Das Rundreiseproblem

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Das Problem

Du bist Hobbypilot aus Darmstadt und planst eine Städtetour durch Deutschland. Um Flugbenzin zu sparen, suchst Du nach einer möglichst kurzen Tour, die alle Reiseziele besucht.

Mathematiker würden sagen, Du löst das *Rundreiseproblem* (*"Travelling Salesperson Problem"* (TSP)).

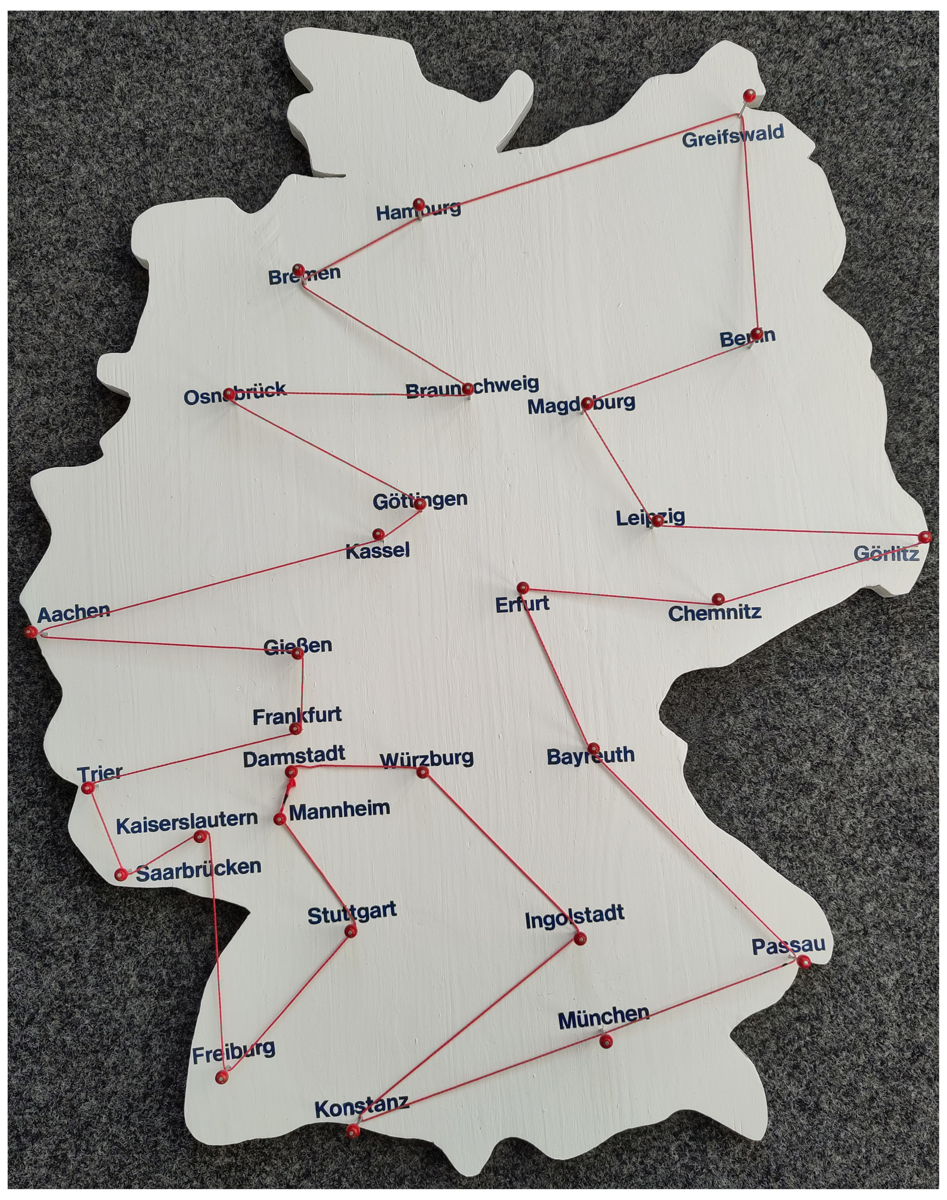
Deine Aufgabe

Aufgabe: Berühre alle markierten Städte einmal mit der Schnur und führe das Ende zurück nach Darmstadt.

Ziel: Verwende möglichst wenig Schnur.

Lösung: Die kürzeste Tour verraten wir natürlich nicht, aber die Länge der optimalen Lösung ist schwarz markiert.

Eine Beispiellösung - leider noch nicht optimal.



Motivation

Die Anzahl der verschiedenen Touren wächst rasant mit der Anzahl an Städten. Das macht es schwer, einen effizienten Algorithmus für das Problem anzugeben. Einen solchen zu finden, würde eines der **Millenium-Probleme** lösen (das sogenannte P-NP-Problem) und viel Ruhm, sowie eine Million US-Dollar Preisgeld einbringen.

Varianten

Wir haben es hier mit einem **euklidischen TSP** zu tun. Der Name kommt daher, dass wir die Städte als Punkte auf der euklidischen Ebene auffassen können und die **Luftlinie** genau den euklidischen Abstand beschreibt.

Würden wir statt der Luftlinie die **Straßenkilometer** betrachten, wären die Abstände nicht mehr euklidisch, und unser Problem ein sogenanntes **metrisches TSP**.

Wir könnten statt der Distanz auch die **Flugzeit** betrachten. Durch unterschiedliche Windverhältnisse wären Hin- und Rückweg zwischen zwei Städten nicht mehr gleich lang. Daher sprechen wir hier vom **asymmetrischen TSP**.

Näherungslösungen

Mathematiker versuchen, effiziente Algorithmen zu finden, die möglichst gute Touren berechnen. Es wird bewiesen, wie groß der (Approximations-)Faktor zwischen der Länge der kürzesten und der berechneten Tour höchstens wird.

Variante	Approximationsfaktor
euklidisch[a]	≈ 1
metrisch[b]	$\approx 1,5$
asymmetrisch[c]	≈ 22

[a] Sanjeev Arora (1996)
[b] Anna R. Karlin, Nathan Klein, and Shayan Oveis Gharan (2020)
[c] Vera Traub, and Jens Vygen (2019)

Heuristiken

Heuristiken sind Versuche, mit einer einfachen Idee gute Lösungen zu finden.

Die **Nearest-Neighbor-Heuristik** läuft immer von der aktuellen Stadt zur nächstgelegenen nicht-besuchten Stadt. Wie gut funktioniert diese Heuristik in unserem Beispiel? Probiere es aus!

Die **Nearest-Insertion-Heuristik** startet mit zwei Städten, die am nächsten beisammen liegen. Danach fügt sie immer die Stadt (möglichst geschickt) zur Tour hinzu, die am nächsten an einer der schon verbundenen Städte liegt. Im metrischen TSP finden wir auf diese Weise stets eine Tour, die höchstens doppelt so lang ist wie die kürzeste Tour.

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Optimierung

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster