Optimale Murmelbahn

Lange Nacht der Mathematik 2024

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

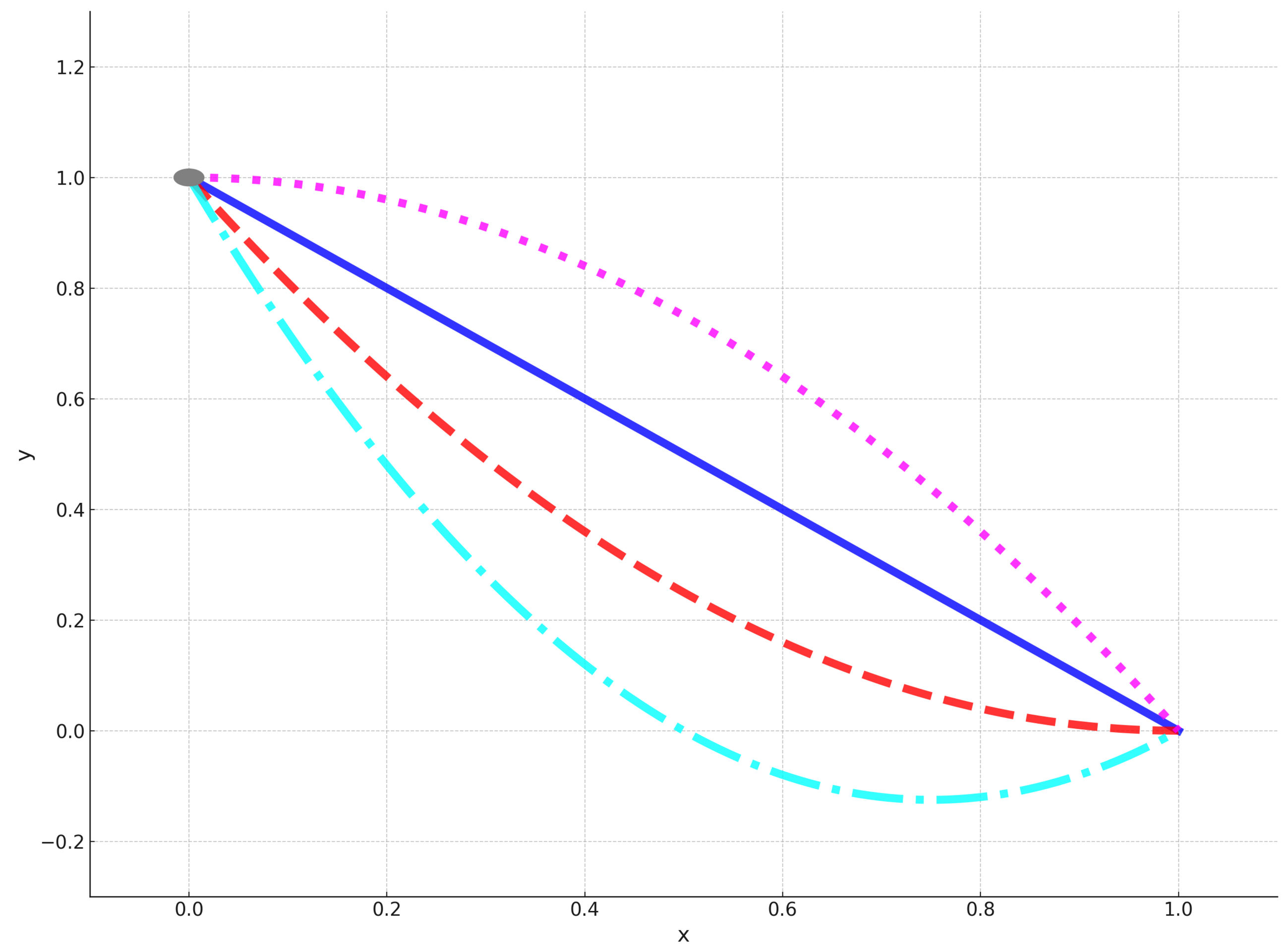
Das Problem

Das **Brachistochronenproblem**, ein Kernproblem der *Variationsrechnung*, wurde 1696 von Johann Bernoulli formuliert. Es beschäftigt sich mit der Konstruktion einer Murmelbahn, auf der eine Murmel unter dem Einfluss der Schwerkraft von einem festen Start- zu einem Zielpunkt in minimaler Zeit gelangt. **Wie sieht die optimale Kurve aus?**

Anwendung

Das zuvor erwähnte Beispiel fällt in die Kategorie der **Designoptimierung**. Diese findet in verschiedenen Anwendungsbereichen Anwendung. Im Flugzeugbau besteht das Ziel, die Form eines Flugzeugs so zu optimieren, dass es die gleiche Strecke mit weniger Treibstoff zurücklegen kann. Solche Probleme sind auch in der Akustik weit verbreitet. Hierbei versucht man beispielsweise, Musikinstrumente so zu konstruieren, dass sie eine herausragende akustische Leistung erzielen.

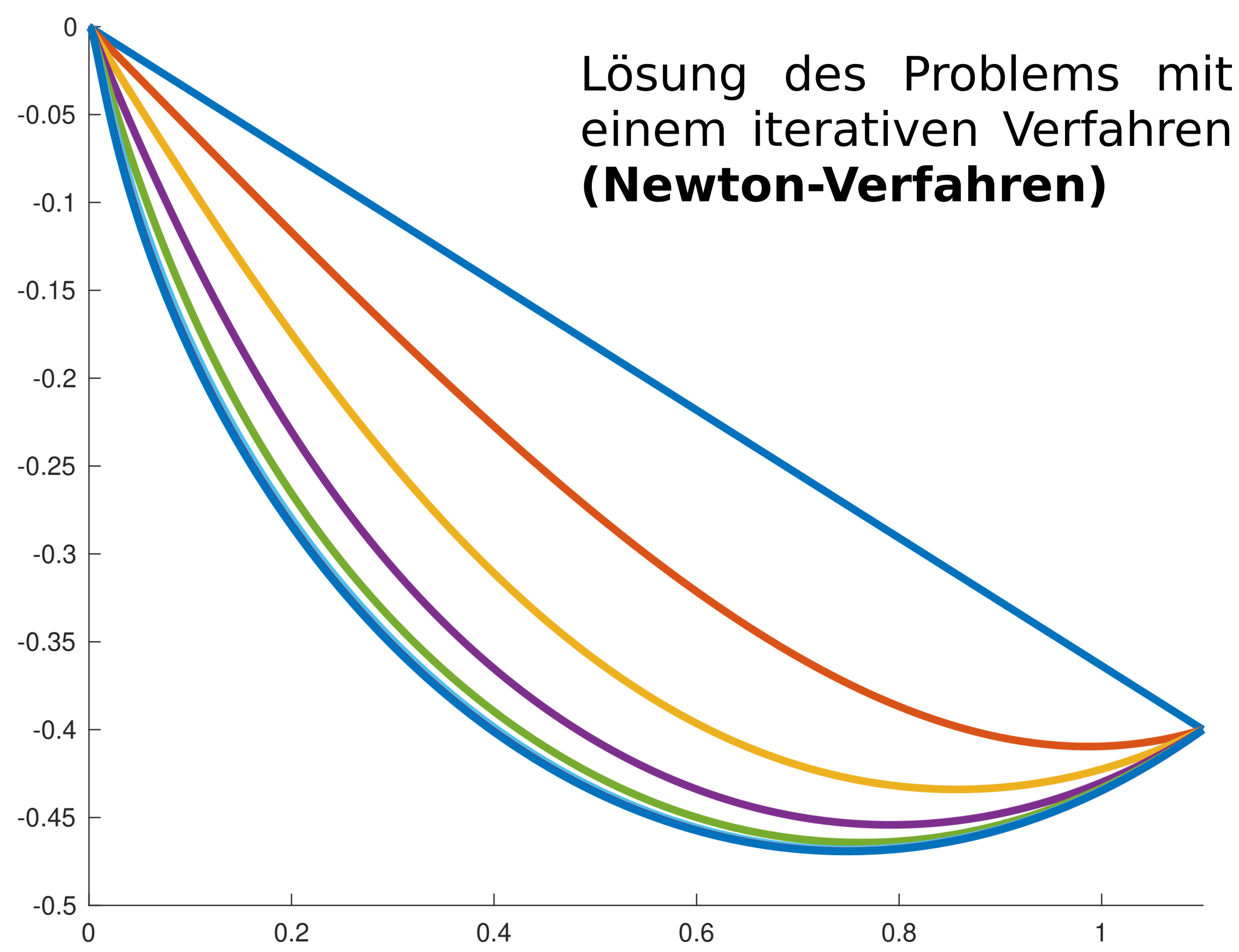
Möglichkeiten des Kurvenverlaufs



Lösungsverfahren

Ein effektiver Lösungsansatz zur Ermittlung der schnellsten Bahn zwischen zwei gegebenen Punkten ist die Anwendung des iterativen **Newton-Verfahrens**. Man startet mit einer initialen Schätzung der Bahn, beispielsweise der linearen Verbindung der beiden Punkte und verbessert mithilfe der Ableitung die Kurve iterativ.

Konvergenz des Lösungsverfahrens



Weiterführende Fragen

Anschließend zur Grundfrage treten folgende spannenden weiterführende Fragen auf:

- Gibt es Kriterien, mit denen wir überprüfen können, ob eine Kurve tatsächlich *optimal* ist?
- Existiert ein Algorithmus, mit dem wir die optimale Kurve finden können, ohne unzählige Möglichkeiten durch Ausprobieren zu testen?
- Wie lange braucht der Algorithmus um eine Lösung zu finden?

Modellierung

Der Verlauf der Murmelbahn wird durch eine Funktion $y(x)$ beschrieben, die durch den festen Start- und Zielpunkt $y(0) = 0$ und $y(l) = h$ verläuft. Nun ist y zu bestimmen, sodass die Murmel in möglichst kurzer Zeit am Ziel ankommt. Die Schwierigkeit liegt darin, die richtige Balance zwischen der kürzesten Strecke (Gerade) und einer großen Steigung (größere Beschleunigung) zu finden. Die Murmel bewegt sich im Verlauf der Zeit t entlang der Kurve $(x(t), y(x(t)))$ mit Geschwindigkeit $v(t) = |x'(t)|\sqrt{1 + y'(x(t))^2}$. Durch den Energieerhaltungssatz $\frac{1}{2}mv(t)^2 = mg(h - y(x(t)))$ ist y mit der Ableitung y' gekoppelt. Teil des Problems ist also zudem die Lösung einer Differentialgleichung.