 0\,. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, also muß die Annahme falsch sein. ■

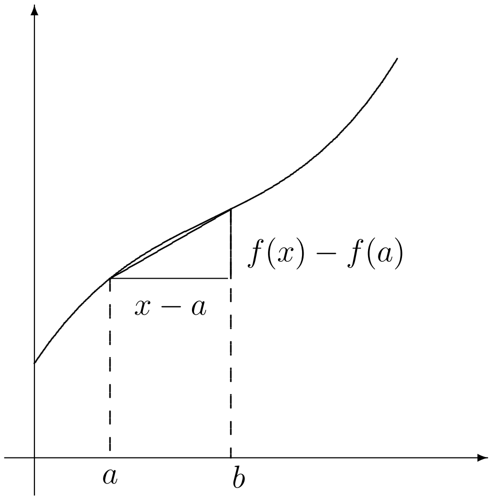
Beispiel: Die Funktion $Q : [0, 1] \to \mathbb{R}\,,\ x \to Q(x) := \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig.

Zur Übung zeige man, daß auch $Q : [0, \infty) \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto Q(x) := \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist.

7 Differenzierbare Funktionen

7 a.) Definition und Rechenregeln

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $a \in J$ und sei $f : J \to \mathbb{R}$. Die Funktion $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ist in ganz J mit Ausnahme des Punktes $x = a$ definiert. Man nennt diese Funktion den Differenzenquotienten. Diese Funktion gibt die Steigung der Sehne durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ an.



Falls x gegen a strebt, geht die Sehne in die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(a, f(a))$ über, falls diese Tangente existiert. Man kann die Tangente als diejenige affine Funktion auffassen, die die Funktion f in der Umgebung des Punktes a am besten approximiert. In der Differentialrechnung geht es also darum, gegebene komplizierte Funktionen durch möglichst einfache Funktionen zu approximieren.

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $a \in D$ ein Häufungspunkt von D. Sei $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt differenzierbar im Punkt $a \in D$, wenn der Grenzwert

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert.

Der folgende Satz gibt eine hierzu äquivalente Bedingung:

Satz: f ist differenzierbar in a, genau dann wenn eine Zahl m und eine an der Stelle a stetige Funktion $r : D \to \mathbb{R}$ mit $r(a) = 0$ existiert so daß

$$f(x) = f(a) + m(x - a) + r(x)(x - a)$$

gilt für $x \in D$.

Beweis: Angenommen,

$$m = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existiere. Definiere die Funktion r durch

$$r(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - m\,, & x \neq a \\ 0\,, & x = a\,. \end{cases}$$

Dann gilt $f(x) = f(a) + m(x-a) + r(x)(x-a)$, und wegen

$$\lim_{x\to a} r(x) = \lim_{x\to a} \Big(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - m\Big) = 0 = r(a)$$

ist r stetig im Punkt a.

Falls umgekehrt m und r die im Satz angegebenen Eigenschaften haben, folgt aus der Stetigkeit von r, daß

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = m + \lim_{x\to a} r(x) = m\,,$$

gilt, also besitzt der Differenzenquotient einen Grenzwert an der Stelle a, also ist f in a differenzierbar. ∎

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, sei $a \in D$ ein Häufungspunkt von D und sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a. Dann heißt die eindeutig bestimmte Zahl

$$m = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

die Ableitung von f im Punkt a. Man schreibt auch $f'(a) = m$.

Häufig wird auch die von Leibniz stammende Schreibweise

$$\frac{d}{dx} f(x) := f'(x)$$

benutzt. Dies ist insbesondere dann zweckmäßig, wenn f von mehreren Variablen abhängt, weil dann klargestellt ist, nach welcher Variablen abgeleitet wird.

Bevor ich Beispiele betrachte, leite ich einige wichtige Eigenschaften differenzierbarer Funktionen her.

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar. Dann ist f in a stetig.

Beweis: Es gilt für alle $x \in D$

$$f(x) = f'(a)(x-a) + r(x)(x-a) + f(a)\,,$$

wobei r in a stetig ist, also ist f stetig in a. ■

Satz: Sei $a \in D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar mit $f'(a) > 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von a, so daß $f(x) < f(a)$ gilt für alle $x \in U$ mit $x < a$ und $f(x) > f(a)$ für alle $x \in U$ mit $x > a$.

Beweis: Aus $f'(a) = \lim_{x\to} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ folgt für alle genügend nahe bei a liegenden $x \neq a$, daß $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, also $f(x) > f(a)$ für $x > a$ und $f(x) < f(a)$ für $x < a$. ■

Man beachte, daß aus $f'(a) \neq 0$ nicht gefolgert werden kann, daß f in einer Umgebung von a injektiv ist. Dies sieht man an Beispielen.

Satz: Sei $a \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ seien in a differenzierbar. Dann sind auch $f + g, f - g, cf$ und $f \cdot g$ in a differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a) \\
(fg)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \qquad \text{(Produktregel)} \\
(cf)'(a) &= cf'(a)\,.
\end{aligned}$$

Falls $g \neq 0$ ist in a, ist auch $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}\,, \qquad \text{(Quotientenregel).}$$

Insbesondere gilt also

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}\,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a} \frac{f(x) \pm g(x) - f(a) \mp g(a)}{x-a} \\
&\quad = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \pm \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a) \pm g'a)\,.
\end{aligned}$$

Der Beweis für cf verläuft ebenso. Für das Produkt fg gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\
&\quad = \lim_{x\to a} \Big(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\, g(x) + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\, f(a)\Big) \\
&\quad = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x\to a} g(x) + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} f(a) \\
&\quad = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)\,,
\end{aligned}$$

weil g stetig ist im Punkt a.

Falls $g(a) \neq 0$ ist, ist auch $g(x) \neq 0$ für alle x aus einer Umgebung von a, da g in a stetig ist. Also folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} &= \lim_{x\to a} \Big(- \frac{1}{g(x)g(a)} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \Big) \\ &= - \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)g(a)} \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = -\frac{g'(a)}{g^2(a)} \,.\end{aligned}$$

Die Formel für den allgemeinen Quotienten $(\frac{f}{g})'$ ergibt sich hieraus und aus der Produktregel. ∎

Folgerung: Die Menge der Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, die in $a \in D$ differenzierbar sind, ist ein Vektorraum.

Satz: Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$, sei $f : D_1 \to \mathbb{R}$, sei $g : D_2 \to \mathbb{R}$ und sei $g \circ f$ definiert. f sei in $a \in D_1$ differenzierbar, g sei in $b = f(a) \in D_2$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ in a differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \qquad \text{(Kettenregel).}$$

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine in b stetige Funktion $r : D_2 \to \mathbb{R}$ mit $r(b) = 0$, so daß für $x \in D_2$

$$g(x) - g(b) = g'(b)(x-b) + r(x)(x-b)$$

gilt. Also ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} &= \lim_{x\to a} \Big(g'(f(a)) \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + r(f(x)) \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Big) \\ &= \Big(g'(f(a)) + \lim_{x\to a} r(f(x)) \Big) \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g'(f(a))f'(a) \,,\end{aligned}$$

weil $r \circ f$ im Punkt a stetig ist und weil $r(f(a)) = r(b) = 0$ gilt. ∎

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv und differenzierbar in $a \in D$ mit $f'(a) \neq 0$. Wenn die Umkehrfunktion g von f an der Stelle $b = f(a)$ stetig ist, dann ist g sogar differenzierbar in b mit

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))} \,.$$

Beweis: Es ist

$$\lim_{y\to b} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} = \lim_{y\to b} \frac{g(y)-a}{f(g(y))-f(a)} = \frac{1}{\lim_{y\to b} \frac{f(g(y))-f(a)}{g(y)-a}} = \frac{1}{f'(a)} \,,$$

da nach Voraussetzung die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}\,, & x \neq a \\ f'(a)\,, & x = a \end{cases}$$

stetig ist in a und somit $\lim_{x \to a} h(x) = h(a) = f'(a)$ gilt. Weil nach Voraussetzung auch g stetig ist in b, folgt daß $h \circ g$ stetig ist in $b = f(a)$ mit

$$\lim_{y \to b} (h \circ g)(y) = h\Big(\lim_{y \to b} g(y)\Big) = h\Big(g(b)\Big) = h(a) = f'(a)\,.$$

Wegen $f'(a) \neq 0$ ergibt sich hieraus, daß auch $\frac{1}{h \circ g}$ stetig ist in b. ■

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt des Definitionsbereiches differenzierbar. Dann heißt die Funktion f differenzierbar. Für differenzierbare Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ wird durch

$$\Big(x \mapsto f'(x)\Big) : D \to \mathbb{R}$$

eine neue Funktion f' definiert. f' heißt Ableitung von f. Ist f' stetig, dann heißt f stetig differenzierbar.

Aus den bewiesenen Sätzen folgt:

Satz: Die Menge aller in D differenzierbaren Funktionen ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Auch die Menge aller in D stetig differenzierbaren Funktionen ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, der mit $C_1(D, \mathbb{R}) = C_1(D)$ bezeichnet wird.

Auch das Produkt zweier differenzierbarer (bzw. stetig differenzierbarer) Funktionen ist (stetig) differenzierbar. Wenn f' differenzierbar ist, bezeichnet man die Ableitung von f' mit f'' oder mit $f^{(2)}$, und nennt diese Ableitung die zweite Ableitung von f. Allgemein definiert man die k–te Ableitung $f^{(k)}$ von f rekursiv durch

$$f^{(k+1)} := (f^{(k)})'\,.$$

Falls f k–mal differenzierbar ist, dann sind die Ableitungen $f^{(0)} = f, f^{(1)}, \ldots, f^{(k-1)}$ stetig. Falls auch noch $f^{(k)}$ stetig ist, sagt man, f sei k–mal stetig differenzierbar. Die Menge der k–mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ bildet einen Vektorraum über $\mathbb{R}$, den man mit $C_k(D, \mathbb{R})$ oder $C_k(D)$ bezeichnet. $C_0(D) = C(D)$ sind dann die stetigen Funktionen. Existiert $f^{(k)}$ für alle k, dann sagt man, f sei unendlich oft differenzierbar, oder f sei beliebig oft differenzierbar. Den Vektorraum dieser Funktionen bezeichnet man mit $C_\infty(D,\mathbb{R})$ oder mit $C_\infty(D)$. Man benutzt die Bezeichnung:

$$\frac{d^k}{dx^k}\, f(x) = f^{(k)}(x)\,.$$

7 b.) Beispiele und Anwendungen

7 b1.) Ableitungen von Polynomen und rationalen Funktionen

Die konstante Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\ x\mapsto f(x):=c$ ist in jedem Punkt $a\in\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $f'(a)=0$.

Die Identität $x\mapsto f(x):=x$ ist in jedem Punkt $a\in\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a} = 1\,.$$

Hieraus folgt, daß alle Polynome $p(x)=\sum_{n=0}^m a_n x^n$ und alle rationalen Funktionen differenzierbar sind. Um die Ableitung des Polynoms p im Punkt $x\in\mathbb{R}$ zu berechnen, genügt es, die Ableitung der Potenzen x^n für ganze Zahlen $n\geq 0$ zu kennen, weil

$$\Big(\sum_{n=0}^m a_n x^n\Big)' = \sum_{n=0}^m a_n (x^n)'$$

gilt. Durch vollständige Induktion ergibt sich

$$(x^n)' = \begin{cases} 0, & n=0\\ nx^{n-1}, & n\geq 1. \end{cases}$$

Denn für $n=0$ und $n=1$ ist diese Gleichung richtig. Angenommen, die Gleichung sei für eine Zahl $n\in\mathbb{N}$ richtig. Dann folgt nach der Produktregel

$$(x^{n+1})' = (x\,x^n)' = x'x^n + x(x^n)' = x^n + x(n\,x^{n-1}) = (n+1)x^n.$$

Also ergibt sich: Die Ableitung eines Polynoms ist wieder ein Polynom. Bei der Differentiation eines Polynoms mit positivem Grad erniedrigt sich der Grad eines Polynoms um 1 . Nach der Quotientenregel ist also auch jede rationale Funktion $r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ in allen Punkten ihres Definitionsbereiches differenzierbar und die Ableitung ist wieder eine rationale Funktion:

$$r'(x) = \frac{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)}{q(x)^2}.$$

Insbesondere ergibt sich für $n\in\mathbb{N}$

$$(x^{-n})' = \Big(\frac{1}{x^n}\Big)' = \frac{-n\,x^{n-1}}{x^{2n}} = -n\,x^{-n-1}\,.$$

7 b2.) Ableitung der Exponentialfunktion

In Kapitel 5 c.) haben wir die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (=: e^x)$$

definiert. Es gilt

$$\exp'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \Big(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}\Big) = 1 + \lim_{x\to 0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = 1\,,$$

wegen

$$\begin{aligned}\Big|\lim_{x\to 0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}\Big| &\le \lim_{x\to 0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{k!} = \lim_{x\to 0} |x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{k!} \\ &\le \lim_{x\to 0} |x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{(k-2)!} = \lim_{x\to 0} |x| e^{|x|} \le \lim_{x\to 0} |x| e^1 = 0\,,\end{aligned}$$

also

$$\exp'(0) = 1 \qquad \big(=(e^x)'\big|_{x=0}\big)\,.$$

Aus dem Additionstheorem $e^{x+y} = e^x e^y$ folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x\,,$$

also

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

oder

$$(e^x)' = e^x\,.$$

Die Exponentialfunktion ist also in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar, folglich ist die Exponentialfunktion eine stetige Funktion.

7 b3.) Der natürliche Logarithmus

Aus der Beziehung $e^x e^{-x} = 1$ ergibt sich $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit folgt aus dem Zwischenwertsatz, daß entweder $e^x > 0$ für alle x gilt oder daß $e^x < 0$ für alle x gilt. Wegen $e^0 = 1$ liegt der erste Fall vor, also ist $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für $x > 0$ gilt

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > 1 + x > 1\,,$$

also ergibt sich für $x_2 > x_1$

$$e^{x_2} = e^{x_2 - x_1 + x_1} = e^{x_2 - x_1} e^{x_1} > e^x_1 \,,$$

also ist e^x auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, folglich hat e^x eine Umkehrfunktion, die mit log bezeichnet wird.

Der Wertebereich von exp ist ganz $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Denn wegen $e^x > x + 1$ für $x > 0$ nimmt e^x beliebig große Werte an, und somit folgt wegen $e^0 = 1$ aus dem Zwischenwertsatz, daß $[1, \infty) \subseteq W(\exp)$ ist. Mit $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ resultiert hieraus auch $(0, 1) \subseteq W(\exp)$, also $W(\exp) = \mathbb{R}^+$. Folglich ist $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bijektiv.

Weil $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ gilt und $\mathbb{R}$ offen ist, ist die Umkehrfunktion log von exp stetig. Also ist log sogar differenzierbar wegen $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$ mit

$$(\log x)' := \log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x} \,.$$

$(x \mapsto \log(-x)) : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ hat nach der Kettenregel die Ableitung

$$\Big(\log(-x)\Big)' = \log'(-x)(-x)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} \,.$$

7 b4.) Definition der allgemeinen Potenz

Mit Hilfe von exp und log kann die allgemeine Potenz definiert werden: Bei der Definition der Exponentialfunktion in Kapitel 5 c.) wurde gezeigt, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$

$$\exp(mx) = \exp(x)^m$$

gilt. Für $q = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{R}$ folgt hieraus

$$\exp(qy) = \exp\big(m\frac{y}{n}\big) = \exp\big(\frac{y}{n}\big)^m = \exp\big(\frac{y}{n}\big)^{nq} = \exp\big(n\frac{y}{n}\big)^q = \exp(y)^q.$$

Wegen $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ gilt folglich für alle $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{R}$

$$\big(\exp(y)\big)^x = \exp(xy).$$

Dies legt nahe, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ den Ausdruck $\big(\exp(y)\big)^x$ durch

$$\big(\exp(y)\big)^x := \exp(xy)$$

zu definieren. Für reelles $a > 0$ und beliebiges $x \in \mathbb{R}$ folgt aus dieser Definition wegen $a = \exp(\log a)$, daß

$$a^x = \big(\exp(\log a)\big)^x = \exp(x \log a) = e^{x \log a}.$$

Damit ist a^x erklärt für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$.

Für die Funktionen $\log x$ und a^x gilt

(i) $\log(xy) = \log(e^{\log x}e^{\log y}) = \log e^{\log x + \log y} = \log x + \log y,$

(ii) $\log a^x = \log(e^{x\log a}) = x \log a,$

(iii) $a^x a^y = e^{x\log a} e^{y \log a} = e^{(x+y)\log a} = a^{x+y},$

(iv) $(a^x)^y = (e^{x\log a})^y = e^{y \log e^{x\log a}} = e^{yx\log a} = a^{xy},$

(v) $a^x b^x = e^{x \log a} e^{x \log b} = e^{x\log(ab)} = (ab)^x.$

Die Funktion $(x \mapsto a^x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist differenzierbar, und es gilt wegen der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\,(a^x) &= (e^{x\log a})' = \exp'(x\log a)(\log a) \\ &= (\log a)e^{x\log a} = (\log a)a^x\,. \end{aligned}$$

Für $c \in \mathbb{Z}$ wurde gezeigt, daß $a \mapsto a^c$ differenzierbar ist, mit $(a^c)' = c\,a^{c-1}$. Die Funktion $(a \mapsto a^c) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ist auch für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{da}(a^c) &= \frac{d}{da}\,(e^{c\log a}) = \frac{d}{da}\Big(\exp(c\log a)\Big) \\ &= \exp'(c\log a)\,\frac{d}{da}(c\log a) = a^c\,\frac{c}{a} = ca^{c-1}\,. \end{aligned}$$

7 b5.) Ableitung der Quadratwurzel

Hieraus folgt: Die Quadratwurzel

$$\Big(x \mapsto Q(x) := \sqrt{x}\Big) : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$

ist für alle $x \in \mathbb{R}^+$ differenzierbar mit

$$Q'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Im Punkt $x = 0$ ist Q dagegen nicht differenzierbar, denn es gilt für $x > 0$

$$\frac{Q(x) - Q(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,,$$

und diese Funktion ist unbeschränkt in jeder Umgebung des Nullpunktes, also kann sie keinen Grenzwert an der Stelle 0 haben.

7 b6.) Eulersche Grenzwertformel

Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{d}{dx}\,\log(1+x)\big|_{x=0} = 1\,.$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\frac{\log(1+\frac{a}{n})}{\frac{a}{n}} = \frac{1}{a} \log \left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right]$$

folgt somit

$$\lim_{n\to\infty} \log \left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right] = a\,,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{\log[(1+\frac{a}{n})^n]} = e^a\,,$$

wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion.

7 b7.) Einseitige Ableitungen

Die Funktion $(x \mapsto |x|) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ ist überall differenzierbar mit Ausnahme des Nullpunktes. Es gilt

$$\frac{d}{dx}|x| = \begin{cases} -1\,, & x < 0 \\ 1\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

Im Nullpunkt existieren jedoch die linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x|-|0|}{x-0} = 1\,.$$

Man sagt, $|x|$ sei im Nullpunkt *linksseitig differenzierbar* und *rechtsseitig differenzierbar.*

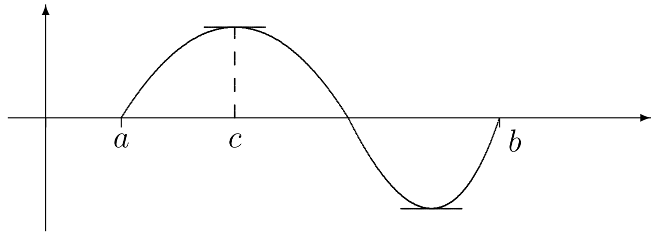
Bemerkung: Jede differenzierbare Funktion ist stetig. Es gibt aber stetige Funktionen, die nirgends differenzierbar sind. Ein Beispiel findet man im Buch von Barner–Flohr, S.261 ff.

7 c.) Mittelwertsatz

Satz (von Rolle): Sei $-\infty < a < b < \infty$. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b) = 0$, und ist f in (a,b) differenzierbar, dann gibt es ein $c \in (a,b)$ mit

$$f'(c) = 0\,.$$

Beweis: Falls $f \equiv 0$ ist in $[a,b]$, ist jedes $c \in (a,b)$ geeignet. Sei also $f \not\equiv 0$. O.B.d.A. existiere $x \in (a,b)$ mit $f(x) > 0$. (Sonst gehe man zu $-f$ über.)



Damit nimmt f das Maximum in einem Punkt $c \in (a,b)$ an. Es gilt $f'(c) = 0$. Denn für alle $x \in [a,b]$ muß $f(x) \leq f(c)$ sein, folglich muß

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \begin{cases} \leq 0\,, & \text{für} \quad x > c \\ \geq 0\,, & \text{für} \quad x < c \end{cases}$$

sein, also

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0\,.$$

■

Aus diesem Satz erhält man den „ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung“:

Erster Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei f in (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $c \in (a,b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)\,.$$

Beweis: Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) - f(a)\,.$$

Diese Funktion erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle. Es gilt

$$g(a) = g(b) = 0\,.$$

Also gibt es ein $c \in (a,b)$ mit $g'(c) = 0$. Aus

$$f'(c) = g'(c) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

folgt die Behauptung des Satzes. ■

Es ist unmittelbar klar, daß man den Mittelwertsatz auch auf folgende Weise formulieren kann: Seien $x, x + h \in [a,b]$. Dann gibt es $\theta, 0 < \theta < 1$, mit

$$f(x + h) = f(x) + f'(x + \theta h)h\,.$$

(Hierbei darf h auch kleiner als Null sein.)

Anwendungen des Mittelwertsatzes. Der Mittelwertsatz hat viele Anwendungen. Wir geben einige an.

Wenn $f : D \to \mathbb{R}$ konstant ist, dann folgt $f'(x) = 0$ für alle $x \in D$. Die Umkehrung ist für beliebiges D nicht richtig, aber es gilt:

Satz: Sei J ein Intervall und sei $f : J \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in J$. Dann ist f konstant.

Beweis: Sei $a \in J$. Für jedes $x \in J$ gilt $[a, x] \subseteq J$, also gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $c \in (a, x) \subseteq J$ mit

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a) = f(a)\,,$$

also ist $f \equiv f(a)$. ∎

Definition: Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $F : D \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$. Dann heißt F Stammfunktion von f.

Satz: Sei $f : J \to \mathbb{R}$, wobei J ein Intervall sei, und sei F eine Stammfunktionen von f. Dann haben alle Stammfunktionen von f die Form $G = F + c$ mit einer beliebigen Konstanten c.

Beweis: $G = F + c$ ist eine Stammfunktion wegen $G' = F' = f$. Ist umgekehrt G eine beliebige andere Stammfunktion, dann gilt $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$, also ist $F - G = \text{const}$ im Intervall J. ∎

Satz (Lösung einer Differentialgleichung): Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. f erfüllt die *Differentialgleichung* $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $f(x) = c\,e^x$ gilt mit beliebiger Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Beweis: Es ist klar, daß die Funktion $f(x) = ce^x$ die Differentialgleichung erfüllt. Sei umgekehrt f eine Lösung der Differentialgleichung. Dann gilt für die differenzierbare Funktion $g(x) = f(x)e^{-x}$, daß

$$\big(f(x)e^{-x}\big)' = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = f(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0\,.$$

Diese Gleichung gilt genau dann, wenn eine Konstante c existiert mir $f(x)e^{-x} = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und dies ist äquivalent zu $f(x) = c\,e^x$. ∎

Eine Funktion f, die die Gleichung $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, heißt Lösung der Differentialgleichung $f' = f$. Man kann dieses Ergebnis daher auch folgendermaßen formulieren: Die Differentialgleichung $f' = f$ ist lösbar und alle Lösungen haben die Form

$f(x) = c\,e^x$ mit einer beliebigen Konstanten c.

Der zweite Mittelwertsatz der Differentialrechnung enthält den ersten als Spezialfall. Er wird später zur Ermittlung von Grenzwerten benutzt:

Zweiter Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, und seien diese Funktionen in (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $c \in (a, b)$ mit

$$g'(c)\Big(f(b) - f(a)\Big) = f'(c)\Big(g(b) - g(a)\Big)\,.$$

Beweis: Sei

$$h(x) = \Big(f(b) - f(a)\Big) \cdot \Big(g(x) - g(a)\Big) - \Big(g(b) - g(a)\Big)\Big(f(x) - f(a)\Big)\,.$$

Dann gilt $h(a) = h(b) = 0$. Also existiert nach dem Satz von Rolle ein $c \in (a, b)$ mit $h'(c) = 0$, also

$$0 = h'(c) = \Big(f(b) - f(a)\Big)g'(c) - \Big(g(b) - g(a)\Big)f'(c)\,.$$

Hieraus folgt die Behauptung. ∎

Der erste Mittelwertsatz folgt hieraus mit $g(x) = x$. Falls $g'(x) \neq 0$ ist für alle $x \in (a, b)$, dann folgt aus dem ersten Mittelwertsatz $g(b) \neq g(a)$, also kann die Formel im zweiten Mittelwertsatz auch in der Form

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

geschrieben werden.

7 d.) Taylorformel und Taylorreihe

Sei

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

ein Polynom. Weil $|x|^k$ in einer Umgebung des Nullpunktes $x = 0$ klein ist für große Werte von k, kann man das Verhalten von f in einer Umgebung des Nullpunktes gut an den Koeffizienten c_k ablesen. Diese Koeffizienten können auf einfache Weise aus den Ableitungen von f im Nullpunkt berechnet werden. Denn es gilt $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k c_k x^{k-1}$,

also

$$\begin{aligned} f(0) &= c_0 \\ f'(0) &= c_1 \\ f^{(2)}(0) &= 2c_2 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(0) &= n!\; c_n\,, \qquad\qquad n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n \\ f^{(k)}(0) &= 0 \quad \text{für} \quad k > n\,. \end{aligned}$$

Um das Verhalten von f in der Umgebung eines beliebigen Punktes $a \in \mathbb{R}$ zu untersuchen, ist es zweckmäßig, f in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k \tag{$*$}$$

darzustellen, mit geeignet zu bestimmenden Koeffizienten b_k. Ich werde nachher zeigen, daß es solche Koeffizienten b_k gibt. Zunächst nehme ich an, dies sei möglich. Es ist dann einfach, die Koeffizienten b_k aus den höheren Ableitungen von f zu bestimmen, denn wie oben folgt aus

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, b_k (x-a)^{k-1}$$

daß

$$b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n\,,$$

sein muß. Falls für ein Polynom f höchstens n–ten Grades die Darstellung $(*)$ möglich ist, muß also gelten

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,.$$

Falls f kein solches Polynom ist, ist eine Darstellung der Form $(*)$ nicht möglich. Dann ist diese Gleichung nicht mehr richtig. Man kann aber hoffen, daß der rechtsstehende Ausdruck noch eine gute Approximation für f liefert in einer Umgebung des Punktes $x = a$, falls f genügend oft differenzierbar ist. Den Fehler, den man macht, wenn man f durch den rechtsstehenden Ausdruck ersetzt, kann man mit der Formel von Taylor abschätzen:

Satz (Taylorformel): Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine n–mal stetig differenzierbare Funktion, die in jedem Punkt des offenen Intervalls (a, b) sogar $(n+1)$–mal differenzierbar ist. Dann existiert $c \in (a,b)$ mit

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1}\,.$$

(Brook Taylor, 1685 – 1731)

Beweis: Definiere die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\,(b-x)^k. \tag{7.1}$$

F ist stetig und auf dem Intervall (a,b) differenzierbar. Somit kann man den zweiten Mittelwertsatz auf F und auf die durch $g(x) = (b-x)^{n+1}$ definierte Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ anwenden. Wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ erhält man mit einem geeigneten $c \in (a,b)$, daß

$$F(b) - F(a) = F'(c)\,\frac{g(b)-g(a)}{g'(c)} = F'(c)\,\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)(b-c)^n}\,. \tag{7.2}$$

Gleichung (7.1) liefert

$$F'(c) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}\,(b-c)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,k(b-c)^{k-1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\,(b-c)^n\,.$$

Setzt man diese Relation in (7.2) ein und beachtet, dass nach (7.1) die Gleichung $F(b) = f(b)$ gilt, dann resultiert

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n\,\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)(b-c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Dies ist die Taylorformel. ■

Folgerung: Sei f ein Polynom höchstens n–ten Grades. Dann gilt für jedes $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$$

Beweis: Es ist $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$, also folgt die Behauptung aus der Taylorformel. ■

Folgerung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$–mal differenzierbare Funktion mit $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann ist f ein Polynom höchstens n–ten Grades.

Beweis: Aus der Taylorformel folgt $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$ für alle $x \in [a,b]$, und dies ist ein Polynom höchstens n–ten Grades. ■

Man kann die Taylorformel auch in folgender Form schreiben: Seien $x, x+h \in [a,b]$. Dann existiert $\theta, 0 < \theta < 1$, mit

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Für $n = 0$ geht die Taylorformel in den Mittelwertsatz über. Die Funktion

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

heißt Taylorpolynom n–ter Ordnung zur Funktion f an der Stelle a. Aus der Größe des Restgliedes

$$R_n = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

ergibt sich, wie gut das Taylorpolynom die Funktion f approximiert.
$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$ heißt Lagrangesche Darstellung des Restgliedes. Es gibt andere Möglichkeiten, das Restglied in der Taylorformel darzustellen.

Man kann daher die Taylorformel zur näherungsweisen Berechnung von Funktionen benutzen.

Beispiele:
1.) Berechnung von $\log x$ in einer Umgebung des Punktes $x = 1$:

Es gilt

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x},$$

und

$$\frac{d^n}{dx^n} \log x = (n-1)!(-1)^{n-1} \frac{1}{x^n},$$

also folgt aus der Taylorformel

$$\begin{aligned} \log(1+h) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\log^{(k)}(1)}{k!} h^k + \frac{\log^{(n+1)}(1+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} h^k + \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{h^{n+1}}{(1+\theta h)^{n+1}}. \end{aligned} \qquad (*)$$

Das Restglied

$$R_n = (-1)^n \frac{1}{n+1} \frac{h^{n+1}}{(1+\theta h)^{n+1}}$$

kann für $0 \le h \le 1$ abgeschätzt werden durch

$$|R_n| = \frac{1}{n+1}\left|\frac{h}{1+\theta h}\right|^{n+1} \le \frac{h^{n+1}}{n+1}\,,$$

und für $-1 < h \le 0$ durch

$$|R_n| = \frac{1}{n+1}\,\frac{|h|^{n+1}}{(1-|h|)^{n+1}}\,.$$

Für $-\frac{1}{2} \le h \le 1$ folgt somit

$$|R_n| \le \frac{1}{n+1}\,,$$

also $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. Aus $(*)$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\log(1+h) &= \lim_{n\to\infty}\Big(\log(1+h) - R_n\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{h^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{h^k}{k}, \quad \text{für } -\frac{1}{2} \le h \le 1,\end{aligned}$$

oder

$$\log x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}, \qquad \text{für } \frac{1}{2} \le x \le 2.$$

Dies ist die *Taylorreihe* für den Logarithmus im Intervall $[\frac{1}{2}, 2]$. Zum Beispiel ergibt sich für $x = 2$

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\,.$$

Diese Reihe konvergiert jedoch sehr schlecht und ist daher nicht für numerische Berechnungen geeignet. (Für $x = 2$, also $h = 1$ ergibt sich ja nur die schlechte Restgliedabschäzung $|R_n| < \frac{1}{n+1}$). Bessere Ergebnisse erhält man für Werte von x, für die $h = x - 1$ näher bei Null liegt. Zum Beispiel ergibt sich für $x = \frac{3}{2}$ und $n = 5$

$$\sum_{k=1}^{5}(-1)^{k-1}\frac{1}{k2^k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} \approx 0,40729$$

und

$$|R_5| \le \frac{1}{6\cdot 2^6} = \frac{1}{384} < 0,0027$$

(Genauer gilt $\log 1,5 \approx 0,405465108$.)

2.) Für $s \in \mathbb{R}$ betrachte die Funktion

$$(x \mapsto x^s) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\,.$$

Sei $a > 0$ und sei $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < a$. Dann folgt aus der Taylorformel mit

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^s) = s(s-1)(s-2)\dots(s-k+1)x^{s-k}\,,$$

$$(a+h)^s = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} a^{s-k} h^k + \binom{s}{n+1} (a+\theta h)^{s-n-1} h^{n+1}$$

mit geeignetem $0 < \theta < 1$. Hierbei sei

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{k!} .$$

Als Übungsaufgabe zeige man: Für $0 \leq h < a$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \binom{s}{n+1} \frac{h^{n+1}}{(a+\theta h)^{n+1-s}} = 0 .$$

Hieraus ergibt sich für $0 \leq h < a$ die Taylorreihe

$$(a+h)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} a^{s-k} h^k .$$

Man vergleiche dieses Ergebnis mit der Binomischen Formel.

In beiden betrachteten Beispielen galt $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. Hieraus folgte, daß die beiden beliebig oft differenzierbaren Funktionen $x \mapsto \log x$ und $x \mapsto x^s$ in gewissen Bereichen in eine Taylorreihe entwickelt werden konnten. Es ist jedoch im allgemeinen nicht richtig, daß das Restglied in der Taylorformel einer beliebig oft differenzierbaren Funktion gegen Null konvergiert. In jedem Spezialfall muß untersucht werden, ob das Restglied gegen Null konvergiert oder nicht. Funktionen, die in eine derartige Potenzreihe entwickelt werden können, nennt man analytische Funktionen. Die „Funktionentheorie“ befaßt sich ausschließlich mit derartigen Funktionen. Ich werde später darauf zurück kommen.

7 e.) Monotonie, Extrema, Regeln von de l‘Hospital

Satz: Sei J ein Intervall und $f : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar. f ist genau dann monoton wachsend, wenn

$$f'(x) \geq 0$$

ist für alle $x \in J$.

Beweis: Ist f monoton wachsend, dann gilt für $x \neq y$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0 ,$$

also

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0 .$$

Ist umgekehrt $f'(x) \geq 0$ für alle x, dann folgt aus dem Mittelwertsatz für $y > x$

$$f(y) - f(x) = f'(z)(y - x) \geq 0 .$$

■

Bemerkung: Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in J$, dann ist f streng monoton wachsend. Dies ist jedoch nur eine hinreichende Bedingung. Zum Beispiel ist $x \mapsto x^3$ streng monoton wachsend, aber $(x^3)'|_{x=0} = 3x^2|_{x=0} = 0$.

Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$, und sei $f : D \to \mathbb{R}$. Wenn es eine Umgebung U von a gibt, so daß für alle $x \in D \cap U$ gilt

$$f(x) \geq f(a) ,$$

dann heißt a relative Minimalstelle von f. Gilt für alle $x \in D \cap U$

$$f(x) \leq f(a) ,$$

dann heißt a relative Maximalstelle von f. Der Punkt a heißt relative Extremstelle von f, wenn a relative Minimal– oder Maximalstelle ist.

Satz: Sei a innerer Punkt von D, sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und sei a relative Extremalstelle von f. Dann gilt

$$f'(a) = 0 .$$

Beweis: Siehe Beweis zum Satz von Rolle. ■

$f'(a) = 0$ ist nur eine notwendige Bedingung für eine Extremstelle. Zum Beispiel gilt für $f(x) = x^3$

$$f'(0) = 0 ,$$

aber $x = 0$ ist keine relative Extremalstelle. Eine hinreichende Bedingung gibt folgender Satz:

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, und sei a innerer Punkt von D. $f : D \to \mathbb{R}$ sei n–mal stetig differenzierbar, und es sei

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 ,$$

aber $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Ist n ungerade, dann ist a keine Extremalstelle. Ist n gerade, dann ist a Minimalstelle falls $f^{(n)}(a) > 0$ ist, und Maximalstelle falls $f^{(n)}(a) < 0$ ist.

Beweis: Wegen $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ liefert die Taylorformel für alle x aus einer Umgebung von a, daß

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-a)^n,$$

wobei y zwischen a und x liegt. Da $f^{(n)}(a) \neq 0$ ist, folgt aus der Stetigkeit von $f^{(n)}$ daß $f^{(n)}(x) \neq 0$ ist für alle x aus einer Umgebung von a und dasselbe Vorzeichen hat wie $f^{(n)}(a)$. Hieraus schließt man folgendes: Ist n ungerade, dann hat

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-a)^n$$

für $x > a$ und für $x < a$ verschiedenes Vorzeichen, also kann kein f in a kein Extremum haben.

Ist n gerade, dann ergibt sich für alle x aus einer Umgebung von a, daß

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &\geq 0\,, \qquad \text{falls} \quad f^{(n)}(y) > 0\,, \\ f(x) - f(a) &\leq 0\,, \qquad \text{falls} \quad f^{(n)}(y) < 0\,, \end{aligned}$$

und hieraus resultiert die Behauptung des Satzes. ■

Grenzwertbestimmung durch Differentiation. Falls die Grenzwerte $\lim_{n\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$ existieren und falls der zweite Grenzwert von Null verschieden ist, gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\,.$$

Ist $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$ und $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, dann existiert der Grenzwert $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ nicht. Es ist aber möglich, daß dieser Grenzwert existiert, falls $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ gilt. Hierüber machen die *Regeln von de l' Hospital* Aussagen:

Satz: Die Funktionen f, g seien für $x > a$ definiert und differenzierbar. Es sei $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für $x > a$, und $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Wenn $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. Außerdem gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Beweis: Man definiere $f(a) = g(a) = 0$. Dann sind die Funktionen f, g stetig fortgesetzt. Sei $x > a$. Aus dem zweiten Mittelwertsatz folgt, daß $y \in (a, x)$ existiert mit

$$\Big(f(x) - f(a)\Big)g'(y) = \Big(g(x) - g(a)\Big)f'(y)\,,$$

also
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}\,.$$
Um zu zeigen, daß $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ existiert, zeige man, daß für jede Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n > a$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ auch
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$
existiert. Hierzu wähle man zu x_n ein $y_n \in (a, x_n)$ mit
$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)}\,.$$
Dann gilt $\lim_{n\to\infty} y_n = a$, also konvergiert die Folge
$$\left\{\frac{f'(y_n)}{g'(y_n)}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}_{n=1}^{\infty}\,.$$
■

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes ergibt sich

Satz: Die Funktionen f, g seien in $x > a$ definiert und dort n–mal differenzierbar. Für $x > a$ sei $g(x) \neq 0\,, \ldots, g^{(n)}(x) \neq 0$ und
$$\lim_{x\to a} g^{(k)}(x) = \lim_{x\to a} f^{(k)}(x) = 0\,,\ \ k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$
Wenn dann $\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ existiert, dann auch $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und D nach oben unbeschränkt. Um den „Grenzwert von f im Unendlichen“ zu untersuchen, definiere man
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{y\to 0} f\Big(\frac{1}{y}\Big)\,.$$
Mit dieser Definition ist die Untersuchung von $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ auf die Untersuchung von $\lim_{y\to 0}\frac{f(1/y)}{g(1/y)}$ zurückgeführt. Die vorangehenden Sätze sind dann auch gültig, wenn man a durch ∞ und die Voraussetzung $x > a$ durch $x < \infty$ ersetzt. Also gilt insbesondere
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$
Ähnlich kann auch der Fall behandelt werden, daß $g(x)$ und $f(x)$ unbeschränkt sind in der Umgebung von a :

Satz: Die Funktionen f, g seien in $x > a$ definiert und differenzierbar. Seien $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0$ und $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$. Wenn dann $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann auch $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweis: Der Beweis ist etwas komplizierter, weil man f und g nicht stetig nach a fortsetzen kann:
Sei $c = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl $b > a$ mit $|\frac{f'(y)}{g'(y)} - c| < \varepsilon$ für alle $a < y \le b$. Es gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} \cdot \frac{f(x)}{f(x)-f(b)} \cdot \frac{g(x)-g(b)}{g(x)}.$$

Falls x genügend nahe bei a liegt, sind alle Nenner von Null verschieden, da $f(x)$ und $g(x)$ für $x \to a$ „gegen Unendlich konvergieren“. Also folgt für diese x

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - c\Big| \quad &\le \quad \Big|\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} - c\Big| \; \Big|\frac{f(x)}{f(x)-f(b)}\Big| \; \Big|\frac{g(x)-g(b)}{g(x)}\Big| \\ &\quad + |c| \; \Big|\frac{f(x)}{f(x)-f(b)} \cdot \frac{g(x)-g(b)}{g(x)} - 1\Big|,\end{aligned}$$

somit, nach dem zweiten Mittelwertsatz,

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - c\Big| \le \varepsilon \,\Big|\frac{1}{1-\frac{f(b)}{f(x)}}\Big| \cdot \Big|1 - \frac{g(b)}{g(x)}\Big| + |c| \,\Big|\frac{1-\frac{g(b)}{g(x)}}{1-\frac{f(b)}{f(x)}} - 1\Big|.$$

Wegen $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$, $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0$, ist $\lim_{x\to a}(1 - \frac{f(b)}{f(x)}) = 1$, $\lim_{x\to a}(1 - \frac{g(b)}{g(x)}) = 1$, und somit auch

$$\lim_{x\to a} \Big(\frac{1-\frac{g(b)}{g(x)}}{1-\frac{f(b)}{f(x)}} - 1\Big) = 0.$$

Folglich existiert $a < \delta \le b$, so daß für alle $x \in (a, \delta)$ gilt

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - c\Big| \le 2\varepsilon + |c|\varepsilon = (2 + |c|)\varepsilon.$$

Hieraus folgt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

■

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes folgt

Satz: Die Funktionen f, g seien in $x > a$ definiert und n–mal differenzierbar. Sei

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \ldots = \lim_{x\to a} \frac{1}{g^{(n-1)}(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \ldots = \lim_{x\to a} \frac{1}{f^{(n-1)}(x)} = 0.$$

Wenn dann $\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ existiert, dann auch $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

Außerdem darf in diesen Sätzen auch $a=\infty$ gesetzt werden.

Beispiele: 1.) Sei $s>0$ und $f(x)=x^s$, $g(x)=e^x$. Es soll untersucht werden, ob

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^s}{e^x}$$

einen Grenzwert hat. Es gilt $\lim_{x\to\infty} x^{-s} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ und

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^s)^{(n)}}{(e^x)^{(n)}} = \lim_{x\to\infty}\frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{x^{n-s}e^x} = 0\,,$$

falls $n\geq s$ gewählt wird. Also folgt aus dem voranstehenden Satz mit $a=\infty$, daß $\lim_{x\to\infty}\frac{x^s}{e^x}=0$, d.h. die Exponentialfunktion wächst stärker als jede Potenz.

2.) Sei $s>0$. Wegen $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\log x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^s} = 0$ folgt aus dem voranstehenden Satz mit $a=\infty$ und $n=1$, daß

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^s} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{sx^s} = 0\,.$$

Wegen $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\log x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{-s}} = 0$ folgt aus dem vorangehenden Satz mit $a=0$ und $n=1$, daß

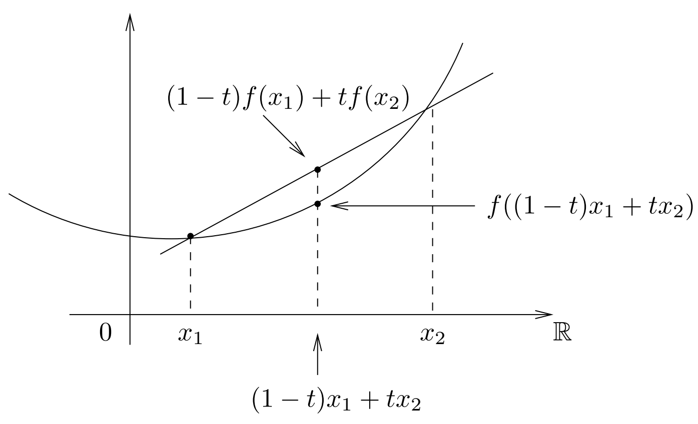
$$\lim_{x\to 0} x^s\log x = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-s}} = \lim_{x\to 0}\Big(-\frac{1}{sx^{-s}}\Big) = \lim_{x\to 0}\Big(-\frac{1}{s}x^s\Big) = 0\,.$$

Der Logarithmus wächst für $x\to\infty$ und für $x\to 0$ langsamer als jede Potenz.

7 f.) Konvexe Funktionen

Definition: Sei J ein Intervall. $f < J\to\mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für alle $x_1,x_2\in J$ und alle $t\in[0,1]$ gilt

$$f\Big((1-t)x_1+tx_2\Big)\leq (1-t)f(x_1)+tf(x_2)\,.$$

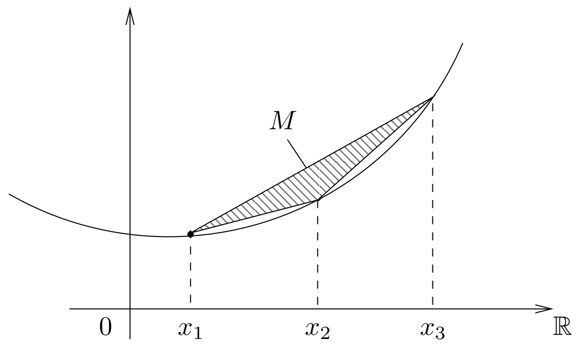


f ist also konvex, wenn der Graph von f unterhalb jeder Strecke liegt, die zwei Punkte des Graphen verbindet. Wenn der Graph von f oberhalb jeder Strecke liegt, die zwei Punkte des Graphen verbindet, dann heißt f konkav. Ist f konkav, dann ist $-f$ konvex.

Lemma: Sei f eine konvexe Funktion und seien $x_1, \ldots, x_n \in J$, $t_1 \ldots, t_n \in [0,1]$ mit $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$. Dann ist

$$f(t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + \ldots + t_n f(x_n)\,.$$

Für $n = 3$ ist die geometrische Bedeutung dieser Ungleichung in der folgenden Skizze dargestellt:



Die Punktemenge

$$M = \Big\{ \Big(\sum_{i=1}^{3} t_i x_i,\ \sum_{i=1}^{3} t_i f(x_i) \Big) \,\Big|\, t_1 + t_2 + t_3 = 1\,,\ \ t_i \geq 0 \Big\}$$

liegt ganz oberhalb des Graphen von f.

Beweis: (Durch Induktion). Nach Definition konvexer Funktionen ist die Aussage richtig für $n = 2$. Angenommen, die Aussage sei richtig für n.
Sei $t_1 + \ldots + t_{n+1} = 1\,,\ \ t_i \geq 0$.
Es gilt

$$\begin{aligned}
&f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_{n+1} x_{n+1}) \\
&\quad = \ f\Big(\Big[\frac{t_1}{1 - t_{n+1}}\, x_1 + \ldots + \frac{t_n}{1 - t_{n+1}}\, x_n \Big] (1 - t_{n+1}) + t_{n+1} x_{n+1} \Big) \\
&\quad \leq \ (1 - t_{n+1}) f\Big(\frac{t_1}{1 - t_{n+1}}\, x_1 + \ldots + \frac{t_n}{1 - t_{n+1}}\, x_n \Big) + t_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\quad \leq \ (1 - t_{n+1}) \Big[\frac{t_1}{1 - t_{n+1}}\, f(x_1) + \ldots + \frac{t_n}{1 - t_{n+1}}\, f(x_n) \Big] + t_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\quad = \ t_1 f(x_1) + \ldots + t_{n+1} f(x_{n+1})\,,
\end{aligned}$$

da

$$\frac{t_1}{1-t_{n+1}} + \ldots + \frac{t_n}{1-t_{n+1}} = \frac{1-t_{n+1}}{1-t_{n+1}} = 1\,.$$

■

Satz: $f : J \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Die Funktion f ist genau dann konvex, wenn ihre Ableitung monoton wachsend ist.
Also ist eine zweimal differenzierbare Funktion genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ ist für alle $x \in J$.

Beweis: Sei $x_1 < x < x_2$. Dann folgt

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} + \frac{x_2-x}{x_2-x_1} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x_2-x}{x_2-x_1}\,x_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\,x_2 = x$$

also

$$\begin{aligned}
& f(x) &\leq& \frac{x_2-x}{x_2-x_1}\,f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\,f(x_2) \\
\Longleftrightarrow\quad & (x_2-x_1)f(x) &\leq& (x_2-x)f(x_1) + (x-x_1)f(x_2) \qquad (*) \\
\Longleftrightarrow\quad & (x_2-x)f(x) + (x-x_1)f(x) &\leq& (x_2-x)f(x_1) + (x-x_1)f(x_2) \\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} &\leq& \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}
\end{aligned}$$

Also ist diese letzte Ungleichung äquivalent zu der Konvexitätsbedingung.
Sei nun f' monoton wachsend. Dann folgt aus dem ersten Mittelwertsatz

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(z_1) \leq f'(z_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

für geeignete $z_1 \in (x, x_1)$, $z_2 \in (x, x_2)$, also ist f konvex. Sei umgekehrt f konvex. Aus $(*)$ folgt

$$(x_2-x_1)f(x) \leq (x_2-x_1)f(x_1) + (x_1-x)f(x_1) + (x-x_1)f(x_2)$$

und

$$(x_2-x_1)f(x) \leq (x_2-x)f(x_1) + (x-x_2)f(x_2) + (x_2-x_1)f(x_2)\,,$$

also

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

und

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\,,$$

also

$$f'(x_1) = \lim_{\substack{x\to x_1\\ x>x_1}} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \lim_{\substack{x\to x_2\\ x<x_2}} \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(x_2)\,,$$

also ist f' monoton wachsend. ■

Anwendung: Sei $f(x) = e^x$. Dann ist $f''(x) = e^x > 0$, also ist e^x konvex. Nach dem obenstehenden Lemma gilt somit für $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und $t_1 + \ldots + t_n = 1$, $t_i \geq 0$:

$$e^{t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n} \leq t_1 e^{x_1} + \ldots + t_n e^{x_n} \, .$$

Sei $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^+$. Setze $x_i = \log y_i$. Dann folgt hieraus

$$y_1^{t_1} y_2^{t_2} \ldots y_n^{t_n} \leq t_1 y_1 + \ldots + t_n y_n \, .$$

Mit $t_i = \frac{1}{n}$ für $i = 1, \ldots, n$ ergibt sich also

$$\sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n} \leq \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} \, .$$

Dies ist die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel.

8 Funktionenfolgen, gleichmäßige Konvergenz, Potenzreihen

8 a.) Punktweise Konvergenz

Die Exponentialfunktion wurde definiert durch

$$x \mapsto \exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} .$$

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte man die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} .$$

Hierdurch wird eine Folge von Funktionen, eine Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, definiert. Wegen

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) , \quad x \in \mathbb{R} ,$$

konvergiert diese Funktionenfolge „punktweise“ gegen die Exponentialfunktion.

Definition: Sei D eine Menge (nicht notwendig Teilmenge der reellen Zahlen) und $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$. Diese Funktionenfolge heißt punktweise konvergent, wenn eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

für alle $x \in D$.

Selbstverständlich ist die Grenzfunktion einer punktweise konvergenten Funktionenfolge eindeutig bestimmt, denn:
Notwendig und hinreichend dafür, daß die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ punktweise konvergiert ist, daß für jedes $x \in D$ die Zahlenfolge $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert. Denn falls jede dieser Zahlenfolgen konvergiert, kann durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definiert werden, die natürlich Grenzfunktion für die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist. Somit ist auch folgender Satz unmittelbar klar:

Satz: Die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$, ist genau dann punktweise konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $x \in D$ ein n_0 existiert mit

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon ,$$

für alle $n, m \geq n_0$ (Cauchykriterium).

Man beachte, daß die Zahl n_0 sowohl von ε als auch von $x \in D$ abhängen darf.

Beispiele:

1.) $D = [0,1]$, $x \mapsto f_n(x) := x^n$. Für $x \in [0,1)$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$, und für $x = 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$, also konvergiert die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & 0 \leq x < 1 \\ 1\,, & x = 1\,. \end{cases}$$

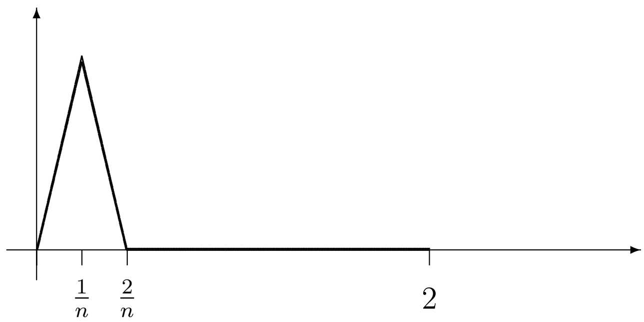
2.) Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$x \mapsto f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,.$$

Dann konvergiert $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ punktweise gegen die Grenzfunktion exp . Man kann die Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\}_{n=1}^{\infty}$ auch als „Funktionenreihe“ bezeichnen.

3.) $D = [0,2]$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n \cdot x\,, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2 - n \cdot x\,, & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0\,, & \frac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases}$$



Diese Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion in $[0,2]$.

Beweis: Zu zeigen ist: Für alle $x \in D$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\,.$$

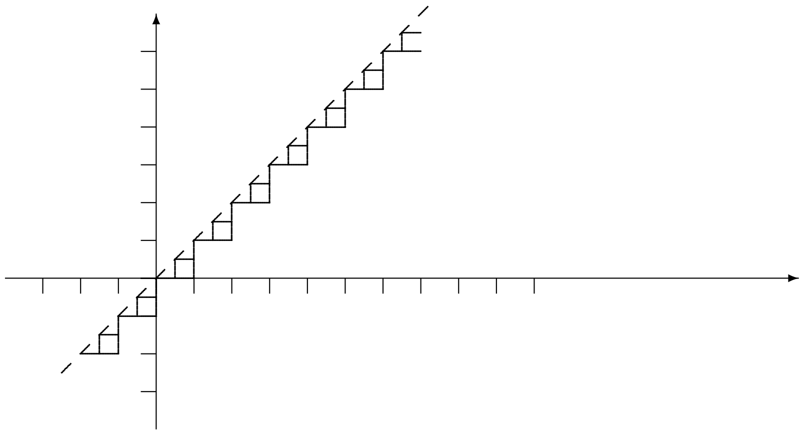
Für $x = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

Für $x > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\frac{2}{n_0} \leq x$ ist. Für $n \geq n_0$ gilt dann $\frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} \leq x$, also folgt aus der Definition von f_n für $n \geq n_0$, daß $f_n(x) = 0$ ist, also

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\,.$$

■

4.) $D = \mathbb{R}\,,\ \ x \mapsto f_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$. Hierbei bedeutet $[nx]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich n ist. (Gaußklammer).



$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert punktweise gegen die identische Abbildung $x \mapsto f(x) := x$.

Beweis: Seien $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert $k \in \mathbb{Z}$ mit $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$, also $nx \in [k, k+1)$, somit

$$f_n(x) = \frac{1}{n}[nx] = \frac{k}{n}\,.$$

Wegen $\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}$ folgt

$$0 \leq x - \frac{k}{n} < \frac{1}{n}\,,$$

also $|x - f_n(x)| = |x - \frac{k}{n}| < \frac{1}{n}$. Hieraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x\,.$$

■

8 b.) Gleichmäßige Konvergenz, Stetigkeit der Grenzfunktion

Sei $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Funktionenfolge aus lauter stetigen Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$. Diese Funktionenfolge konvergiere punktweise gegen die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$. Ist dann auch die Grenzfunktion stetig? Das obenstehende Beispiel 1.) zeigt, daß dies nicht der Fall zu sein braucht, denn

$$(x \mapsto f_n(x) = x^n) : [0,1] \to \mathbb{R}$$

ist stetig, aber die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in [0,1) \\ 1\,, & x = 1 \end{cases}\,,$$

ist nicht stetig. Um auf die Stetigkeit der Grenzfunktion schließen zu können, muß man einen stärkeren Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen einführen:

Definition: Sei D eine Menge (nicht notwendig Teilmenge der reellen Zahlen), und sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n : D \to \mathbb{R}$ erklärt. Die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ heißt gleichmäßig konvergent, wenn eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ existiert, so daß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $x \in D$ und alle $n \geq n_0$. Die Funktion f heißt Grenzfunktion.

Mit Quantoren:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{x\in D}\ \forall_{n\geq n_0}\ :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Der Unterschied zur punktweisen Konvergenz besteht darin, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ gefunden werden muß, die nicht von $x \in D$ abhängen darf. Konvergiert $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig, dann auch punktweise, und die Grenzfunktionen bei gleichmäßiger Konvergenz und bei punktweiser Konvergenz stimmen überein.

Beispiele: 1.) Sei $D = [0,1]$ und $f_n(x) := x^n$, für alle $x \in D$. Die Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist nicht gleichmäßig konvergent.

Beweis: Wäre diese Folge gleichmäßig konvergent, dann müßte sie gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in [0,1) \\ \\ 1\,, & x = 1 \end{cases}$$

konvergieren, weil $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ punktweise dagegen konvergiert. Ich zeige, daß für dieses f die Negation der Aussage in der Definition der gleichmäßigen Konvergenz gilt:

$$\exists_{\varepsilon>0}\ \forall_{n_0\in\mathbb{N}}\ \exists_{x\in D}\ \exists_{n\geq n_0}\ :\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\,.$$

Diese Aussage ist für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ richtig. Denn sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Es genügt $x \in (0,1)$ zu finden mit

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| = |f_{n_0}(x)| = x^{n_0} = \frac{1}{2}\,.$$

Dies ist äquivalent zu

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n_0} = 2^{-1/n_0} = e^{-\frac{\log 2}{n_0}}\,.$$

Wegen $\frac{\log 2}{n_0} > 0$ ist $0 < e^{-\frac{\log 2}{n_0}} < e^0 = 1$, weil die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, also gilt $0 < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n_0}} < 1$, und somit hat $x = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n_0}}$ die gewünschten Eigenschaften. ■

2.) Sei $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ die Funktionenfolge aus dem dritten Beispiel von Abschnitt 9a.). Auch diese Funktionenfolge konvergiert nicht gleichmäßig. Denn sonst müßte sie gegen $f \equiv 0$ konvergieren, weil $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ punktweise dagegen konvergiert. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt aber

$$|f_n\Big(\frac{1}{n}\Big) - f\Big(\frac{1}{n}\Big)| = |f_n\Big(\frac{1}{n}\Big)| = 1\,,$$

also ist die Negation der Aussage in der Definition der gleichmäßigen Konvergenz richtig mit $\varepsilon = 1$.

3.) Sei $D = \mathbb{R}$, $x \mapsto f_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$. Die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig gegen $x \mapsto f(x) := x$, denn im vierten Beispiel von Abschnitt 9a.) wurde gezeigt, daß

$$|x - f_n(x)| < \frac{1}{n}$$

gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ ist. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \geq n_0$

$$|f(x) - f_n(x)| = |x - f_n(x)| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon\,.$$

Es gilt nun folgender Satz:

Satz: Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$, und die Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ seien in $a \in D$ stetig. Die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiere gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$. Dann ist f in a stetig.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Gesucht ist $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$. Es gilt für alle $x \in D$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|\,.\end{aligned}$$

Da $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geq n_0$ und alle $y \in D$, also folgt

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)|\,.$$

Da f_{n_0} stetig ist, existert $\delta > 0$ mit $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $|x - a| < \delta$, also folgt

$$|f(x) - f(a)| < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$$

für $|x-a|<\delta$. ■

Dieser Satz zeigt, daß

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

gilt. Bei einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge dürfen also die beiden Grenzwerte $\lim_{x\to a}$ und $\lim_{n\to\infty}$ vertauscht werden.

Beispiel 2.) zeigt, daß die Grenzfunktion f stetig sein kann, ohne daß die Folge $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ gleichmäßig konvergiert. Der folgende Satz von Dini zeigt, dass man allerdings unter sehr starken Zusatzvoraussetzungen aus der Stetigkeit der Grenzfunktion auf gleichmäßige Konvergenz schließen kann.

Man sagt, eine Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konveriert punktweise monoton gegen f, wenn $\{|f_n(x)-f(x)|\}_{n=1}^\infty$ für alle x aus dem Definitionsbereich eine monoton fallende Nullfolge ist.

Satz (Ulisse Dini, 1845 – 1918): Es sei $D\subseteq\mathbb{R}$ eine kompakte Menge, $f_n : D\to\mathbb{R}$ und $f : D\to\mathbb{R}$ seien stetig, und die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konvergiere punktweise monoton gegen f. Dann konvergiert $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ sogar gleichmäßig gegen f.

Beweis: Sei $\varepsilon>0$. Jedem $x\in D$ ordne ich in folgender Weise eine Umgebung $U(x)$ zu: Wegen $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ existiert eine Zahl $n_0=n_0(x,\varepsilon)$ mit $|f_{n_0}(x)-f(x)|<\varepsilon$. Da f und f_{n_0} stetig sind, ist auch $|f_{n_0}-f|$ stetig, also existiert eine Umgebung $U(x)$ von x mit $|f_{n_0}(y)-f(y)|<\varepsilon$ für alle $y\in U(x)\cap D$. Das System $\mathcal{U}=\{U(x)\mid x\in D\}$ dieser Umgebungen ist eine offene Überdeckung von D, also genügen bereits endlich viele dieser Umgebungen $U(x_1),\ldots,U(x_m)$ zur Überdeckung von D, weil D kompakt ist. Sei nun

$$\tilde{n} = \max\Big\{n_0(x_i,\varepsilon)\mid i=1,\ldots,m\Big\}.$$

Zu jedem $x\in D$ existiert $i\in\{1,\ldots,m\}$ mit $x\in U(x_i)$. Nach Konstruktion von $U(x_i)$ gilt dann

$$|f_{n_0(x_i,\varepsilon)}(x)-f(x)|<\varepsilon\,,$$

und somit, weil $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ monoton gegen $f(x)$ konvergiert,

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

für alle $n\geq n_0(x_i,\varepsilon)$, also insbesondere für alle $n\geq\tilde{n}$. Da $\tilde{n}$ unabhängig von x ist, ist gleichmäßige Konvergenz gezeigt. ■

8 c.) Supremumsnorm

Bei der Definition von Konvergenz und Grenzwert von Folgen reeller Zahlen wurde entscheidend benützt, daß man auf den rellen Zahlen einen Abstandsbegriff hat, den Absolutbetrag der Differenz zweier Zahlen. In Abschnitt 9 a.) wurde gezeigt, daß man mit diesem Konvergenzbegriff von $\mathbb{R}$ auch Konvergenz auf der Algebra $F(D, \mathbb{R})$ der reellwertigen Funktionen erklären kann, die punktweise Konvergenz, ohne einen vergleichbaren einfachen Abstandsbegriff auf dieser Algebra zu haben. Auf der Algebra der *beschränkten* reellwertigen Funktionen kann man aber einen einfachen Abstandsbegriff definieren. Hierzu führt man die Norm einer Funktion ein, die ähnliche Eigenschaften hat wie der Absolutbetrag einer reellen Zahl. Definiert man mit dieser Norm Konvergenz von Funktionen ähnlich wie man mit dem Absolutbetrag Konvergenz von Zahlenfolgen definiert, dann ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz.

Definition: Sei D eine Menge, die nicht notwendig eine Teilmenge der reellen Zahlen zu sein braucht. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.
Die nichtnegative reelle Zahl

$$\|f\| := \sup_{x \in D} |f(x)|$$

heißt Norm (speziell: Supremumsnorm) von f .

Satz: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen. Dann gilt

(i) $\|f\| = 0 \iff f(x) = 0 \quad$ für alle $x \in D$
(ii) $\|cf\| = |c| \, \|f\| , \quad$ für alle $c \in \mathbb{R}$
(iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
(iv) $\|f \cdot g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

Beweis: (i), (ii) sind klar.
(iii) Für alle $x \in D$ gilt

$$\begin{aligned} |(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq \|f\| + \|g\| . \end{aligned}$$

Also ist $\|f\| + \|g\|$ eine obere Schranke für die Menge $\{|(f+g)(x)| \mid x \in D\}$, also ist

$$\|f + g\| = \sup_{x \in D} |(f+g)(x)| \leq \|f\| + \|g\| .$$

Ebenso gilt für alle $x \in D$

$$|(f \cdot g)(x)| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq \|f\| \, \|g\| ,$$

also

$$\|f \cdot g\| = \sup_{x \in D} |(fg)(x)| \leq \|f\| \cdot \|g\| .$$

■

Definition: Sei V ein Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$, die die Eigenschaften (i), (ii), (iii) hat, heißt Norm auf V. Ist A eine Algebra, dann heißt $\|\cdot\| : A \to \mathbb{R}_0^+$ eine Norm, wenn die Eigenschaften (i) – (iv) erfüllt sind.

Satz: Sei D eine Menge, $f_n, f : D \to \mathbb{R}$ seien beschränkte Funktionen. Die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen f, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

gilt.

Beweis: Es konvergiere $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ gleichmäßig gegen f. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in D$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

gilt. Somit ist

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$, also gilt $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Umgekehrt gelte $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ist für alle $n \geq n_0$, also konvergiert $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ gleichmäßig gegen f. ■

Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge, $f_n : D \to \mathbb{R}$ seien beschränkte Funktionen. Dann gilt: Die Funktionenfolge konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n, m \geq n_0$ gilt

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon .$$

($\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ist Cauchyfolge bezüglich der Norm.)

Beweis: Falls $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ gleichmäßig konvergiert, existiert eine beschränkte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, so daß $\{\|f_n - f\|\}_{n=1}^\infty$ eine Nullfolge ist. Somit existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n - f_m\| = \|f_n - f + f - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\| < 2\varepsilon$$

für alle $n, m \geq n_0$.

Sei umgekehrt $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge bezüglich der Norm. Um zu zeigen, daß $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig konvergiert, muß zunächst die Grenzfunktion f bestimmt werden.

Für jedes $x \in D$ ist $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge. Denn sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Voraussetzung $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon\,,$$

für alle $n, m, \geq n_0$. Somit ist $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ für alle $x \in D$, also ist $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ punktweise konvergent. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ die Grenzfunktion im Sinn der punktweisen Konvergenz. f ist auch Grenzfunktion im Sinn der gleichmäßigen Konvergenz. Denn sei $\varepsilon > 0$. Es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ für $n, m \geq n_0$. Sei $x \in D$ und $n \geq n_0$. Dann folgt

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\,,$$

also

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,,$$

für $n \geq n_0$, weil n_0 nicht von $x \in D$ abhängt. ∎

8 d.) Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen

Sei D eine Menge, $f_n : D \to \mathbb{R}$ seien Funktionen. Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt gleichmäßig konvergent, wenn die Folge $\{\sum_{n=1}^{m} f_n\}_{m=1}^{\infty}$ der Partialsummen gleichmäßig konvergiert.

Satz (Majorantenkriterium von Weierstraß): Sei D eine Menge, seien die Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ beschränkt mit $\|f_n\| \leq c_n$, und sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent. Dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig.

Beweis: Nach dem vorangehenden Satz genügt es zu zeigen, daß $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ das Cauchysche Konvergenzkriterium bezüglich der Norm erfüllt, d. h. daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|\sum_{k=n}^{m} f_k\| < \varepsilon\,,$$

für alle $m \geq n \geq n_0$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergiert, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\sum_{k=n}^{m} c_k| = \sum_{k=n}^{m} c_k < \varepsilon$, für $m \geq n \geq n_0$, also ergibt sich

$$\|\sum_{k=n}^{m} f_k\| \leq \sum_{k=n}^{m} \|f_k\| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k < \varepsilon\,,$$

für $m \geq n \geq n_0$. ■

8 e.) Differenzierbarkeit der Grenzfunktion

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und die Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$, konvergiere gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$. Wenn alle f_n differenzierbar sind, ist dann f differenzierbar? An einfachen Beispielen sieht man, daß dies im allgemeinen nicht richtig ist. Man kann auch fragen, ob die Folge $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ der Ableitungen gegen f' konvergiert, falls f' existiert. Das folgende Beispiel zeigt, daß auch dies nicht der Fall zu sein braucht. Betrachte $D = [0,1]$, $f_n = \frac{1}{n}x^n$. Die Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f \equiv 0$, aber $f_n' = x^{n-1}$ konvergiert nicht gleichmäßig auf $[0,1]$. Punktweise konvergiert $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ gegen

$$g(x) = \begin{cases} 0\,, & 0 \leq x < 1 \\ 1\,, & x = 1 \end{cases}\,,$$

aber $g \neq f' \equiv 0$.

Es gilt jedoch folgender Satz:

Satz: Sei $-\infty < a < b < \infty$, und seien die Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Folge $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ sei gleichmäßig konvergent, und die Folge$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiere wenigstens in einem Punkt $x_0 \in [a,b]$. Dann kovergiert $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, und es gilt

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

für alle $x \in [a,b]$.

Dies bedeutet, daß man die Bildung der Ableitung (Grenzübergang!) mit dem Grenzübergang bezüglich n vertauschen darf:

$$(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} f_n' \,.$$

Beweis: Zunächst zeigt man, daß $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt für $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| \;\leq\; & \Big|\Big(f_m(x) - f_n(x)\Big) - \Big(f_m(x_0) - f_n(x_0)\Big)\Big| \\ & + |f_m(x_0) - f_n(x_0)|\,. \end{aligned} \qquad (*)$$

Da die Funktion $f_m - f_n$ differenzierbar ist, folgt aus dem ersten Mittelwertsatz

$$\Big|\Big(f_m(x) - f_n(x)\Big) - \Big(f_m(x_0) - f_n(x_0)\Big)\Big| = |f'_m(z) - f'_n(z)|\, |x - x_0|\,,$$

mit geeignetem z zwischen x_0 und x.

Da die Folge der Ableitungen gleichmäßig konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f'_m(z) - f'_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

für alle $m, n \geq n_0$, also folgt

$$\Big|\Big(f_m(x) - f_n(x)\Big) - \Big(f_m(x_0) - f_n(x_0)\Big)\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

für alle $m, n \geq n_0$ und alle $x \in [a, b]$. Da die Folge $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert, existiert $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $m, n \geq n_1$. Somit folgt aus $(*)$

$$\|f_m - f_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für $m, n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$, also ist $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig konvergent. Die Grenzfunktion sei f.

Sei $c \in [a, b]$, und sei für $x \in [a, b]$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} - m\,, & x \neq c \\ 0\,, & x = c \end{cases}$$

mit $m = \lim_{n\to\infty} f'_n(c)$. Die Behauptung des Satzes folgt, wenn F stetig ist im Punkt $x = c$, weil dann f differenzierbar ist mit Ableitung $f'(c) = m = \lim_{n\to\infty} f'_n(c)$. Zum Beweis, daß F stetig ist in c, setze

$$F_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - f'_n(c) & x \neq c \\ 0\,, & x = c\,. \end{cases}$$

Es gilt $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$, und da F_n stetig ist, weil f_n differenzierbar ist, genügt es zu zeigen, daß $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig konvergiert. Dies ergibt sich durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf die differenzierbare Funktion $f_m - f_n$:

$$\begin{aligned} F_m(x) - F_n(x) \;&=\; \begin{cases} \dfrac{(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(c) - f_n(c))}{x - c} - \Big(f'_m(c) - f'_n(c)\Big)\,, & x \neq c \\ 0\,, & x = c\,, \end{cases} \\ &=\; \Big(f'_m(z) - f'_n(z)\Big) - \Big(f'_m(c) - f'_n(c)\Big) \end{aligned}$$

für geeignetes z zwischen x und c falls $x \neq c$, und für $z = c$ falls $x = c$. Da $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig konvergiert, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} |F_m(x) - F_n(x)| &\leq |f'_m(z) - f'_n(z)| + |f'_m(c) - f'_n(c)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

für $m, n \geq n_0$. Da n_0 unabhängig von x gewählt werden kann, ist also $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig konvergent. ■

8 f.) Potenzreihen

Sei eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und eine reelle Zahl x_0 gegeben. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ betrachte man die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

Man nennt diese Reihe eine Potenzreihe. a_m heißen Koeffizienten, x_0 Entwicklungspunkt der Potenzreihe. Beispiele sind Taylorreihen und die Reihe für die Exponentialfunktion. An diesen Beispielen sieht man, daß Potenzreihen hauptsächlich interessant sind, wenn man sie als Funktionenfolgen $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$

$$x \mapsto f_m(x) := \sum_{n=0}^{m} a_n (x - x_0)^n$$

auffaßt. Zunächst muß die Konvergenz von Potenzreihe untersucht werden.

Satz: Sei $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a < \infty$. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

ist im Fall

$$\begin{aligned} a &= 0: \qquad \text{absolut konvergent für alle } x \in \mathbb{R} \\ a &> 0: \quad \begin{cases} \text{absolut konvergent für } \ |x - x_0| < \dfrac{1}{a} \\ \text{divergent für } \ |x - x_0| > \dfrac{1}{a} \\ \text{konvergent oder divergent für } \ |x - x_0| = \dfrac{1}{a} . \end{cases} \end{aligned}$$

Falls $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=0}^{\infty}$ nicht beschränkt ist, konvergiert die Potenzreihe nur für $x = x_0$.

Beweis: Nach dem Wurzelkriterium gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ist absolut konvergent, falls

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|x-x_0|^n} = |x-x_0|\,\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

ist, also falls $|x-x_0| < \frac{1}{a}$ gilt. Falls $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|x-x_0|^n} = |x-x_0|\,\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ ist, also falls $|x-x_0| > \frac{1}{a}$ ist, divergiert die Reihe. Falls $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=0}^{\infty}$ unbeschränkt ist, ist $\{|x-x_0|\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=0}^{\infty}$ für alle $x \neq x_0$ unbeschränkt, also ist $\{a_n(x-x_0)^n\}_{n=0}^{\infty}$ keine Nullfolge, also kann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ nicht konvergieren für $x \neq x_0$. ■

Definition: Sei $a = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Die Zahl

$$r = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, & \text{für} \quad a \neq 0 \\ \infty, & \text{für} \quad a = 0, \end{cases}$$

heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n .$$

Beispiele: 1.) Der Konvergenzradius der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

ist 1, wegen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{1/n \, \log n} = e^{\lim_{n\to\infty} 1/n \log n} = e^0 = 1 ,$$

da $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$, nach der Regel von de l' Hospital, also

$$r = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 .$$

Für $x = 1$ divergieren beide Reihen, für $x = -1$ divergiert die erste, aber die zweite konvergiert.

2.) Der Konvergenzradius von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ist unendlich, wegen $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$.

Bemerkung: In Abschnitt 8 d.) wurde gezeigt, daß

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{für} \quad -\frac{1}{2} < x \leq 1$$

also

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n\,, \quad \text{für} \quad \frac{1}{2} < x \leq 2$$

gilt. Tatsächlich gilt die letzte Gleichung für alle $0 < x \leq 2$, log wird durch diese Reihe also für alle x im „Konvergenzkreis“ dargestellt.

Beweis: Siehe später

Satz: Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradius r_1 bzw. r_2. Dann gilt für alle x mit $|x-x_0| < r$, $r = \min(r_1, r_2)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(x-x_0)^n \\
\Big[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\Big]\Big[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\Big] &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)(x-x_0)^n\,.
\end{aligned}$$

Beweis: Die Aussagen folgen unmittelbar aus den Sätzen über das Rechnen mit Reihen und aus dem Satz über das Cauchyprodukt zweier Reihen (Beachte, daß der Konvergenzradius der rechtsstehenden Reihen mindestens gleich r ist, aber größer sein kann.) ∎

Satz: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Dann ist die Potenzreihe in jedem kompakten Intervall $x \in [x_0 - r_1, x_0 + r_1]$ mit $0 \leq r_1 < r$ gleichmäßig konvergent.

Beweis: Dies folgt aus dem Weierstraßschen Majorantenkriterium: Es gilt

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| r_1^n} = r_1 \frac{1}{r} < 1\,,$$

also liefert das Wurzelkriterium die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_1^n\,.$$

Wegen $|a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n| r_1^n$ für $|x-x_0| \leq r_1$ folgt nun die Behauptung aus dem Majorantenkriterium. ∎

Folgerung: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist die durch diese Potenzreihe dargestellte Funktion $f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, stetig.

Beweis: Da $\sum_{n=0}^{m} a_n(x-x_0)^n$ stetig ist, und da die Potenzreihe in jedem kompakten Intervall $[x_0 - r_1, x_0 + r_1]$ gleichmäßig konvergiert, ist die Grenzfunktion f in jedem derartigen Intervall stetig. Wegen $(x_0 - r, x_0 + r) = \bigcup_{0 \leq r_1 < r} [x_0 - r_1, x_0 + r_1]$ ist f im ganzen

Konvergenzkreis stetig. ∎

Jede der Funktionen $f_m(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n(x-x_0)^n$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$f'_m(x) = \sum_{n=1}^{m} na_n(x-x_0)^{n-1}\,.$$

Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ hat denselben Konvergenzradius wie die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Zum Beweis beachte man, daß wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = \frac{1}{x-x_0}\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^n$$

und wegen

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|a_n|} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\,\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\\ &= \overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\end{aligned}$$

die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ absolut konvergiert für alle x mit $0 < |x-x_0| < \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, also stimmt diese Zahl mit dem Konvergenzradius überein. Also ist die Folge der Ableitungen $\{f'_m\}_{m=1}^{\infty}$ in jedem kompakten Teilintervall des Konvergenzkreises gleichmäßig konvergent. Aus dem Satz über die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion ergibt sich also, daß die Funktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ in jedem kompakten Teilintervall des Konvergenzkreises differenzierbar ist, also sogar im ganzen Konvergenzkreis, und daß die Ableitung gliedweise berechnet werden darf:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}\,.$$

Durch Wiederholung dieses Schlusses ergibt sich:

Satz: Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist f beliebig oft differenzierbar im Konvergenzkreis, und es gilt

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$$

Anwendung: Es gilt

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n$$

für alle $-1 < x < 1$. Zum Beweis beachte man, daß der Konvergenzradius der rechtsstehenden Reihe 1 ist, also konvergiert diese Reihe für $|x| < 1$ und stellt dort eine beliebig oft differenzierbare Funktion dar. Für die Ableitung dieser Funktion ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \frac{1}{1+x} = \Big[\log(1+x)\Big]',$$

also gilt

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n + C$$

mit geeigneter Konstanten C. Um C zu bestimmen, setze man $x = 0$. Wegen $\log(1) = 0$ ergibt sich $C = 0$.

Identitätssatz für Potenzreihen: Seien die Konvergenzradien r_1, r_2 der Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ größer als Null, und sei $0 < r \leq \min(r_1, r_2)$. In der Umgebung $U = U_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, |x - x_0| < r\}$ gelte

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\,,$$

für alle $x \in U$. Dann gilt $a_n = b_n$, für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Beweis: Zunächst wähle man $x = x_0$. Dann folgt

$$a_0 = b_0\,.$$

Angenommen, es sei für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gezeigt, daß $a_k = b_k$ gilt für alle $0 \leq k \leq n$. Zu zeigen ist, daß dann auch $a_{n+1} = b_{n+1}$ gilt. Aus der Induktionsannahme und aus der Voraussetzung des Satzes folgt

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k(x-x_0)^k\,,$$

also

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k - b_k)(x-x_0)^k = 0 \quad \text{für alle } x \in U\,.$$

Für $x \in U$, $x \neq x_0$, ergibt sich hieraus

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k - b_k)(x-x_0)^{k-n-1} = 0\,,$$

also

$$0 = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k - b_k)(x-x_0)^{k-n-1}$$
$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k - b_k)(x_0-x_0)^{k-n-1} = a_{n+1} - b_{n+1}\,,$$

also $a_{n+1} = b_{n+1}$, weil

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k - b_k)(x-x_0)^{k-n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(a_{k+n+1} - b_{k+n+1})(x-x_0)^k$$

eine in U konvergente Potenzreihe ist, also dort stetig ist. ■

Abelscher Grenzwertsatz: Jede Potenzreihe definiert eine im Innern des Konvergenzkreises stetige Funktion. Eine Aussage über die Stetigkeit der Potenzreihe auf dem Rand des Konvergenzkreises erhält man aus folgendem Satz:

Satz: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe und sei $z \in \mathbb{R}$ ein Punkt auf dem Rand des Konvergenzkreises, so daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-x_0)^n$ konvergiert. Dann ist die Potenzreihe im Intervall $[z, x_0]$ (falls $z < x_0$) bzw. im Intervall $[x_0, z]$ gleichmäßig konvergent.

Folgerung (Abelscher Grenzwertsatz): (Niels Hendrik Abel, 1802 – 1829) Sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ in einem Punkt z auf dem Rand des Konvergenzkreises noch konvergent. Dann ist die Potenzreihe im Punkt z stetig.

Beweis des Satzes: Sei o.B.d.A. $z > x_0$ und sei

$$g_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j(z-x_0)^j\,.$$

Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=1}^{n} a_k(z-x_0)^k\Big(\frac{x-x_0}{z-x_0}\Big)^k$$
$$= -\sum_{k=1}^{n}(g_k - g_{k-1})\Big(\frac{x-x_0}{z-x_0}\Big)^k$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} g_k\Big[\Big(\frac{x-x_0}{z-x_0}\Big)^{k+1} - \Big(\frac{x-x_0}{z-x_0}\Big)^k\Big] - g_n\Big(\frac{x-x_0}{z-x_0}\Big)^n + g_0\Big(\frac{x-x_0}{z-x_0}\Big)\,.$$

Aus dieser Gleichung folgt: Um zu zeigen, daß die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ in $[x_0, z]$ gleichmäßig konvergiert, genügt es zu zeigen, daß die Funktionenfolge

$$\Big\{g_n\Big(\frac{x-x_0}{z-x_0}\Big)^n\Big\}_{n=1}^{\infty}$$

und die Funktionenreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k \Big[\Big(\frac{x-x_0}{z-x_0} \Big)^{k+1} - \Big(\frac{x-x_0}{z-x_0} \Big)^{k} \Big]$$

gleichmäßig konvergieren. Es gilt

$$\begin{aligned} \sup_{x_0 \le x \le z} \Big| g_n \Big(\frac{x-x_0}{z-x_0} \Big)^n \Big| &= \Big| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j (z-x_0)^j \Big| \sup_{x_0 \le x \le z} \Big| \frac{x-x_0}{z-x_0} \Big|^n \\ &\le \Big| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j (z-x_0)^j \Big| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty , \end{aligned}$$

also ist die Folge $\{ g_n (\frac{x-x_0}{z-x_0})^n \}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig konvergent gegen 0. Weiter gilt: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle n_0 so groß, daß $|g_k| < \varepsilon$ gilt für alle $k \ge n_0$. Wegen

$$\Big(\frac{x-x_0}{z-x_0} \Big)^{k+1} - \Big(\frac{x-x_0}{z-x_0} \Big)^{k} \le 0$$

für alle $x \in [x_0, z]$ folgt für alle solche x und alle $m > n \ge n_0$

$$\begin{aligned} &\Big| \sum_{k=n+1}^{m} g_k \Big[\Big(\frac{x-x_0}{z-x_0} \Big)^{k+1} - \Big(\frac{x-x_0}{z-x_0} \Big)^{k} \Big] \Big| \\ &\le \sum_{k=n+1}^{m} |g_k| \Big[\Big(\frac{x-x_0}{z-x_0} \Big)^{k} - \Big(\frac{x-x_0}{z-x_0} \Big)^{k+1} \Big] \\ &\le \varepsilon \sum_{k=n+1}^{m} \Big[\Big(\frac{x-x_0}{z-x_0} \Big)^{k} - \Big(\frac{x-x_0}{z-x_0} \Big)^{k+1} \Big] \\ &= \varepsilon \Big[\Big(\frac{x-x_0}{z-x_0} \Big)^{n+1} - \Big(\frac{x-x_0}{z-x_0} \Big)^{m+1} \Big] \le \varepsilon \Big(\frac{x-x_0}{z-x_0} \Big)^{n+1} \le \varepsilon , \end{aligned}$$

folglich ist nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k \Big[\Big(\frac{x-x_0}{z-x_0} \Big)^{k+1} - \Big(\frac{x-x_0}{z-x_0} \Big)^{k} \Big]$$

gleichmäßig konvergent für x aus dem Intervall $[x_0, z]$. ■

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ hat Konvergenzradius $r = 1$. Da $\sum_{1=0}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$ konvergiert, ist die Funktion $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ stetig in $[-1, 1)$.

8 g.) Trigonometrische Funktionen

Sinus und Cosinus: Die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ haben Konvergenzradius $r = \infty$, konvergieren also auf der ganzen reellen Achse. Denn es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Big| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \exp(|x|) ,$$

also ist die Reihe zur Exponentialfunktion eine konvergente Majorante. Somit sind die Funktionen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

auf der ganzen reellen Achse definierte beliebig oft differenzierbare Funktionen. Es gilt

$$\sin' x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

und

$$\cos' x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sin x\,,$$

und

$$\sin 0 = \cos' 0 = 0\,, \quad \sin' 0 = \cos 0 = 1\,.$$

Hieraus resultiert

$$\begin{aligned} \sin'' x + \sin x &= 0\,; \\ \sin 0 = 0\,, \quad \sin' 0 &= 1 \\ \cos'' x + \cos x &= 0 \\ \cos 0 = 1\,, \quad \cos' 0 &= 0\,. \end{aligned}$$

Satz: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit $f''(x) + f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und mit $f(0) = a$, $f'(0) = b$. Dann gilt

$$f(x) = a \cos x + b \sin x\,.$$

Dies bedeutet, daß die „Differentialgleichung“ $f'' + f = 0$ eine eindeutig bestimmte Lösung hat, die auch noch die Anfangsbedingungen $f(0) = a$, $f'(0) = b$ erfüllt.

Beweis: Es ist klar, daß $g(x) = a \cos x + b \sin x$ die gewünschten Eigenschaften hat. Sei nun $h(x) = f(x) - g(x)$. Im Folgenden wird gezeigt, daß $h \equiv 0$ ist. Hierzu beachte man, daß für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h''(x) + h(x) = f'' + f - g'' - g = 0\,,$$

und $h(0) = h'(0) = 0$ ist. Durch Multiplikation der Differentialgleichung mit $h'(x)$ folgt

$$h''(x)h'(x) + h(x)h'(x) = 0\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big[h'(x)\Big]^2 &= 2h''(x)\,h'(x)\,,\\ \frac{d}{dx}\Big[h(x)\Big]^2 &= 2h(x)\,h'(x)\,,\end{aligned}$$

kann diese Gleichung in der Form

$$\frac{d}{dx}\Big\{\Big[h'(x)\Big]^2+\Big[h(x)\Big]^2\Big\}=0$$

geschrieben werden. Hieraus folgt, daß $[h'(x)]^2+[h(x)]^2$ konstant ist. Um diesen konstanten Wert zu berechnen setze man $x=0$. Wegen $[h'(0)]^2+[h(0)]^2=0$ folgt dann $[h'(x)]^2+[h(x)]^2=0$, also $h'(x)=h(x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Dies ergibt

$$f(x)=g(x)=a\cos x+b\sin x\,.$$

Damit ist der Satz bewiesen. ■

Mit diesem Satz kann das Additionstheorem für sin und cos bewiesen werden.

Satz: (Additionstheoreme) Für alle $x,y\in\mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x\cos y+\sin y\cos x\\ \cos(x+y) &= \cos x\cos y-\sin x\sin y\,.\end{aligned}$$

Beweis: Für die Funktion $x\mapsto f(x):=\sin(x+y)$ folgt

$$f''(x)+f(x)=0\,,\quad \text{für alle } x\in\mathbb{R}\,,$$

$$f(0)=\sin y\,,\quad f'(0)=\cos y\,.$$

Also folgt aus dem vorangehenden Satz

$$\sin(x+y)=f(x)=\sin y\cos x+\cos y\sin x\,.$$

Ebenso zeigt man dies für $\cos(x+y)$. ■

Aus diesen Additionstheoremen kann man einige weitere Formeln herleiten. Man beachte zunächst, daß sin eine ungerade Funktion ist, d.h. es gilt

$$\sin(-x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=-\sin x\,.$$

Ebenso folgt, daß cos eine gerade Funktion ist:

$$\cos(-x) = \cos x\,.$$

Aus den Additionstheoremen erhält man also

$$\begin{aligned}\sin(x-y) &= \sin\Big(x+(-y)\Big) = \sin x\cos(-y) + \sin(-y)\cos x\\ &= \sin x\cos y - \sin y\cos x\end{aligned}$$

und

$$\cos(x-y) = \cos x\cos(-y) - \sin x\sin(-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y\,.$$

Für $x = y$ erhält man aus der letzten Formel wegen $\cos 0 = 1$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,.$$

Hieraus folgt $|\cos x| \leq 1\,, \ \ |\sin x| \leq 1\,.$

Definition von π: Aus der Taylorformel folgt mit $\cos 0 = -\cos'' 0 = 1\,,$
$\cos' 0 = \cos^{(3)}(0) = 0\,, \ \ \cos^{(4)}(x) = \cos x\,,$ daß

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos(\vartheta x)}{24}\,x^4\,,$$

für geeignetes $\vartheta\,, \ \ 0 < \vartheta < 1\,.$ Für $x = 2$ ergibt sich hieraus wegen $|\cos(\vartheta x)| \leq 1\,,$ daß

$$\cos 2 = 1 - 2 + 16\,\frac{\cos(2\vartheta)}{24} = -1 + \frac{2}{3}\,\cos(2\vartheta) \leq -\frac{1}{3}\,.$$

Wegen $\cos 0 = 1$ muß also die Funktion cos nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle zwischen 0 und 2 haben. Natürlich kann cos mehrere Nullstellen zwischen 0 und 2 haben. Das Infimum der Menge der Nullstellen von cos zwischen 0 und 2 werde $\frac{\pi}{2}$ genannt. Da cos stetig ist, ist $\frac{\pi}{2}$ selbst eine Nullstelle von cos . Zum Beweis wähle man eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$ und mit $\cos x_n = 0\,.$ Es folgt dann

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty}\cos(x_n) = 0\,.$$

Also ist π definiert als das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle von cos .

Aus $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ folgt

$$\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = 1\,.$$

Da der Cosinus zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ positiv ist, folgt aus

$$\sin' x = \cos x\,,$$

daß sin streng monoton wachsend ist im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$. Wegen $\sin 0 = 0$ ergibt sich hieraus, daß $\sin\frac{\pi}{2} > 0$ sein muß, also

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1\,.$$

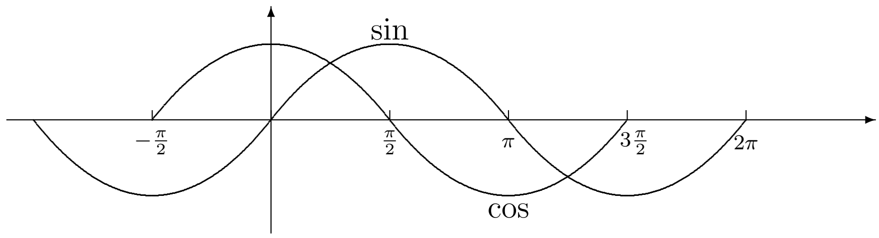
Aus dem Additionstheorem folgt nun

$$\sin\Big(\frac{\pi}{2} + x\Big) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x + \cos\frac{\pi}{2}\sin x = \cos x\,,$$

also

$$\sin\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big) = \cos(-x) = \cos x = \sin\Big(\frac{\pi}{2} + x\Big)\,. \qquad (*)$$

Diese Formel liefert die Werte von sin im Intervall $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ aus den Werten im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$.



Aus $\sin(-x) = -\sin x$ ergeben sich dann die Werte im Intervall $[-\pi, \pi]$. Die weitere Fortsetzung erhält man aus der Periodizität:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x\,.$$

Diese Formel erhält man folgendermaßen: Aus $(*)$ ergibt sich

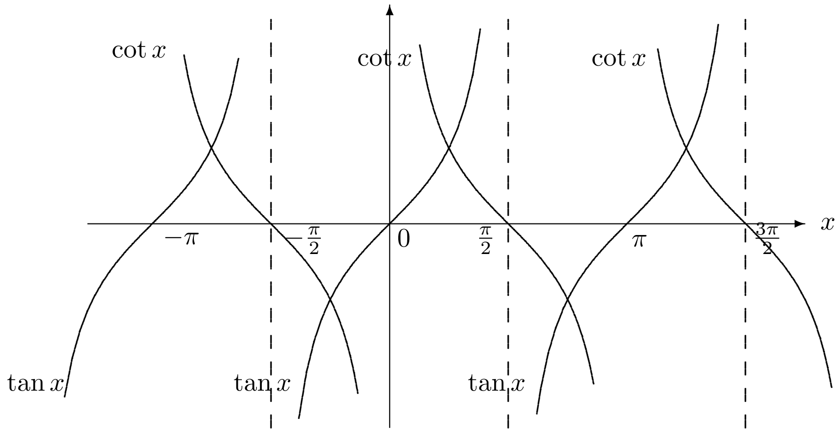
$$\sin(x+\pi) = \sin\Big(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + x\Big) = \sin\Big(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} + x)\Big) = \sin(-x) = -\sin x\,.$$

Also

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x + \pi + \pi) = -\sin(x + \pi) = \sin x\,.$$

Tangens und Cotangens: Man definiert

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\,, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}\,.$$



Aus den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus ergeben sich Additionstheoreme für Tangens und Cotanges:

$$
\begin{aligned}
\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \\
\cot(x+y) &= \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}
\end{aligned}
$$

Als Ableitung erhält man:

$$
\begin{aligned}
\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\
\cot' x = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}\,.
\end{aligned}
$$

Arcus–Funktionen: sin und cos sind periodisch, also nicht injektiv, folglich existieren zu sin und cos keine Umkehrfunktionen. Wenn man aber sin und cos auf geeignete Intervalle einschränkt, existieren Umkehrfunktionen.

Es ist $\cos x > 0$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, nach Definition von π. Wegen $\sin' x = \cos x$ ist also sin streng monoton wachsend im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, also injektiv, also existiert zu $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ die Umkehrfunktion, ebenso existieren die Umkehrfunktionen in den Intervallen

$$\sin\left[\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi\right] \to [-1,1]\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Man muß daher immer genau angeben, welche dieser unendlich vielen Umkehrfunktionen man meint. Ist nichts weiter gesagt, meint man die Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

zu $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1],.$ (Arcus Sinus).

Aus Gründen, die in der Funktionentheorie ihren Ursprung haben, bezeichnet man die unendlich vielen verschiedenen Umkehrfunktionen

$$x \mapsto (\arcsin x) + 2n\pi\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

und

$$x \mapsto -(\arcsin x) + (2n+1)\pi\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

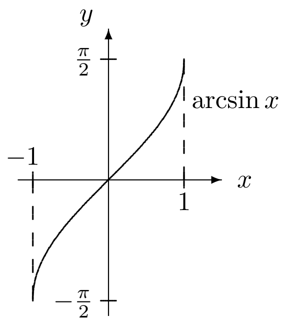
auch als die Zweige der Umkehrfunktion von Sinus. Die Funktion $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ heißt dann Hauptwert der Umkehrfunktion.

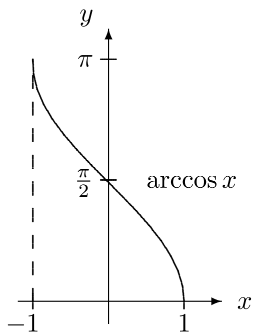
Entsprechend bezeichnet man die Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]\,, \qquad \text{(Arcus Cosinus)}$$

zur Funktion $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ als Hauptwert der Umkehrfunktion zu Cosinus. Es existieren aber die unendlich vielen weiteren Umkehrfunktionen

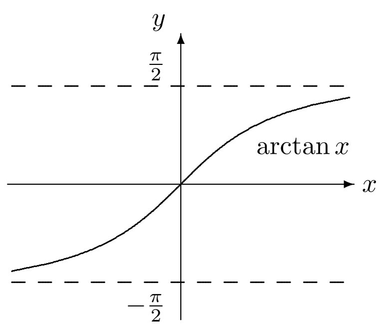
$$x \mapsto \pm(\arccos x) + 2n\pi\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$





Ähnlich liegen die Verhältnisse bei tan und cot. Als Hauptwert zur Umkehrfunktion von tan bezeichnet man die Funktion

$$\arctan : [-\infty, \infty] \to \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big]\,. \qquad \text{(Arcus Tangens)}$$



Ich betrachte im Folgenden die Hauptwerte der Arcusfunktionen. Für die Ableitungen erhält man:

$$\begin{aligned}
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-[\sin(\arcsin x)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\arccos x)' &= \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1-[\cos(\arccos x)]^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\arctan' x &= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \Big[\cos(\arctan x)\Big]^2 \\
&= \frac{1}{1+[\tan(\arctan x)]^2} = \frac{1}{1+x^2}\,.
\end{aligned}$$

Man kann die Funktionen arcsin, arccos und arctan in Potenzreihen entwickeln. Zum Beispiel gilt

$$\frac{d}{dt}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\,,$$

für $|x| < 1$. Auch die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$$

hat den Konvergenzradius 1, und ist Stammfunktion zu $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, also gilt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1} + C$$

in $|x| < 1$, mit einer geeigneten Konstanten C. Wegen $\arctan 0 = 0$ folgt $C = 0$, also folgt

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$$

für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Nach dem Leibnizkriterium ist die rechtsstehende Reihe für $x = 1$ noch konvergent, also definiert die Potenzreihe eine stetige Funktion im Punkt $x = 1$. Da auch arctan stetig ist, sind durch die Potenzreihe und durch die Funktion arctan zwei stetige Fortsetzungen der Funktion arctan vom Intervall $(-1,1)$ auf $(-1,1]$ gegeben. Da die stetige Fortsetzung eindeutig ist, muß also gelten

$$\arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,.$$

Wegen

$$\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 - 1$$

folgt

$$0 = 2\Big(\cos\frac{\pi}{4}\Big)^2 - 1\,,$$

also

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,,$$

und

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{1-\Big(\cos\frac{\pi}{4}\Big)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,,$$

somit

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1\,.$$

Dies ergibt $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, d.h.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,.$$

Theoretisch kann aus dieser Reihe π berechnet werden, die Konvergenz ist aber sehr langsam.

9 Komplexe Zahlen (Ausblick)

Es gibt keine relle Zahl x, die die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

löst. Denn sonst müßte $x^2 = -1 < 0$ sein, was unmöglich ist, weil aus den Anordnungsaxiomen $x^2 \geq 0$ folgt für jede reelle Zahl x.

Wenn man erreichen will, daß diese Gleichung lösbar ist, muß man zur Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen also noch weitere Elemente hinzunehmen, also muß man zu einer Obermenge $\mathbb{C}$ der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ übergehen. Man kann nicht erreichen, daß in $\mathbb{C}$ alle Axiome (A 1) – (A 14) für die reellen Zahlen erfüllt sind, weil durch diese Axiome $\mathbb{R}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Man möchte aber erreichen, daß möglichst viele dieser Axiome erfüllt sind. Insbesondere möchte man natürlich, daß $\mathbb{C}$ die Körperaxiome erfüllt, daß man in $\mathbb{C}$ also addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren kann wie in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{C}$ eine Obermenge von $\mathbb{R}$ sein soll möchte man auch, daß die in $\mathbb{C}$ neu definierte Addition und Multiplikation bei Einschränkung auf die Teilmenge $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation übereinstimmt. Außerdem muß es in $\mathbb{C}$ ein Element i geben mit

$$i^2 = -1\,.$$

Diese Forderungen werden erfüllt, wenn man $\mathbb{C}$ folgendermaßen konstruiert:

Es sei $\mathbb{C}$ die Menge der geordneten Paare (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$, also $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Auf $\mathbb{C}$ erkläre man Addition und Multiplikation folgendermaßen:

$$\begin{aligned} (a,b) + (a',b') &:= (a + a', b + b') \\ (a,b) \cdot (a',b') &= (aa' - bb',\, ab' + ba')\,. \end{aligned}$$

Satz: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Körper, der einen zu $\mathbb{R}$ isomorphen Unterkörper enthält. In $\mathbb{C}$ ist die Gleichung $z^2 + 1 = 0$ lösbar.

Beweis: $(\mathbb{C}, +)$ ist eine kommutative Gruppe: Denn es gilt

$$\begin{aligned} (a,b) + (a',b') &= (a',b') + (a,b)\,, \\ (a,b) + \Big((c,d) + (e,f)\Big) &= \Big((a,b) + (c,d)\Big) + (e,f)\,. \end{aligned}$$

Das eindeutig bestimmte neutrale Element ist $(0, 0)$. Die Gleichung $(a, b) + (x, y) = 0$ ist eindeutig lösbar in $\mathbb{C}$. Die Lösung ist $(x, y) = (-a, -b)$.

Durch nachrechnen sieht man, daß auch für die Multiplikation das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz erfüllt sind, und daß das Distributivgesetz gilt.

Für die Multiplikation ist $(1,0)$ das eindeutig bestimmte neutrale Element. Denn es gilt

$$(a,b)\cdot(1,0) = (a\cdot 1 - b\cdot 0,\;\; a\cdot 0 + b\cdot 1) = (a,b)\,.$$

Außerdem hat für jedes $(a,b) \neq 0$ die Gleichung

$$(a,b)\cdot(x,y) = (1,0)$$

eine eindeutig bestimmte Lösung. Denn (x,y) ist Lösung dieser Gleichung genau dann wenn

$$(ax - by\,,\;\; bx + ay) = (1,0)\,,$$

gilt, d. h. genau dann wenn x, y Lösung sind des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0\,, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 > 0$$

ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar, die Lösung ist

$$x = \frac{a}{a^2+b^2}\,, \quad y = \frac{-b}{a^2+b^2}\,.$$

Also ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein kommutativer Körper.
Die Abbildung

$$x \mapsto I(x) = (x,0) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

ist injektiv und ein Homomorphismus, d. h. es gilt

$$\begin{aligned} I(x+y) &= (x+y,0) &&= (x,0)+(y,0) &&= I(x)+I(y) \\ I(x\cdot y) &= (x\cdot y,0) &&= (x,0)\cdot(y,0) &&= I(x)\cdot I(y)\,, \end{aligned}$$

also ist $\mathbb{R}$ isomorph zu dem Unterkörper $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{C}$. Das Element $z = (0,1)$ ist Lösung der Gleichung

$$z^2 + (1,0) = 0\,.$$

Damit ist der Satz bewiesen. ■

Man bezeichnet $\mathbb{C}$ als den Körper der komplexen Zahlen.

Zur Abkürzung setzt man

$$1 := (1,0)\,, \quad i := (0,1)\,.$$

Man kann dann jede komplexe Zahl $z = (a,b)$ in der Form

$$(a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1) = a + bi$$

schreiben. Daher bezeichnet man a als Realteil und b als Imaginärteil von z, und man schreibt auch

$$\operatorname{Re} z = a\,, \quad \operatorname{Im} z = b\,.$$

Es ist nicht möglich auf dem Körper $\mathbb{C}$ eine Anordnung $<$ zu erklären, die die im Kapitel 2 angegebenen Anordnungsaxiome (A 10) – (A 13) erfüllt. Denn es wurde gezeigt, daß aus den Körperaxiomen und Anordnungsaxiomen für das neutrale Element der Multiplikation 1 und für jedes Element des Körpers z immer folgt

$$-1 < 0\,, \quad z^2 \geq 0\,.$$

Dies steht im Widerspruch zur Gleichung

$$i^2 = -1\,,$$

die in $\mathbb{C}$ erfüllt ist. Man kann jedoch als Ersatz den Absolutbetrag von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ fortsetzen. Zunächst definiert man: Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\overline{z} = a - ib$$

die zu z konjugiert komplexe Zahl. Natürlich gilt $\overline{\overline{z}} = z$. Es gilt auch

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}\,.$$

Definition: Die Zahl $|x| := \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ heißt absoluter Betrag von z.

Beachte, daß $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ ist für alle $z = a + ib$.

Satz: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

1.) $|z| = 0 \iff z = 0$

2.) $|zw| = |z|\,|w|$

3.) $|z + w| \leq |z| + |w|$

Beweis:

1.) $|z| = 0 \iff \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \iff a = 0 \;\text{ und }\; b = 0\,.$

2.) $|zw| = \sqrt{zw \cdot \overline{zw}} = \sqrt{z\overline{z} \cdot w\overline{w}} = \sqrt{z\overline{z}}\,\sqrt{w\overline{w}} = |z| \cdot |w|$

3.) Es gilt

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + z\overline{w} + w\overline{z} + |w|^2\,.$$

Für die beiden mittleren Terme folgt

$$z\overline{w} + \overline{z}w = z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = 2\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \leq 2|z\overline{w}| = 2|z|\,|\overline{w}| = 2|z|\,|w|\,,$$

also

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2\,,$$

somit

$$|z + w| \leq |z| + |w|\,.$$

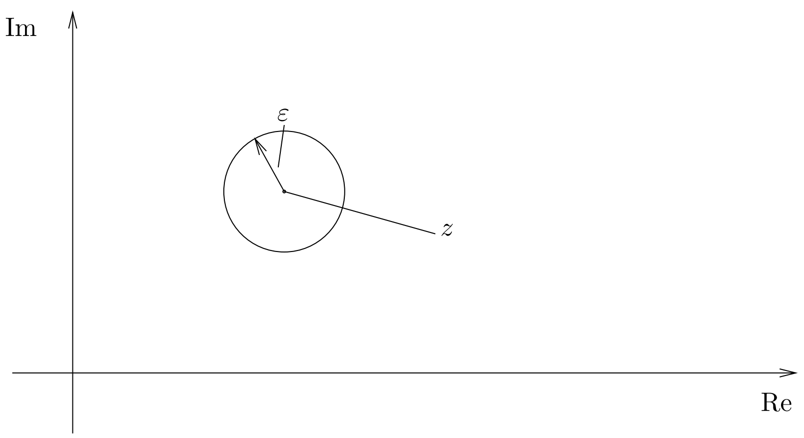
■

Definition: Eine Folge $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ komplexer Zahlen heißt konvergent, wenn $z \in \mathbb{C}$ existiert, so daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Die Zahl z heißt Grenzwert der Folge.

Dies bedeutet, daß für $n \geq n_0$ alle Glieder z_n innerhalb eines Kreises um z mit Radius ε liegen müssen.



Satz: (i) Eine Folge $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n + iy_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist genau dann konvergent mit dem Grenzwert $z = x + iy$, wenn in $\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x\,, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

gilt.
(ii) Eine Folge $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ komplexer Zahlen $z_n = x_n + iy_n$ ist genau dann Cauchyfolge, wenn $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ sind.

Der Beweis bleibt dem Leser überlassen.

Folgerung: Eine Folge $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ komplexer Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie Cauchyfolge ist.

Definition: Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ mit $z_n \in \mathbb{C}$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Satz: Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Beweis: Da $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergiert, existiert zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl n_0, so daß für alle $m \geq n \geq n_0$ gilt

$$|\sum_{\ell=n}^{m} z_n| \leq \sum_{\ell=n}^{m} |z_n| < \varepsilon\,,$$

also ist $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergent nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium. ∎

Folgerung: Seien $z_0, a_n \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

konvergiert absolut für $z \in \mathbb{C}$ mit

$$|z - z_0| < r = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\,.$$

r heißt Konvergenzradius und $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - z_0| < r\}$ Konvergenzkreis.

Beweis: Für $|z - z_0| < r$ ist

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|z - z_0|^n} = |z - z_0|\, \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1\,,$$

also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ absolut. ∎

Folgerung: Die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

konvergieren für alle $z \in \mathbb{C}$. Also können die Exponentialfunktion

$$e^z := \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \,,$$

der Sinus

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

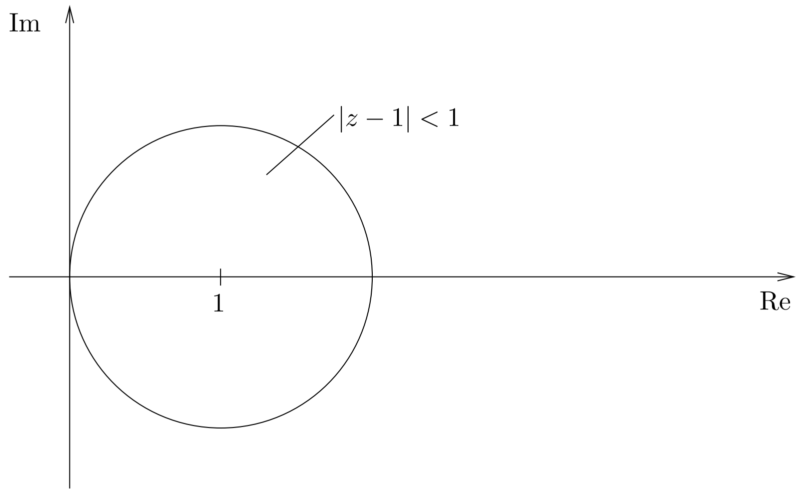
und der Cosinus

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

auf ganz $\mathbb{C}$ erklärt werden. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, also ist

$$\log z := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

im ganzen Kreis $|z-1| < 1$ erklärt.



Die Sätze über das Cauchyprodukt absolut konvergenter Reihen gelten natürlich auch für komplexe Reihen. Also gilt

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
Sei nun $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos x + i \sin x\,. \end{aligned}$$

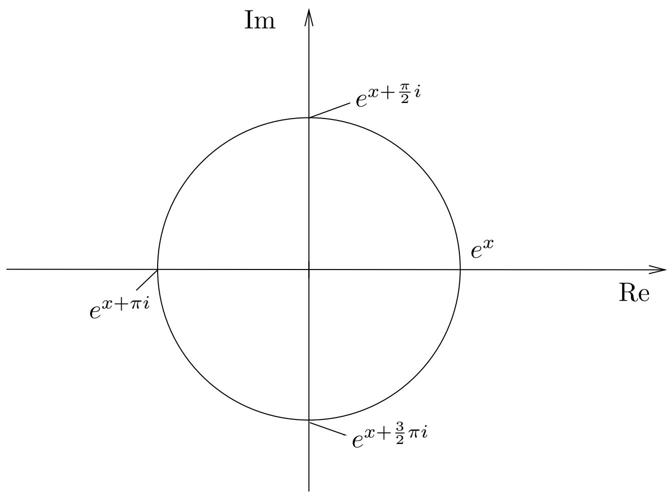
Also folgt für $z = x + iy\,,\ \ x, y \in \mathbb{R}$:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\, e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)\,,$$

folglich

$$\begin{aligned} |e^z| &= |e^x(\cos y + i \sin y)| = |e^x|\,|\cos y + i \sin y| \\ &= e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x\,. \end{aligned}$$

Also liegt e^z auf dem Kreis mit Radius e^x um den Nullpunkt:



Insbesondere folgt:

$$\begin{aligned} e^{\frac{\pi}{2}i} &= \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i\,, \\ e^{\pi i} &= \cos\pi + i \sin\pi = -1\,, \\ e^{\frac{3}{2}\pi i} &= \cos\frac{3}{2}\pi + i \sin\frac{3}{2}\pi = -i\,, \\ e^{2\pi i} &= \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1\,. \end{aligned}$$

Schließlich gilt für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= e^{ix}e^{iy} \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= [\cos x \cos y - \sin x \sin y] + i[\sin x \cos y + \cos x \sin y]\,, \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \operatorname{Im} e^{i(x+y)} = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \operatorname{Re} e^{i(x+y)} = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,, \end{aligned}$$

d. h. die Additionstheoreme für sin und cos sind eine Folgerung aus dem Additionstheorem für die Exponentialfunktion.