Handschrifterkennung mit KI

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Künstliche Intelligenz und Mathematik vereint

Künstliche Intelligenz (KI) ist dabei, unsere Welt nachhaltig zu verändern. Aber was steckt hinter ihrem Erfolg? Die Antwort liegt in der **Mathematik**, insbesondere in der **Optimierung**. Mithilfe der Mathematik können wir komplexe Probleme exakt formulieren. Die Optimierung sucht dann gezielt nach den besten Lösungen, indem sie die Parameter so anpasst, dass die Leistung von KI-Systemen maximiert wird.

Anwendung: Handschrifterkennung

Bei der Handschrifterkennung trainiert man ein neuronales Netz mit einem Datensatz $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$, wobei x_i Bilder von handgeschriebenen Ziffern und y_i die zugehörigen korrekten Zahlen sind. Das Ziel ist, die Parameter θ des Netzes so anzupassen, dass die Vorhersage $f(x_i; \theta)$ möglichst genau dem echten Wert y_i entspricht. Nach dem Training soll das Netz auch für neue, zuvor unbekannte Eingabedaten gute Ergebnisse liefern, anstatt nur die gelernten Trainingsbeispiele „auswendig“ zu kennen.

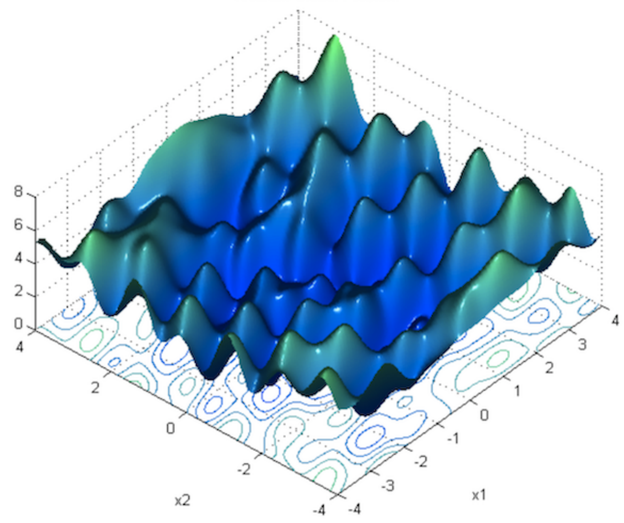
Challenges

- **Overfitting:** Das Netz passt sich stark an die Trainingsdaten an und performt schlecht auf neuen Daten.
- **Lokale Minima:** Die „Fehlerlandschaft“, in der wir nach optimalen Parametern suchen, ist oft sehr komplex. Sie enthält viele lokale Minima, die es erschweren, die global beste Lösung zu finden.
- **Rechenaufwand:** Das Training großer Netze erfordert erhebliche Rechenleistung und Zeit.

Optimierungsverfahren

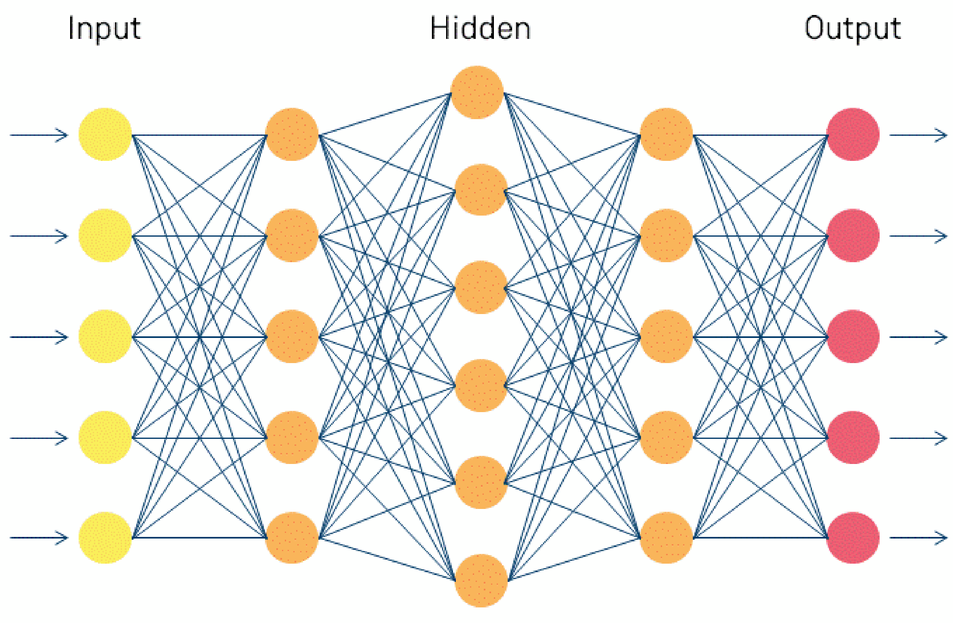
Ein neuronales Netz wird oft mit Hilfe von Gradientenverfahren trainiert. Dabei werden die Parameter θ Schritt für Schritt in Richtung des negativen Gradienten der Fehlerfunktion geändert. Wichtig ist dabei, dass wir das Modell $f(x_i; \theta)$ in die Zielfunktion einsetzen und anschließend **nach θ ableiten**, um die Richtung der schnellsten Abnahme zu bestimmen. Um bei sehr großen Datensätzen effizient zu sein, verwendet man häufig das **stochastische Gradientenverfahren (SGD)**.

Optimierung eines Neuronalen Netzes



Darstellung einer komplexen „Fehlerlandschaft“, wo man versucht das globale minima zu finden.

Architektur eines Neuronalen Netzes



Eine typische Architektur: Eingangsschicht, verborgene Schichten (Hidden Layers) und Ausgabeschicht.

Mathematische Modellierung des Lernens

Das Training eines neuronalen Netzes kann als klassisches **Funktionsanpassungsproblem** (Regressionsproblem) formuliert werden:

$$\min_{\theta} L(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ell(y_i, f(x_i; \theta)).$$

Hier misst $\ell(y_i, f(x_i; \theta))$, wie weit die Vorhersage vom wahren Wert entfernt ist. Unser Ziel ist es, die Parameter θ so zu wählen, dass der durchschnittliche Fehler $L(\theta)$ minimal wird. Ein Plot der Zielfunktion ist oben dargestellt.

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Optimierung

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster