Windpark

Lange Nacht der Mathematik 2025

Aufgabe: Maximal viele Windräder in den Windpark

Auf einer gegebenen Fläche soll ein Windpark entstehen. Dabei haben wir das folgende Ziel:

Die vorhandene Fläche soll möglichst gut genutzt werden, um möglichst viel Energie aus Wind zu erzeugen. Aus Sicherheitsgründen muss zwischen je zwei Windrädern ein Mindestabstand herrschen. Ein Windrad ist bereits vorhanden und fix. Alle weiteren Windräder können dabei in der eingegrenzten Fläche platziert werden und müssen plan mit der Bodenscheibe darin liegen. Es dürfen sich keine Windräder überlappen, stapeln oder ähnliches.

Abstraktion der Aufgabe mit Un-/Gleichungen

Abstand: Der Abstand zwischen je zwei platzierten Windrädern muss größer sein als die Summe beider Sicherheitsradien (Bodenscheiben), vgl. (1).

Fixierung: Für das vorhandene Windrad sind die Koordinaten fixiert, d.h. $x_1 = (22.8, 22.4)$.

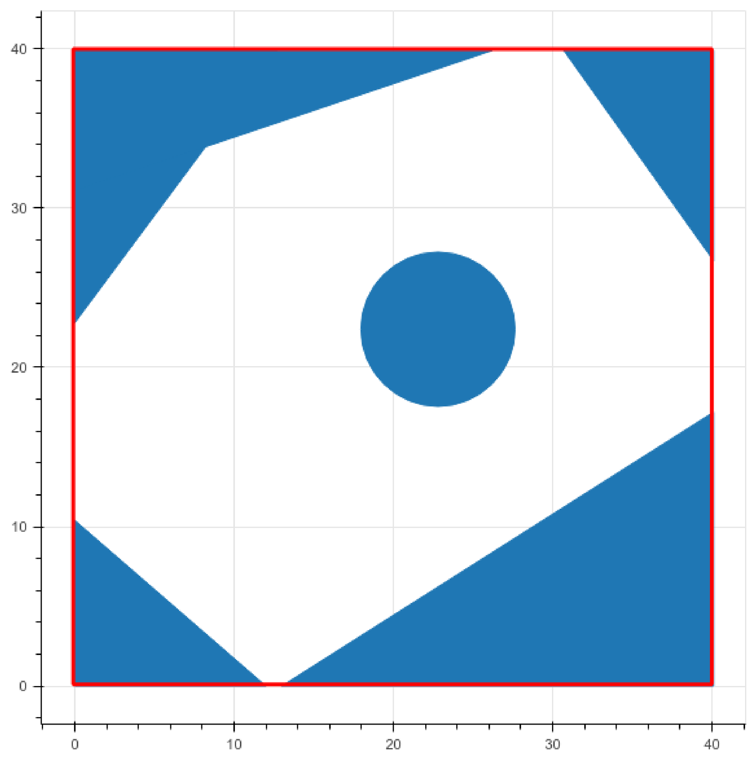
Verfügbares Gebiet: Wir können mit linearen Ungleichungen fordern, dass alle n Windräder (kurz: $\forall i$) im verfügbaren Bereich liegen, vgl. (2).

$$\|x_i - x_j\|_2 \geq r_i + r_j, \quad \forall i \neq j \quad (1)$$
$$A_i x_i \leq b_i, \quad \forall i \quad (2)$$

x_i : Koordinaten i-tes Windrad $x_i \in \mathbb{R}^2$

A_i, b_i : Matrix/Vektor für i-te Gebietsungleichungen $A_i \in \mathbb{R}^{9\times 2}, b_i \in \mathbb{R}^9$

r_i : Radius i-tes Windrad



Problem

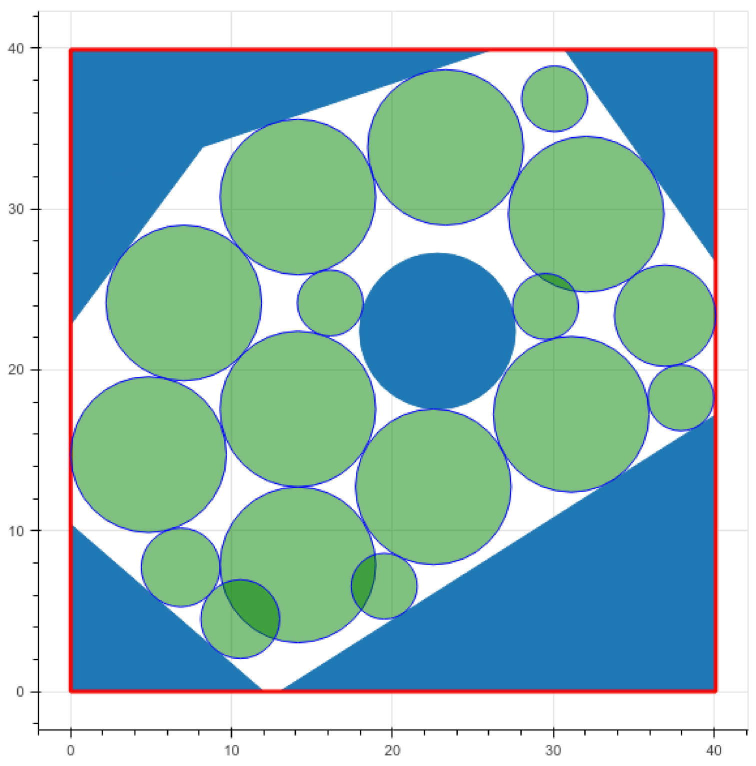
Es ist aufwendig überhaupt eine Anordnung mit allen Windrädern zu finden, die alle Ungleichungen erfüllt (nicht zwingend maximal viele!).

Daher modifizieren wir das Problem, um zulässige Lösungen zu finden.

Lösungstechniken

Symmetrien: Für den Computer sind Vertauschungen gleicher Windräder neue Lösungen. Um den Suchraum zu verkleinern und den Prozess zu beschleunigen, verhindern wir diese Symmetrien mit der Vorgabe einer Ordnung, vgl. (3).

Penalty-Verfahren: Mit einem Penalty-Verfahren bestrafen wir das Nichterfüllen von Bedingung (1) durch Hinzufügen eines Strafterms in die Zielfunktion. Die Hilfsvariable $z_{ij} \in \mathbb{R}$ gibt die Überlappung zweier Windräder an. Diese Überlappung wird minimiert, vgl. (1.1) - (1.3).



Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{llll}
\min\limits_{z,x} & \sum\limits_{i\neq j} z_{ij} & & (1.1)\\
\text{s.d.} & z_{ij} \geq r_i + r_j - \|x_i - x_j\|_2, & \forall i \neq j & (1.2)\\
& z_{ij} \geq 0, & \forall i \neq j & (1.3)\\
& A_i x_i \leq b_i, & \forall i & (2)\\
& x_{i,1} \leq x_{i+1,1}, & \forall i \in \{2, \dots, n-1\} & (3)
\end{array}
$$

Bis auf die quadratische Nebenbedingung (1.2) liegt ein lineares Optimierungsproblem/Programm (kurz: LP) vor, wie es häufig in der Optimierung auftritt. Diese können in der Praxis meist effizient gelöst werden und daher werden Probleme häufig auf LPs reduziert.

Ergebnisse

Mit dieser Formulierung ist es nun möglich eine Lösung für das ursprüngliche Problem (1) - (2) mit bsw. SCIP[a] zu berechnen. Bei einem Zielfunktionswert von Null haben wir eine zulässige Lösung.

	Laufzeit
Original:	> 2 Tage
Modifiziert:	40 min

Das vorgestellte Problem ist ein "Circle Packing" Problem. Es erscheint einfach, ist aber rechnerisch sehr fordernd.

Viele Optimierungsprobleme beinhalten ähnliche Packing Probleme als Teilprobleme und sind daher von großem Interesse in der Optimierung.

[a] SCIP Optimization Suite: `https://www.scipopt.org/`

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt,
AG Optimierung

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster