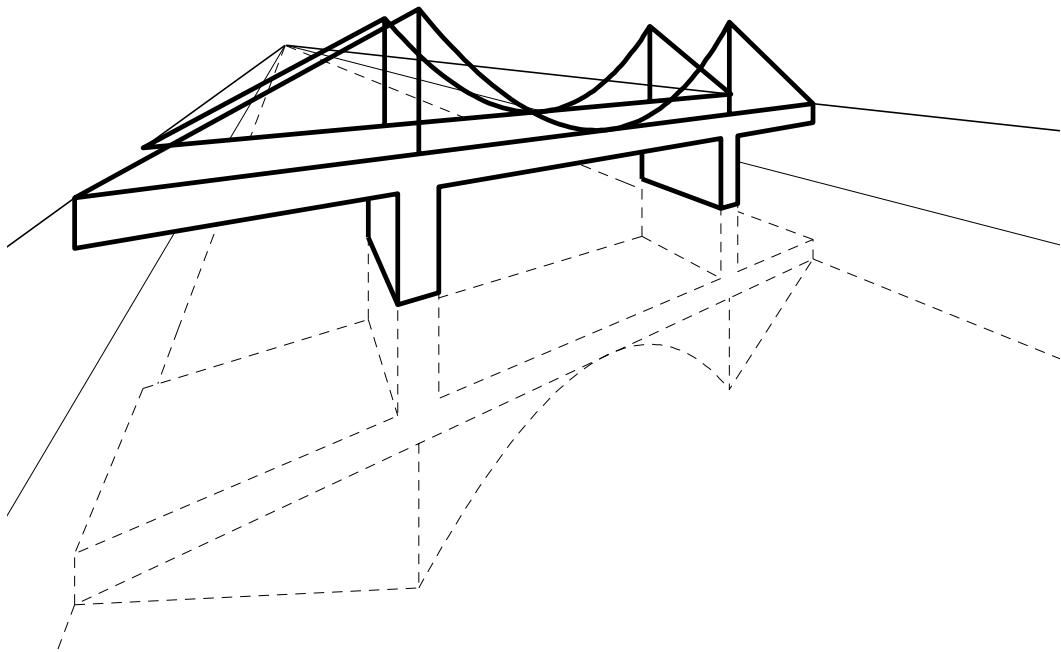


Darstellende Geometrie

für Bauingenieure

Skript von Erich Hartmann



Vorlesung von Karsten Große-Brauckmann

Fachbereich Mathematik
Technische Universität Darmstadt
Frühjahr 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Projektionen in der Darstellenden Geometrie	1
1.1	Abbildungen	1
1.2	Parallelprojektion	2
1.3	Zentralprojektion	4
1.4	Grund- und Aufriss	5
2	Erzeugung von Parallelprojektionen	6
2.1	Definierende Formel für die Axonometrie	6
2.2	Axonometrisches Aufbauverfahren	7
2.3	Ingenieur-Axonometrie	8
2.4	Weitere spezielle Axonometrien	9
2.5	Axonometrien sind Parallelprojektionen	9
2.6	Einschneideverfahren	10
2.7	Umprojektion	12
2.8	Schatten bei parallelem Licht	15
2.9	Schatten bei zentralem Licht	17
3	Parallelprojektion von Geraden und ebenen Flächen	19
3.1	Zweitafelprojektion eines Punktes	19
3.2	Zweitafelprojektion von Geraden	20
3.3	Zweitafelprojektion einer Ebene	24
3.4	Schnittpunkt Gerade-Ebene: Durchstoßpunkt	27
3.5	Wahre Länge und wahre Gestalt	30
3.6	Winkel unter senkrechter Parallelprojektion	33
3.7	Lot auf eine Ebene	35
3.8	Einschneideverfahren und senkrechte Parallelprojektion	36
3.9	Dachausmittelung	41

4	Gekrümmte Flächen in Parallelprojektion	45
4.1	Kreis und Ellipse	45
4.1.1	Ellipsenkonstruktionen	46
4.1.2	Parallelprojektion von Kreis und Ellipse	48
4.2	Rotationsflächen	49
4.3	Zylinder- und Kegelflächen	50
4.4	Regelflächen	52
4.5	Abwickelbare Flächen	54
4.6	Kotierte Projektion	57
4.7	Böschungsflächen	58
4.8	Durchdringungen einer Kurve und einer Fläche	61
4.9	Durchdringungskurven zweier Flächen	63
4.9.1	Hilfsebenenverfahren	63
4.9.2	Hilfskugelverfahren	65
4.9.3	Wie sehen Schnittkurven von Flächen aus?	67
5	Zentralprojektion	68
5.1	Zentralprojektion als Abbildung	68
5.2	Bezeichnungen und Konventionen	69
5.3	Fluchtpunkte	70
5.4	Subjektive Aspekte der Perspektive	71
5.4.1	Sehkegel und -kreis	71
5.4.2	Wahl von Hauptpunkt und Distanz	72
5.5	Konstruktion perspektivischer Bilder aus Grund- und Aufriss	74
5.5.1	Durchstoßpunktmethode	74
5.5.2	Architektenanordnung	76
5.6	Rekonstruktion von Grund- und Aufriss	78
5.7	Schatten	82
5.7.1	Parallelbeleuchtung	82
5.7.2	Zentralbeleuchtung	85
5.8	Zentralprojektion von Kurven und Flächen	86

Ziele der Vorlesung

Räumliche Objekte werden auf Papier oder Bildschirm durch ebene, zwei-dimensionale Bilder dargestellt. Die *Darstellende Geometrie* befasst sich mit den dazu gebräuchlichen Abbildungsverfahren, Das Verständnis der Verfahren soll Ihnen den Umgang mit Plänen, technischen Zeichnungen und Skizzen erleichtern. Dabei soll die Geometrie der Abbildungsvorschrift im Vordergrund stehen; wir werden keine Rechnungen mit den erzeugenden Formeln durchführen.

Das übergeordnete Ziel der Vorlesung ist es, Ihre **Raumvorstellung** zu schulen. Daher wird es uns bei speziellen Konstruktionsverfahren wichtig sein, sie aus der drei-dimensionalen Geometrie heraus zu begründen. Bitte versuchen Sie stets, die räumliche Situation zu verstehen, und sehen Sie davon ab, Konstruktionsschritte schematisch auszuführen. Tatsächlich verstehen wir das Herstellen von Zeichnungen in dieser Vorlesung insofern als Mittel zum Zweck!

Im Einzelnen soll Ihnen die Vorlesung erklären, wie die Darstellungen zu lesen sind, d.h. welche Merkmale der Objekte daraus abzulesen sind. Dies bedeutet die folgenden **Fähigkeiten**:

- Von einem räumlichen Objekt schnell eine *Skizze anfertigen*,
- vorgefertigte Zeichnungen *lesen*,
- in gegebene Zeichnungen oder Fotos *Ergänzungen einfügen*,
- aus Zeichnungen oder Fotos *Längen und Winkel* oder ganze Grund- und Aufrisse abzulesen.

Arbeitsmaterialien

Das **Skript** ist Arbeitsgrundlage von Vorlesung und Übungen, aber nicht zum Selbststudium gedacht. Drucken Sie es bitte vor der Vorlesung aus. Wenn Sie es heften oder binden lassen, wählen Sie dazu am besten die obere Schmalseite. Bringen Sie das Skript immer in die Übungen mit; auch in der Klausur ist das von Ihnen bearbeitete Skript als einziges Material zugelassen.

In der Vorlesung werden räumliche Zusammenhänge an Konstruktionen demonstriert. Die Beschreibung der Konstruktionsschritte ist im Skript durch Einrahmung hervorgehoben. Zeichnen Sie die Beispielkonstruktionen der Vorlesung im Skript mit. Für die Zeichnungen in Vorlesung und Übungen benötigen Sie spitzen **Bleistift** oder dünne bunte Stifte, **Geodreieck** und zusätzlich **Lineal**, manchmal auch einen **Zirkel**.

Sie geben jede Woche in den Übungen **Hausübungen** ab. Achten Sie bitte darauf, dass alle für die Konstruktion notwendigen Linien erkennbar sind, so dass ihre Konstruktion nachvollziehbar bleibt; radieren Sie Hilfslinien also nicht aus. Weiterhin sollen nicht sichtbare Linien gestrichelt werden, wenn nicht anders angegeben. Zeichnen Sie bitte ordentlich und genau, nicht freihand. Vermeiden Sie bitte rote Farbe. Diese Bemerkungen gelten gleichermaßen für die Klausur.

Als **Literatur** empfehlen wir:

Leopold: *Geometrische Grundlagen der Architekturdarstellung*, Vieweg 2012.

Wir verweisen im Skript darauf in der Form "LEO, S. xx". Ein etwas älteres Lehrbuch ist:

Fucke, Kirch, Nickel: *Darstellende Geometrie für Ingenieure*, Hanser 2007.

Als ergänzende und weiterführende Lektüre empfehlen wir die wunderschön illustrierten Bücher:

Glaeser: *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik*, Elsevier/Spektrum 2005,
Pottmann, Asperl, Hofer, Kilian: *Architectural Geometry/Architekturgeometrie*, Bentley 2007/2010.

Das vorliegende Skript wurde von Erich Hartmann 2002 entworfen und durch Karsten Große-Brauckmann überarbeitet.

Kapitel 1

Projektionen in der Darstellenden Geometrie

1.1 Abbildungen

Die Aufgabe der *Darstellenden Geometrie* besteht darin, räumliche Objekte in einer Zeichenebene darzustellen. Dabei gibt es zwei konkurrierende Ziele:

- *Maßgenauigkeit* bedeutet, dass man aus der Abbildung leicht genaue Abmessungen ablesen kann.
- *Anschaulichkeit* bedeutet, dass die zweidimensionale Darstellung einen guten räumlichen Eindruck erweckt.

Die beiden folgenden Bilder eines Hauses sind maßgenau, aber nicht sehr anschaulich:

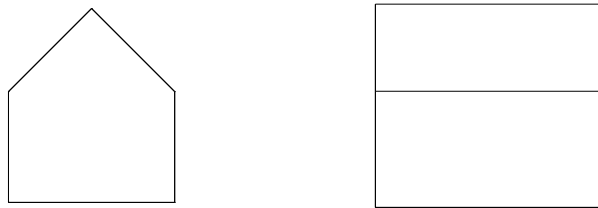


Abbildung 1.1: Haus in Seitenansicht

Dagegen bringen die nächsten beiden Bilder den räumlichen Eindruck zur Geltung. Allerdings lassen sich genaue Abmessungen gerade aus dem rechten Bild nur schwer ablesen.

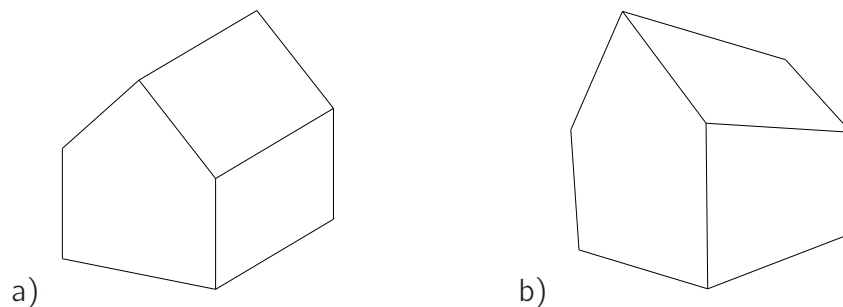


Abbildung 1.2: Haus in a) senkrechter Parallel- und b) Zentralprojektion

Es gibt viele Möglichkeiten, den dreidimensionalen Raum auf die zweidimensionale Ebene abzubilden, d.h. jedem Punkt P des Raumes einen Punkt P' der Bildebene zuzuordnen.

In der Darstellenden Geometrie bedient man sich zweier spezieller Abbildungsverfahren, die geometrisch definiert sind. Beide **projizieren** das Objekt **längs Geraden in die Ebene**. Man kann sich dazu konkret vorstellen, dass die Geraden *Lichtstrahlen* sind, welche die Punkte und Kurven eines Objektes im Raum auf einen *Schatten* in der Bildebene abbilden. Wir stellen diese beiden Abbildungen nun vor.

1.2 Parallelprojektion

Abbildungsvorschrift

Bei dieser Projektion sind alle Abbildungsstrahlen **parallel**, d.h. jeder Punkt P wird längs paralleler Geraden auf einen Punkt P' der Bildebene abgebildet. Je nach Winkel zwischen Strahlen und Bildebene unterscheidet man zwei Fälle:

Senkrechte (orthogonale) **Parallelprojektion**: Die Strahlen stehen *senkrecht* zur Bildtafel.

Schiefe Parallelprojektion: Die Strahlen stehen *nicht senkrecht* zur Bildtafel.

Senkrechte Parallelprojektion hat eine deutlich bessere Bildwirkung, schiefe Parallelprojektionen sind aber oft einfacher zu erzeugen.

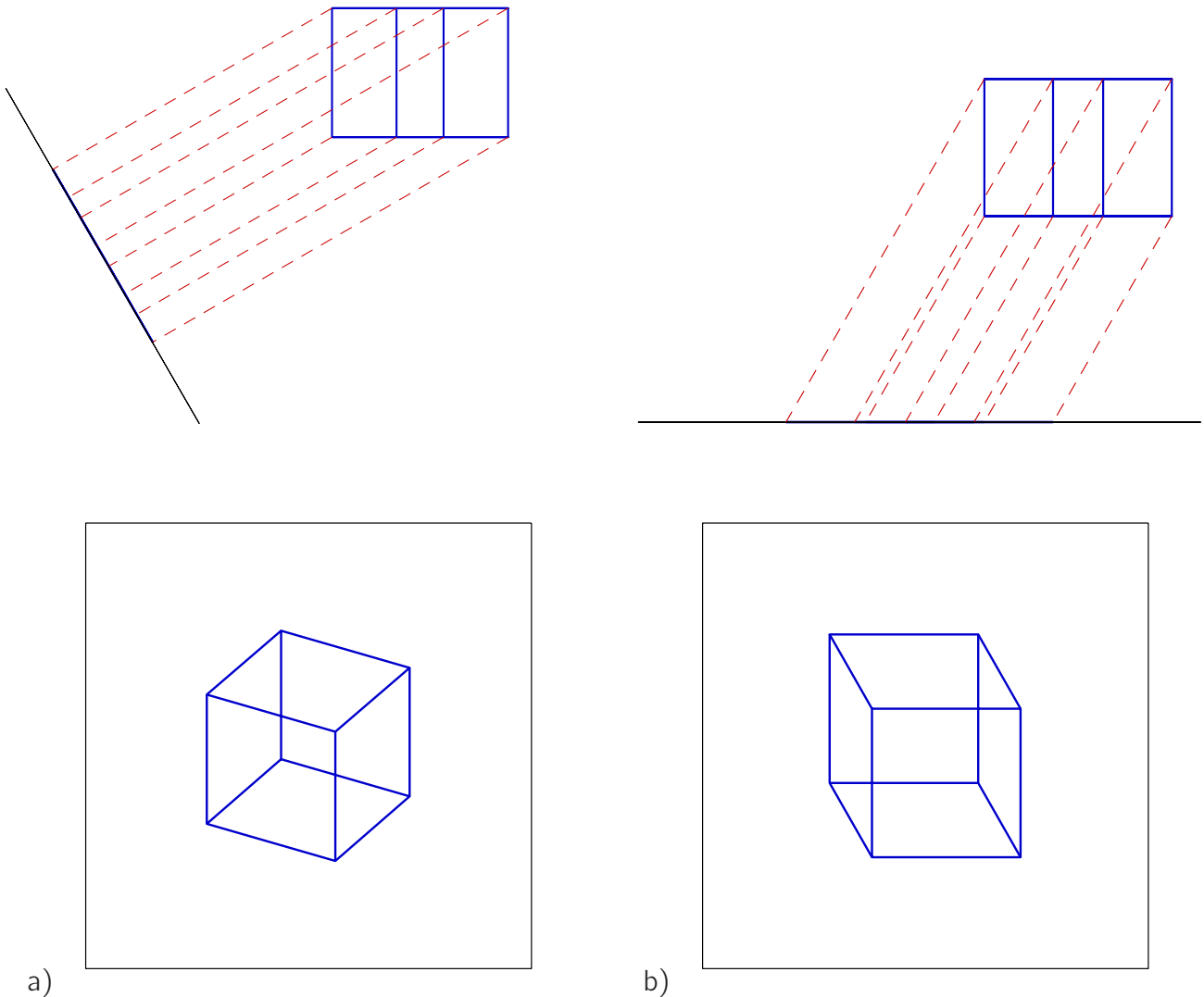


Abbildung 1.3: Würfel in a) senkrechter und b) schiefer Parallelprojektion

Die Parallelprojektion lässt sich als Schattenwurf eines Objektes durch eine weit entfernte Punktlichtquelle deuten. Von der Entfernung her ist Sonnenlicht ein gutes Beispiel dafür, wegen der Größe der Sonnenscheibe ist das Schattenbild allerdings unscharf. (Warum sehen Sie auf dem Waldboden kleine kreisförmige besonnte Flecken?).

Wir werden einen Vektor v , der parallel zu den Projektionsstrahlen ist und vom Objekt auf die Projektionsebene zeigt, als **Blickrichtung** bezeichnen.

Eigenschaften der Parallelprojektion

Die Parallelprojektion ist

- (G) *geradentreu*, das Bild einer Gerade g ist wiederum eine Gerade g' . Ausnahme: Fällt g mit einem Projektionsstrahl zusammen, so wird g' zu einem Punkt; in diesem Fall heißt g *projizierend*.
- (P1) Die Bilder paralleler Geraden sind im Allgemeinen wieder parallel. (Ausnahmen: projizierende Geraden.)
- (P2) Parallele Geradenstücke werden im gleichen Verhältnis verzerrt (*Teilverhältnistreue*).
- (P3) Ebene Figuren erscheinen im Bild unverzerrt, wenn sie parallel zur Bildtafel liegen.

Allerdings sind Parallelprojektion weder winkel- noch längentreu. Unter senkrechter Parallelprojektion können sich Längen immerhin nicht vergrößern.

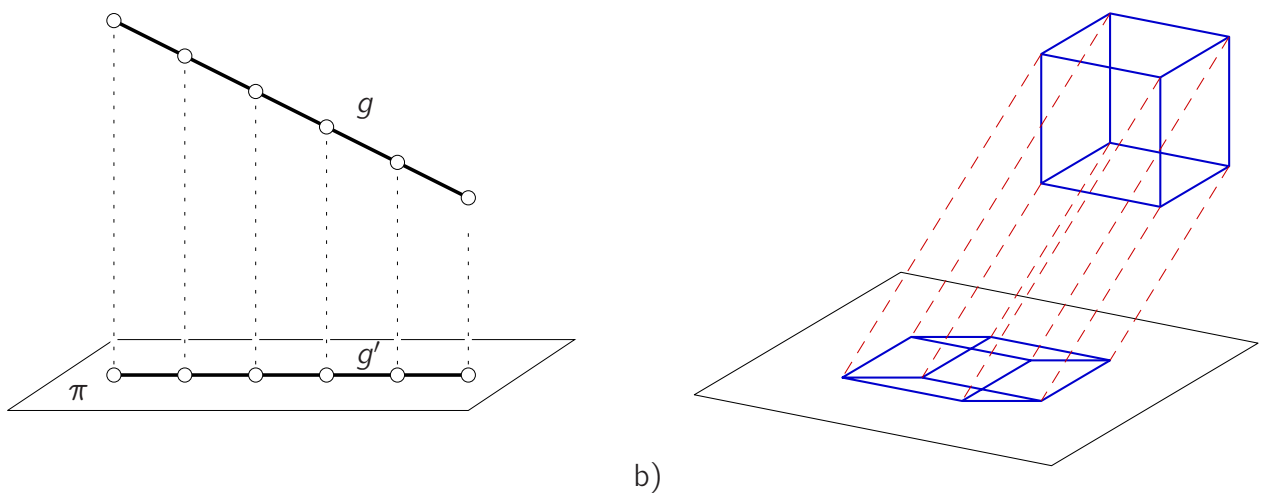


Abbildung 1.4: a) Teilverhältnistreue der Parallelprojektion b) Schiefe Parallelprojektion eines Würfels. Deckel und Boden sind parallel zur Bildebene und bleiben daher unverzerrt, während die vier vertikalen Kanten im gleichen Maß verzerrt sind.

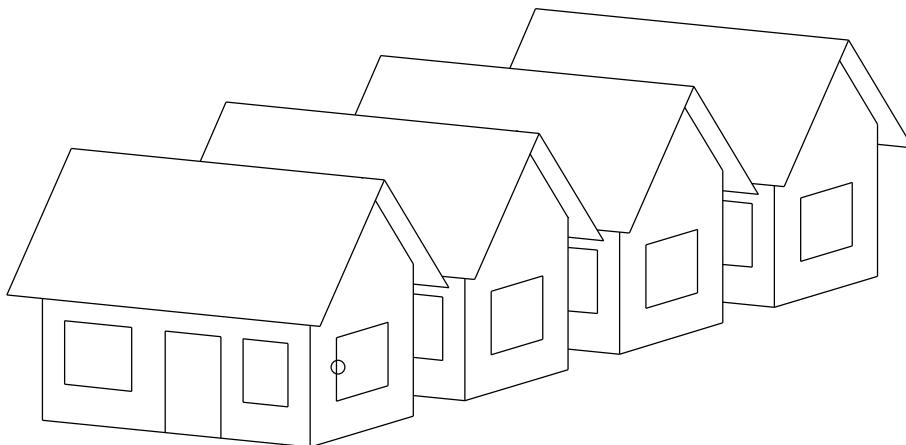


Abbildung 1.5: Häuser in Parallelprojektion: Parallelitäten und Teilverhältnistreue sind z.B. an den Fenstern ablesbar

Wir werden uns in Kapitel 2 bis 4 näher mit der Parallelprojektion befassen.

1.3 Zentralprojektion

Abbildungsvorschrift

Bei Zentralprojektion gehen alle Abbildungsstrahlen durch einen Punkt, *Projektionszentrum* oder *Augpunkt* genannt. Dieses Abbildungsverfahren entspricht dem Schattenwurf durch eine nahe Punktlichtquelle. Es ist auch das Abbildungsverfahren, das der Fotografie oder dem Sehen mit einem Auge entspricht; daher ist die Bildwirkung natürlicher als bei Parallelprojektion.

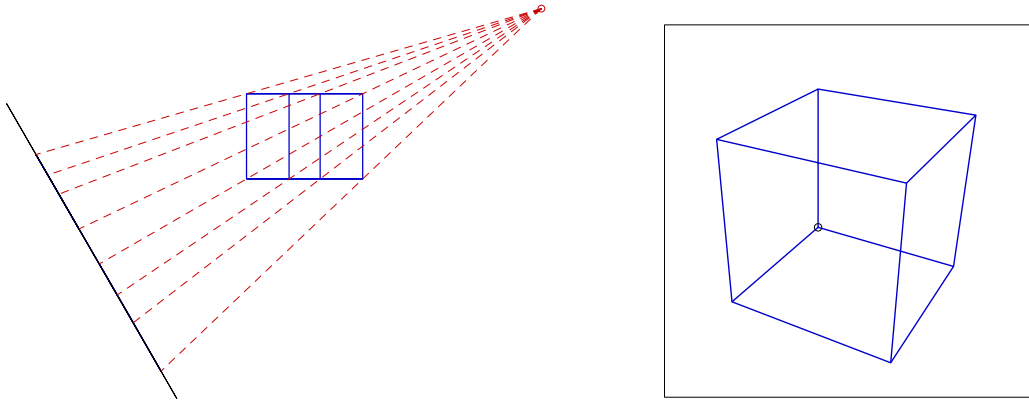


Abbildung 1.6: Würfel in Zentralprojektion

Eigenschaften der Zentralprojektion

Die Eigenschaften (P1) – (P3) gelten bei Zentralprojektion nicht, wie z.B. Abbildung 1.2 belegt. Aber es gilt:

- (G) Geradentreue.
- (Z) Die Bilder paralleler Geraden schneiden sich i.A. in einem Punkt, dem *Fluchtpunkt* der Geradenschar. Ausnahme: Die Bilder von parallelen Geraden, die in einer Ebene parallel zur Bildtafel liegen, bleiben parallel.

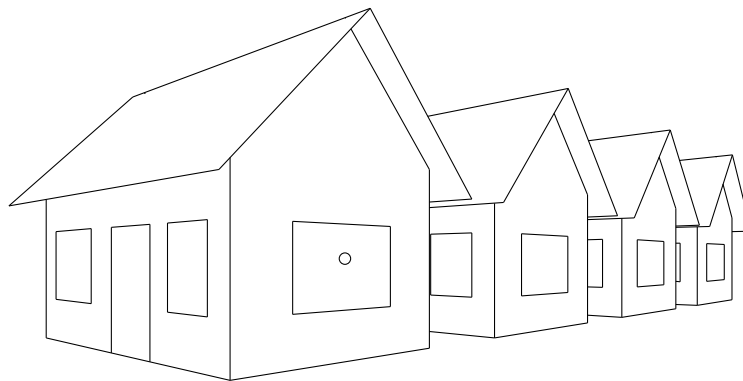


Abbildung 1.7: Häuser in Zentralprojektion

In Kapitel 5 werden wir die Zentralprojektion genauer untersuchen.

1.4 Grund- und Aufriss

Zur eindeutigen Beschreibung eines Punktes im Raum sind wenigstens **zwei** Parallelprojektionen notwendig. Üblicherweise verwendet man *Grund-* und *Aufriss* als zwei senkrechte Parallelprojektionen.

Es seien dazu π_1, π_2 zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen: die **Grundrissebene** π_1 und die **Aufrissebene** π_2 . Ihre Schnittgerade $k_{12} := \pi_1 \cap \pi_2$ nennen wir **Risskante**. Üblicherweise ist π_1 die horizontale xy -Ebene und π_2 die vertikale yz -Ebene, so dass k_{12} der y -Achse entspricht.

Projiziert man einen Punkt P *senkrecht* auf die Ebene π_1 bzw. π_2 , so erhält man den *Grundriss* P' bzw. den *Aufriss* P'' von P . In Standard-Koordinaten hat $P = (x, y, z)$ den Grundriss $P' = (x, y)$ und den Aufriss $P'' = (y, z)$. Hat man noch eine weitere zu π_1 senkrechte Ebene π_3 , so nennt man die Projektion $P''' = (*, z)$ von P auf π_3 einen **Seitenriss**.

In Architektur und technischen Zeichnungen stellt man Grund- und Aufriss in einer Zeichenebene dar. Man kann sich dazu vorstellen, dass man die Aufrisstafel π_2 um die Risskante k_{12} in die Grundrisstafel π_1 klappt. *Nach* dieser Umklappung liegen P' und P'' auf einer Senkrechten zur Risskante. Diese Senkrechte heißt **Ordner**; er verbindet $P' = (x, y)$ und $P'' = (y, z)$ mit konstantem y -Wert.

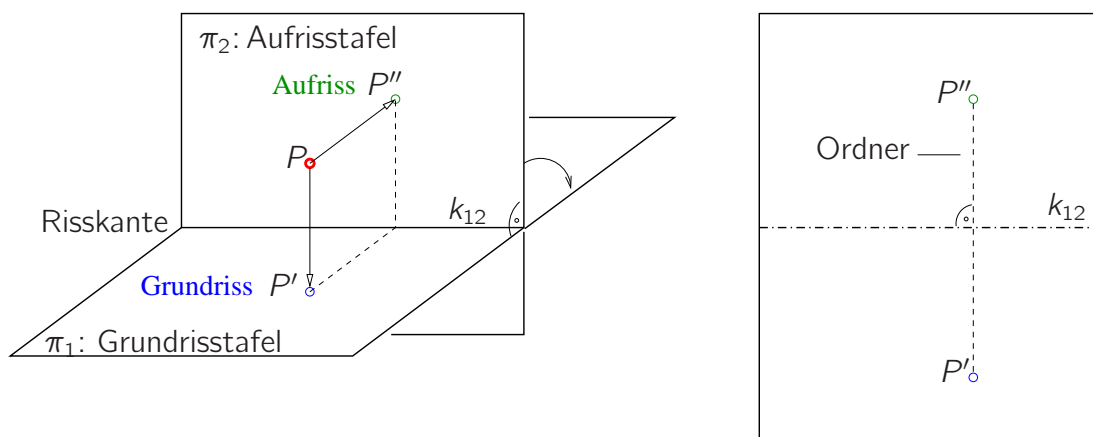


Abbildung 1.8: Grund- und Aufriss eines Punktes

Merke:

- Grundriss P' und Aufriss P'' eines Punktes liegen auf demselben Ordner!
- Ein Punkt P ist durch seinen Grund- und Aufriss eindeutig bestimmt.

Im Folgenden sind Grund- und Aufrisse einiger Objekte gegeben; die Grundrisse sind jeweils ein Quadrat.

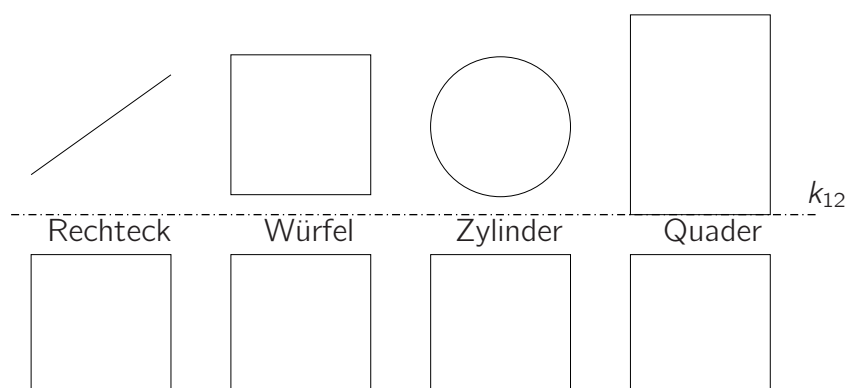


Abbildung 1.9: Verschiedene Objekte mit dem gleichen Grundriss

Kapitel 2

Erzeugung von Parallelprojektionen

Wir werden Verfahren kennenlernen, die Parallelprojektionen herstellen: das *axonometrische Aufbauverfahren*, das *Einschneidungsverfahren*, und die *Umprojektion*. Danach befassen wir uns mit der Darstellung von Schatten.

2.1 Definierende Formel für die Axonometrie

(s. LEO S.67)

Eine **Axonometrie** ist eine Abbildung des Raumes in die Ebene, die über Koordinaten definiert ist.

Man führt im Raum ein geeignetes Koordinatensystem $(O; x, y, z)$ ein mit Ursprung O und Achsen x, y, z . Üblicherweise sind dies $O = (0, 0, 0)$ und die Achsenvektoren $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$, die **rechtwinklig** sind und ein **Rechtssystem** bilden, d.h. ihre Orientierung entspricht der rechten-Hand-Regel.

In der Ebene π schreibt man nun die Bilder des Ursprungs O und der drei Koordinatenvektoren beliebig vor; wir bezeichnen die Bilder mit $\bar{O}, \bar{\mathbf{e}}_x, \bar{\mathbf{e}}_y, \bar{\mathbf{e}}_z$. Das axonometrische Bild eines Punktes $P = (x, y, z)$ wird durch die Vorschrift $\bar{P} := \bar{O} + x \cdot \bar{\mathbf{e}}_x + y \cdot \bar{\mathbf{e}}_y + z \cdot \bar{\mathbf{e}}_z$ gegeben. Die Längen der Bildvektoren kann man als Maßstäbe der Achsen verstehen oder auch als **Verzerrungsverhältnisse**, $v_x := |\bar{\mathbf{e}}_x|$, $v_y := |\bar{\mathbf{e}}_y|$, $v_z := |\bar{\mathbf{e}}_z|$.

Beispielsweise ist der Grundriss eine Axonometrie mit $\bar{O} = (0, 0)$ und $\bar{\mathbf{e}}_x = (1, 0)$, $\bar{\mathbf{e}}_y = (0, 1)$, $\bar{\mathbf{e}}_z = (0, 0)$.

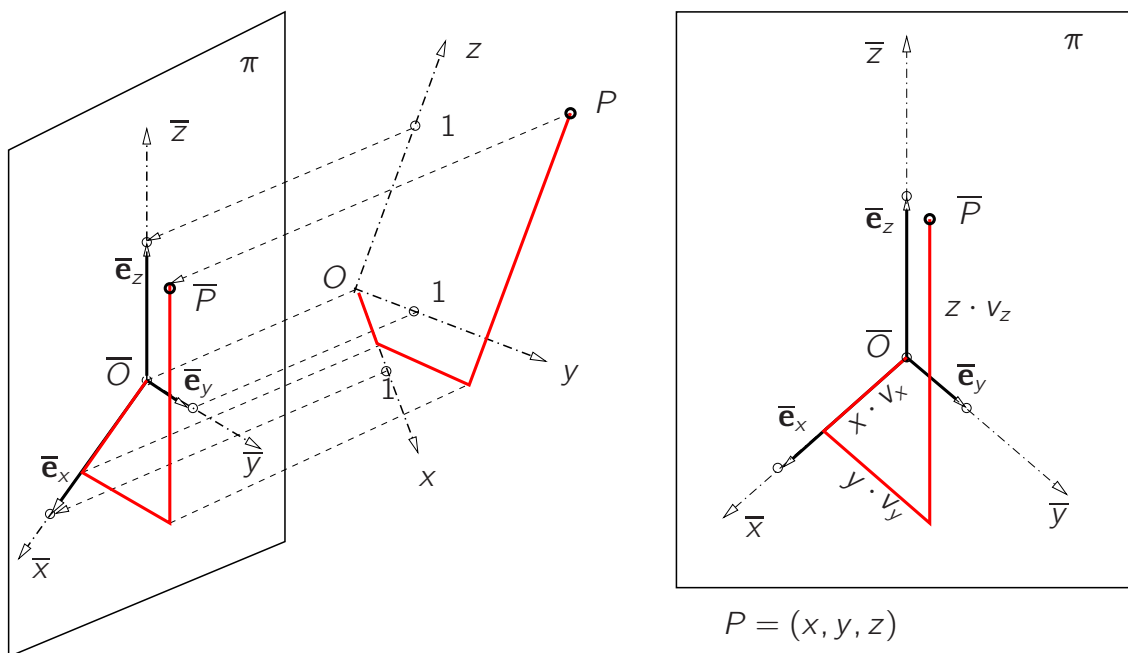


Abbildung 2.1: Axonometrie: Bilder der drei Koordinatenvektoren und eines Punktes P in der Ebene π

2.2 Axonometrisches Aufbauverfahren

(s. LEO S.75)

Die geometrische Konstruktion, die der Axonometrie entspricht, nennt man auch **Aufbauverfahren**:

Durchführung : Gegeben $P = (x, y, z)$, gesucht \bar{P} .

- Gehe in der Bildtafel von \bar{O} aus
1. um $x \cdot v_x$ in \bar{e}_x -Richtung und dann
 2. um $y \cdot v_y$ in \bar{e}_y -Richtung und dann
 3. um $z \cdot v_z$ in \bar{e}_z -Richtung.

(Die Reihenfolge kann beliebig vertauscht werden.)

Beim Zeichnen der Projektionen mehrerer Punkte sollte man vorhandene Parallelitäten (wie z.B. bei einem Quader) ausnutzen. Parallele Geraden gehen in parallele Geraden über.

Aufgabe 2.1 Stelle axonometrische Bilder eines Hauses her (Abb. 2.2).

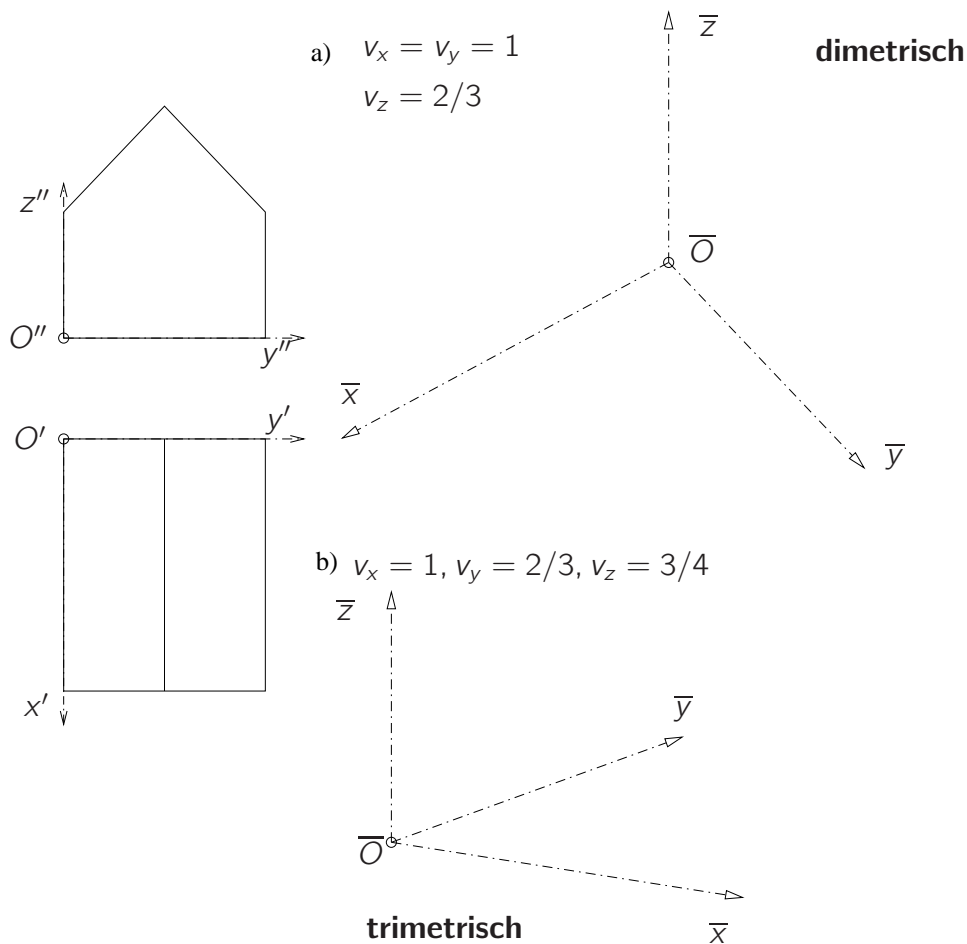


Abbildung 2.2: Axonometrien eines Hauses

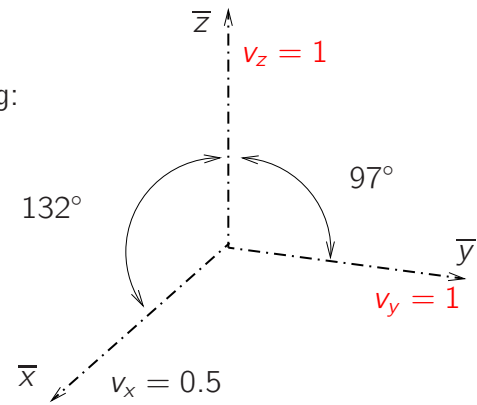
Im ersten Beispiel stimmen die Maßstäbe in zwei Koordinatenrichtungen überein, im zweiten sind sie alle verschieden. Die Fachbegriffe dazu lauten:

- isometrische Axonometrie: die drei Verzerrungen sind gleich,
- dimetrische Axonometrie: zwei der drei Verzerrungen sind gleich,
- trimetrische Axonometrie: alle drei Verzerrungen sind verschieden.

2.3 Ingenieur–Axonometrie

Dies ist eine einfach zu erstellende Axonometrie mit guter Wirkung:

1. Die Verzerrungen sind $v_x = 0.5$, $v_y = v_z = 1$.
2. In der Projektion ist der Winkel zwischen der z–Achse und der x–Achse 132° , Winkel zwischen der z–Achse und der y–Achse 97° .



Die Vorteile der Ingenieur–Axonometrie sind:

- Durch die einfachen Verzerrungsverhältnisse ist sie leicht zu erstellen.
- Das axonometrische Bild ist nahezu eine um den Faktor 1.06 skalierte **senkrechte** Parallelprojektion.
- Die hierzu notwendigen Winkel von 7° und 42° sind auf vielen Geodreiecken markiert.
- Der Umriss einer Kugel ist in guter Näherung ein Kreis.

Aufgabe 2.2 Zeichne von dem durch Grund– und Aufriss gegebenen Turm (Abb. 2.3) ein axonometrisches Bild in Ingenieur–Axonometrie.

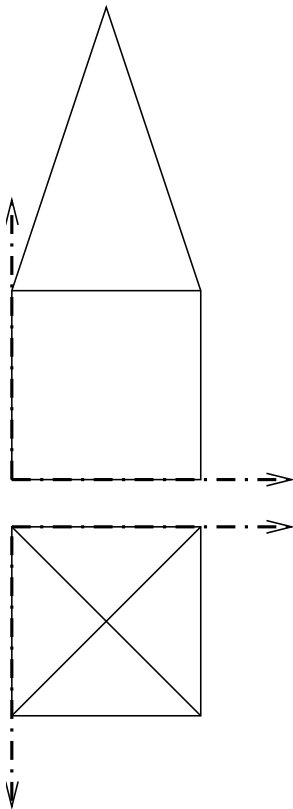


Abbildung 2.3: Aufgabe: Ingenieur–Axonometrie eines Turmes

Bemerkung:

Falls es geeignet erscheint, kann man auch die Winkel und Verzerrungen vertauschen:

a) $v_x = 1$, $v_y = 0.5$,

b) Winkel zwischen z–Achse und x–Achse: 97° und Winkel zwischen z–Achse und y–Achse: 132° .

2.4 Weitere spezielle Axonometrien

Axonometrien mit zwei aufeinander senkrechten Achsen und Verzerrungsverhältnis 1 dieser beiden Achsen sind besonders einfach zu erzeugen. Sie entsprechen allerdings immer schiefen Axonometrien und erscheinen daher auch bei guter Wahl des Bildes der dritten Achse verzerrt.

Eine Axonometrie mit aufeinander senkrechten Bildvektoren \bar{e}_y, \bar{e}_z und Verzerrungsverhältnis $v_y = v_z = 1$ nennt man auch **Kavalierprojektion**. Von Objekten in der y, z -Ebene können die Koordinaten ungeändert übernommen werden; sie haben ein unverzerrtes, kongruentes Bild.

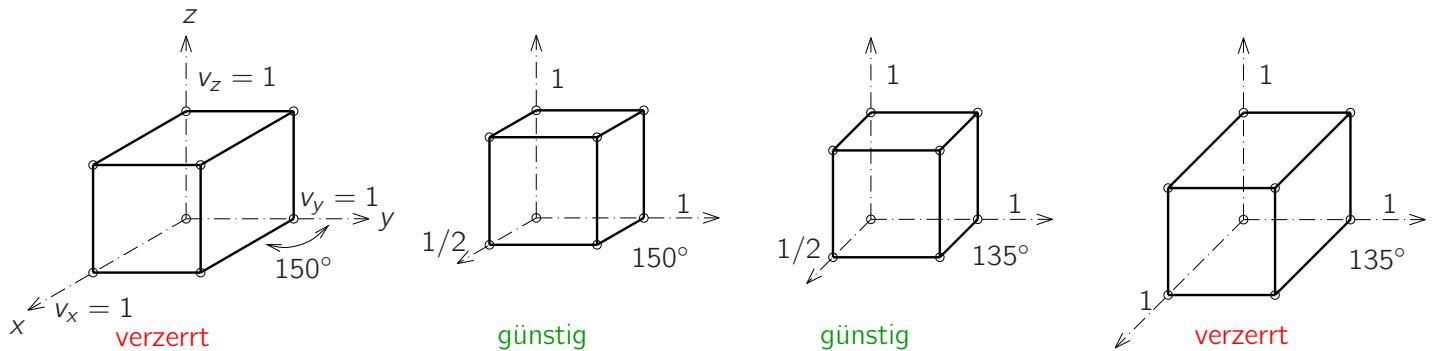


Abbildung 2.4: Axonometrien eines Würfels: Kavalierprojektionen für verschiedene Wahlen von \bar{e}_z, v_z

Gilt das gleiche für x, y anstelle von y, z , also $\bar{e}_x \perp \bar{e}_y$ und $v_x = v_y = 1$, so heißt die Axonometrie auch **Vogelprojektion**. Sie ist ein einfaches Mittel, um z.B. Stadtpläne zu veranschaulichen. Beispiele finden Sie vielleicht in den Aufgaben.

2.5 Axonometrien sind Parallelprojektionen

Man kann einfach zeigen, dass jede Parallelprojektion eine Axonometrie ist. (Dies folgt daraus, dass die mathematische Beschreibung einer Parallelprojektion eine lineare Abbildung ist – diesen Begriff lernen Sie in der Vorlesung Mathematik noch näher kennen.)

Auch wenn wir in unserem Rahmen keine Begründung dafür angeben können, sollten Sie wissen, dass umgekehrt

jede Axonometrie bis auf einen Vergrößerungs- oder Verkleinerungsfaktor eine Parallelprojektion ist,

wobei die Projektion im allgemeinen schief ist. Dies ist die Aussage des **Satzes von Pohlke** (1853). Man kann also das axonometrische Bild eines Objektes stets als Schattenwurf auf eine Ebene unter parallelem Licht erzeugen, jedenfalls bis auf Maßstabsänderung. Das heißt, die Axonometrie liefert eine mathematische Formel für unsere geometrisch definierten Parallelprojektionen.

Senkrechte Axonometrien, also Axonometrien, die einer senkrechten Parallelprojektion entsprechen, haben eine deutlich bessere Bildwirkung als schiefe Axonometrien. Es ist nicht offensichtlich, welche Wahlen von Bildvektoren $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$ zu senkrechten Parallelprojektionen gehören. Wir werden dieses Problem in Abschnitt 3.8 behandeln.

2.6 Einschneideverfahren

(s. LEO S.75)

Das **Einschneideverfahren** ist ein einfacher geometrischer Weg, um aus Grund- und Aufriss eine Axonometrie oder Parallelprojektion zu erhalten:

Vorgabe:

1. Grund- und Aufriss eines Objektes sind in vorgegebener Lage in der Zeichenebene π gegeben.
2. Zwei verschiedene *Einschneiderichtungen* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ (nicht parallel).

Verfahren:

1. Durch die Risse P', P'' eines Punktes P werden je ein Strahl $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ in $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ -Richtung gezogen.
2. $\mathbf{p}_1 \cap \mathbf{p}_2 = \bar{P}$ ist das axonometrische Bild von P .

Wir vereinbaren, dass nach demselben Verfahren als erstes die Bilder der drei Einheitsvektoren gezeichnet werden, so dass sich die Sichtbarkeit einfach kontrollieren läßt.

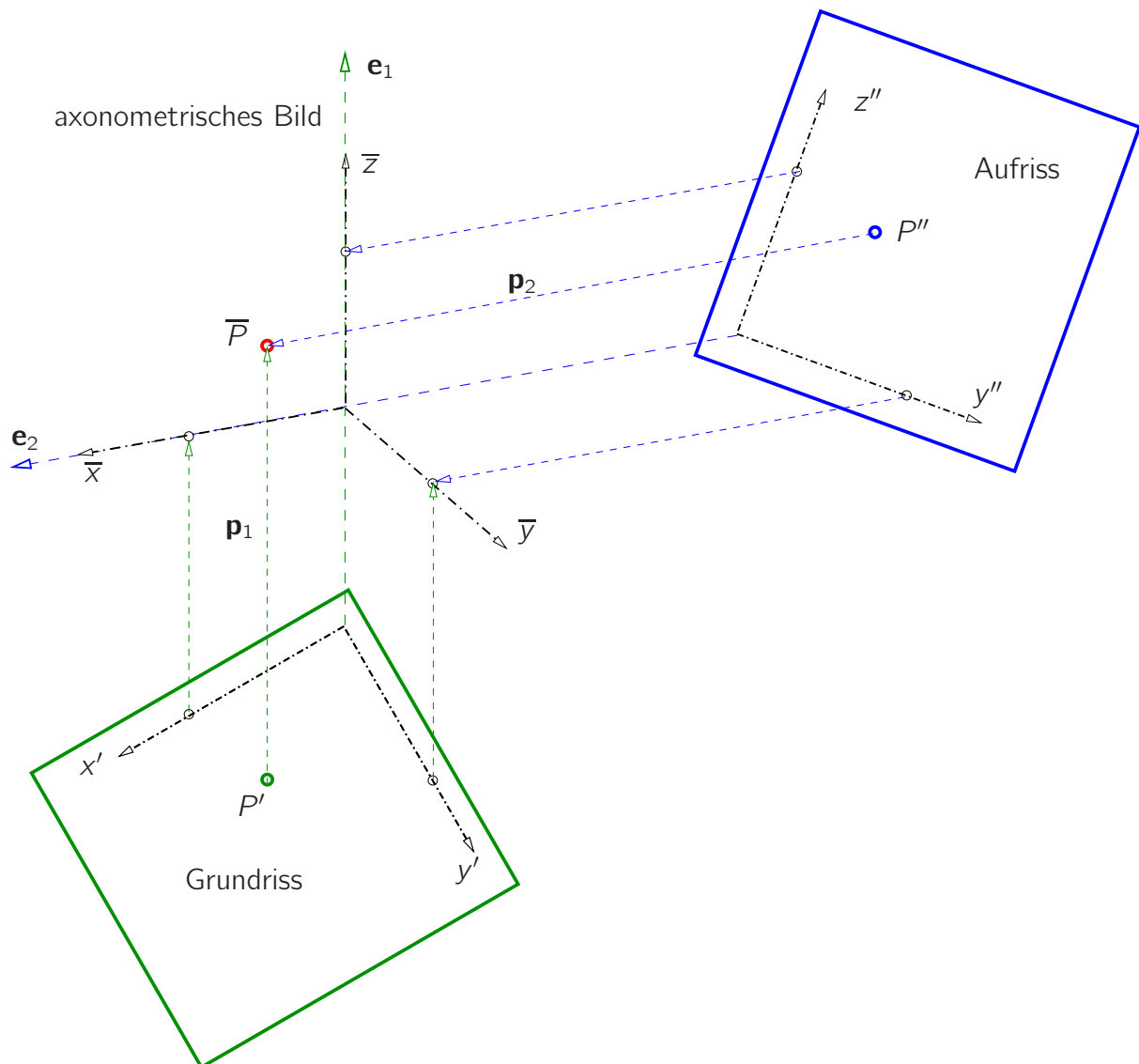


Abbildung 2.5: Einschneideverfahren

Aufgabe 2.3 Stelle ein axonometrisches Bild eines Hauses mit Hilfe des Einschneideverfahrens her (Abb. 2.6).

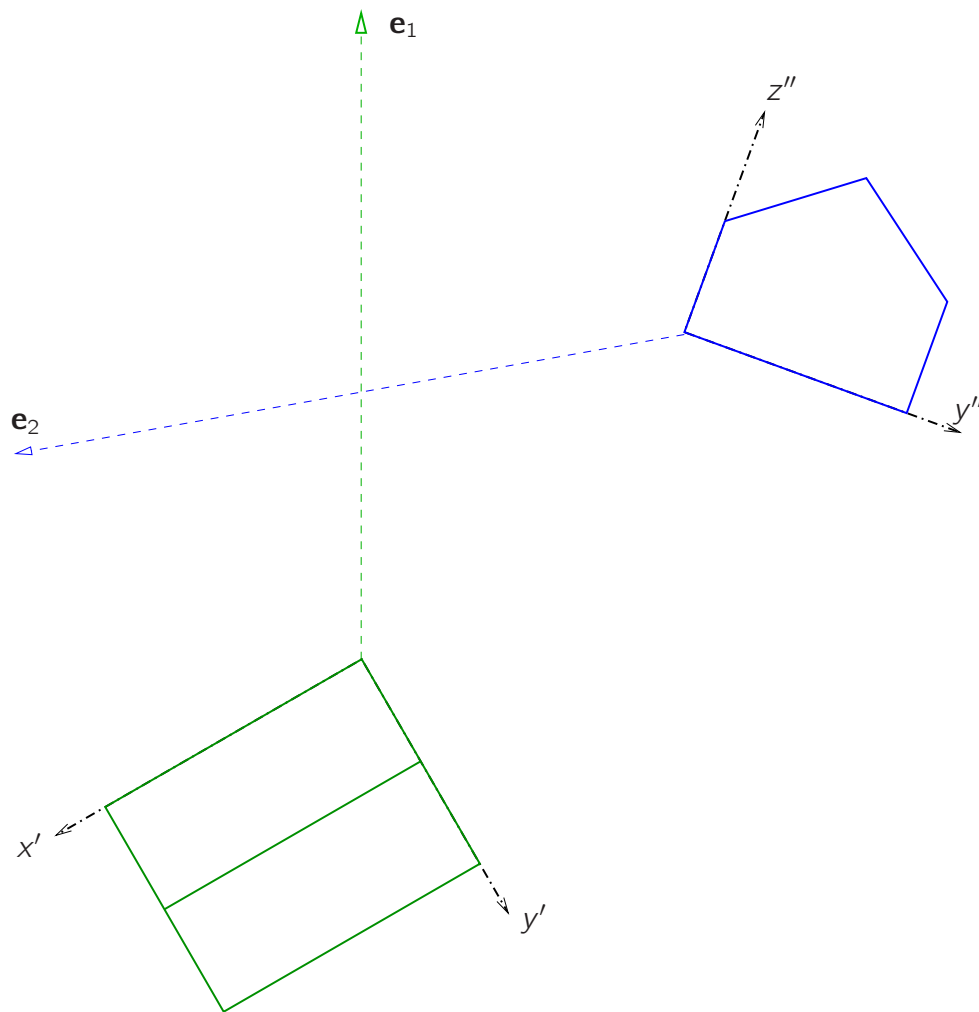


Abbildung 2.6: Einschneideverfahren: Haus

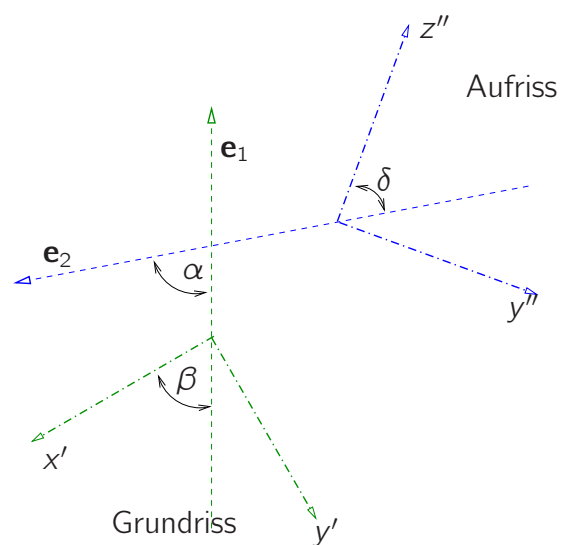


Abbildung 2.7: "Gute" Bilder bei: α von 50° bis 90° und $\beta \approx \delta$ von 5° bis α

2.7 Umprojektion

(s. LEO S.96)

Eine Umprojektion stellt aus Grund- und Aufriss eine neue senkrechte Parallelprojektion her. Die neue Projektionsebene ist allerdings nicht beliebig, sondern muss entweder auf der Grundriss- oder der Aufrissebene senkrecht stehen. In Abb. 2.8 steht die neue Projektionsebene π_3 senkrecht auf π_1 , d.h. die Umprojektion ersetzt den Aufriss durch einen anderen Seitenriss. Eine Umprojektion ist beispielsweise dann nützlich, wenn Grund- und Aufriss ein Objekt in zu spezieller Lage zeigen und eine anschaulichere Projektion aus einer anderen Richtung gewünscht ist.

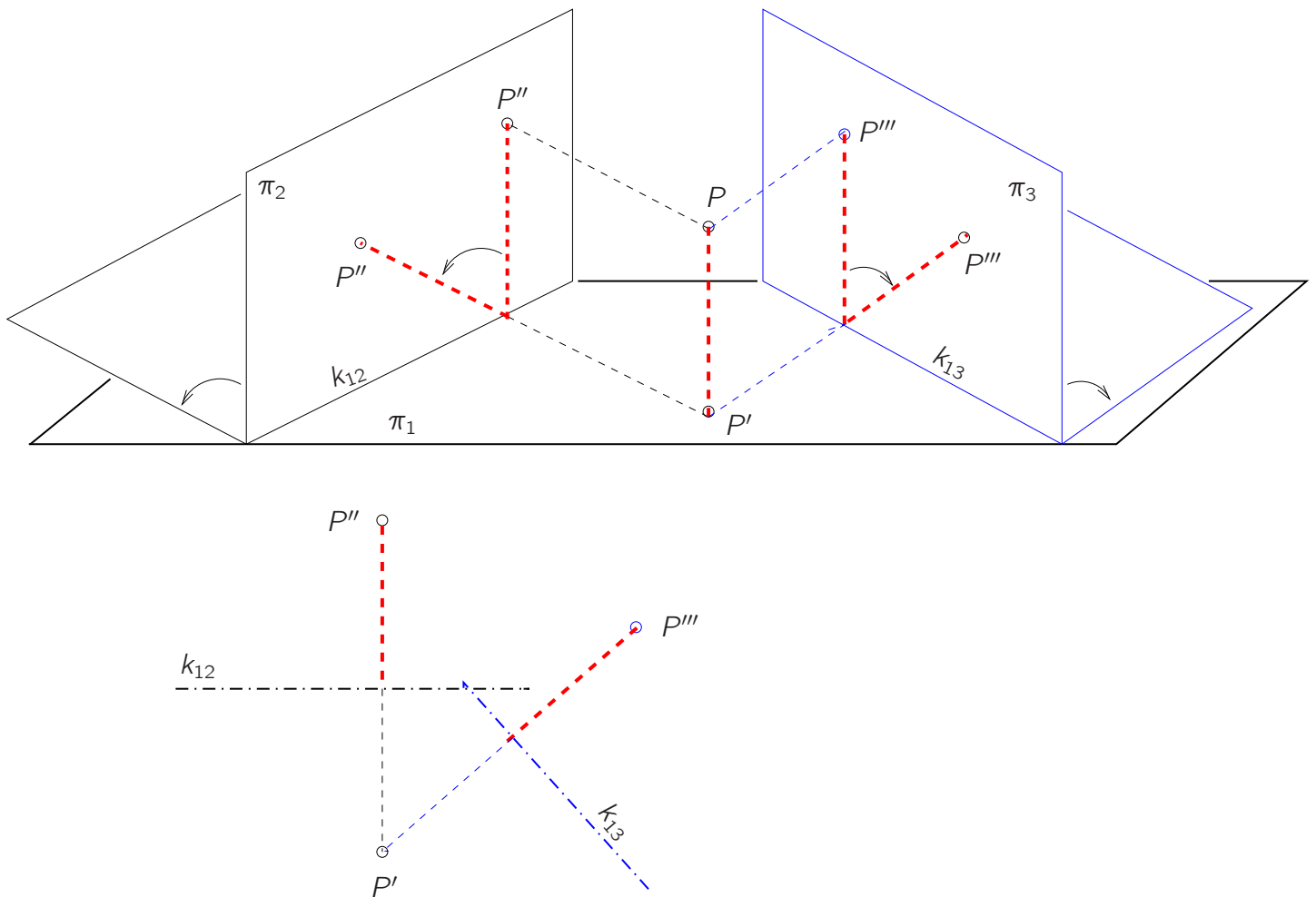


Abbildung 2.8: Umprojektion eines Punktes: Grundriss wird beibehalten, Aufriss ersetzt

Mithilfe von Ordern, siehe Abschnitt 1.4, kann man eine Umprojektion leicht durchführen:

Vorgabe:

Punkt P mit Grund- und Aufriss P' , P'' , sowie eine Risskante k_{13} für eine neue Aufrisstafel π_3 .

Verfahren:

Der gesuchte neue Aufriss P''' des Punktes P liegt

- (1) auf der Senkrechten durch P' zur neuen Risskante k_{13} (neuer Ordner).
- (2) Er hat denselben Abstand von k_{13} wie der alte Aufriss P'' von der alten Risskante k_{12} .

Veranschaulichen Sie sich bitte die Umprojektion durch Hochfalten des Papiers entlang der beiden Risskanten.

Aufgabe 2.4 Stelle durch Umprojektion ein anschauliches Bild eines Hauses her (Abb. 2.9).

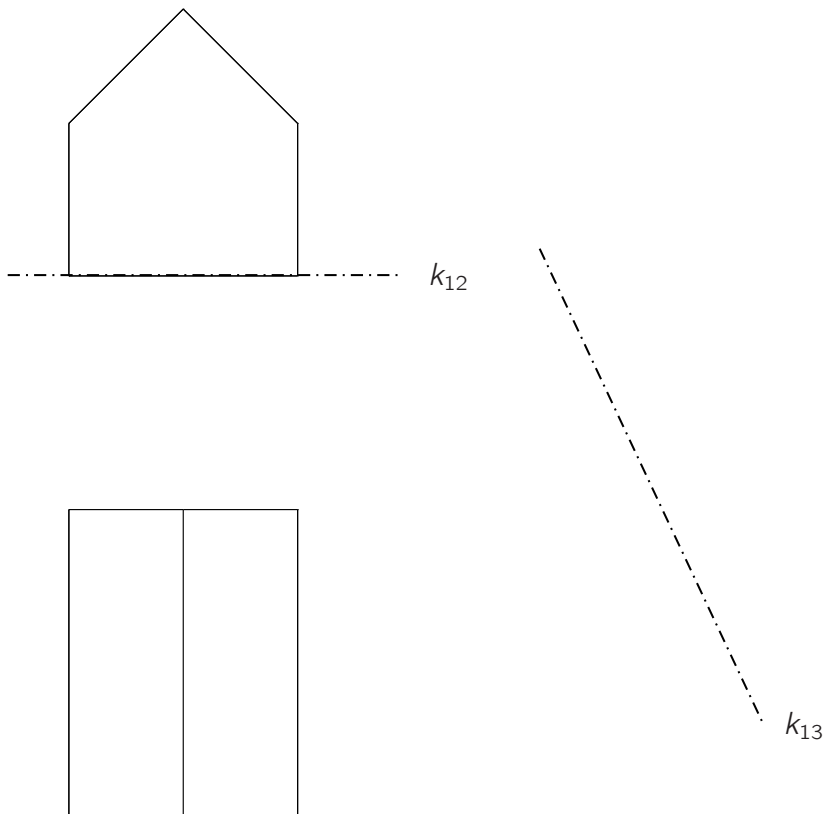


Abbildung 2.9: Umprojektion eines Hauses (Aufriss wird ersetzt)

Die Blickrichtung v entscheidet über die Sichtbarkeit; es ist daher sinnvoll, sie in die Umprojektion einzutragen. Im letzten Beispiel projiziert die Blickrichtung v in π_3 auf einen Punkt v''' , aus dem wir v' und v'' in Umkehrung des Verfahrens gewinnen können: Man muss dazu nur Anfangs- und Endpunkt des Vektors v umprojizieren.

Im Allgemeinen ersetzt Umprojektion eine Projektion durch eine neue Projektion, deren Bildebene senkrecht zur beibehaltenen Bildebene steht. Man kann also genausogut die Aufrissebene π_2 beibehalten und den Grundriss π_1 ersetzen, vorausgesetzt die neue Bildebene π_3 steht senkrecht auf der Aufrissebene π_2 . Das Ergebnis in π_3 ist dann kein Grundriss mehr – machen Sie sich das am gefalteten Papier klar. Der Punkt P''' liegt im Ordner durch den beibehaltenen Punkt P'' , senkrecht auf k_{23} , und hat von dieser Kante den vom wegfallenden Punkt P' abgelesenen Abstand zur Risskante, siehe Abb. 2.10.

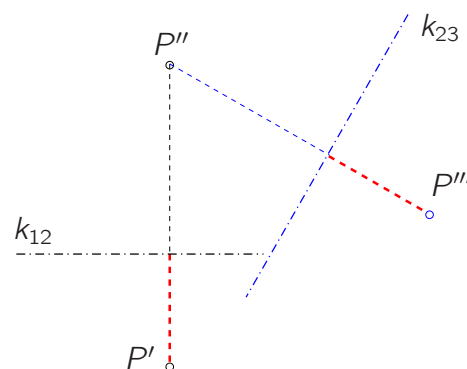


Abbildung 2.10: Umprojektion eines Punktes: Aufriss wird beibehalten, Grundriss ersetzt

Aufgabe 2.5 Stelle durch Umprojektion ein anschauliches Bild einer Pyramide her (Abb. 2.11).

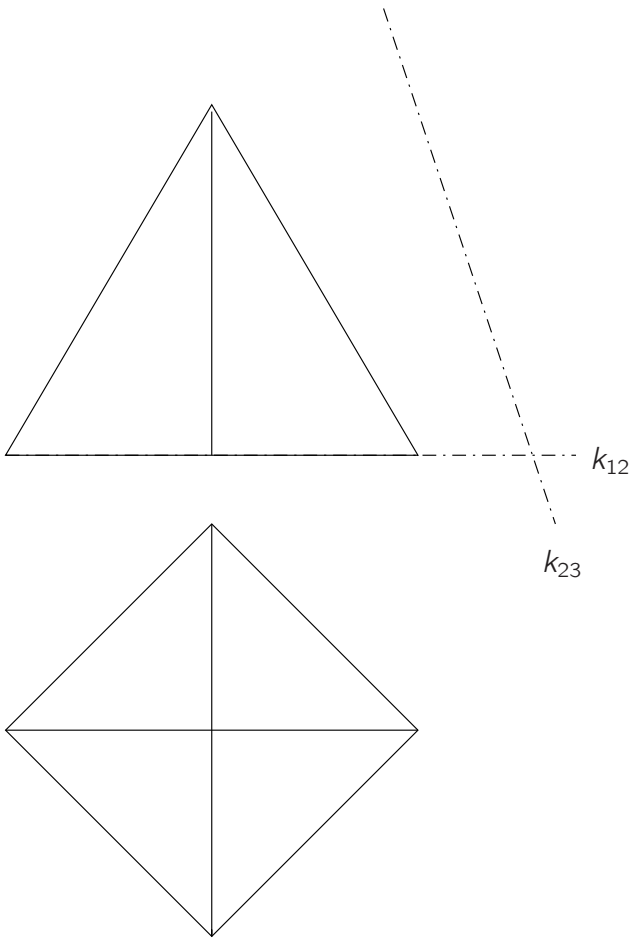


Abbildung 2.11: Umprojektion einer Pyramide (Grundriss wird ersetzt)

Umprojektionen können auch mehrfach hintereinander durchgeführt werden. Sinnvoll ist eine **doppelte Umprojektion**, denn dadurch kann man aus Grund- und Aufriss eine Parallelprojektion auf eine *beliebige* Projektionsebene herstellen. Dabei entnimmt man dem jeweils wegfallenden Riss den Abstand zur neuen Risskante. Man kann eine beliebige Blickrichtung v durch v' und v'' vorgeben und eine Parallelprojektion in Richtung v durch doppelte Umprojektion erzeugen.

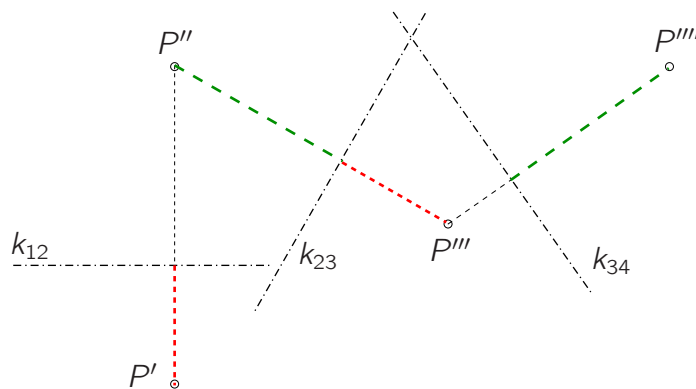


Abbildung 2.12: Doppelte Umprojektion eines Punktes

2.8 Schatten bei parallelem Licht

(s. LEO S.172)

Der räumliche Eindruck eines Bildes verbessert sich deutlich, wenn man Schatten berücksichtigt. Wir betrachten zuerst den Fall von **parallelem** Licht. Hierbei sind alle Lichtstrahlen parallel, wie beispielsweise für Sonnenlicht in guter Näherung.

Wir betrachten zuerst den Schattenwurf einer Geraden g auf eine Ebene, z.B. die Grundrissebene π_1 . Alle Lichtstrahlen, die g treffen, bilden eine Ebene ε . Diese Ebene und die Bildebene schneiden sich daher in einer Geraden $h = \varepsilon \cap \pi_1$. Der Schattenwurf einer Geraden auf eine Ebene ist also wieder eine Gerade. Die Gerade h bestimmen wir im folgenden als geradlinige Verbindung der Schattenwürfe der beiden Endpunkte von g .

Vorgabe: Axonometrie mit Lichtstrahl ℓ und Projektion ℓ' in die Grundrissebene.

Konstruktion:

1. Konstruiere zu P die Grundrissprojektion P' .
2. Schneide eine zum Strahl ℓ parallele Gerade durch P mit der zur Lichtstrahlprojektion ℓ' parallelen Geraden durch P' . Der Schnittpunkt ist der Schattenwurf \tilde{P} von P auf die Grundrissebene.
3. Um den Schattenwurf auf Objekte zu konstruieren, beachte: Wenn eine Strecke parallel zu einer Ebene ist, so sind die Strecke und ihr Schattenwurf auf die Ebene parallel. Das gleiche gilt nach Parallelprojektion, also in der Axonometrie.

Aufgabe 2.6 Ein in Axonometrie gegebenes Haus werde parallel beleuchtet. Die Lichtrichtung ℓ und ihre Projektion ℓ' sind gegeben. Zeichne den Schatten. Ist die rechte Dachfläche beleuchtet?

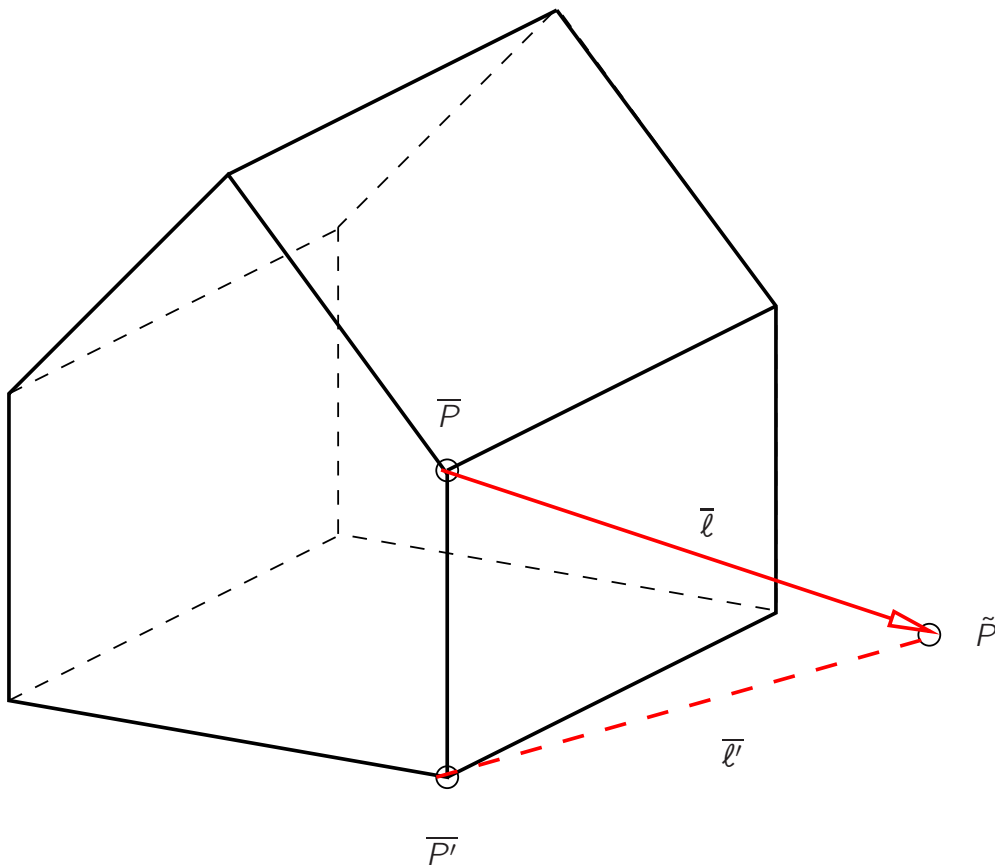


Abbildung 2.13: Schatten eines Hauses bei parallelem Licht

Es ist üblich, folgende Dinge beim Zeichnen von Schatten zu unterscheiden:

- Der **Schlagschatten** ist der Schattenwurf eines Objektes auf die Grundrissebene oder auf andere Objekte.
- Der **Eigenschatten** bezeichnet Flächen eines Objektes die im Schattenwurf desselben Objektes liegen.
- Die **Schattengrenze** ist eine Kurve auf dem Objekt, die beleuchtete Teile vom Eigenschatten abgrenzt.

Es ist sinnvoll, den Schatten durch graue Schattierung oder durch Schraffierung einzutragen. Der Übersichtlichkeit halber vereinbaren wir aber, dies nur dann zu tun, wenn die Fläche oder der Schattenwurf sichtbar ist. Bei nicht sichtbarem Schattenwurf wollen wir nur die Randlinie andeuten.

Manchmal sieht man nicht sofort, welche Kanten des Objekts auf der Schattengrenze liegen. In diesem Fall hilft es, den Schatten sämtlicher Kanten des Objekts zu betrachten: Die am weitesten außen liegenden Schattenwürfe beranden den Schlagschatten und werden von der Schattengrenze erzeugt.

In wichtigen Fällen sind eine Gerade und ihr Schattenwurf parallel:

- Vertikale Geraden werfen auf vertikale Flächen auch vertikale Schatten.
- Eine horizontale Gerade wirft auf eine horizontale Fläche einen zu ihr parallelen Schatten.

Dies folgt aus dem allgemeinen Prinzip: *Zwei parallele Ebenen werden von einer weiteren Ebene in zwei parallelen Geraden geschnitten.* In unserer Anwendung ist die genannte weitere Ebene durch den Schattenwurf der Geraden im Raum gegeben.

Aufgabe 2.7 In Abb. 2.14 ist ein axonometrisches Bild zweier Quader mit Grundfläche in der Grundrissebene gegeben, ferner die Lichtrichtung $\bar{\ell}$ und ihre Projektion $\bar{\ell}'$ in die Grundrissebene. Zeichne den Schatten.

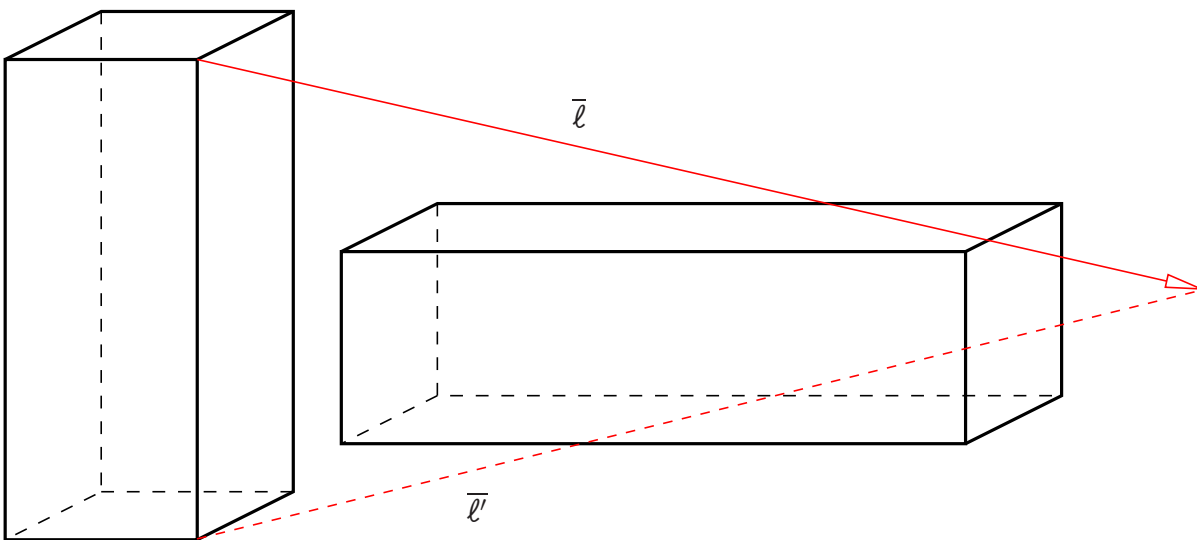


Abbildung 2.14: Schatten zweier Quader bei parallelem Licht

2.9 Schatten bei zentralem Licht

(s. LEO S.181)

Bei einer **zentralen** Lichtquelle gehen alle Lichtstrahlen von einem Punkt, der Lichtquelle L , aus. Auch in diesem Fall ist der Schattenwurf einer Geraden g im Raum in einer Ebene ε enthalten, die durch sämtliche durch g laufende Lichtstrahlen aufgespannt wird. Die Ebene ε enthält also die Punktlichtquelle L und die Gerade g . Die Grundrissebene (oder jede andere Ebene) wird von ε in einer Geraden geschnitten.

Diese Überlegung ergibt folgendes Konstruktionsverfahren für Schatten:

Vorgabe: Axonometrie mit Punkt-Lichtquelle L und ihrem Fußpunkt L' .

Konstruktion:

1. Konstruiere zu P die Grundrissprojektion P' .
2. Der Schattenwurf \tilde{P} von P in der Grundrissebene ist der Schnittpunkt der Geraden LP und $L'P'$.
3. Um den Schattenwurf auf Objekte zu konstruieren, verfolgt man sukzessive den Schattenwurf längs Kanten des Objekts. Beachte dabei: Wenn eine Strecke parallel zu einer Ebene ist, so sind die Strecke und ihr Schattenwurf auf die Ebene parallel.

Zur Begründung dieses Verfahrens nimmt man als Gerade g die Verbindung $P'P$. Die Ebene ε enthält außer g auch den speziellen Lichtstrahl LL' . Die Ebene schneidet daher die Grundrissebene in einer Geraden, die die beiden Punkte L' und \tilde{P} enthält.

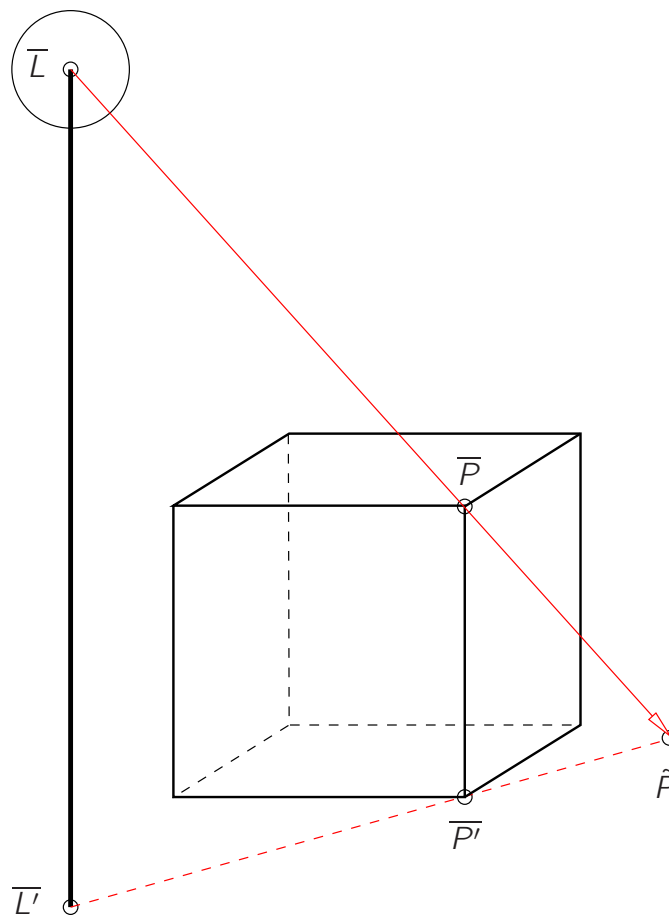


Abbildung 2.15: Schatten eines Quaders bei zentralem Licht

Aufgabe 2.8 Zeichne den Schattenwurf des Hauses bei Beleuchtung durch die Lichtquelle L in das axonometrische Bild Abb. 2.16. Wirft der First einen Schatten?

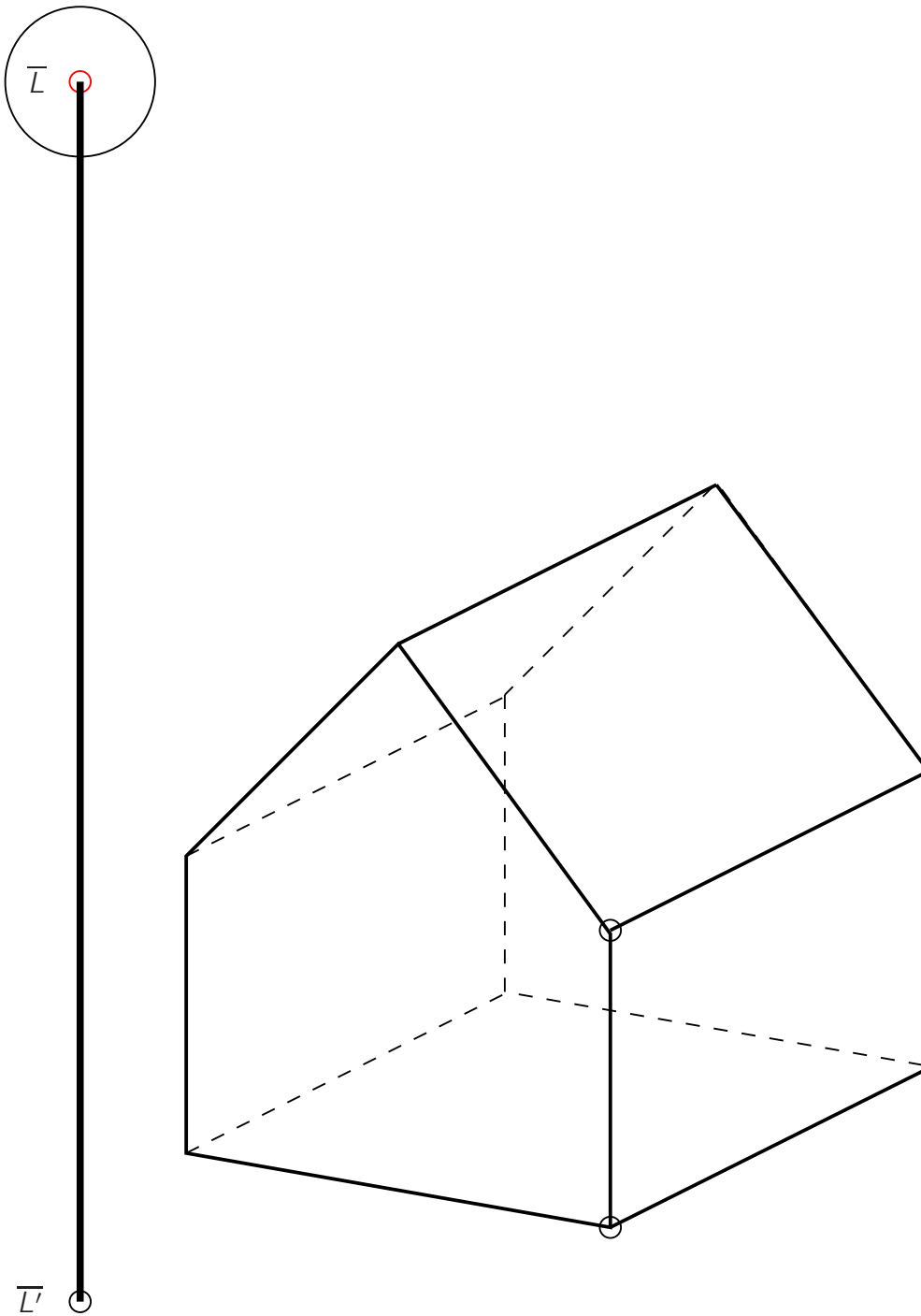


Abbildung 2.16: Schatten eines Hauses bei zentralem Licht

Kapitel 3

Parallelprojektion von Geraden und ebenen Flächen

Wir befassen uns nun systematischer mit der Darstellung von Objekten unter Parallelprojektion. Dabei betrachten wir meist die beiden Parallelprojektionen von Grund- und Aufriss zugleich, auch **Zweitafelprojektion** genannt. In diesem Kapitel wollen wir dabei lineare Objekte abbilden, also Geraden und ebene Flächen, bevor wir im nächsten Kapitel gekrümmte Flächen behandeln.

Zuerst betrachten wir die Projektionen von Punkten, Geraden und Ebenen, sowie ihrer Schnitte. Es folgen die sogenannten *Grundaufgaben* der Darstellenden Geometrie, die Ermittlung von Durchstoßpunkten, wahren Längen und Loten. Schließlich befassen wir uns damit, wann das Einschneideverfahren eine senkrechte Parallelprojektion liefert, und wir konstruieren den Grundriss von Dächern.

3.1 Zweitafelprojektion eines Punktes

(s. LEO S.82)

Wir bezeichnen Punkte mit großen lateinische Buchstaben. Die nächste Zeichnung zeigt Punkte A und D in allgemeiner Lage, während B und C in Grund- bzw. Aufrissebene liegen.

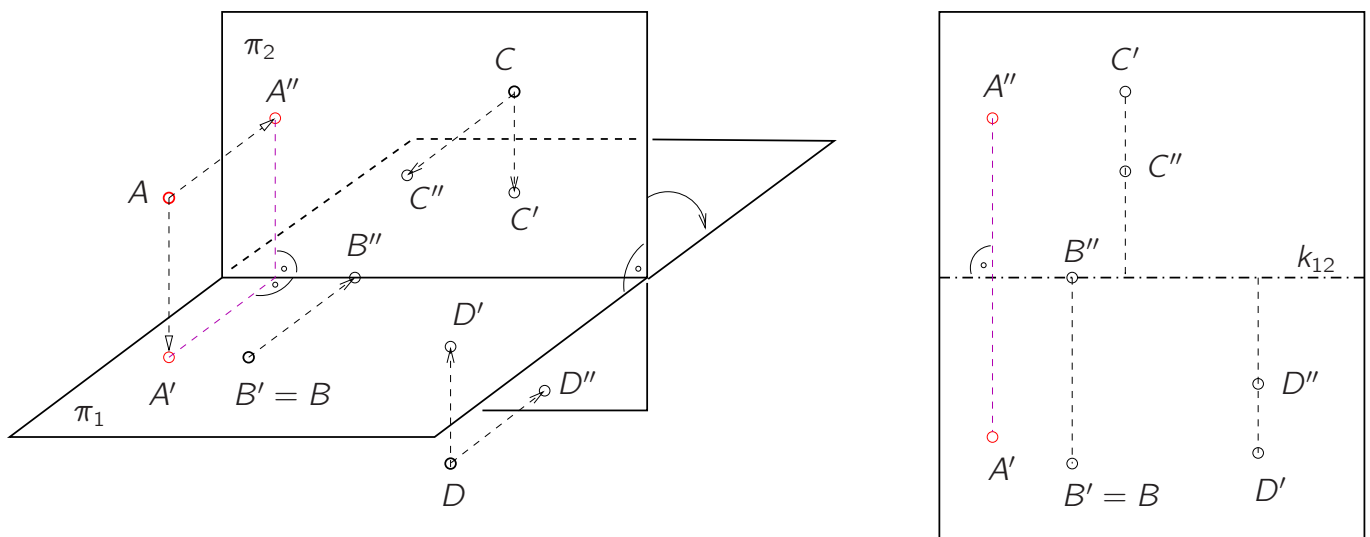


Abbildung 3.1: Zweitafelprojektion von Punkten in verschiedener Lage

Der Punkt D belegt, dass der Aufriss eines Punktes nicht immer oberhalb der Risskante liegen muss. Normalerweise sorgt man aber dafür, dass dieser Fall nicht eintritt. Analog muss der Grundriss eines Punktes nicht immer unterhalb der Risskante liegen.

3.2 Zweitafelprojektion von Geraden

(s. LEO S.83,89)

Eine Gerade

Eine Gerade wird beispielsweise durch zwei Punkte festgelegt. Wir bezeichnen Geraden stets mit kleinen griechischen Buchstaben. Wegen der Geradentreue von Parallelprojektionen ist die Projektion einer Geraden i.A. wieder eine Gerade.

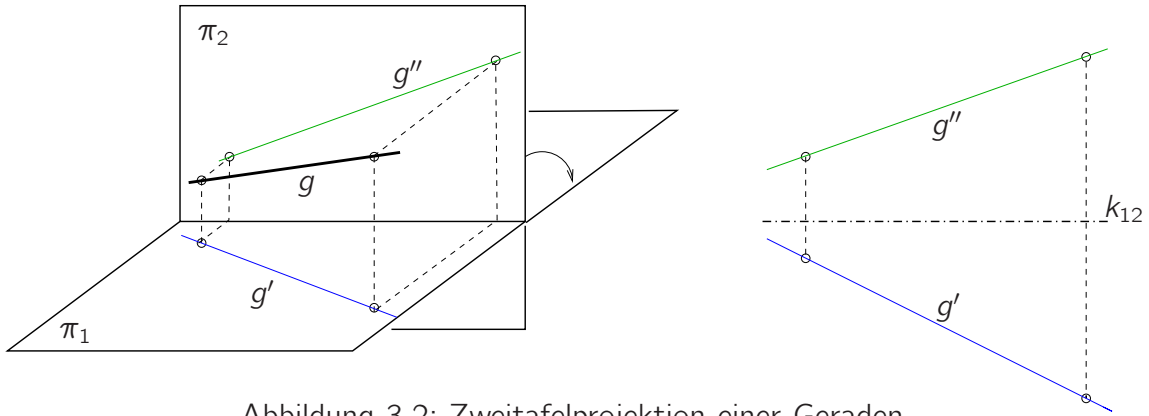


Abbildung 3.2: Zweitafelprojektion einer Geraden

Wir wollen folgende Begriffe für Sonderlagen von Geraden verwenden:

- Eine **Höhenlinie** ist eine zu π_1 parallele Gerade, d.h. die Höhe z bleibt konstant.
- Eine **Frontlinie** ist eine zu π_2 parallele Gerade, d.h. der "Frontwert" x ist konstant.
- Eine **Hauptgerade** ist eine Höhen- oder Frontlinie.

Eine wichtige Eigenschaft von Hauptgeraden ist:

Der Grundriss einer Höhenlinie ist unverzerrt. Der Aufriss einer Frontlinie ist unverzerrt.

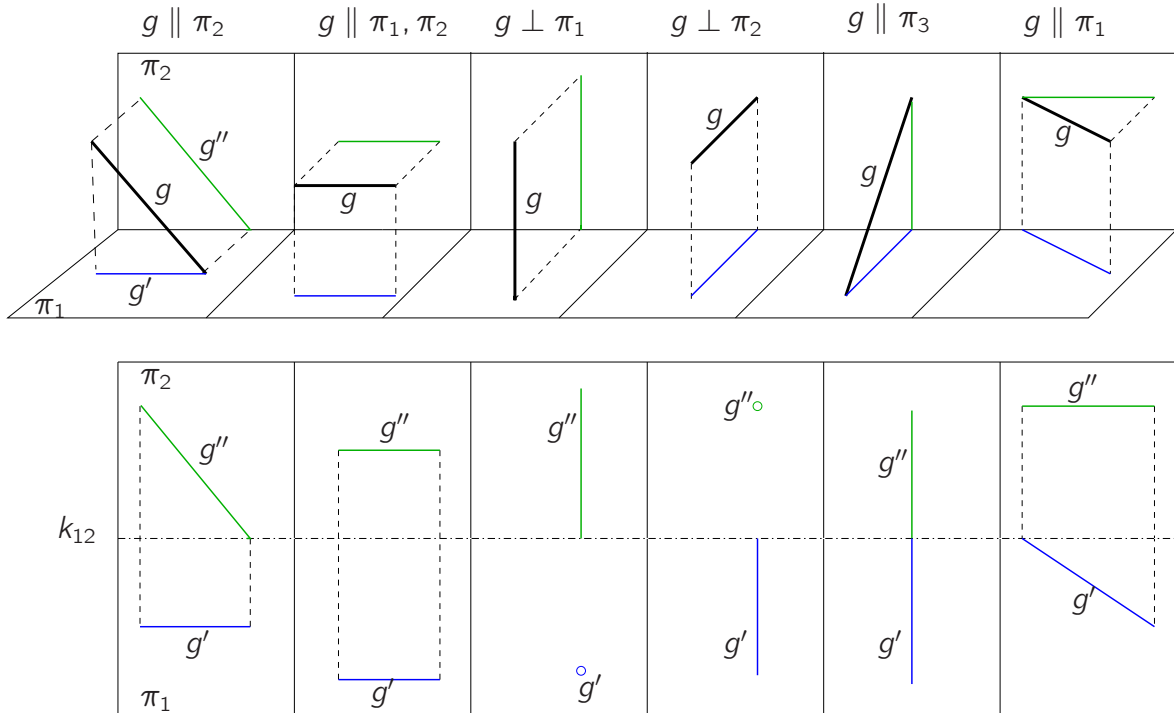


Abbildung 3.3: Sonderlagen von Geraden

Die Durchstoßpunkte einer Geraden g mit den Risttafeln nennt man **Spurpunkte** von g .

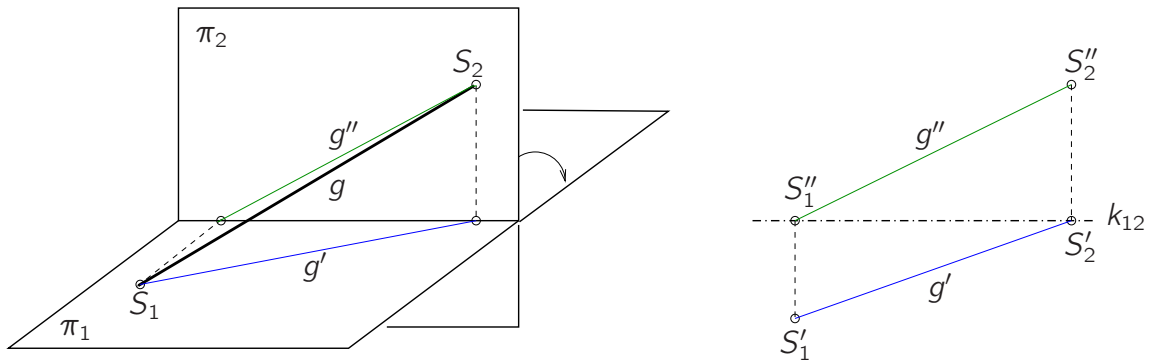


Abbildung 3.4: Spurpunkte $S_1 = g \cap \pi_1$ und $S_2 = g \cap \pi_2$ der Geraden g

Zwei und mehr Geraden

Zwei verschiedene Geraden g, h können sich zueinander in folgenden Lagen befinden:

- a) Sie *schneiden sich in einem Punkt* $S = g \cap h$, oder
- b) sie sind *parallel*, $g \parallel h$.
- c) Wir nennen sie **windschief**, wenn sie weder parallel sind noch sich schneiden.

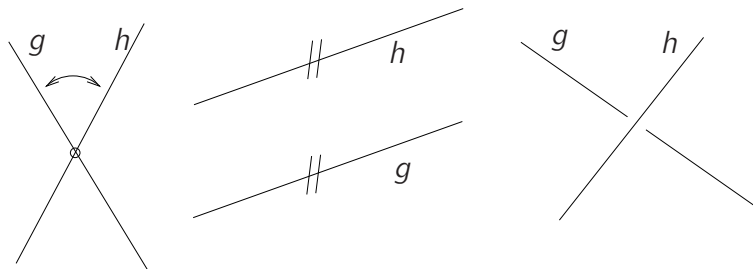


Abbildung 3.5: Sich schneidende, parallele, windschiefe Geraden

Wir untersuchen nun, wie diese drei Fälle in Grund- und Aufriss erscheinen.

- a) Die Parallelentreue von Parallelprojektionen besagt, dass *parallele Geraden* auch parallele Projektionen besitzen. Wir sehen das in Grund- und Aufriss:

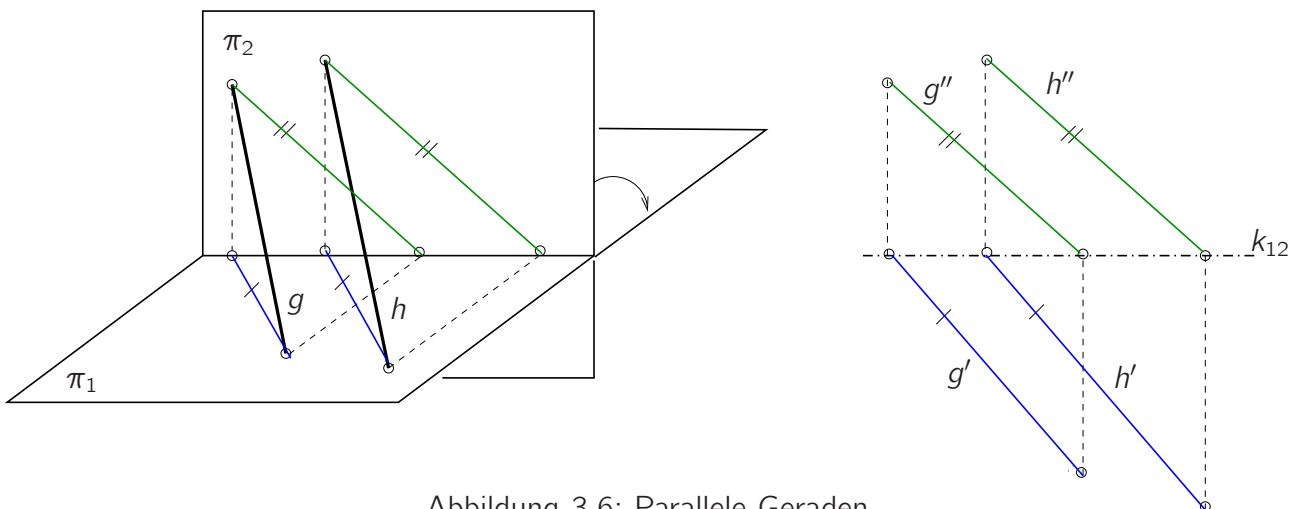


Abbildung 3.6: Parallele Geraden

b) *Schneiden* sich zwei Geraden g, h in einem Punkt S , so müssen $S' \in \pi_1$ und $S'' \in \pi_2$ auf einem Ordner liegen.

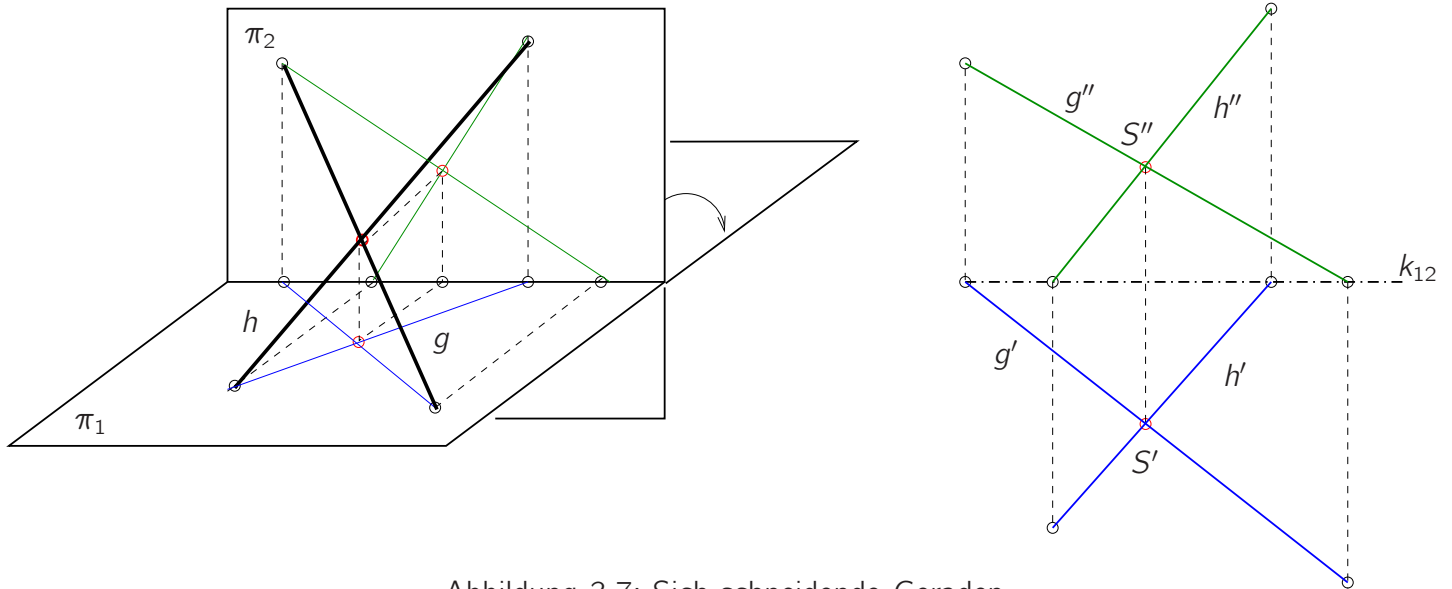


Abbildung 3.7: Sich schneidende Geraden

c) Betrachten wir schließlich den Fall zweier zueinander *windschiefer* Geraden g, h . Es sei $S' \in \pi_1$ der Schnittpunkt von g' und h' im Grundriss, und $T'' \in \pi_2$ der Schnittpunkt von g'' und h'' im Aufriss. Da diese beiden Punkte *nicht* zu nur einem Punkt im Raum gehören, müssen S' und T'' auf zwei verschiedenen Ordner liegen, siehe Abb. 3.8.

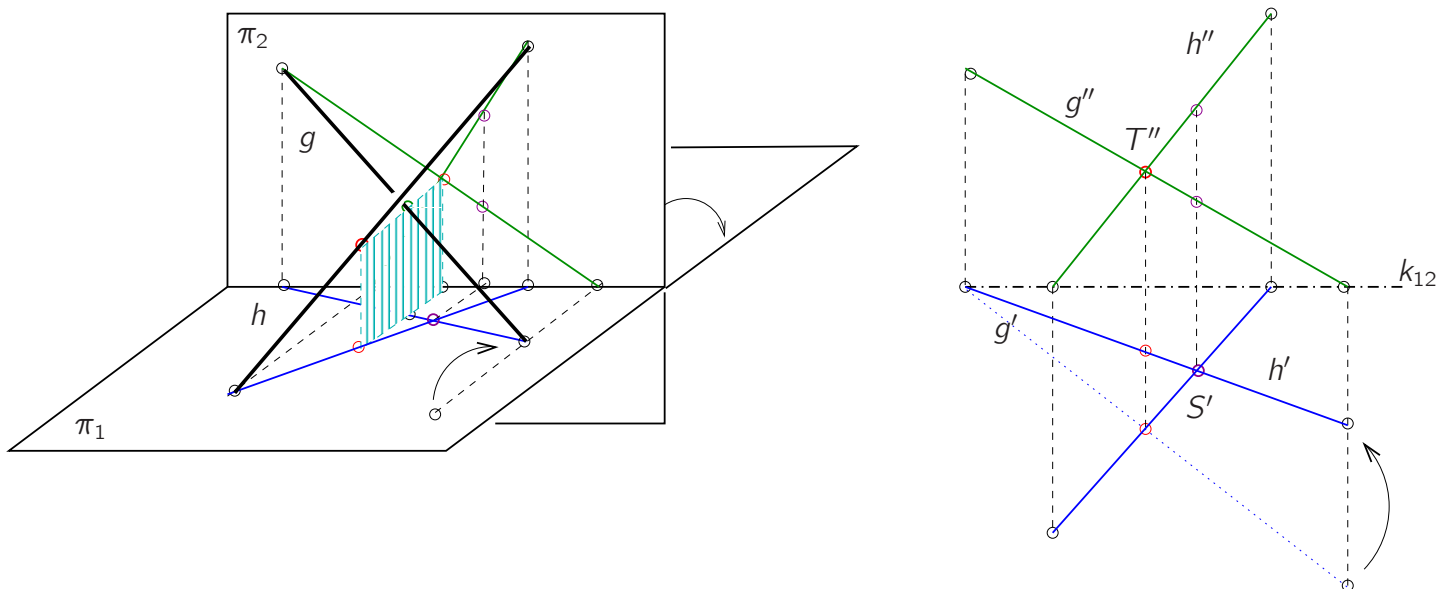


Abbildung 3.8: Windschiefe Geraden (eine Gerade aus Abb. 3.7 wird bewegt)

Wir halten als Ergebnis der letzten beiden Fälle fest:

Zwei Geraden g, h haben genau dann einen Schnittpunkt, wenn die Punkte $g' \cap h' \in \pi_1$ und $g'' \cap h'' \in \pi_2$ auf demselben Ordner liegen.

Es folgen zwei Beispiele, in denen der Schnittpunkt von Geraden benutzt wird. Zuerst benutzen wir Diagonalen, um festzustellen, ob ein Viereck eben ist:

Aufgabe 3.1 Liegen die vier in Grund- und Aufriss gegebenen Punkte in einer Ebene?

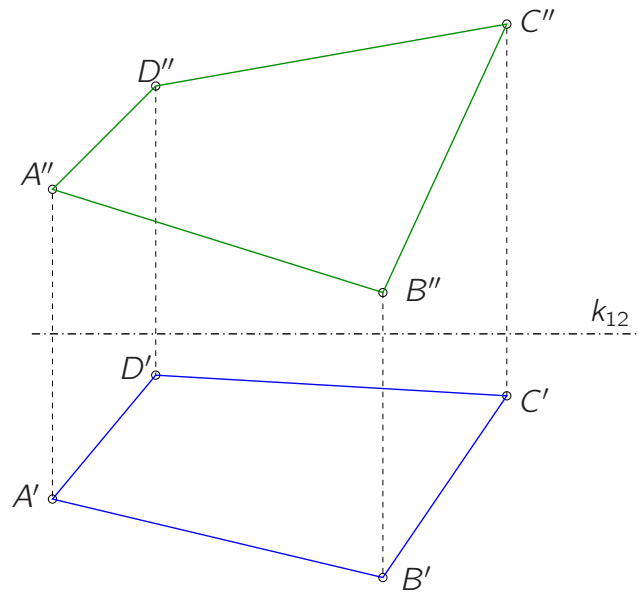


Abbildung 3.9: Ist das Viereck eben?

Als zweites bestimmen wir den Grundriss eines Punktes, indem wir den Punkt als Schnittpunkt zweier Geraden darstellen:

Aufgabe 3.2 Durch die Punkte A, B, C ist eine Ebene ε gegeben. Von einem Punkt $P \in \varepsilon$ ist P'' bekannt. Bestimme P' .

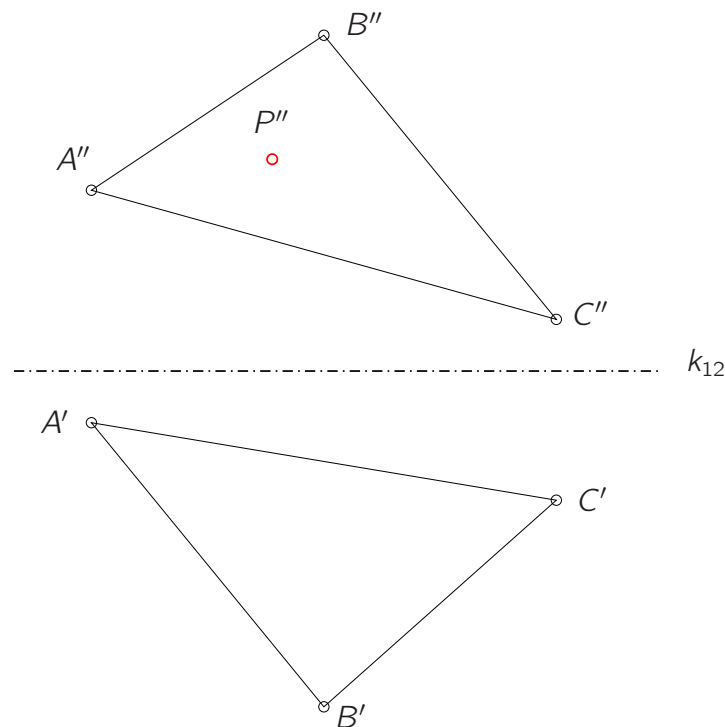


Abbildung 3.10: Punkt in einem Dreieck

3.3 Zweitafelprojektion einer Ebene

(s. LEO S.91)

Eine Ebene im Raum kann festgelegt werden durch

- (a) drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, oder
- (b) eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Gerade liegt, oder
- (c) zwei parallele oder sich schneidende Geraden.

Wir bezeichnen Ebenen mit kleinen griechischen Buchstaben.

Die Schnittgeraden einer Ebene ε mit den Risstafeln heißen die **Spuren** von ε . Die Grundrissspur $\varepsilon \cap \pi_1$ ist gerade die Höhenlinie der Ebene mit $z = 0$ und die Aufrissspur $\varepsilon \cap \pi_2$ die Frontlinie mit $y = 0$. Wegen (c) wird eine Ebene durch diese beiden Spuren bestimmt; das gilt auch noch, wenn eine Spur nicht existiert. Machen Sie sich dies an Abb. 3.11 klar:

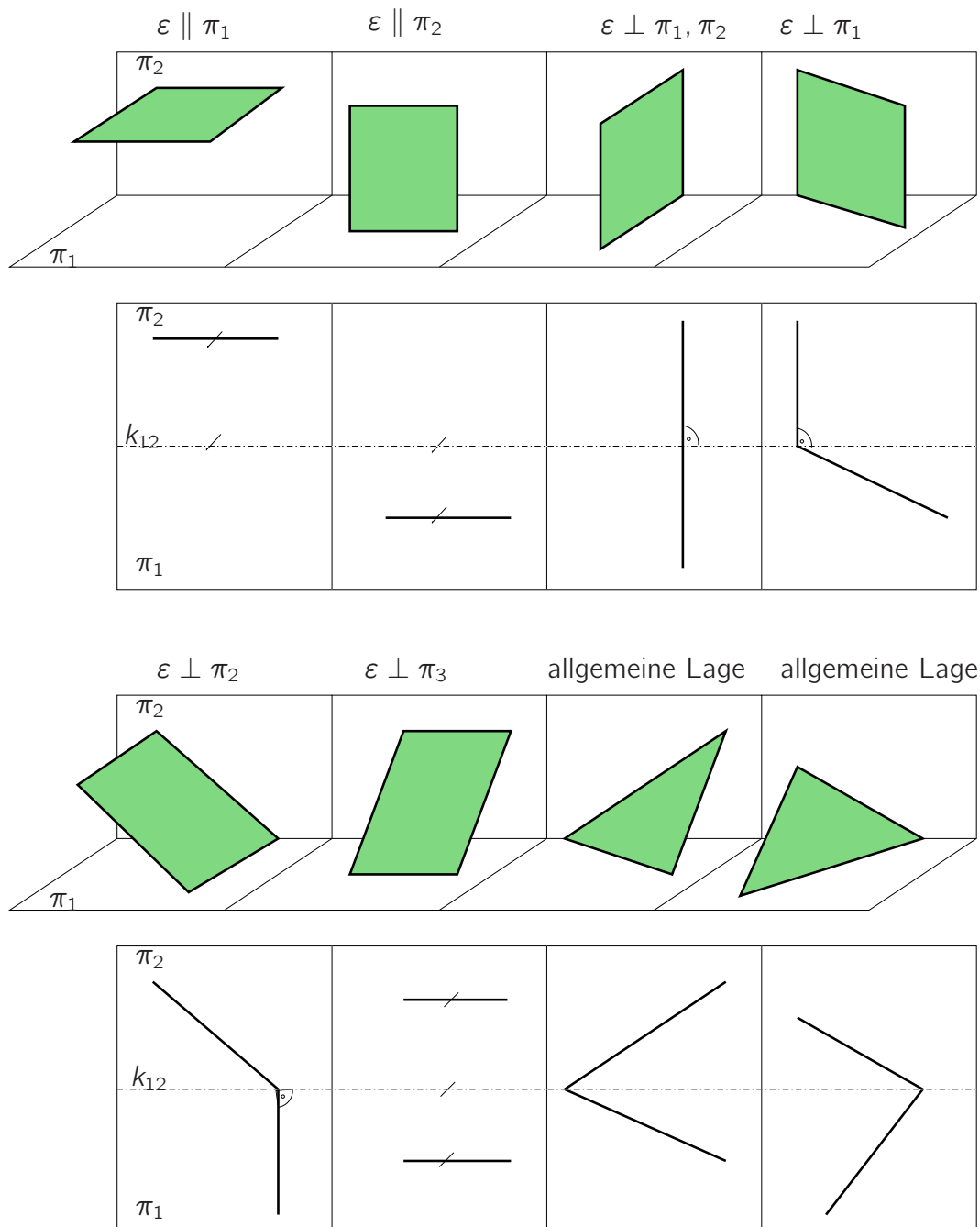


Abbildung 3.11: Sonderlagen von Ebenen und ihre Spuren in Grund- und Aufriss

Die folgenden beiden Aufgaben lassen sich durch Ausnutzen der Parallelität der Spuren mit Höhen- oder Frontlinien lösen.

Aufgabe 3.3 Die Ebene ε ist durch die Höhenlinie h und die Frontlinie f durch den Punkt P gegeben. Benutze die Spurpunkte von h und f dazu, die beiden Spurgeraden von ε zu bestimmen.

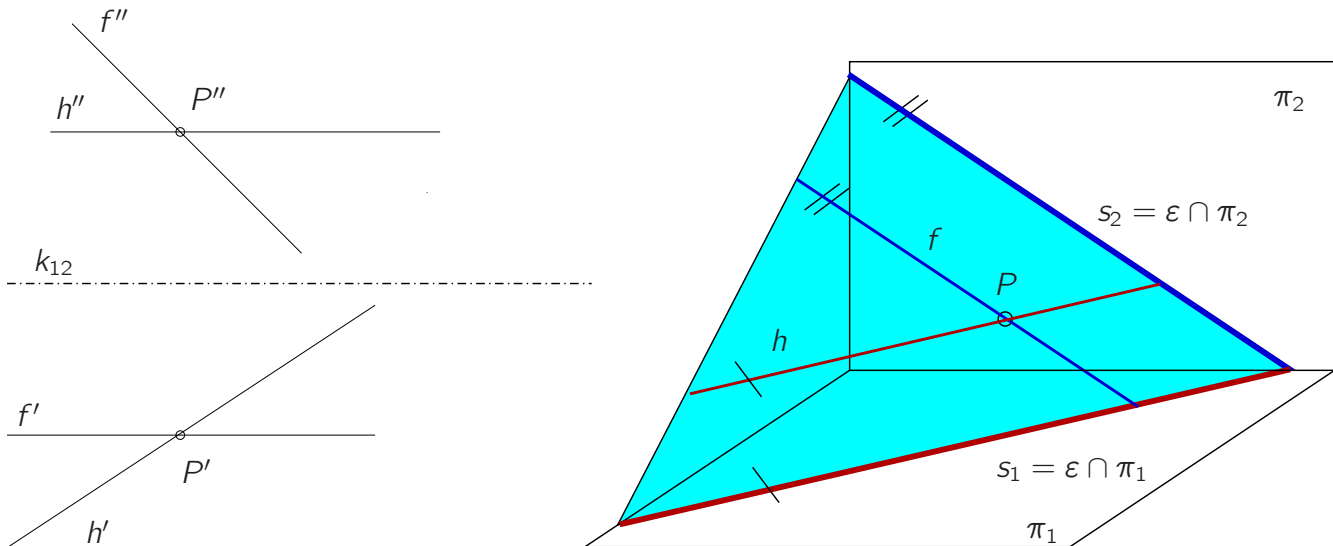


Abbildung 3.12: Spuren einer Ebene

Aufgabe 3.4 Die Ebene ε ist durch ihre Spuren s_1, s_2 gegeben. Von dem Punkt $P \in \varepsilon$ sei der Aufriss P'' gegeben. Bestimme P' und die beiden Hauptgeraden h, f durch P .

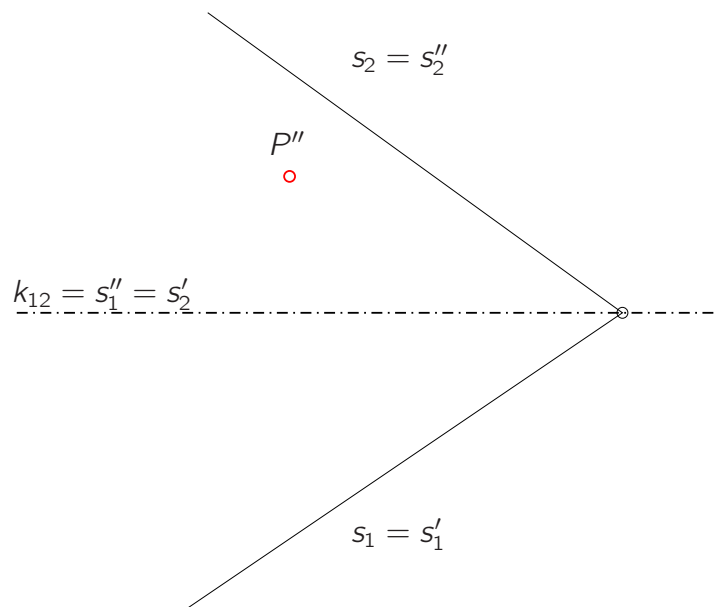


Abbildung 3.13: Punkt und Hauptgeraden in einer Ebene

Aufgabe 3.5 Die folgende Abbildung zeigt eine Säule mit viereckigem Querschnitt (Prisma), die von vier Geraden a, b, c, d berandet wird (in dieser Reihenfolge).

a) Bestimme die Grundrissspur der Säule, also ihren Schnitt mit der Grundrissebene π_1 .

b) Entscheide über die Sichtbarkeit der Grundrissspur im Grundriss anhand des Aufrisses. Ist die Sichtbarkeit der vier Geraden in Grund- und Aufriss zutreffend eingetragen?

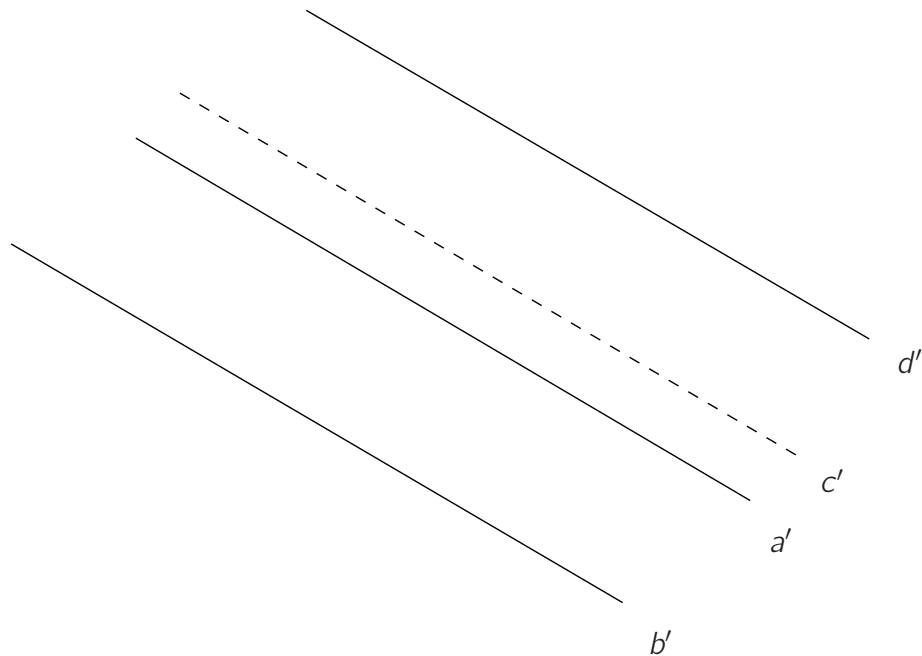
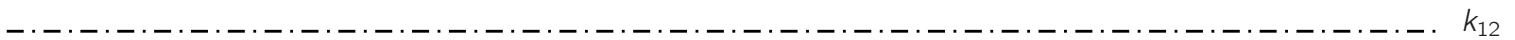
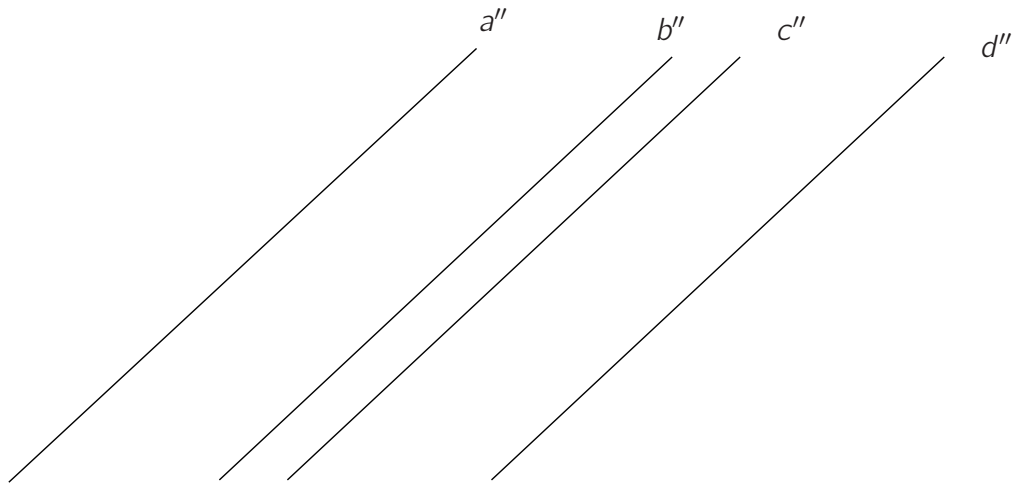


Abbildung 3.14: Grundrissspur eines Balkens

3.4 Schnittpunkt Gerade–Ebene: Durchstoßpunkt

(s. LEO S.92)

Man bezeichnet den Schnittpunkt einer Geraden g mit einer Ebene ε auch als Durchstoßpunkt. Sind Gerade und Ebene in Grund- und Aufriss gegeben, so kann man den Durchstoßpunkt bestimmen, indem man z.B. eine **vertikale Hilfsebene** μ benutzt, die g enthält; sie ist durch ihre Grundrissprojektion $g' = \mu'$ bestimmt. Die Schnittgerade $s = \varepsilon \cap \mu$ ist im Aufriss zu sehen, und daher kann man dort den Durchstoßpunkt D als Geradenschnittpunkt $D = s \cap g$ bestimmen; dadurch ist wiederum der Grundriss von D bestimmt.

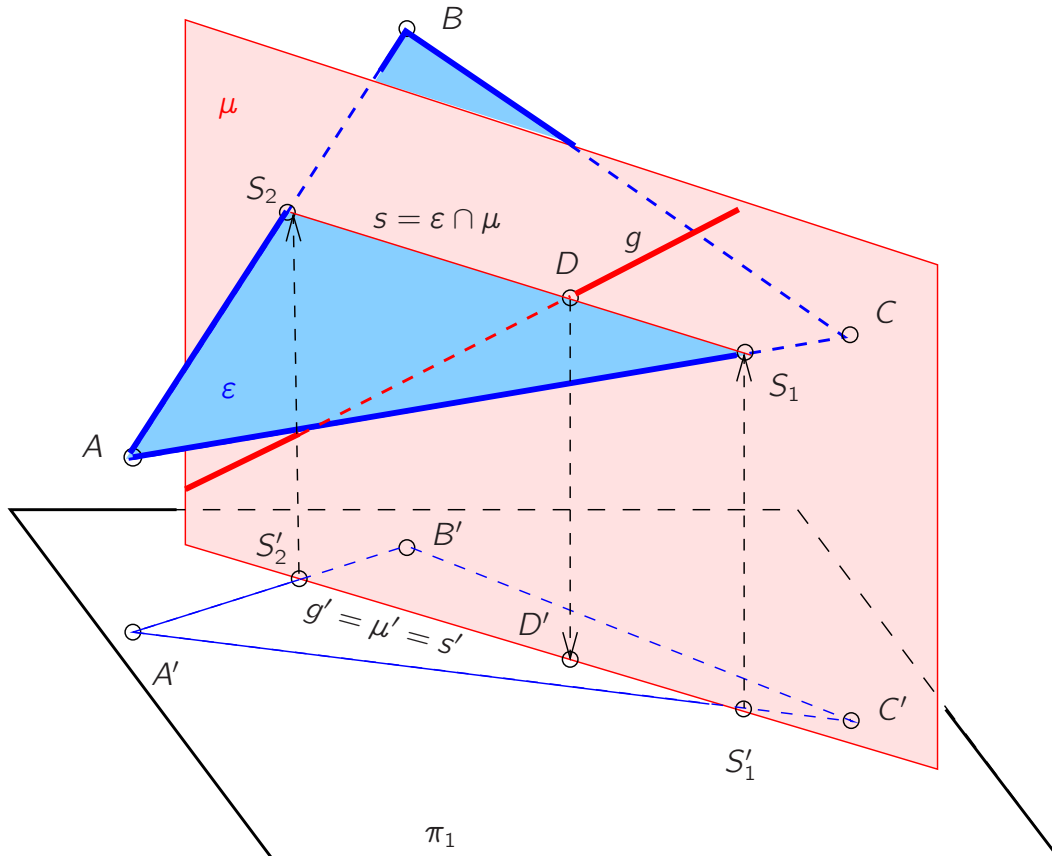


Abbildung 3.15: Schnitt Gerade–Ebene

Daraus ergibt sich folgende Konstruktion, die wir in Aufgabe 3.6 anwenden wollen:

Vorgabe: Gerade g durch ihren Grundriss g' und Aufriss g'' ,
Ebene ε durch drei Punkte A, B, C in Grund- und Aufriss.

Gesucht: Durchstoßpunkt $D = g \cap \varepsilon$.

Durchführung:

- (1) Im Grundriss schneidet die Gerade g' die Dreiecksseiten (Geraden durch die Punkte A', B', C') in zwei Punkten S'_1 und S'_2 .
- (2) Im Aufriss findet man S''_1 und S''_2 auf den Schnitten der entsprechenden Dreiecksseiten mit Ordnern. Diese Punkte bestimmen den Aufriss s'' der Schnittgeraden $s = \varepsilon \cap \mu$.
- (3) Der Aufriss des Durchstoßpunktes D ist der Schnittpunkt $D'' = s'' \cap g''$, seinen Grundriss D' findet man dann auf g' mit Hilfe eines Ordners.

Die Durchführung für den Fall, dass $\mu \perp \pi_2$ gewählt wurde, verläuft analog. Man muss nur die Rollen von Grund- und Aufriss vertauschen.

Aufgabe 3.6 Bestimme den Schnittpunkt einer Geraden mit der durch ein Dreieck gegebenen Ebene. Entscheide über die Sichtbarkeit der Geradenabschnitte durch Betrachtung des jeweils anderen Risses.

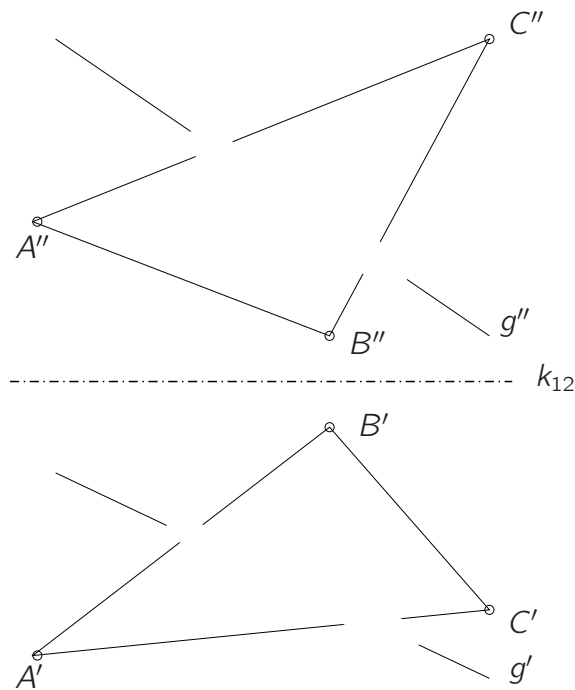


Abbildung 3.16: Schnitt Gerade–Ebene

Aufgabe 3.7 In Grund- und Aufriss ist ein dreikantiger Balken und ein ebenes Viereck gegeben. Bestimme Grund- und Aufriss der Schnittfigur und entscheide über die Sichtbarkeit des Balkens.

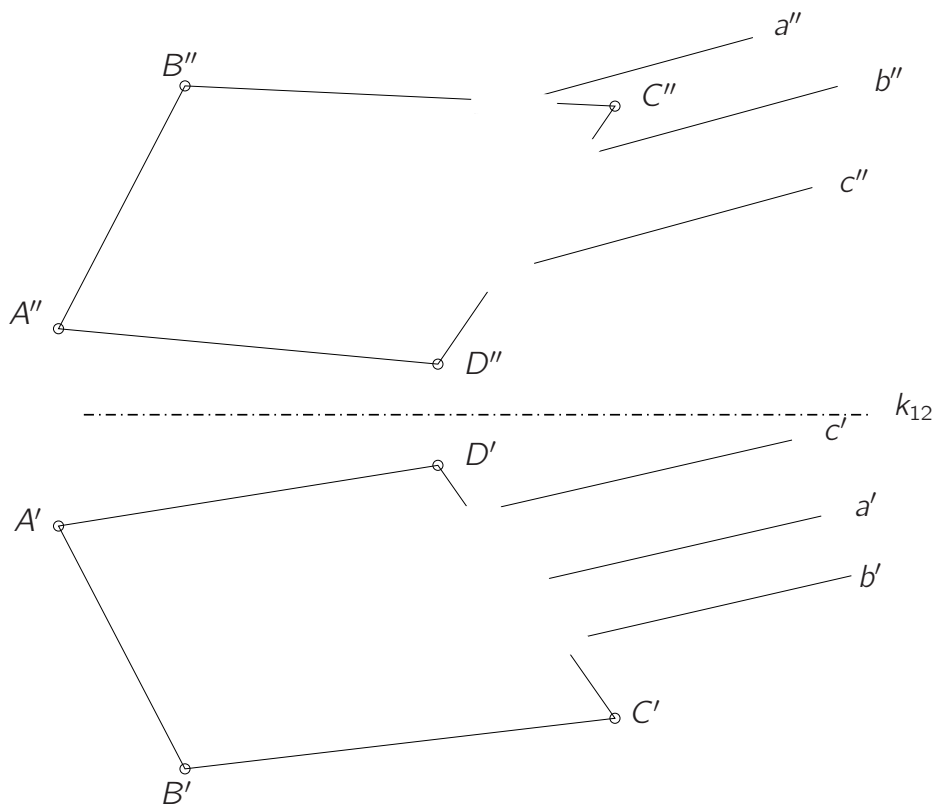


Abbildung 3.17: Schnitt Balken–Ebene

Auch der Schattenwurf \tilde{P} eines Punktes P längs einer Lichtrichtung ℓ auf eine geneigte Ebene ε ist ein Durchstoßpunkt, der sich mit Hilfe einer vertikalen Hilfsebene μ konstruieren läßt. Dazu wählt man für μ den Schattenwurf der Geraden PP' im Raum, was zugleich die von ℓ und ℓ' aufgespannte vertikale Ebene ist. Hat man $g := \mu \cap \varepsilon$ bestimmt, so ist der Durchstoßpunkt der Geradenschnittpunkt $\tilde{P} = g \cap \ell$.

Aufgabe 3.8 Ein Hochhaus (Quader) und eine Fabrikhalle auf einer gemeinsamen Grundrissebene sind in einer Axonometrie dargestellt. Zeichne den Schlagschatten des Quaders, erzeugt durch paralleles Licht in Richtung ℓ .

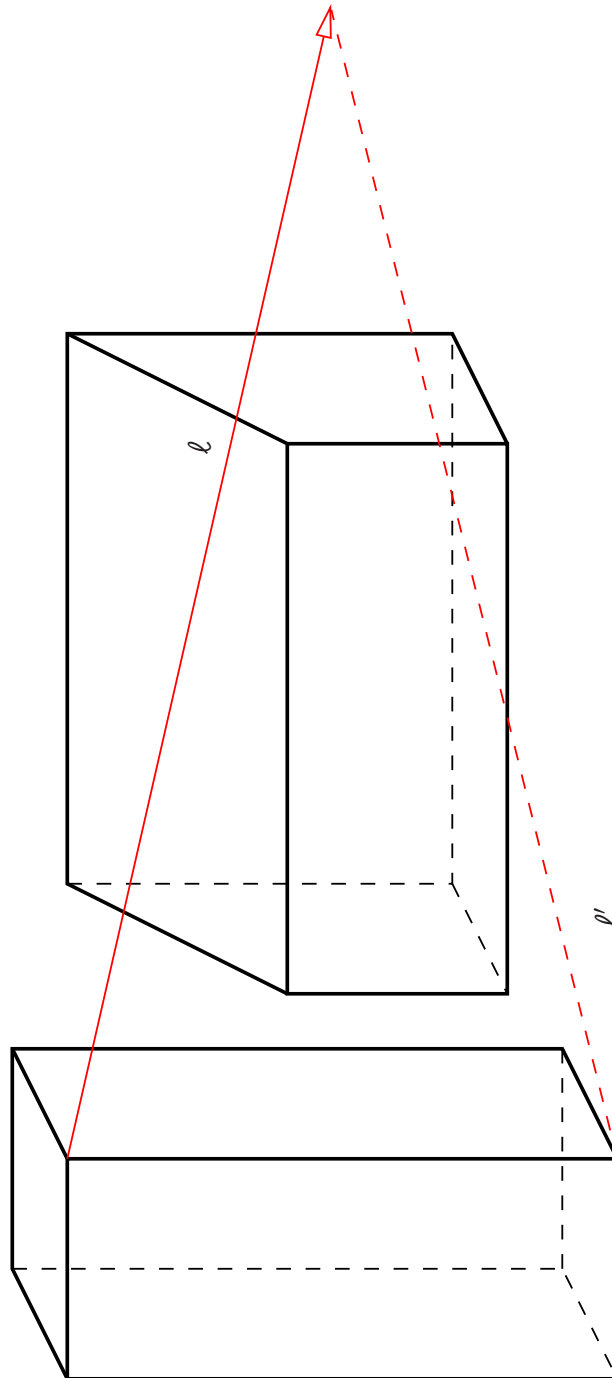


Abbildung 3.18: Schatten auf geneigte Ebenen bei parallelem Licht

3.5 Wahre Länge und wahre Gestalt

Wahre Länge einer Strecke

(s. LEO S.100)

Um die Länge einer Strecke in allgemeiner Lage aus Grund- und Aufriss abzulesen, kann man die Strecke um eine zur Grundrisstafel senkrechte Achse drehen, bis sie parallel zur Aufrisstafel ist. Vom Aufriss kann man dann die wahre Länge ablesen. Diese "Drehmethode" kann man benutzen, um die wahre Länge der Strecke zu bestimmen:

Gegeben: Strecke \overline{AB} in Grund- und Aufriss.

Gesucht: Die wahre Länge dieser Strecke.

Durchführung der Drehung um eine zu π_1 senkrechte Achse durch B :

- (1) Drehe A' um B' , bis die gedrehte Strecke parallel zu k_{12} ist.
Der gedrehte Punkt sei \tilde{A}' (Grundriss von \tilde{A} , dem um B gedrehten Punkt A).
- (2) Bei der Drehung bleibt \tilde{A} auf der gleichen Höhe wie A .
Also liegt \tilde{A}'' auf dem Ordner durch \tilde{A}' und auf der Parallelen durch A'' zur Risskante.
- (3) $|\tilde{A}'' B''|$ ist die wahre Länge der Strecke \overline{AB} .

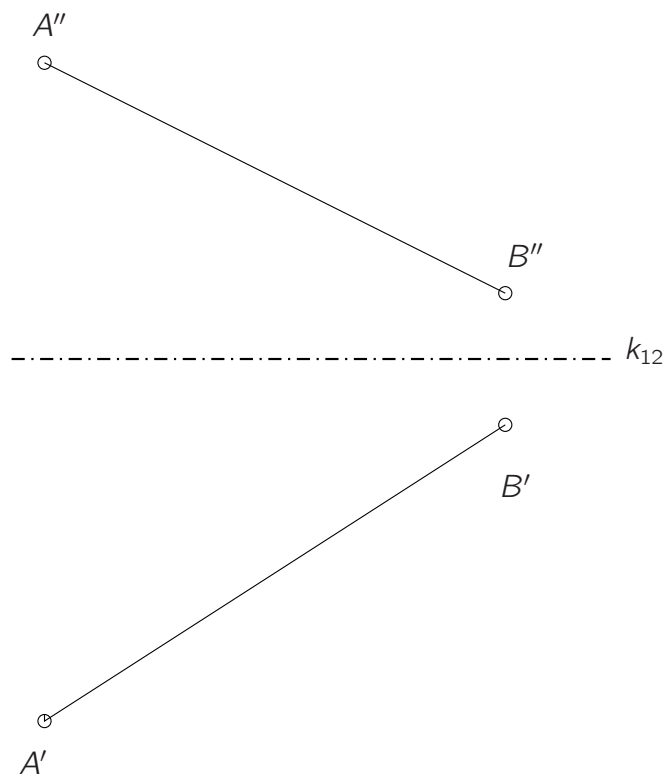
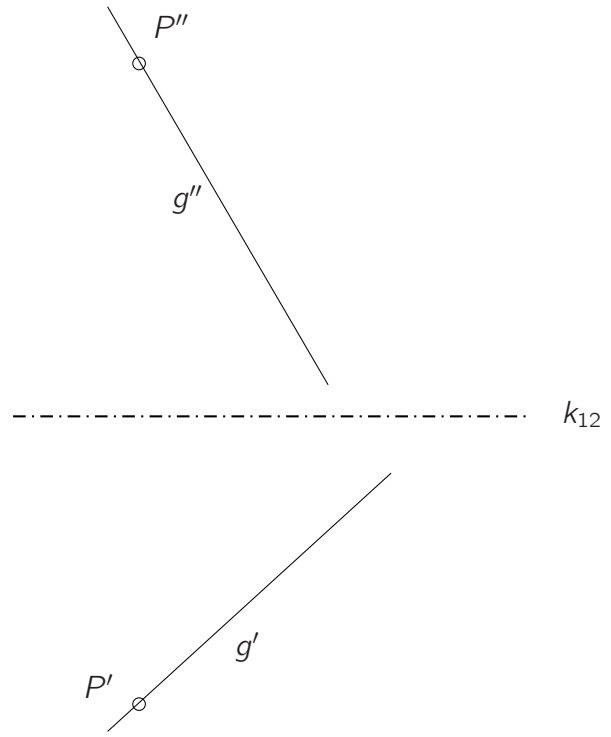


Abbildung 3.19: Wahre Länge einer Strecke

Aufgabe 3.9 Von einem Punkt P und einer Geraden g sind Grund- und Aufriss gegeben (Abb. 3.20). Trage auf g einen Punkt R im Abstand von 4 cm zu P ab.



Aufgabe 3.10 Gegeben: Satteldach, Kaminkopf (K) und die Richtung der Sonnenstrahlen (s) (Abb. 3.21).

Gesucht:

- a) Wahre Länge der Strecke \overline{AB} und Dachneigung α .
- b) Schnitt von Kamin und Dachfläche.
- c) Schatten des Kamins auf der Dachfläche.

Abbildung 3.20: Antragen der wahren Länge einer Strecke

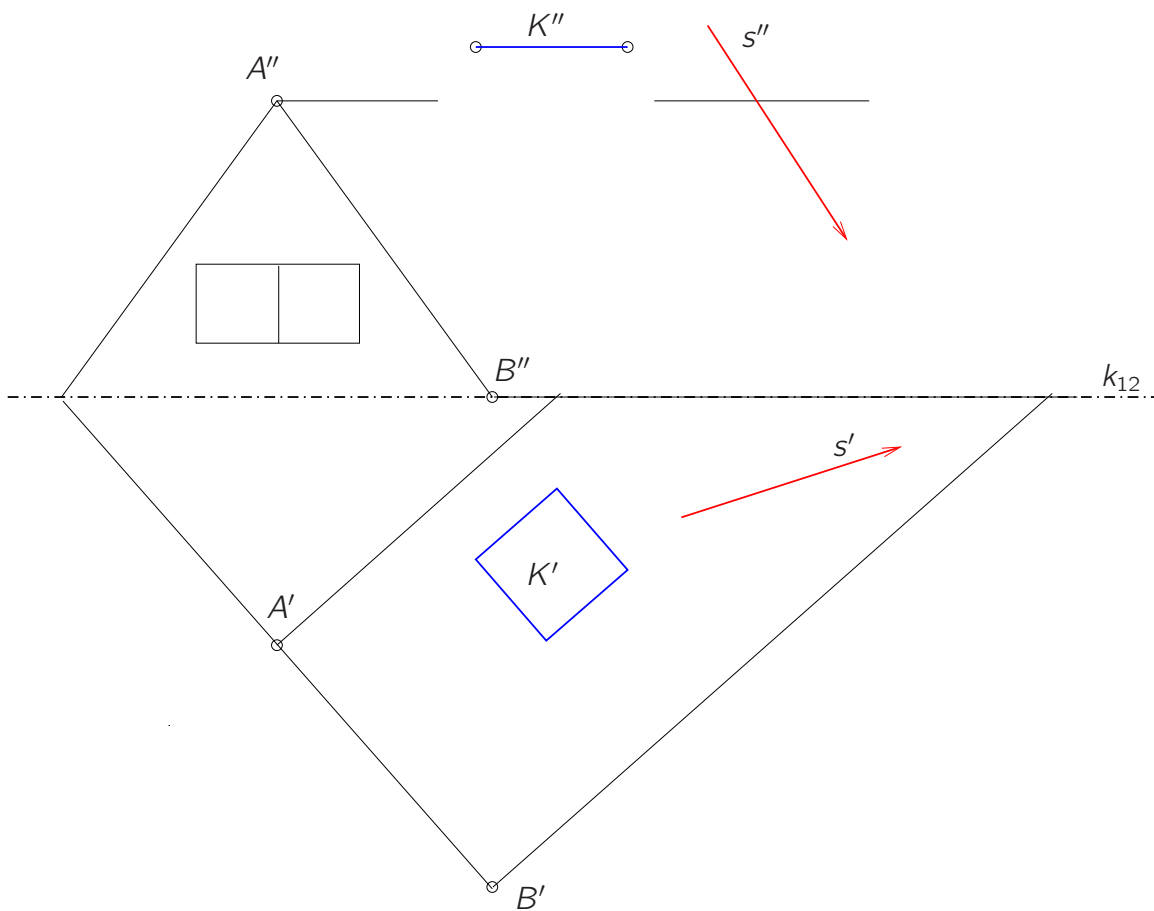


Abbildung 3.21: Schatten eines Kamins

Wahre Gestalt einer ebenen Figur

(s. LEO S.103)

Wir wollen eine ebene Figur, z.B. ein Dreieck, in wahrer Gestalt sehen. Dazu benutzen wir eine doppelte Umprojektion: In einem ersten Schritt projizieren wir das Dreieck längs einer Höhenlinie auf eine Ebene π_3 ; das Dreieck projiziert dabei auf eine Strecke. Nun müssen wir das Dreieck nur noch von der Seite anschauen, um es in wahrer Gestalt zu sehen: Wir wählen also eine Richtung senkrecht zu der Strecke und projizieren ein zweites Mal auf eine Ebene π_4 um.

Gegeben: Dreieck A, B, C in Grund- und Aufriss.

Gesucht: Die wahre Gestalt des Dreiecks.

Durchführung:

- (1) Bestimme eine Höhenlinie h des Dreiecks.
- (2) Man wählt irgendeine Risskante $k_{13} \perp h'$.
Erste Umprojektion des Dreiecks: Das gesamte Dreieck projiziert auf eine Gerade d''' .
- (3) Erneute Wahl einer Risskante $k_{34} \parallel d'''$. Zweite Umprojektion liefert das Dreieck in wahrer Gestalt.

Man kann auch den Grundriss zuerst ersetzen. Dazu projiziert man das Dreieck entlang einer Frontlinie auf eine Gerade.

Aufgabe 3.11 Bestimme die wahre Gestalt eines in Grund- und Aufriss gegebenen Dreiecks.

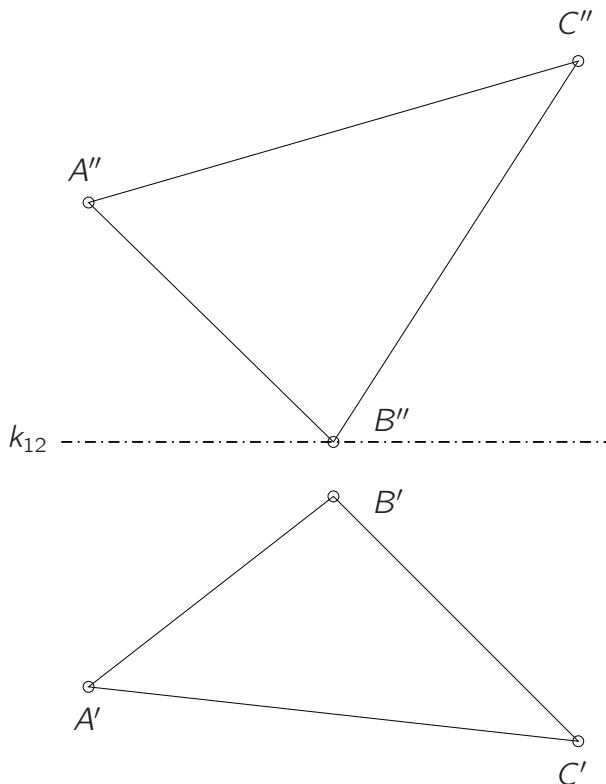


Abbildung 3.22: Wahre Gestalt eines Dreiecks durch doppelte Umprojektion

3.6 Winkel unter senkrechter Parallelprojektion

Bei sich schneidenden Geraden interessiert oft die wahre Größe des Schnittwinkels. Im allgemeinen können sich Winkel unter senkrechter Parallelprojektion verkleinern oder vergrößern. Testen Sie dies, indem Sie ihr Geodreieck im Raum drehen und prüfen, wie groß der rechte Winkel erscheint.

Ebene Figuren, die parallel zur Bildtafel sind, werden jedoch unverzerrt abgebildet:

Der Schnittwinkel zweier Geraden erscheint unter Parallelprojektion in die Ebene π unverzerrt, wenn beide Geraden parallel zu π sind.

Der Schnittwinkel zwischen zwei Höhengeralen bleibt also im Grundriss erhalten, und entsprechend der Winkel zwischen zwei Frontgeraden im Aufriss:

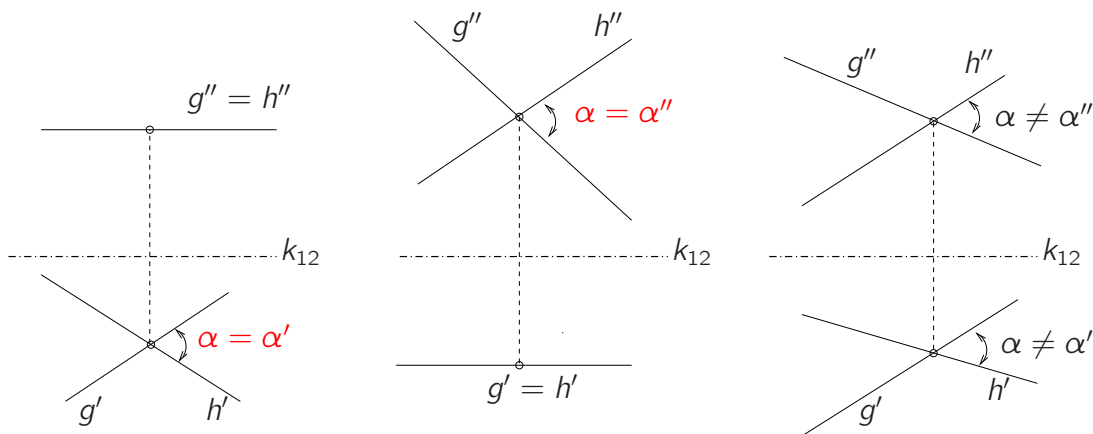


Abbildung 3.23: Winkel schneidender Geraden

Für den rechten Winkel kann diese Voraussetzung aber abgeschwächt werden:

Ein *rechter Winkel* wird bei senkrechter Parallelprojektion in die Ebene π auf einen rechten Winkel abgebildet, wenn bereits *ein* Schenkel parallel zu π ist.

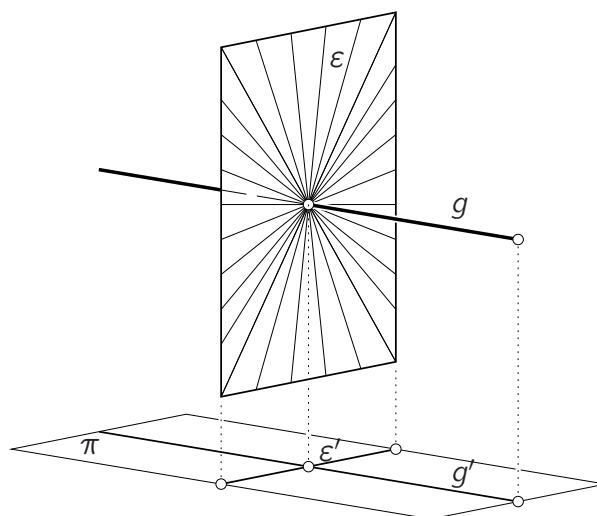


Abbildung 3.24: Orthogonalprojektion eines rechten Winkels

Aufgabe 3.12 Markiere in den folgenden Rissen eines Hauses die Höhen- und Frontlinien. Welche Winkel erscheinen in wahrer Größe?

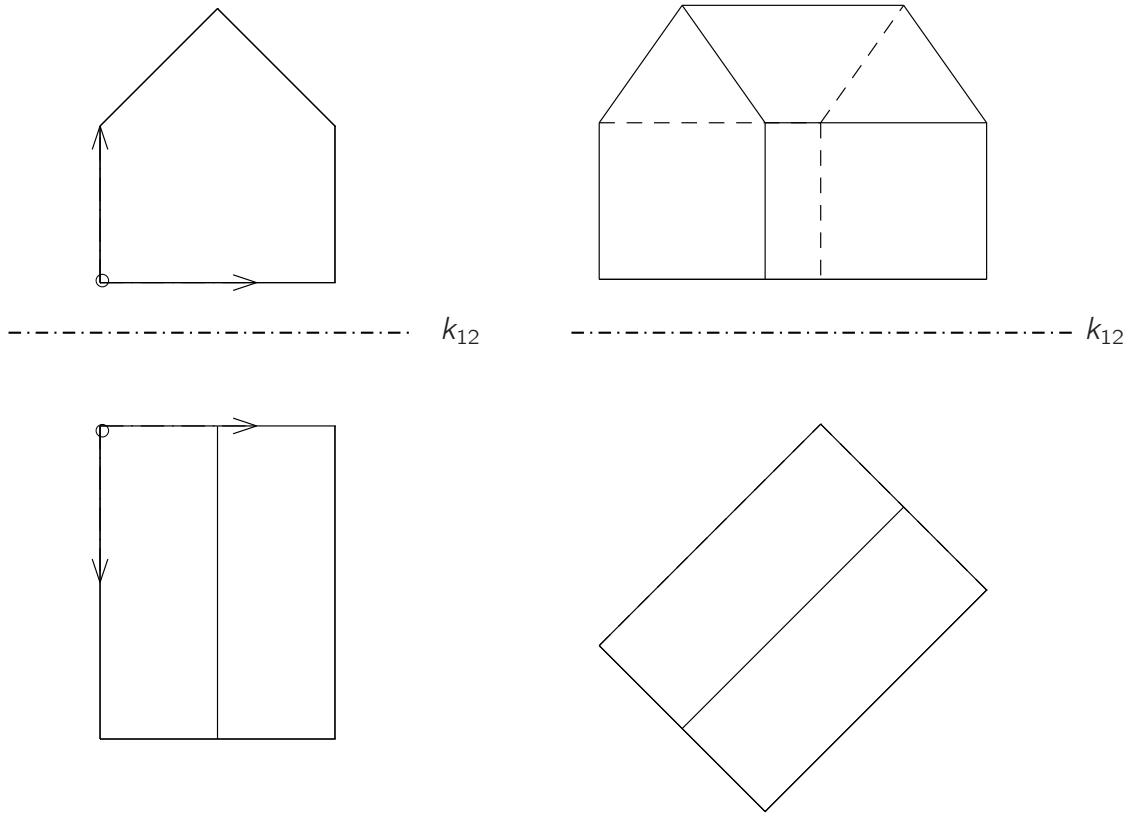


Abbildung 3.25: Wahre Winkel?

3.7 Lot auf eine Ebene

(s. LEO S.105)

Ein *Lot* auf eine Ebene ε ist eine zu ε senkrechte Gerade l . Es wird eindeutig bestimmt durch seinen Fußpunkt $Q \in \varepsilon \cap l$, oder durch die Wahl eines beliebigen vorgegebenen Punktes $P \in l$.

Für die Konstruktion beachten wir, dass ein Lot auf jeder in der Ebene ε enthaltenen Geraden senkrecht steht, z.B. auf einer Höhenlinie h . Wegen $h \parallel \pi_1$ bleibt der rechte Winkel $h \perp l$ im Grundriss erhalten, $h' \perp l'$, siehe letzter Abschnitt. Entsprechendes gilt für Frontlinien: Aus $f \parallel \pi_2$ folgt für den Aufriss $f'' \perp l''$. Durch diese beiden Eigenschaften kann man l bestimmen:

Gegeben: Ebene ε durch drei Punkte A, B, C , sowie ein Punkt P .

Gesucht: Lot l auf ε durch P , also die Gerade $l \perp \varepsilon$ mit $P \in l$.

Durchführung:

- (1) Zeichne die Höhenlinie h und die Frontlinie f von ε , z.B. durch C in Grund- und Aufriss.
- (2) Der Grundriss l' des Lotes l steht senkrecht auf h' , sein Aufriss l'' steht senkrecht auf f'' . Also bestimmt die Bedingung $P \in l$ das Lot l eindeutig.
- (3) Den *Fußpunkt* $Q = l \cap \varepsilon$ des Lotes kann man als Durchstoßpunkt von l mit ε bestimmen.

Aufgabe 3.13 a) Bestimme das Lot l durch den Punkt P auf die Ebene ε des Dreiecks A, B, C . Konstruiere seinen Fußpunkt $Q = \varepsilon \cap l$ und entscheide über die Sichtbarkeit der Lotgerade. (Abb. 3.26, links).

b) Gegeben sei die Gerade g und ein Punkt $P \notin g$ (Abb. 3.26 rechts).

Gesucht sind die Höhen- und Frontlinie der Lotebene μ zu g durch P .

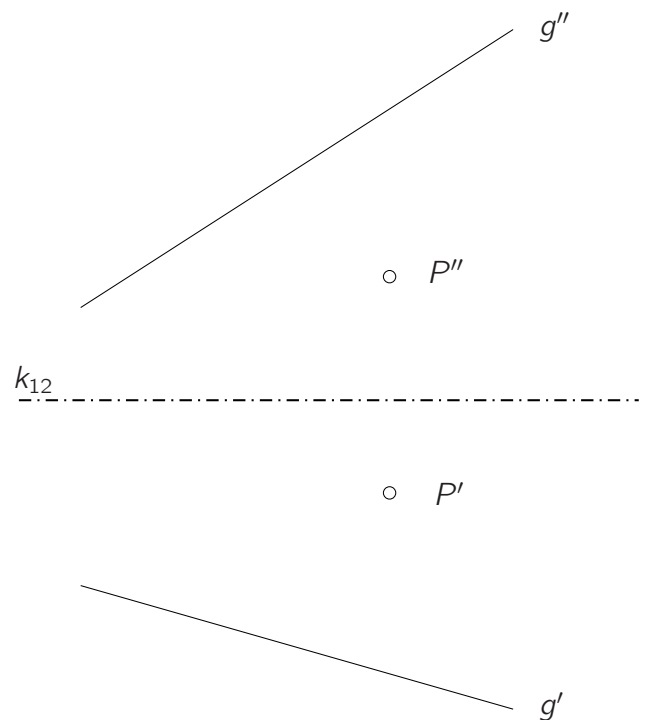
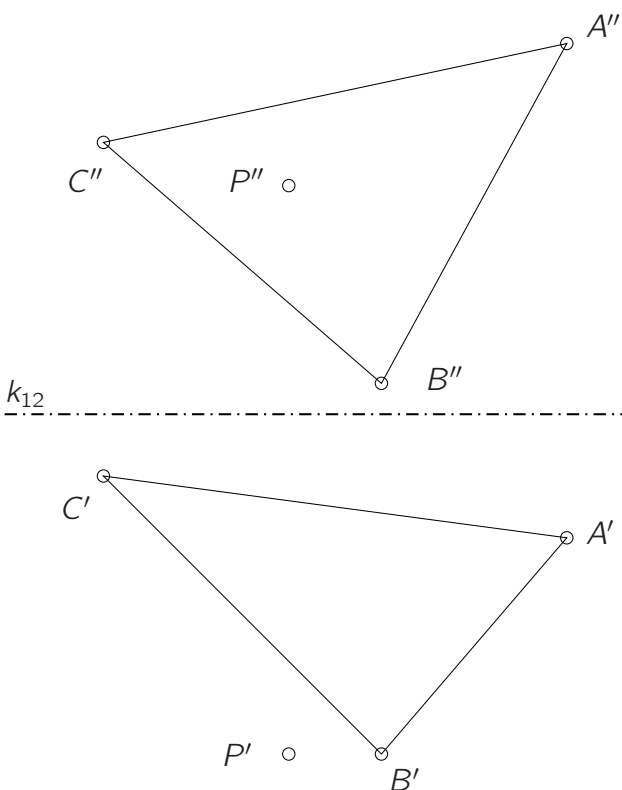


Abbildung 3.26: Lot auf Ebene bzw. Lotebene

3.8 Einschneideverfahren und senkrechte Parallelprojektion

(s. LEO S.199,204,208)

Wir wollen nun klären, wie man die Richtungen beim Einschneideverfahren zu wählen hat, wenn das Ergebnis einer senkrechten Parallelprojektion entsprechen soll. Wir hatten schon erwähnt, dass genau in diesem Fall das Einschneiden günstige Bilder ergibt.

Wir betrachten zuerst senkrechte Parallelprojektionen bei denen die Projektionsrichtung p nicht in einer Koordinatenebene liegt. Für durch Einschneiden erhaltene senkrechte Parallelprojektionen ist diese Annahme tatsächlich stets erfüllt. Dann schneidet die Bildebene (senkrecht zur Projektionsrichtung p) ein **Spurdreieck** $S_x S_y S_z$ aus den drei Koordinatenebenen, siehe Fig. 3.27.

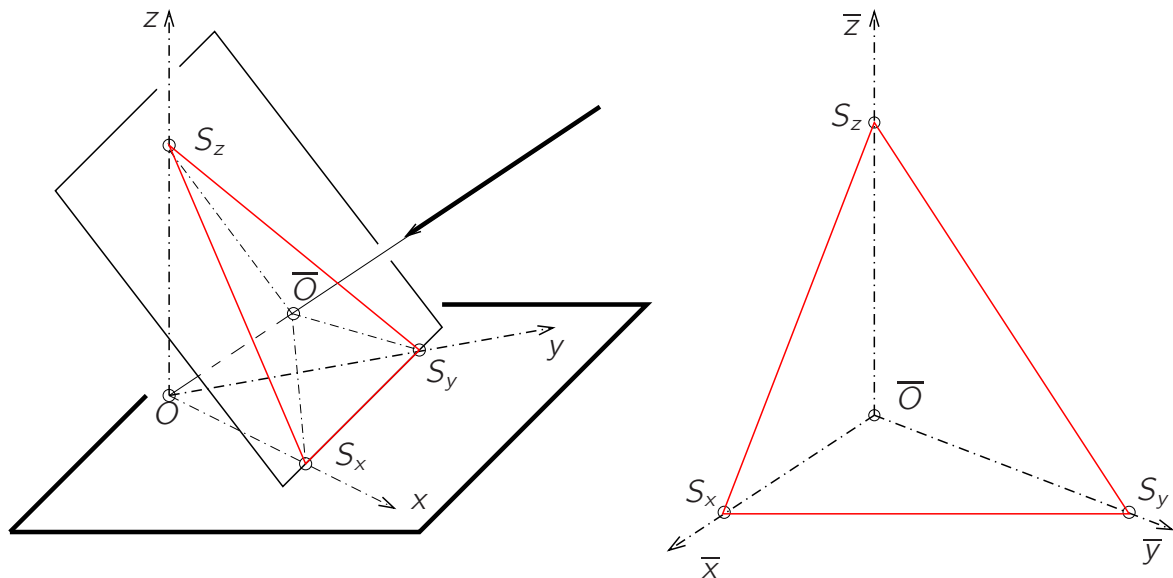


Abbildung 3.27: Senkrechte Parallelprojektion: Spurdreieck

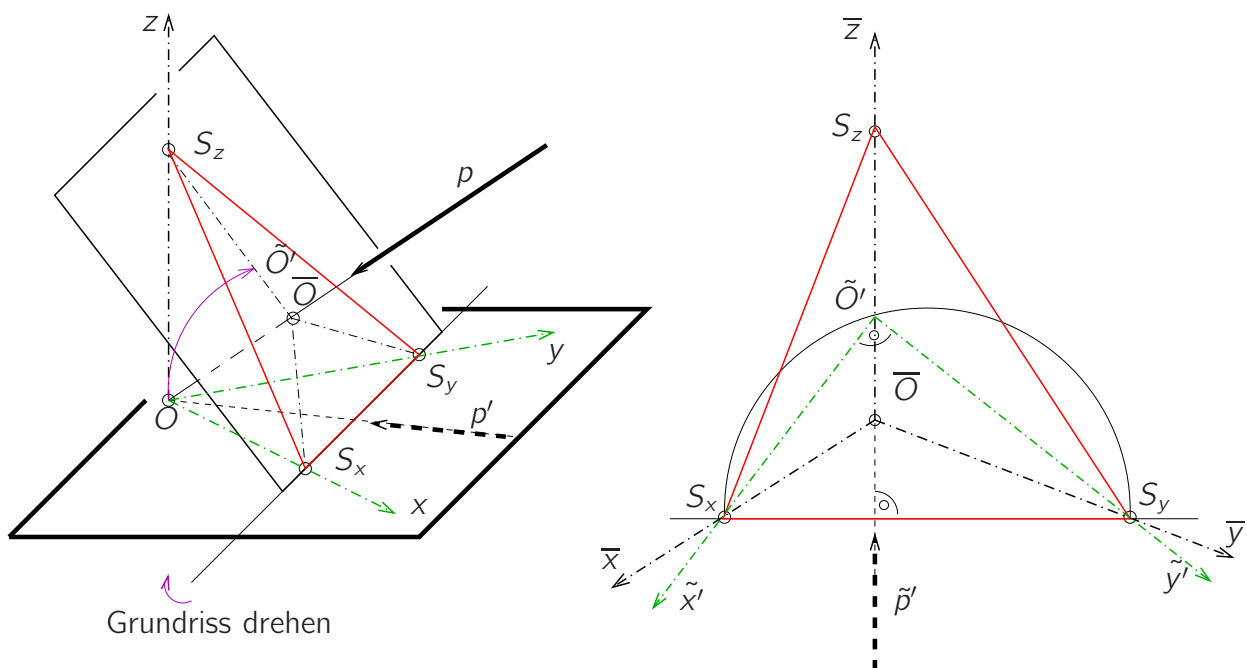


Abbildung 3.28: Senkrechte Parallelprojektion: Grundriss in die Bildtafel drehen

Um festzustellen, welche Lage und Richtung des Grundrisses beim Einschneiden zu einer senkrechten Parallelprojektion führen würde, drehen wir den Grundriss um die Grundrissspur in die Bildebene (Fig. 3.28).

Vor der Drehung liegt der Grundrissursprung O unterhalb von S_z und p' steht senkrecht auf $S_x S_y$ (Fig. 3.28 links). Wir bezeichnen die in die Bildebene gedrehten Größen mit einer Tilde. Nach der Drehung erfüllen \tilde{O} und \tilde{p} (Fig. 3.28 rechts):

1. Die Einschneiderichtung \tilde{p}' für den Grundriss muss senkrecht auf der Spurgeraden $\overline{S_x S_y}$ stehen.
2. Der Ursprung \tilde{O}' des Grundrisses liegt auf der Höhe des Spurdreiecks durch S_z .
3. Die Achsenrichtungen x', y' des Grundrisses sind parallel zu $\tilde{O}' S_x$ und $\tilde{O}' S_y$. Die Punkte \tilde{O}' , S_x , S_y bilden also ein rechtwinkliges Dreieck, und \tilde{O}' liegt auf einem Thaleskreis durch S_x , S_y .

Entsprechendes muss für den Aufriss gelten. Wir halten fest (siehe Abb. 3.29):

Wenn es ein Spurdreieck gibt, so dass die Einschneidedaten die Bedingungen 1. bis 3. für Grund- und Aufriss erfüllen, liefert das Einschneideverfahren eine senkrechte Axonometrie.

Natürlich ist das Spurdreieck nur bis auf Ähnlichkeit (Vergrößerung/Verkleinerung) bestimmt. Auch geht der Abstand der Risse zum Einschneidebild in unsere Betrachtung nicht ein.

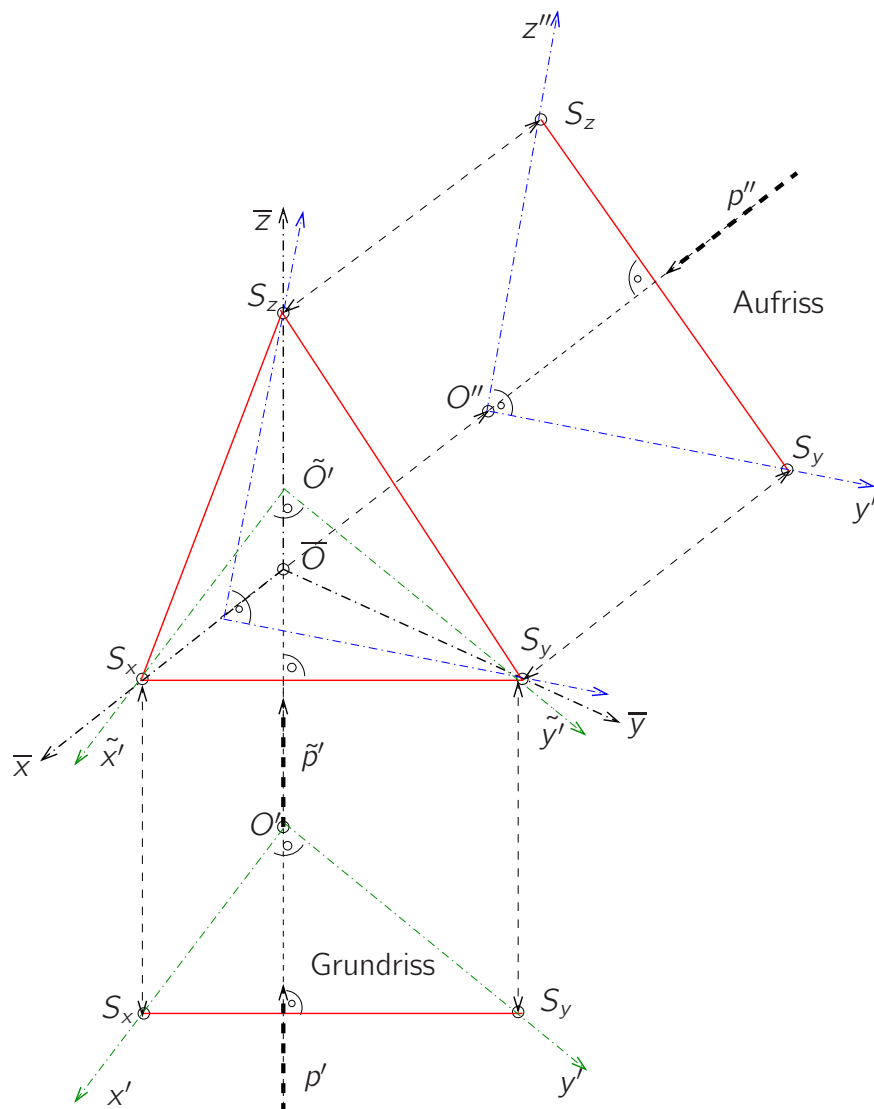


Abbildung 3.29: Senkrechte Axonometrie: Einschneideverfahren

Es gibt daher folgende **Möglichkeiten**, um die Lage von Grund- und Aufriss und der Einschneiderichtungen so zu wählen, dass eine Axonometrie entsteht, die einer senkrechten Parallelprojektion entspricht:

- Im Einschneidebild ist ein **Spurdreieck** S_x, S_y, S_z gegeben, dessen Höhenschnittpunkt \bar{O} ist.
 - Zwei Höhen des Spurdreiecks bestimmen die *Einschneiderichtungen*.
 - Nullpunkt* und *Achsenrichtungen* des Grundrisses ermittelt man durch den Schnitt der Höhe durch S_z mit einem Thaleskreis über $\overline{S_x S_y}$ (s. Fig. 3.28). Analog verfährt man mit dem Aufriss.
- Im Einschneidebild ist das **Koordinatendreieck** gegeben.
Dann wählt man ein Dreieck, dessen Höhen die Achsen sind; dieses *Spurdreieck* wird bereits durch die Wahl eines Punktes auf den Achsen, z.B. S_x , eindeutig festgelegt. Der Rest verläuft wie in a).
- In Grund- und Aufriss sind Projektions- bzw. **Einschneiderichtungen** p', p'' gegeben.
 - Man wählt einen *ersten Spurpunkt*, z.B. S_x beliebig auf der x' -Achse.
 - Weil die Grundrissspur senkrecht auf der Projektionsrichtung p' steht, legt dies den *zweiten Spurpunkt* S_y in Grund- und Aufriss fest. Siehe Fig. 3.30 links.
 - Ebenso steht im Aufriss die Spur senkrecht auf p'' , was den *dritten Spurpunkt* S_z festlegt. Siehe Fig. 3.30 Mitte.
 - Nun ermitteln wir das *Spurdreieck*: Dem Grundriss entnehmen wir die Seite $S_x S_y$ einschließlich dem Höhenfußpunkt. Dem Aufriss entnehmen wir die Länge $|S_y S_z|$. Dann findet man den dritten Punkt S_z des Spurdreiecks im Schnitt der genannten Höhe mit einem Kreis um S_y vom Radius $|S_y S_z|$. Siehe Fig. 3.30 rechts. (Alternativ kann man statt der Höhe auch die dritte Länge $|S_x S_z|$ konstruieren, um damit das Dreieck zu konstruieren.)
 - Der Rest verläuft wie bei a).

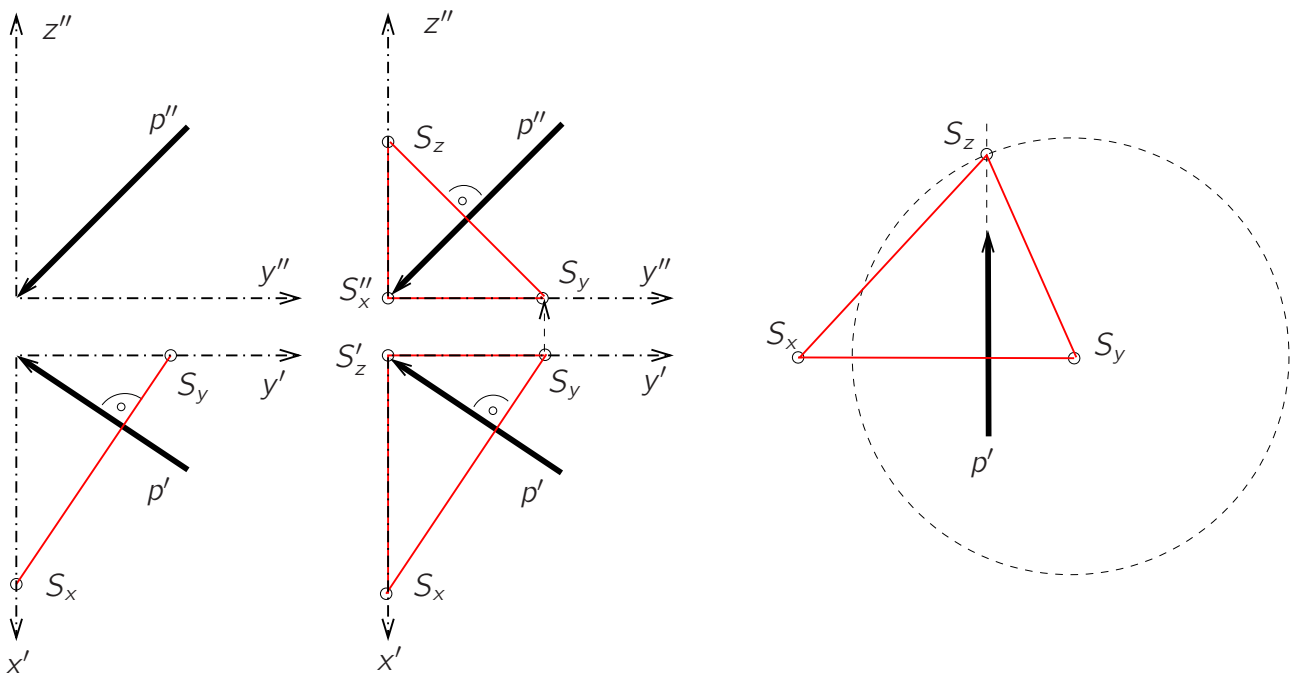


Abbildung 3.30: Fall c): Konstruktion des Spurdreiecks aus den Einschneiderichtungen p', p''

Die Vorgabe von b) Koordinatenachsen und c) Einschneiderichtungen demonstrieren wir nun an zwei Beispielen.

Aufgabe 3.14 Gegeben: Grund- und Aufriss eines angeschnittenen Würfels und die Bilder der Koordinatenachsen. Gesucht: Ein anschauliches Bild in senkrechter Axonometrie mit Hilfe des Einschneideverfahrens. Gib die Projektionsrichtung in Grund- und Aufriss an.

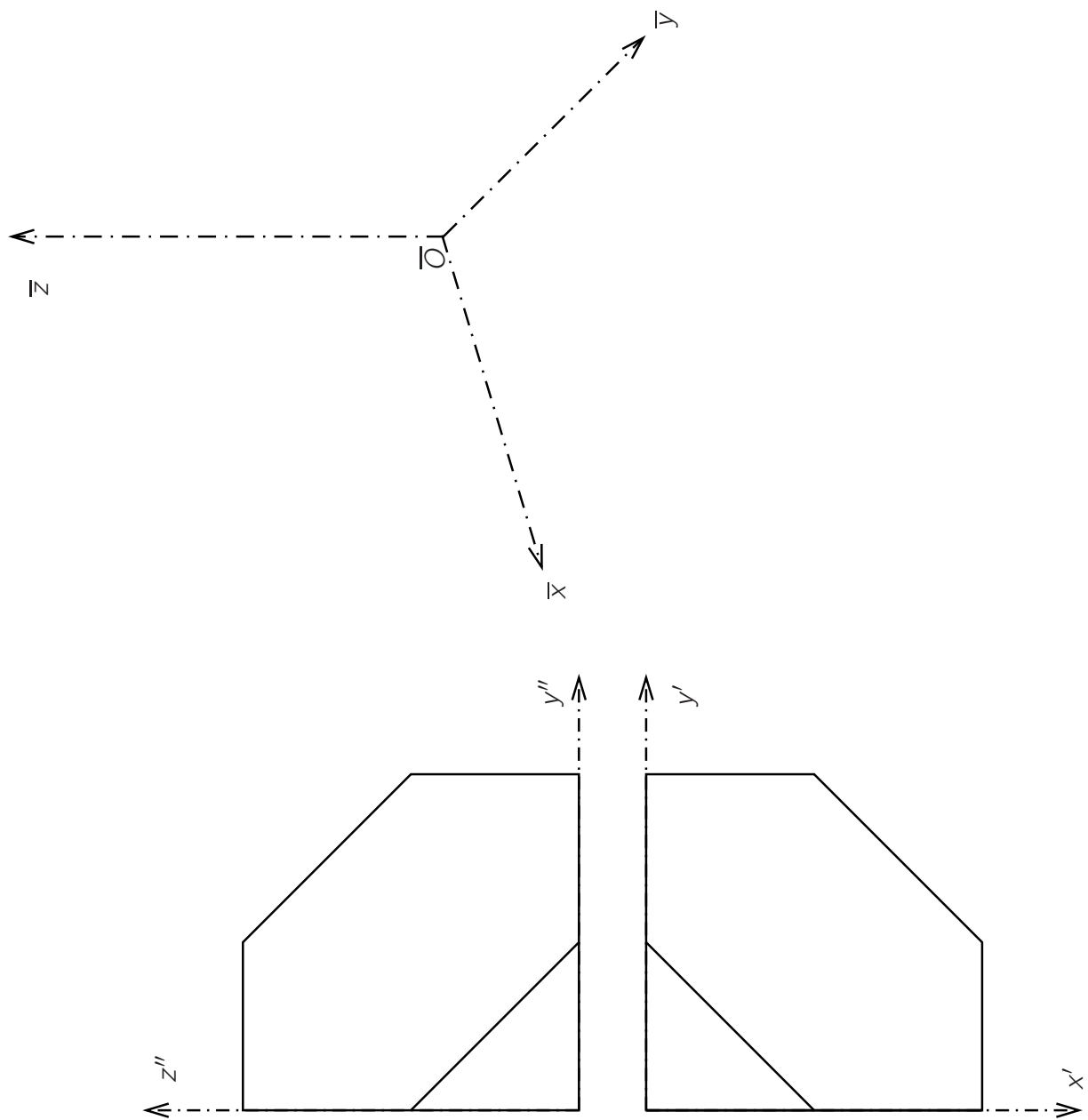


Abbildung 3.31: Senkrechte Parallelprojektion durch Einschneiden: Beispiel angeschnittener Würfel

Aufgabe 3.15 Gegeben: Grund- und Aufriss eines Hauses und die Projektionsrichtung für eine senkrechte Axonometrie. Gesucht: Das zugehörige senkrechte axonometrische Bild mit Hilfe des Einschneideverfahrens.

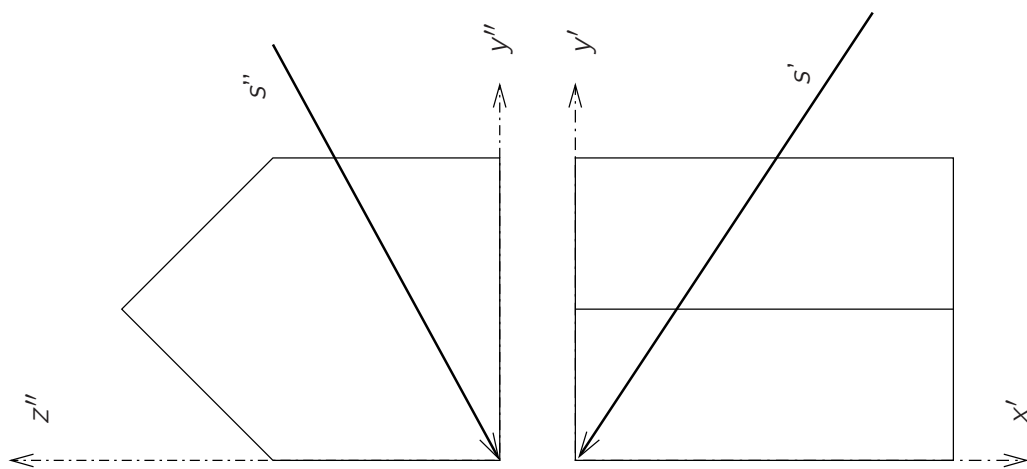


Abbildung 3.32: Senkrechte Axonometrie: Haus mit vorg. Projektionsrichtung

3.9 Dachausmittelung

(s. LEO S.195,197)

Wir betrachten Dächer, die durch ebene Dachflächen gebildet werden und deren untere Begrenzungsstrecken, die **Traufkanten**, horizontal sind und sich auf **gleicher Höhe** befinden.

Bildet die Traufkante eine Ecke, so geht davon eine Kante benachbarter Dachflächen aus. Bei einer "aus-springenden" Ecke ist diese eine **Gratlinie**, bei einer "einspringenden" Ecke eine **Kehllinie**. Nicht unmittelbar benachbarte Dachebenen können sich ebenfalls in Dachkanten schneiden: Falls die Kante horizontal verläuft, so heißt sie **First**, sonst **Verfallgrat**.

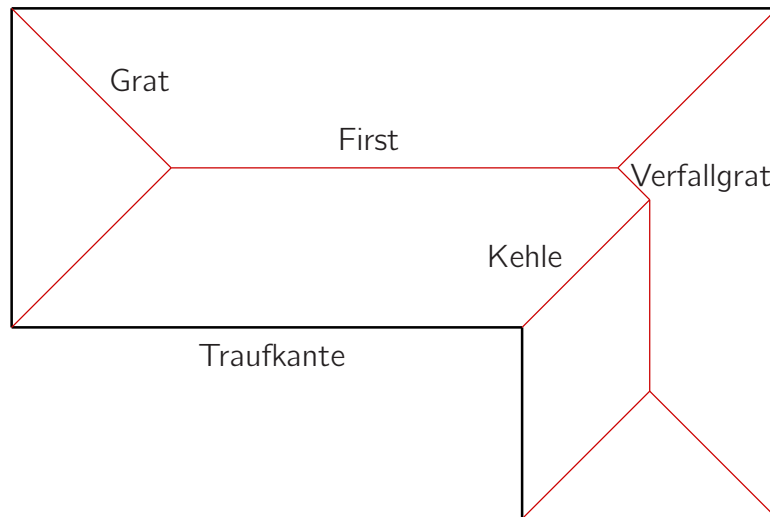


Abbildung 3.33: Grundriss eines Daches mit verschiedenen Dachkanten

Die Aufgabe der *Dachausmittelung* besteht darin, zu gegebenen Traufkanten die Grate, Kehlen, Firste und Verfallgrate zu bestimmen. Zur Lösung wird eine horizontale Hilfsebene ε betrachtet, die das Dach in Höhenlinien schneidet (Abb. 3.34). Im Grundriss erscheinen diese Höhenlinien als Parallelen zu den Traufkanten, die sich genau auf den Grat- und Kehllinien schneiden. Die Bestimmung von Firsten und Verfallgraten ist schwieriger, man muss erst herausfinden, welche Paare von Dachflächen miteinander Firste und Verfallgrate bilden.

Durchführung (siehe Abb. 3.36):

- (1) Zeichne *Höhenlinien* für jede Dachebene in den Grundriss. Bei gleicher Dachneigung haben alle Höhenlinien im Grundriss den gleichen Abstand zur Traufkante. Bei unterschiedlichen Dachneigungen ermittele ihren Abstand aus einem Steigungsdreieck.
- (2) Schneide die Höhenlinien benachbarter Dachflächen und verbinde die Schnittpunkte mit den entsprechenden Ecken des Traufpolygons. Dadurch erhält man *Grat-* und *Kehllinien*. Bei gleicher Dachneigung lassen sie sich auch als Winkelhalbierende der zugehörigen Traufkanten konstruieren.
- (3) Firste und Verfallgrate lassen sich nun einer nach dem anderen konstruieren:
 - Ihr Anfangspunkt ergibt sich aus den Schnitten bereits konstruierter Dachkanten (Grate, Kehlen, Firste, Verfallgrate).
 - Ihre Richtung wird durch die Richtungen der Traufkanten der sich schneidenden, nicht direkt benachbarten, Dachebenen gegeben (siehe auch Abb. 3.35):
 - * Sind sie parallel, so erhält man einen dazu parallelen *First*.
 - * Schneidet sich die Verlängerung der Traufkanten in einem Punkt, so konstruiert man mit Hilfe dieser Verlängerung einen *Verfallgrat* über einen Höhenlinienschnitt, bei gleicher Dachneigung auch als Winkelhalbierende.

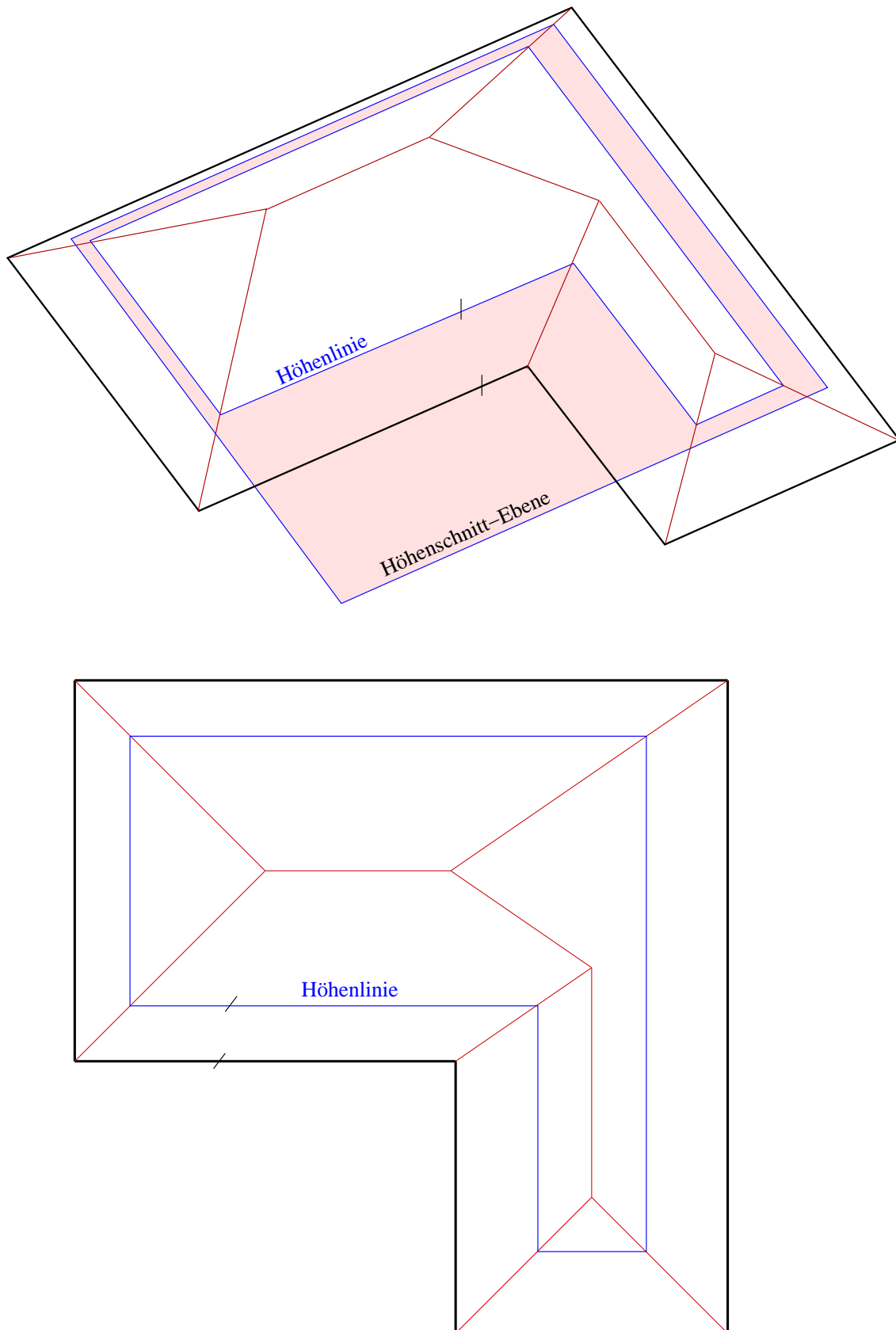


Abbildung 3.34: Höhengchnitt und Höhenlinien bei unterschiedlichen Dachneigungen

Bei unterschiedlichen Dachneigungen ergibt sich der Abstand der Höhenlinien zu den Traufkanten durch Steigungsdreiecke (siehe Abb. 3.36). Man konstruiert dann die Dachkanten wie in Abb. 3.35 gezeigt: Links ist der Fall dargestellt, dass die Traufkanten sich schneiden, gegebenenfalls nach Verlängerung; rechts die Situation bei parallelen Traufkanten.

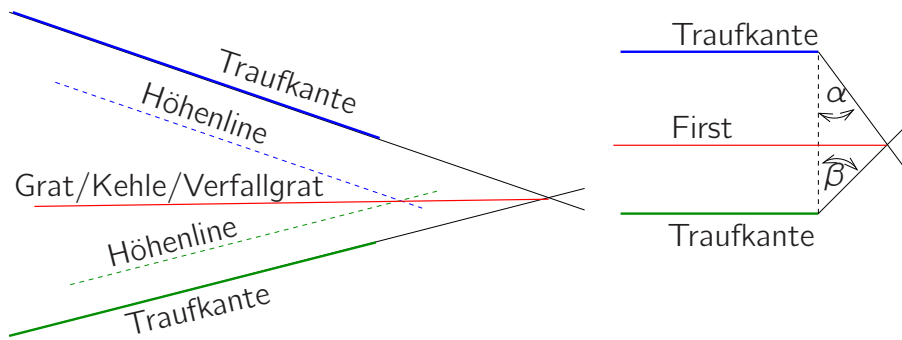


Abbildung 3.35: Konstruktion der Kanten bei ungleichen Dachneigungen

Die folgende Abbildung verdeutlicht die Konstruktion der Dachkanten bei unterschiedlichen Dachneigungen. Beachte die Konstruktion der Strecke F_1F_2 als Verfallgrat zweier nicht benachbarter Dachflächen.

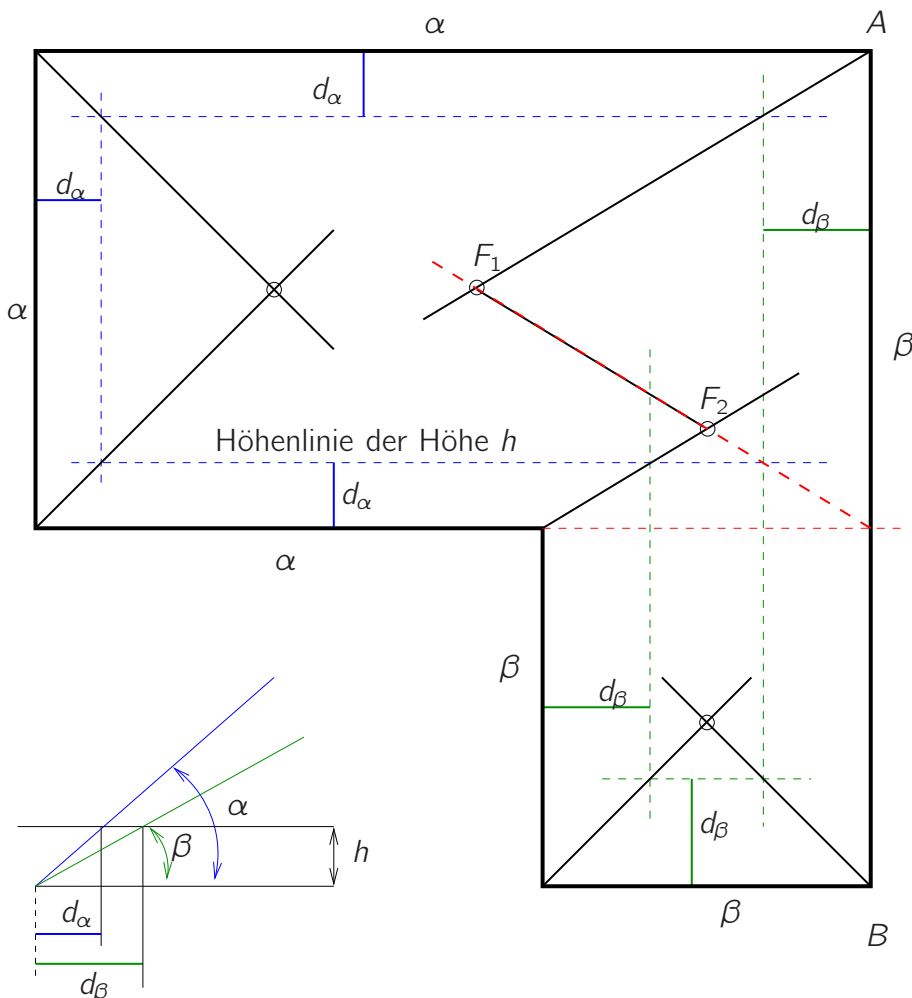


Abbildung 3.36: Konstruktion von Dachkanten bei zwei verschiedenen Dachneigungen α , β .

Aufgabe 3.16 Finde die wahre Gestalt der Dachfläche, die in Abb. 3.36 an der Traufkante \overline{AB} anliegt.

Dabei ermittelt man die wahre Gestalt einer Dachfläche, indem man sie um die Traufkante in die Zeichenebene dreht.

Aufgabe 3.17 :

Gegeben: Grundriss der Traufkanten eines Daches mit Dachneigungen $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 50^\circ$.

Gesucht: Grate, Kehlen, Firste, Verfallgrate

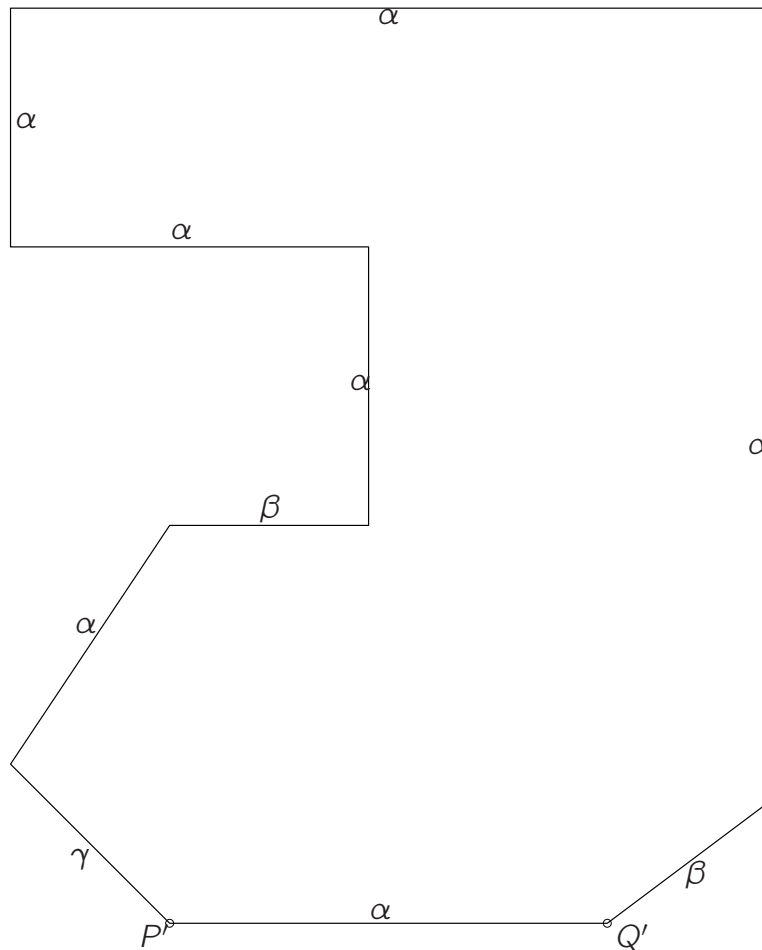


Abbildung 3.37: Dachausmittlung

Kapitel 4

Gekrümmte Flächen in Parallelprojektion

Während wir bisher die Projektion ebener Flächen behandelt haben, widmen wir uns nun gekrümmten Flächen. Rotationsflächen und Regelflächen sind spezielle Beispiele dafür, die jeweils auf eine bestimmte Art aus Kurven erzeugt werden. Abwickelbare Flächen sind solche, die sich aus ebenem (ungekrümmten) Material herstellen lassen.

Für all diese Flächen ist die einfachste gekrümmte Kurve, der Kreis, wichtig, beziehungsweise seine Parallelprojektion, die Ellipse. Wir beginnen daher das Kapitel mit diesen Kurven.

Wir kommen dann zu Böschungsf lächen, also Flächen mit einer konstanten Neigung, die für den Tiefbau benötigt werden. Hierzu führen wir die von Karten bekannte kotierte Projektion ein, bei der ein Grundriss mit Höhenlinien versehen wird.

Abschließend befassen wir uns damit, wie sich zwei Flächen durchschneiden. Die Aufgabe, die Durchschnittskurve festzustellen, trainiert besonders gut das räumliche Vorstellungsvermögen.

4.1 Gekrümmte Kurven: Kreis und Ellipse

(s. LEO S.55)

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem hat ein **Kreis** mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius r die

$$\text{implizite (gleichungsdefinierte) Darstellung} \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Andererseits hat man die

$$\text{parametrische Darstellung} \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

mit dem Parameter $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Tatsächlich erfüllt jeder Punkt der Parameterdarstellung die implizite Gleichung, denn $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2$.

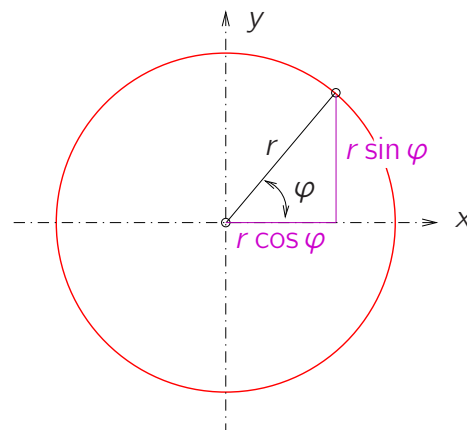


Abbildung 4.1: Parameterdarstellung eines Kreises

Die **Ellipse** verallgemeinert den Kreis. Gegeben zwei Zahlen $a, b > 0$, wird die Ellipse mit **Mittelpunkt** $(0, 0)$ folgendermaßen gegeben:

$$\text{implizite Darstellung} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{parametrische Darstellung} \quad x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Stimmen a und b überein, so erhält man wieder einen Kreis. Im Fall $a \neq b$ sind die x -Achse und die y -Achse die einzigen Symmetriegeraden der Ellipse, d.h. nur die Spiegelungen an x - und y -Achse bilden die Ellipse auf sich ab. Man nennt diese Symmetrieachsen auch die **Hauptachsen** der Ellipse. Die Achsenabschnitte zwischen Mittelpunkt und Ellipse nennt man auch **Halbachsen** der Ellipse; ihre Längen sind a und b .

In den Punkten $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ ist die Krümmung der Ellipse extremal. Dies sind die sogenannten **Scheitel** der Ellipse. Die an diese Punkte tangentialen Kreise mit Radius $1/\text{Krümmung}$ heißen **Scheitel-Krümmungskreise** oder kurz Scheitelkreise.

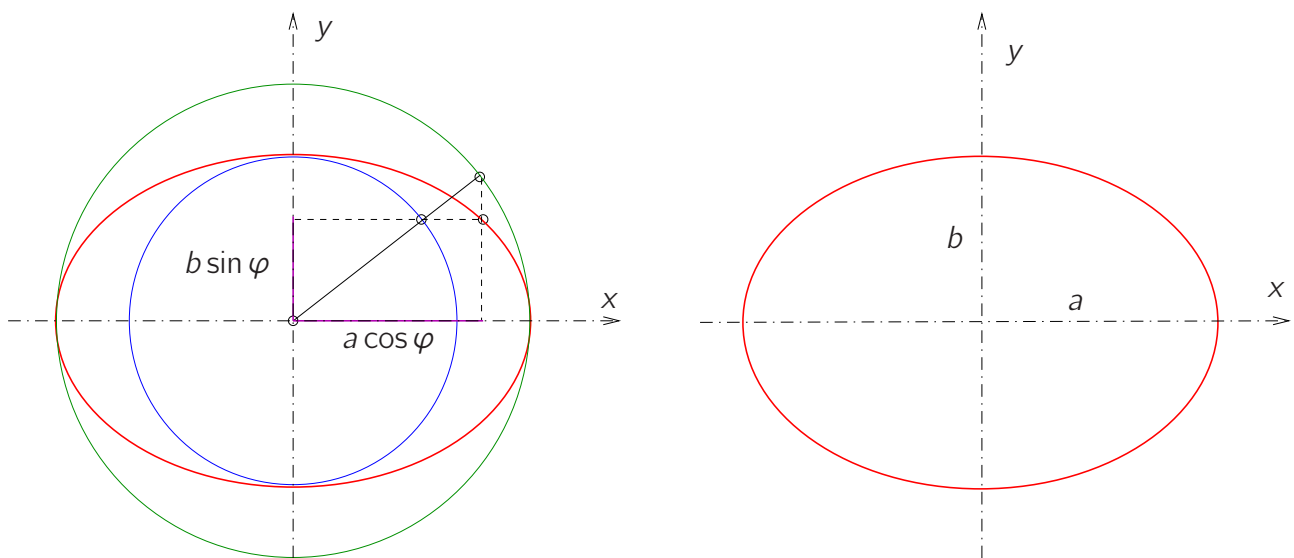


Abbildung 4.2: Parameterdarstellung einer Ellipse

4.1.1 Ellipsenkonstruktionen

Wir behandeln Konstruktionen, mit deren Hilfe man einzelne Punkte auf Ellipsen oder die ganze Ellipse zeichnen kann.

a) Scheitelkreis-Konstruktion.

Aus der Parameterdarstellung der Ellipse folgt sofort eine Methode, einzelne Punkte einer Ellipse zu konstruieren, siehe Abb. 4.2 links.

- (1) Zeichne zwei konzentrische Kreise mit Radien a und b .
In Koordinaten sind dies $K_a(\varphi) = (a \cos \varphi, a \sin \varphi)$ und $K_b(\varphi) = (b \cos \varphi, b \sin \varphi)$.
- (2) Wähle einen Strahl durch den Mittelpunkt der Kreise mit Winkel φ gegenüber der x -Richtung. Er schneidet die Kreise in $K_a(\varphi)$ und $K_b(\varphi)$.
- (3) Den Ellipsenpunkt $E(\varphi) = (a \cos \varphi, b \sin \varphi)$ erhält man, indem man die x -Koordinate von $K_a(\varphi)$ nimmt und die y -Koordinate von $K_b(\varphi)$, d.h. als Schnitt der achsenparallelen Geraden durch die beiden Kreispunkte.

b) **Gärtner- oder Fadenkonstruktion.**

Mithilfe eines Fadens kann man eine Ellipse exakt erzeugen, siehe Abb. 4.3, links

Voraussetzung: Zwei Brennpunkte F_1, F_2 und die große Halbachse a der Ellipse sind gegeben.

- (1) Schneide einen Faden der Länge $2a$ zurecht.
- (2) Befestige die Enden des Fadens in den Punkten F_1, F_2 .
- (3) Ziehe den Faden wie in der Skizze straff. Der Punkt, an dem sich die Bleistiftspitze befindet, ist ein Ellipsenpunkt.

Man bezeichnet $e = \frac{1}{2}|F_1F_2|$ auch als **Brennweite**. Es gilt $e^2 = a^2 - b^2$, wie man bei Lage des Fadens symmetrisch zur y -Achse ablesen kann.

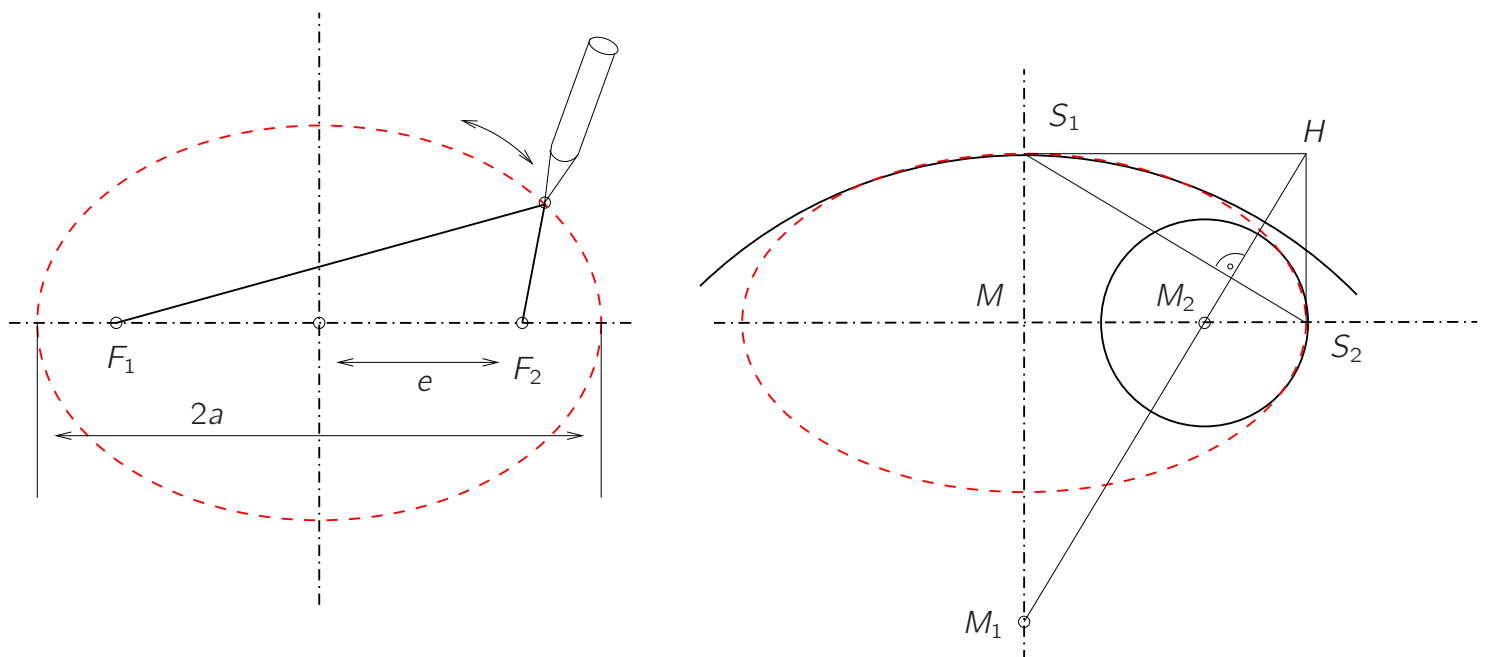


Abbildung 4.3: Gärtnerkonstruktion der Ellipse und Konstruktion der Scheitel-Krümmungskreise

c) **Scheitel-Krümmungskreis-Methode.**

(s. LEO S.64)

Die folgende Konstruktion bestimmt zunächst die vier Scheitel-Krümmungskreise einer Ellipse exakt, siehe Abb. 4.3, rechts.

Voraussetzung: Mittelpunkt M und zwei verschiedene Scheitel S_1, S_2 sind bekannt.

- (1) Ergänze das rechtwinklige Dreieck M, S_1, S_2 durch den Punkt H zu einem Rechteck.
- (2) Fülle das Lot von H auf die Gerade durch S_1, S_2 .
- (3) Die Schnittpunkte M_1, M_2 des Lotes mit den Achsengeraden sind die Mittelpunkte der Scheitel-Krümmungskreise für die Scheitel S_1, S_2 .

Mit Hilfe der vier Scheitel-Krümmungskreise läßt sich die Ellipse leicht näherungsweise zeichnen: Wie aus Abb. 4.3, rechts, ersichtlich ist, befindet sich dabei die Ellipse außerhalb der beiden kleinen Krümmungskreise, aber innerhalb der beiden großen Krümmungskreise.

4.1.2 Parallelprojektion von Kreis und Ellipse

Wie sieht ein Kreis in Parallelprojektion aus? Wir behaupten:

Die senkrechte Parallelprojektion eines Kreises ist eine Ellipse. Ihr Mittelpunkt ist das Bild des Kreismittelpunktes, und die große Halbachse ist gleich dem Kreisradius.
(Falls der Kreis in einer projizierenden Ebene liegt, ist das Bild eine Strecke.)

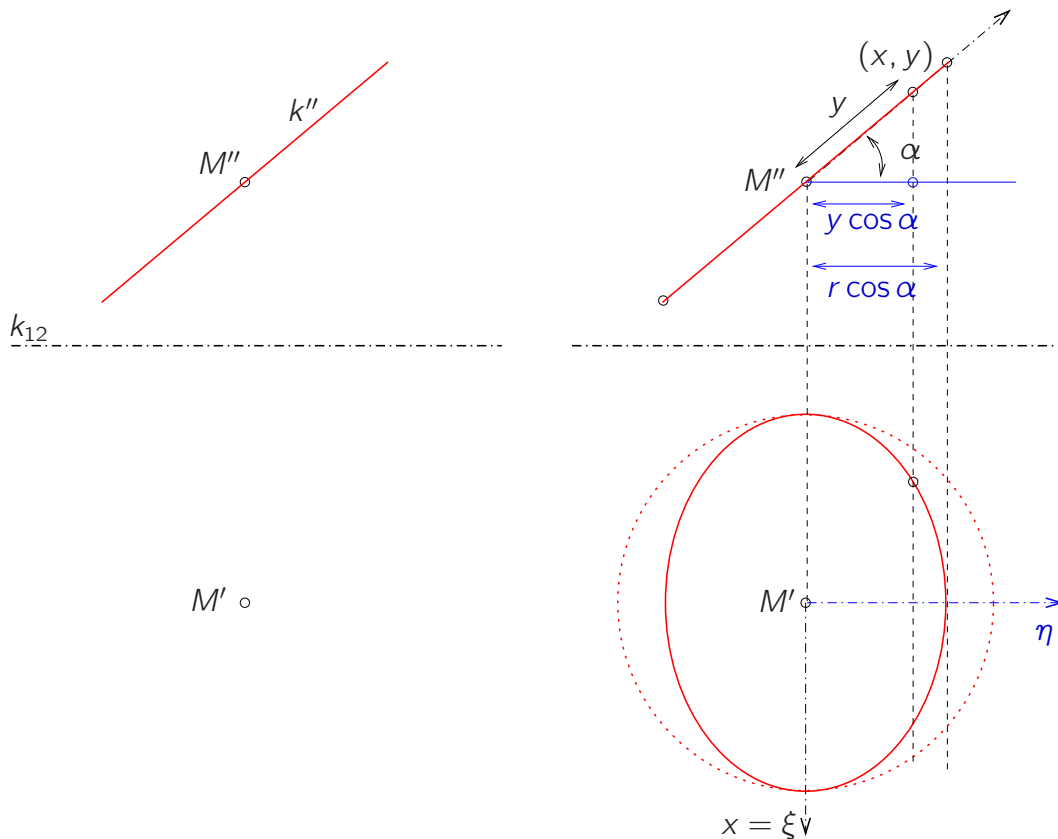


Abbildung 4.4: Projektion eines Kreises

Um unsere Behauptung nachzuprüfen, betrachten wir die Zweitafelprojektion eines Kreises aus Abb. 4.4:

Gegeben: Kreis $k \perp \pi_2$ durch seinen Aufriss k'' .

Gesucht: Grundriss k' des Kreises.

Zur Lösung führen wir x - y -Koordinaten in der Kreisebene und ξ - η -Koordinaten im Grundriss ein (s. Abb. 4.4, rechts). Die Kreisgleichung ist dann $x^2 + y^2 = r^2$. In der Skizze erkennt man, dass ein Punkt (x, y) der Kreisebene den Grundriss (ξ, η) mit $\xi = x$ und $\eta = y \cos \alpha$ hat. Wegen $x^2 + y^2 = r^2$ gilt

$$\xi^2 + (\eta / \cos \alpha)^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad \xi^2 / r^2 + \eta^2 / (r \cos \alpha)^2 = 1.$$

Dies ist tatsächlich die Gleichung einer Ellipse mit Halbachsen $a = r$ und $b = r \cos \alpha$.

Aufgabe 4.1 Zeichne den Grundriss des obigen Kreises mit Hilfe der Scheitel-Krümmungskreis-Methode.

Wie sieht das Bild einer Ellipse unter Parallelprojektion aus? Man kann zeigen, dass sie wiederum auf eine Ellipse oder eine Strecke führt. Dabei wird der Mittelpunkt auf den Mittelpunkt abgebildet. Allerdings sind die Bilder der Achsen nicht unbedingt die Achsen der Bildellipse. Dies erklärt sich bereits daraus, dass rechte Winkel i.a. nicht auf rechte Winkel abgebildet werden, siehe Abb. 4.5.

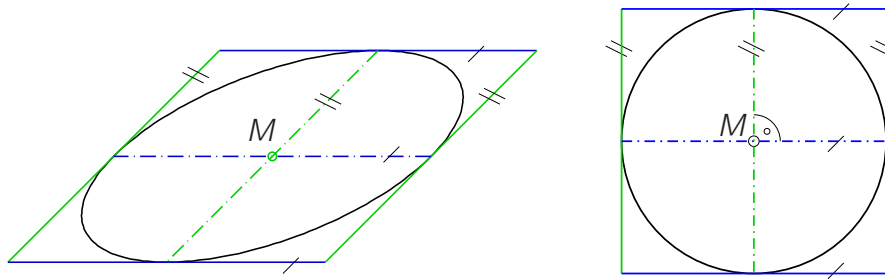


Abbildung 4.5: Parallelprojektion einer Ellipse

4.2 Rotationsflächen

Weil sie einfach hergestellt werden können, sind viele Körper **Rotationsflächen**.

Mathematisch wird eine Rotationsfläche durch die Drehung einer Kurve m um eine *Rotationsachse* a erzeugt. Jeder Punkt der Kurve m beschreibt bei der Drehung einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf a liegt und der senkrecht auf a steht. Wenn die gewählte Kurve m und die Achse a in derselben Ebene liegen, so nennt man m auch einen **Meridian**, in Verallgemeinerung von Längengeraden auf der Erdkugel. Liegt die Achse einer Rotationsfläche parallel zu einer Risstafel, so ist die Umrisskurve in dieser Risstafel ein Meridian.

Zylinder und Kegel sind Beispiele von Rotationsflächen. Ihre Meridiane sind Geraden. Abbildung 4.6 zeigt weitere Beispiele. Rotationsparaboloide bündeln parallele Lichtstrahlen auf einen Punkt (den Brennpunkt), und werden daher als Antennen oder als Reflektorflächen von Scheinwerfern verwendet. Zu Rotationshyperboloiden kommen wir im nächsten Abschnitt zurück.

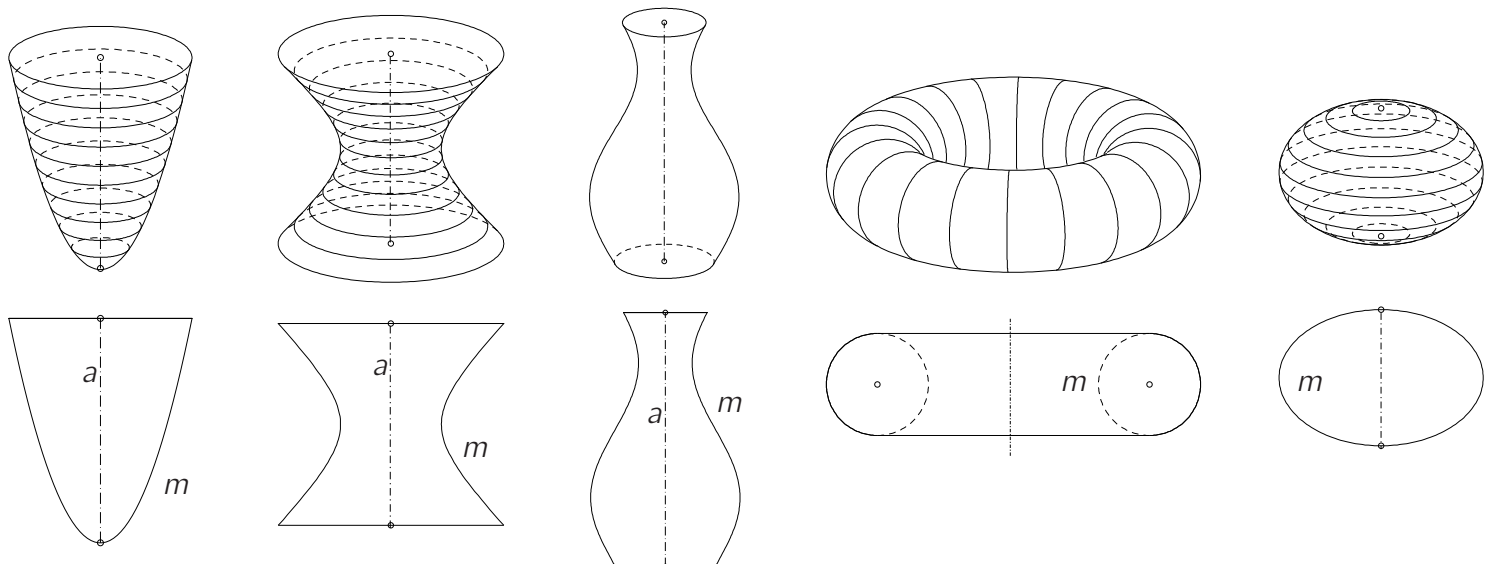


Abbildung 4.6: Rotationsflächen und ihre Meridiankurven: a) Rotationsparaboloid mit erzeugender Parabel, b) einschaliges Hyperboloid und Hyperbel, c) Rotationsfläche erzeugt von einer Sinuskurve, d) Torus und Kreis (disjunkt zur Achse) e) Rotationsellipsoid und Ellipse (symmetrisch zur Rotationsachse)

4.3 Zylinder- und Kegelflächen

(s. LEO S.137,140)

Wir verallgemeinern hier die beiden Rotationsflächen Zylinder und Kegel. Durch Parallelverschieben einer Geraden g längs einer ebenen **Leitkurve** c entsteht eine **allgemeine Zylinderfläche** wie in Abb. 4.7 a).

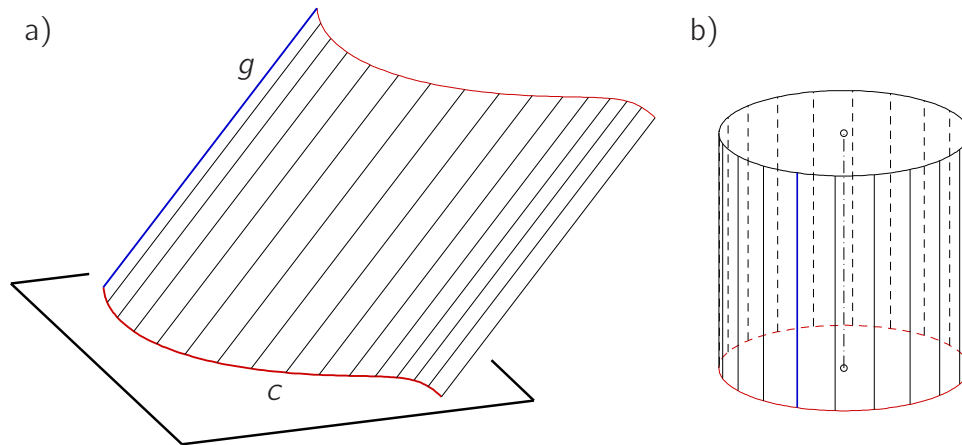


Abbildung 4.7: Erzeugung eines a) allgemeinen Zylinders b) senkrechten Kreiszyllinders

Ist c speziell ein **Kreis** und stehen die Erzeugenden **senkrecht** zur Kreisebene, entsteht ein Rotationszylinder, den man in diesem Zusammenhang auch als **senkrechten Kreiszyllinder** bezeichnet, siehe Abb. 4.7 b).

Gleiten Geraden g auf einer ebenen Kurve c entlang, und treffen sie sich alle in einem festen Punkt S , so entsteht eine **allgemeine Kegelfläche**, Abb. 4.8 a). Dabei heißt S Kegelscheitel oder **-spitze**, die Geraden g **Mantellinien**.

Ist c speziell ein **Kreis** und liegt S auf einer Senkrechten zur Kreisebene durch den Kreismittelpunkt M , so entsteht ein Rotationskegel, den man in diesem Zusammenhang auch als **senkrechten Kreiskegel** bezeichnet, Abb. 4.8 b).

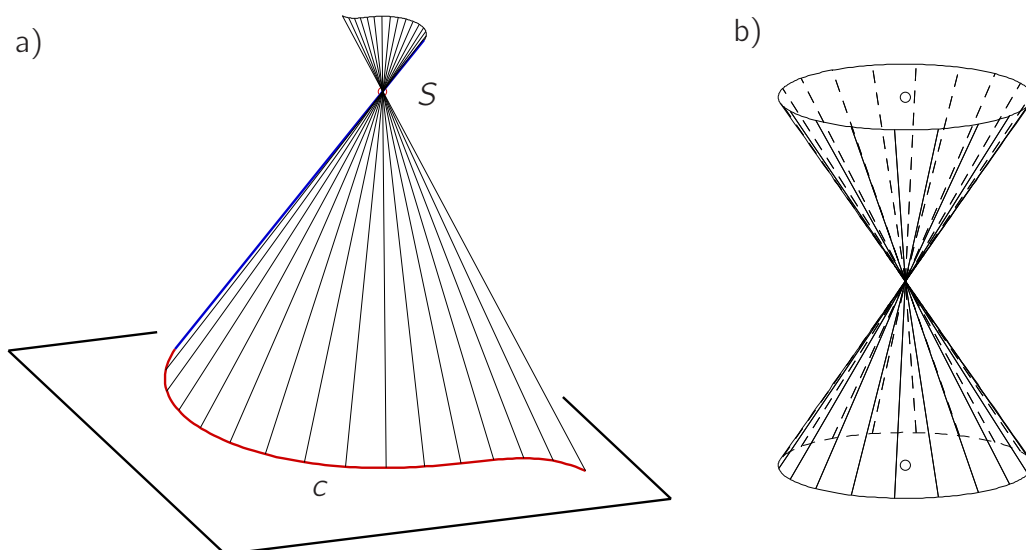


Abbildung 4.8: Erzeugung eines a) allgemeinen Kegels b) senkrechten Kreiskegels

Wir kommen nun zu den Schnittkurven von Kreiszylinder und -kegel mit Ebenen.

Eine Ebene schneidet einen senkrechten Kreiszylinder in einem *Kreis*, in einer *Ellipse*, oder in ein oder zwei Mantellinien (Abb. 4.9).

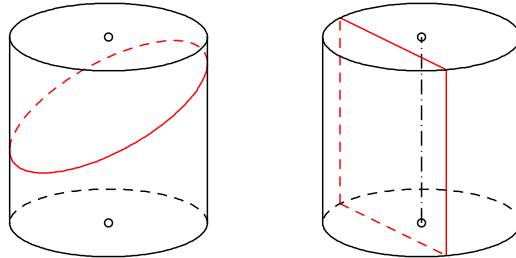


Abbildung 4.9: Ebene Schnitte eines Kreiszylinders: Ellipse, Geradenpaar

Den Schnitt einer Ebene ε mit einem Drehkegel nennt man **Kegelschnitt**:

- Falls die Kegelspitze S nicht in ε liegt, so ergeben sich folgende Kegelschnitte, je nach Steilheit von ε :
 - (a) *Ellipse* (ε flacher als Mantellinie), speziell ein *Kreis* im Fall $\varepsilon \perp a$
 - (b) *Parabel* ($\varepsilon \parallel$ Mantellinie)
 - (c) *Hyperbel* (ε steiler als Mantellinie)
- Falls S in ε liegt, ist der Schnitt, je nach Steilheit von ε : der *Punkt* S , eine, oder zwei *Geraden* durch S .

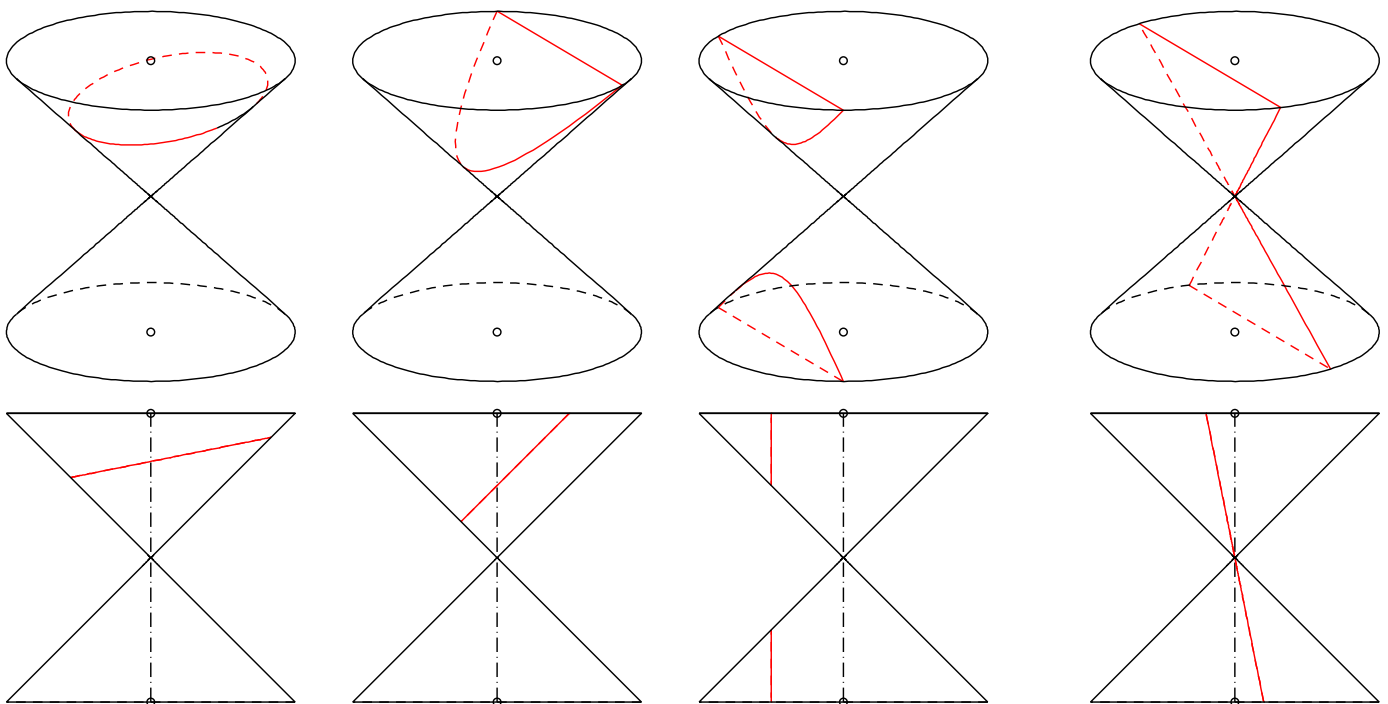


Abbildung 4.10: Ebene Schnitte eines Kreiskegels: Ellipse, Parabel, Hyperbel; Geradenpaar

Weil viele Lichtquellen einen Lichtkegel erzeugen, wird der ausgeleuchtete Bereich auf ebenen Flächen (Wand, Tisch, etc.) von Kegelschnitten berandet. Kegelschnitte tauchen aber auch in der Perspektive als Bild von Kreisen auf, z.B. als Fotografie von Kreisen.

4.4 Regelflächen

Als **Regelfläche** wird eine Fläche bezeichnet, die durch Bewegung einer Geraden im Raum erzeugt wird. Einfache Beispiele sind **Zylinder** und **Kegel**, nicht nur über dem Kreis, sondern auch in den allgemeinen Varianten.

Bei der **Wendelfläche** wird eine Gerade in einer Schraubbewegung um eine dazu senkrechte Achse gedreht. Das Ergebnis kann man sich als eine doppelte Wendeltreppe vorstellen, siehe Abb. 4.11 links. Je nach Drehrichtung kann eine Wendelfläche eine Rechtsschraube oder Linksschraube darstellen. Als Sonderfälle ergibt sich die Ebene, falls entweder der Drehanteil oder der Translationsanteil der Schraubung verschwindet. Man kann auch eine Gerade, die nicht senkrecht auf der Achse steht, verschrauben; ein Beispiel dafür zeigt Abb. 4.11 rechts.

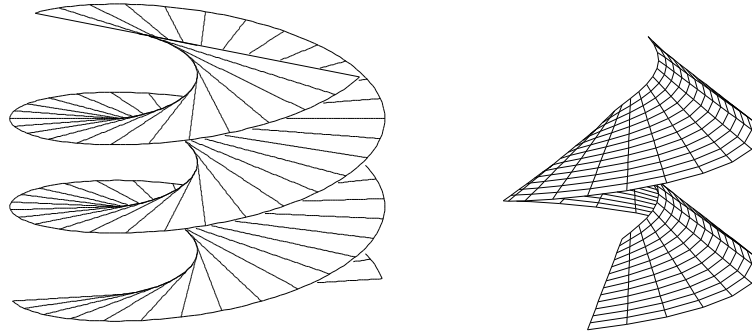


Abbildung 4.11: Wendelfläche (links), Verschraubung einer geneigten Geraden um eine Achse (rechts)

Wir stellen noch zwei weitere Regelflächen vor, siehe Abb. 4.12.

a) Das **einschalige Hyperboloid** ist von Kühltürmen bekannt. Es wird nicht nur durch die Rotation einer Hyperbel erzeugt (Rotationshyperboloid), sondern auch von einer zur Achse windschiefen Geraden. Die Spiegelbilder dieser Geraden ergeben dann eine weitere Geradenschar auf der Fläche.

b) Das **hyperbolische Paraboloid** ist eine Sattelfläche, die gern für Dächer verwendet wird. Man kann ein beliebiges berandendes Viereck im Raum vorschreiben. Die Fläche ist dadurch definiert, dass man gegenüberliegende Strecken des Vierecks im gleichen Verhältnis unterteilt, und die dadurch bestimmten Punkte paarweise durch Geraden verbindet. Egal welches Paar gegenüberliegender Strecken man betrachtet, entsteht dieselbe Fläche.

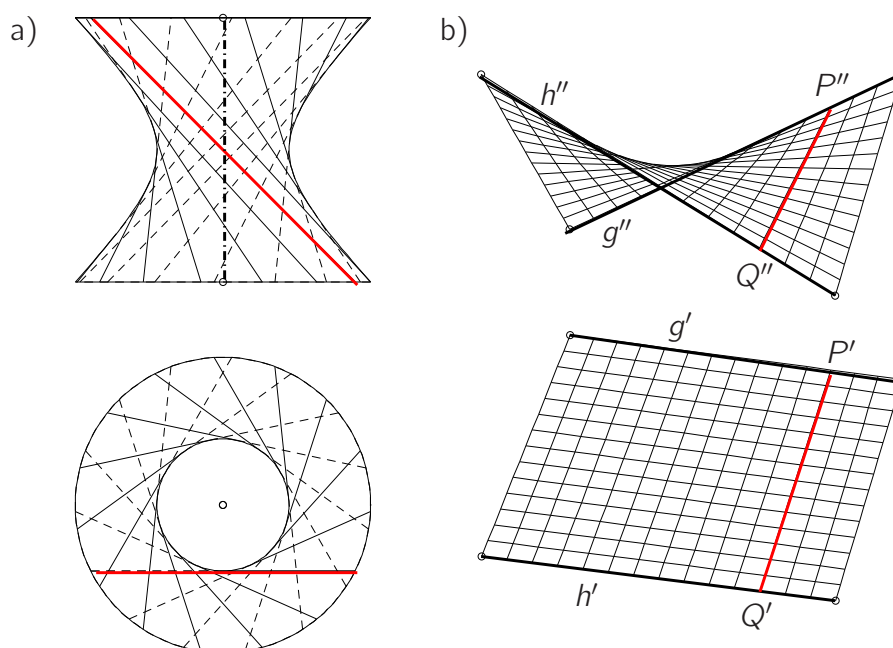


Abbildung 4.12: Definierende Geraden des a) einschaligen Hyperboloids und b) hyperbolischen Paraboloids

Diese beiden Flächen sind **doppelte Regelflächen**: Sie enthalten zwei verschiedene Geradenscharen und sind daher auf zwei verschiedene Weisen Regelflächen. Sie werden in der Praxis gern verwendet, weil sie konstruktiv einfach herzustellen sind: Aus geraden Trägern oder Tragkonstruktionen entsteht eine gekrümmte Fläche.

Aufgabe 4.2 a) Gegeben ist in Grund- und Aufriss eine erzeugende Strecke und die Rotationsachse eines einschaligen Hyperboloids. Zeichnen Sie den Umriss im Aufriss.

b) Zeichnen Sie das hyperbolische Paraboloid, das das in Grund- und Aufriss gegebene Viereck berandet.

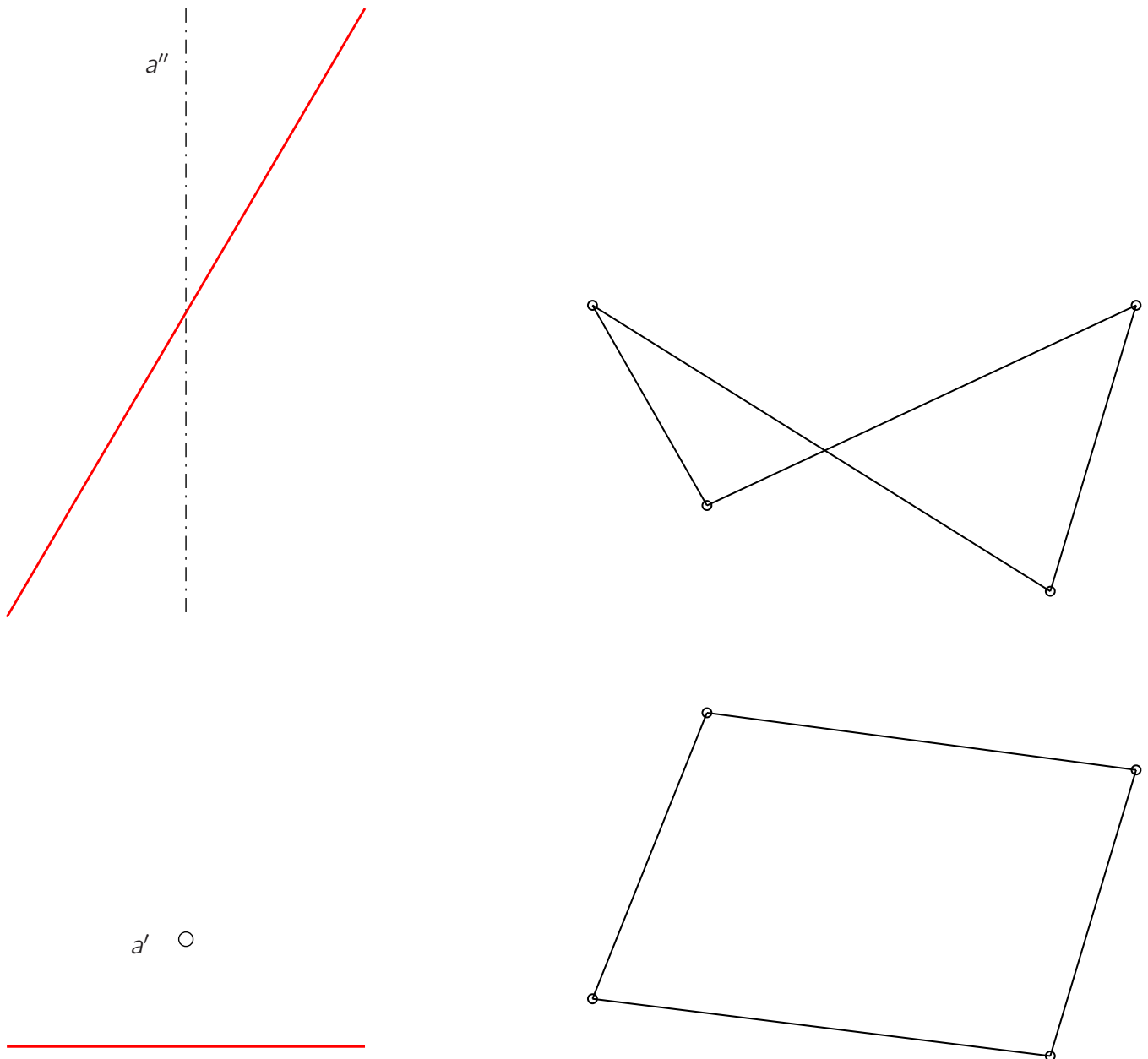


Abbildung 4.13: Regelflächen: a) einschaliges Hyperboloid b) hyperbolisches Paraboloid

4.5 Abwickelbare Flächen

(s. LEO S.162,164)

Eine Fläche nennt man **abwickelbar**, wenn sie sich **längentreu** in die Ebene abbilden lässt, d.h. man kann sie unter Erhaltung der Längen sämtlicher auf ihr liegender Kurven in die Ebene ausbreiten. Beispielsweise sind beliebige Zylinder und Kegel abwickelbar. Es ist ein bekanntes Ergebnis der Kartographie, dass die Kugel nicht abwickelbar ist: Es gibt keine längentreuen Karten der Erde. Tatsächlich ist außer Zylinder und Kegel (sowie natürlich der Ebene selbst) keine weitere Rotationsfläche abwickelbar.

Abwicklung eines Drehzylinders

Gegeben: Ein Drehzylinder und ein Punkt darauf in Grund- und Aufriss.

Gesucht: Die Abwicklung des Drehzylinders und des Punktes P .

Lösungsidee: Man nähert den Zylinder durch ein **Prisma** (Querschnitt ist ein regelmäßiges n -Eck) an, „schneidet“ das Prisma längs einer Kante auf und wickelt es in die Ebene ab.

Durchführung: (Abb. 4.14)

- (1) Teile den Basiskreis in n (≥ 12) Teile und zeichne das n -Eck.
- (2) Nimm die Länge d einer Seite des n -Ecks in den Zirkel und zeichne ein Rechteck der Höhe h (Zylinderhöhe) und Breite $n \cdot d$.
- (3) Der Punkt P liegt auf oder zwischen zwei Kanten des Prismas. Zeichne diese zwei Kanten in der Abwicklung, nimm den kleineren Abstand von P zu einer dieser Kanten und zeichne die entsprechende „Zwischenkante“ k in die Abwicklung.
- (4) Übertrage P in die Abwicklung auf die Zwischenkante. Die Höhe des Punktes P ergibt sich aus dem Aufriss.

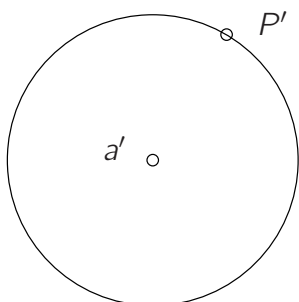
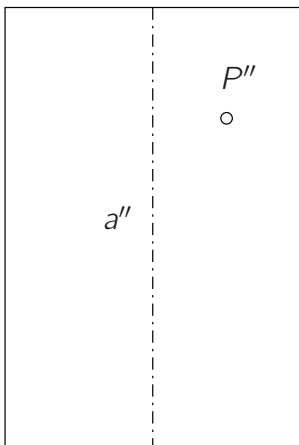


Abbildung 4.14: Abwicklung eines Zylinders

Abwicklung eines Drehkegels

Gegeben: Ein Drehkegel und ein Punkt darauf in Grund- und Aufriss (Abb. 4.15).

Gesucht: Die Abwicklung des Kegels und des Punktes P .

Lösungsidee: Annäherung des Kegels durch eine n -kantige **Pyramide**. Die Abwicklung des Kegels ist ein Kreis-sektor, dessen Winkel $\alpha = 2\pi r/l$ durch den entsprechenden Winkel der abgewickelten Pyramide angenähert wird. Die Abwicklung des Punktes P erhält man durch eine zur Zylinderabwicklung analogen Näherungskonstruktion. Die notwendige wahre Länge der Strecke \overline{SP} erhält man durch Paralleldrehen zu π_2 .

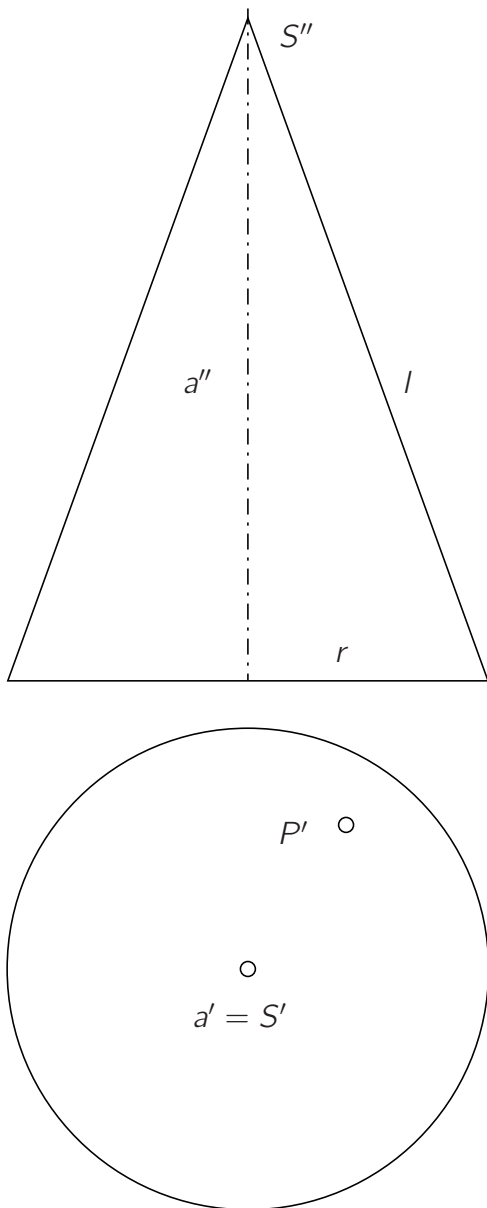


Abbildung 4.15: Abwicklung eines Kegels

Interessant sind auch **Aufwicklungen**:

Aufgabe 4.3 Wickle das Plakat auf die Säule (Zylinder) auf.

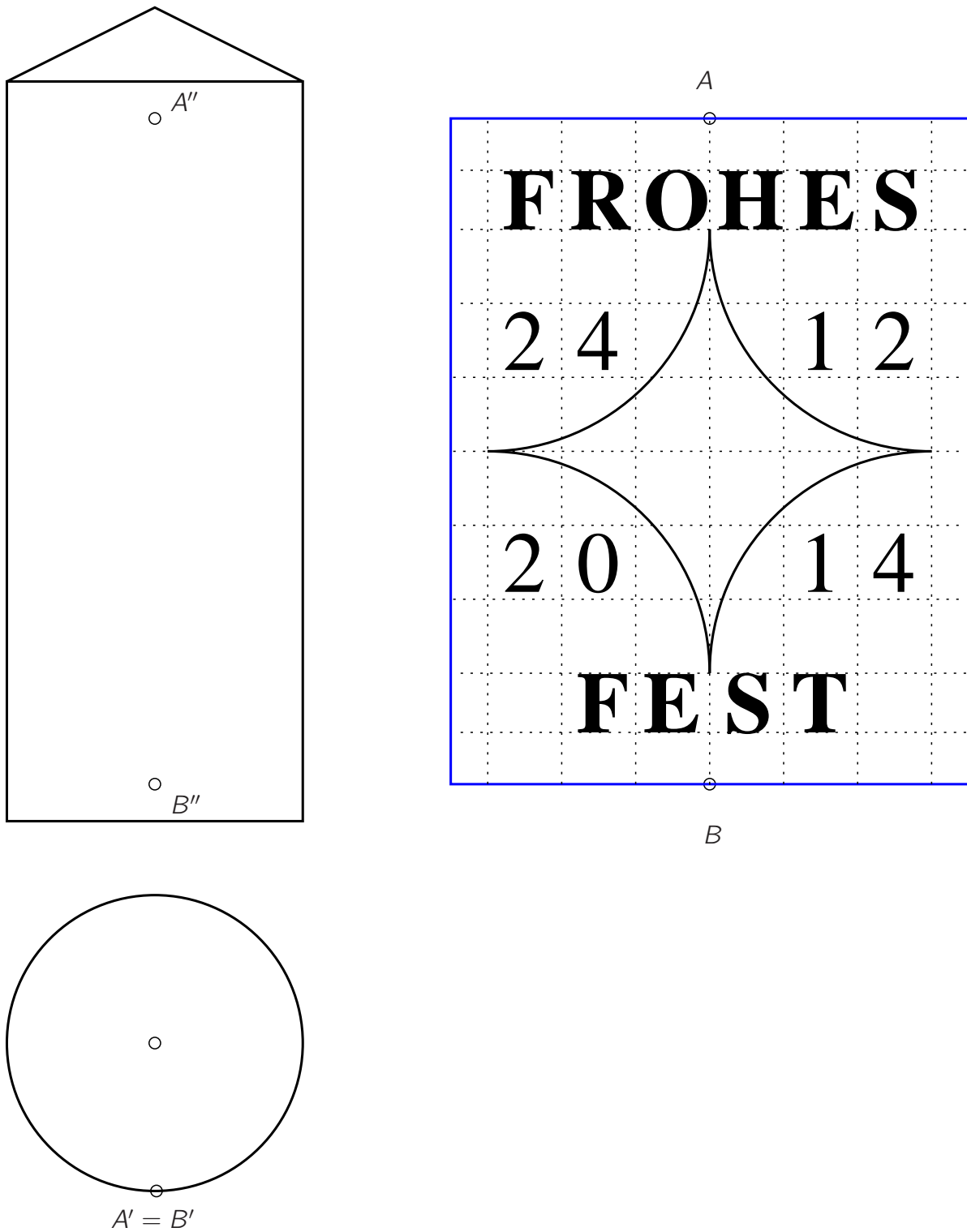


Abbildung 4.16: Aufwicklung auf einen Zylinder

4.6 Kotierte Projektion

(s. LEO S.183)

Um im nächsten Abschnitt Böschungsflächen zu behandeln, wollen wir kurz eine aus Kartographie und Geländedarstellung bekannte Projektionsform einführen: die **kotierte Projektion**. Dies ist ein Grundriss, in den man **Höhenlinien** projiziert und sie mit **Höhenangaben** (Kote) versieht, siehe Figur 4.17 unten. Auf diese Weise reicht bereits eine Projektion, um ein Gelände zu beschreiben.

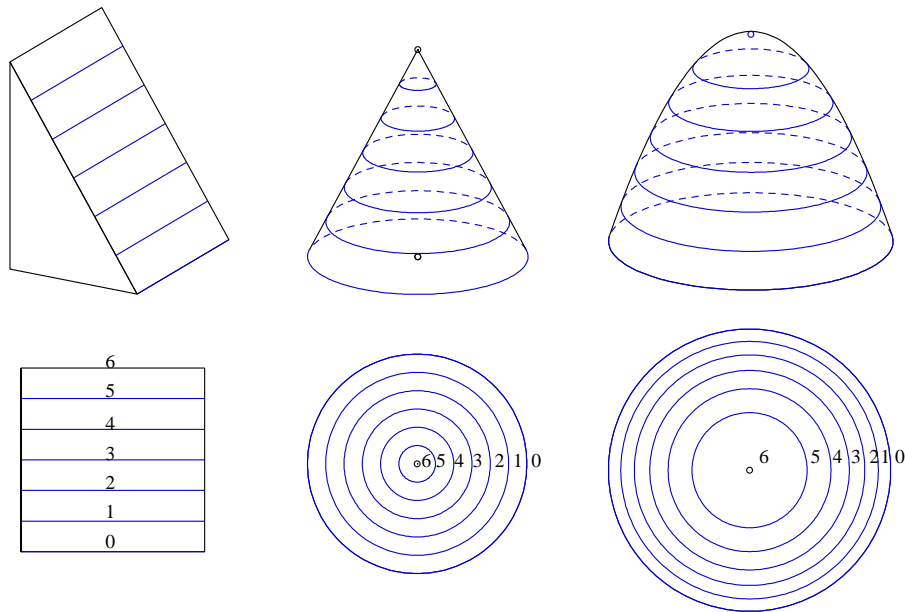


Abbildung 4.17: Ebene, Kegel und Paraboloid in Parallelprojektion (oben) und kotierter Projektion (unten)

Die Schnittkurve zweier Flächen läßt sich aus ihren kotierten Projektionen näherungsweise ermitteln:

- Schneide die Höhenlinien zu gleichen Höhen.
- Verbinde die Schnittpunkte durch eine Kurve.

Aufgabe 4.4 Bestimme in Abb. 4.18 die Schnittkurven in kotierter Projektion zwischen
a) Ebene und Kegel b) Ebene und Paraboloid.

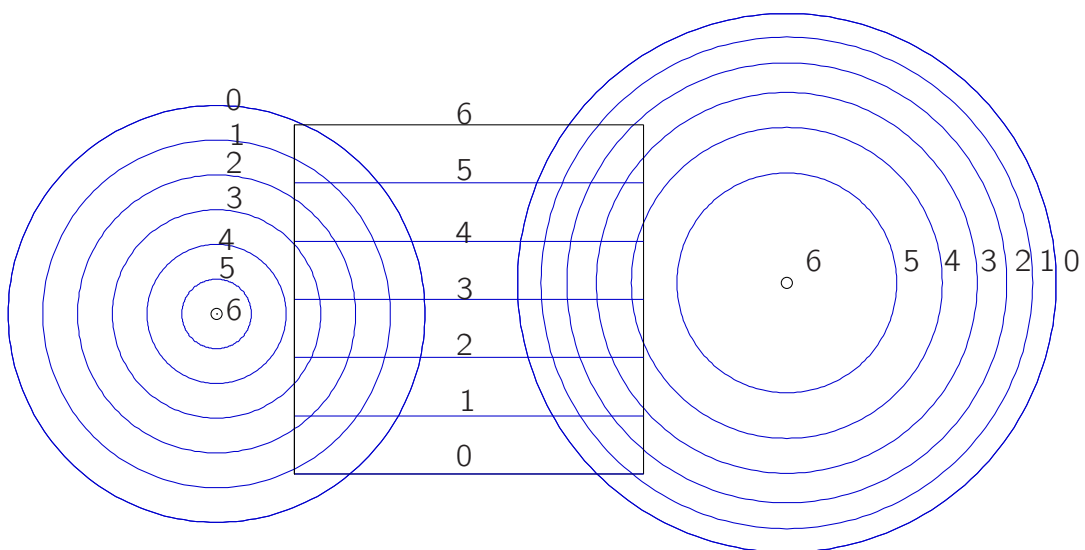


Abbildung 4.18: Schnittkurven von Kegel, Ebene und Paraboloid in kotierter Projektion

4.7 Böschungsflächen

(s. LEO S.193)

Erhöht liegende Verkehrsflächen werden abgebösch, um kontinuierlich auf das Niveau des umliegenden Geländes zurückzuführen. Je größer man die Neigung der Böschung wählt, desto weniger Material wird zur Anschüttung benötigt. Allerdings ist die maximal mögliche Neigung durch das verwendete Material bestimmt: bei Sand sind dies ungefähr 30° , bei Schotter etwa 40° . Genaueres dazu siehe z.B. Wikipedia-Artikel *Schüttwinkel*.

Flächen mit konstanter Neigung nennt man **Böschungsflächen**. Dabei ist die Neigung einer Fläche definiert als die Steilheit ihrer **Falllinien**, also der Linien des steilsten Abfalls bzw. Anstiegs. Man kann sich eine Böschungsfläche als *Einhüllende* einer Schar von **Schüttkegeln** vorstellen: Die Spitzen befinden sich auf der vorgegebenen Kurve/Straßenrand (Abb. 4.19 oben links). Je eine Mantelgerade liegt auf der Böschungsfläche, so dass die Falllinien der Böschungsfläche Geraden sind (Abb. 4.19 oben Mitte). Daher sind Böschungsflächen spezielle Regelflächen, deren Regelgeraden alle dieselbe "Steilheit" besitzen. Die Schüttkegel haben als Höhenlinien Kreise. Die Einhüllende der Schar dieser Kreise ergibt daher die Höhenlinien der Böschungsfläche (Abb. 4.19 rechts). Abtragungen kann man entsprechend deuten, wobei man Kegel benutzt, die sich nach oben öffnen.

In kotierter Projektion kann man eine Böschungsfläche folgendermaßen zeichnerisch bestimmen:

1. Markiere diejenigen Punkte auf der gegebenen Randkurve, wo Randkurve und Gelände dieselbe Höhe besitzen. Diese Punkte grenzen Aufschüttungs- von Abtragungszonen ab.
2. Bestimme Höhenlinien der Böschungsflächen, zunächst unabhängig vom Gelände:
 - Ermittle die Abstände zwischen den Höhenlinien, z.B. aus einem Steigungsdreieck.
 - Zu ausgewählten Randpunkten zeichne Kreise als Höhenlinien gedachter Schütt- oder Abtragungskegel. Die gesuchten Höhenlinien sind Einhüllende der Kreise gleicher Höhe.
 - Spezialfall einer geraden Randkurve: Die Böschungsfläche ist eine Ebene und ihre Höhenlinien sind Geraden.
 - Hat die Randkurve eine Außenecke, so stimmen die Höhenlinien der Böschungsfläche dort stückweise mit den Höhenkreisen des Kegels überein. Im Fall einer Innenecke schneidet man die beiden angrenzenden Böschungsflächen.
3. Schneide Böschungsfläche und Gelände: Die Schnittlinie erhält man durch Verbinden der Schnittpunkte der jeweiligen Höhenlinien (grün in Abb. 4.20). Man kann dann die entstehenden Höhenlinien des Geländes mit Aufböschung/Abtragung durchzeichnen.

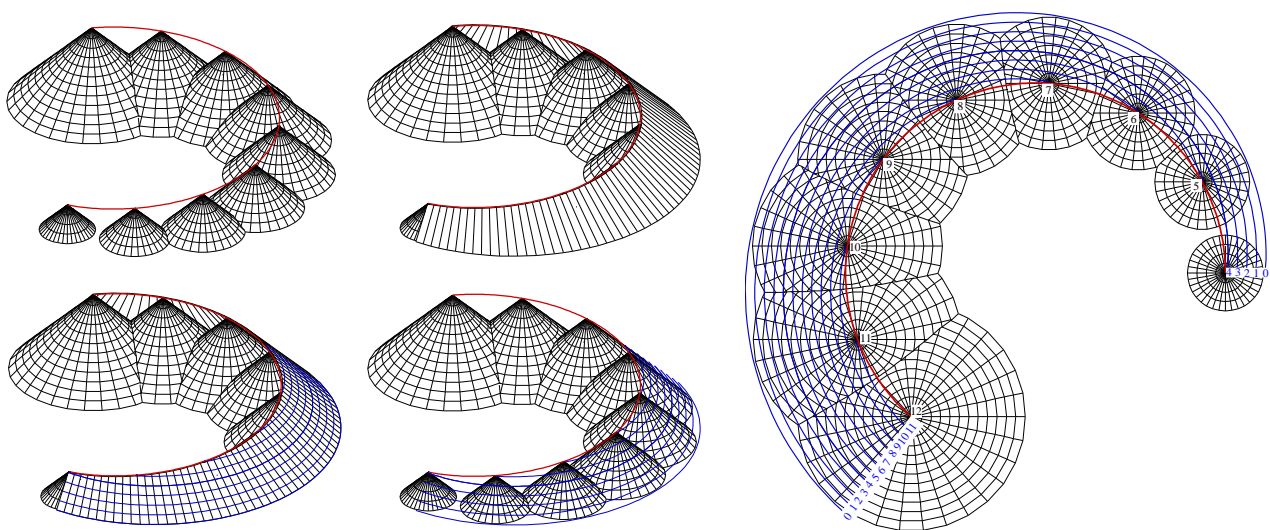


Abbildung 4.19: Erzeugung und kotierte Darstellung einer Böschungsfläche entlang einer Schraublinie

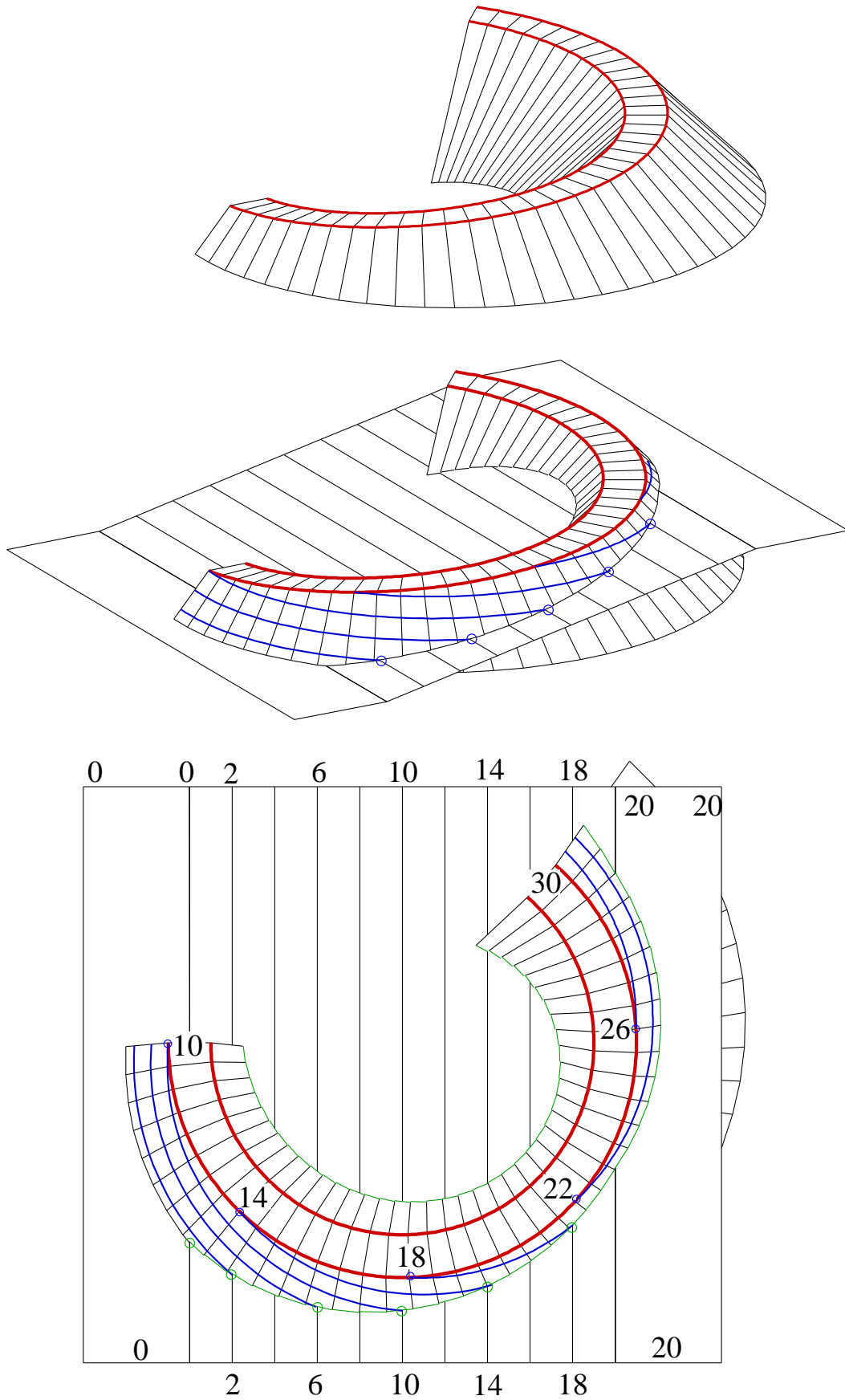


Abbildung 4.20: Böschungfläche einer Strasse und deren Schnitt mit einem Gelände (Ebenenstücke)

Aufgabe 4.5 In kotierter Projektion ist eine Straße und eine Runde Plattform in einem horizontalen ebenen Gelände (Höhe 0) gegeben. Konstruiere a) den Böschungskörper mit Steilheit 1 für die Straße und b) mit Steilheit $2/3$ für die Plattform sowie c) den Schnitt der beiden Böschungskörper.

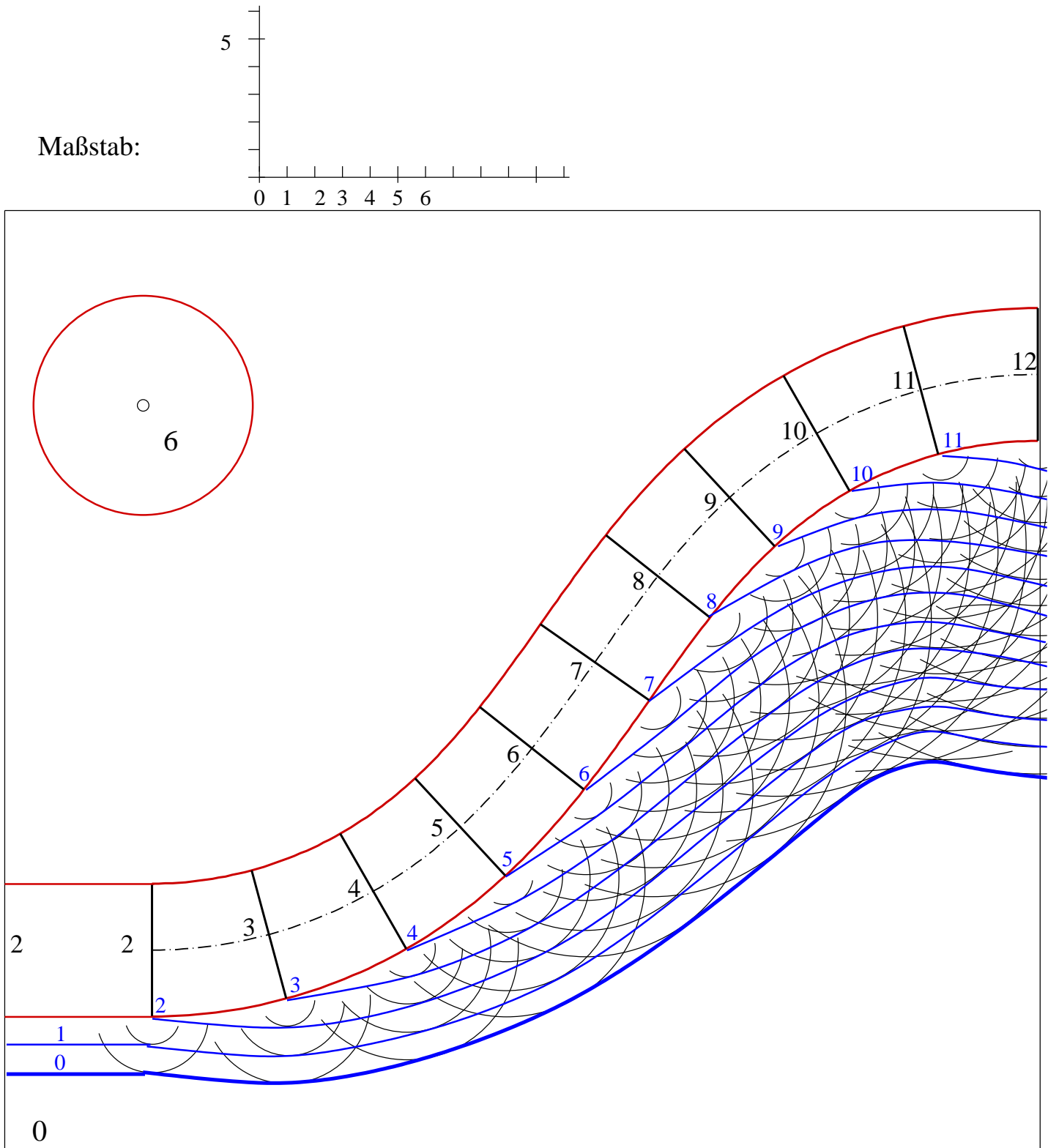


Abbildung 4.21: Aufgabe: Böschungfläche einer Straße und einer Plattform

4.8 Durchdringungen einer Kurve und einer Fläche

Wir wollen eine Kurve k und Fläche Φ schneiden, d.h. die sogenannten Durchstoßpunkte $D = k \cap \Phi$ bestimmen. Wir führen dazu eine Hilfsfläche ε ein, z.B. eine Ebene oder Kugel, die k enthält, und deren Schnitt mit der Fläche eine einfach zu konstruierende Kurve $h := \Phi \cap \varepsilon$ ist. Die Durchstoßpunkte sind dann gerade die Punkte im Schnitt der Kurven $k \cap h$.

Beispiel 1: Gerade und Kugel

Gegeben: Gerade g , Kugel Φ mit Mittelpunkt M in Grund- und Aufriss.

Idee: Wir wählen als **Hilfsfläche** eine vertikale Ebene ε , die g enthält, d.h. $\varepsilon' = g'$.

Der Schnitt von ε mit der Kugel Φ ist ein **Kreis** h mit Mittelpunkt M_h . Wir bestimmen $h \cap g$.

Durchführung:

1. **Umprojektion:** Führe eine neue Risstafel π_3 parallel zu ε ein, also $k_{13} \parallel g'$. Bestimme $M_h''' = M'''$ und h''' , sowie g''' .
2. Dann liefert $h''' \cap g'''$ die Durchstoßpunkte D_1''', D_2''' .
3. Durch Rückprojektion ergeben sich die Punkte D_1'', D_2'' sowie D_1', D_2' sowie die Sichtbarkeit von g .

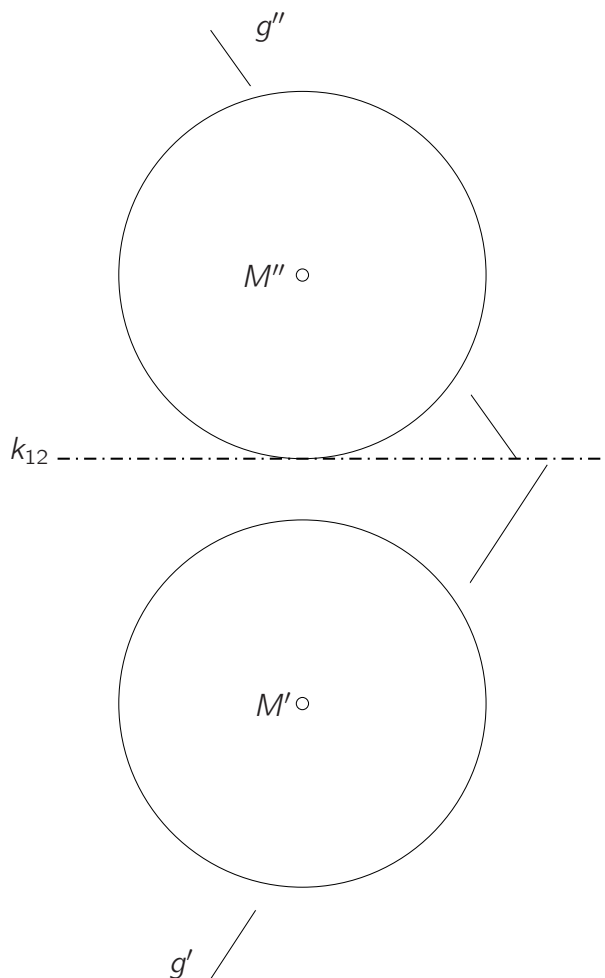


Abbildung 4.22:
Schnitt von Kugel
und Gerade

Beispiel 2: Gerade und Kegel

Gegeben: Grund- und Aufriss von Gerade g , sowie Kegel Φ durch Spitze S , Achse a , Basiskreis c .

Idee: Als **Hilfsfläche** wählen wir die Ebene ε durch die Kegelspitze S und g .

Sie schneidet den Kegel in zwei Mantellinien h_1, h_2 .

Durchführung:

1. Wir bestimmen die Spurgerade s'_ε der Ebene ε : Ein Spurpunkt P_1 liegt auf g . Eine Gerade $\ell \subset \varepsilon$, die z.B. durch S und einen Punkt $Q \in g$ läuft, ergibt einen weiteren Spurpunkt P_2 , und damit s'_ε .
2. Der Schnitt $s'_\varepsilon \cap c'$ liefert zwei Punkte H_1, H_2 , und damit die Mantelgeraden h_1, h_2 .
3. Die gesuchten Durchstoßpunkte sind dann $D_1 := h_1 \cap g$ und $D_2 := h_2 \cap g$.

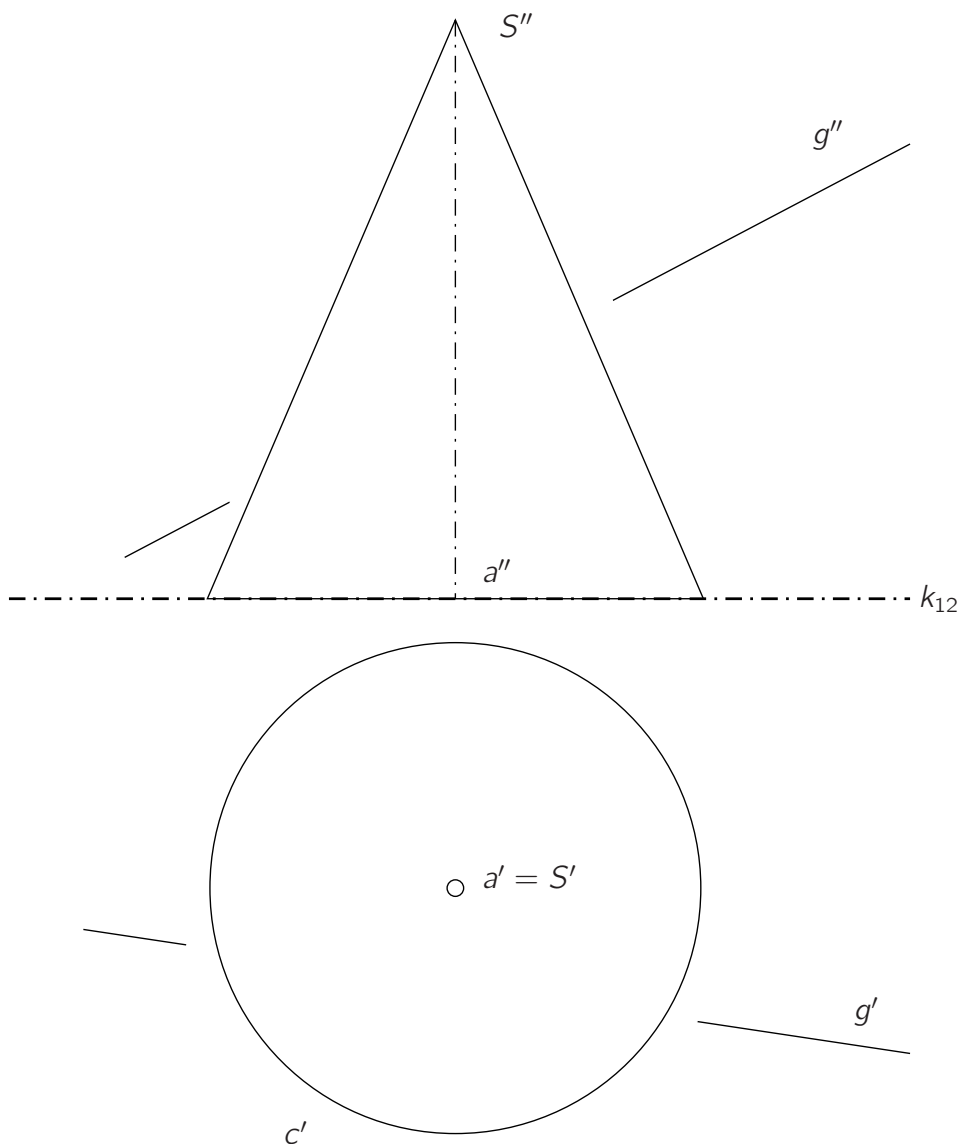


Abbildung 4.23: Schnitt: Kegel–Gerade

4.9 Durchdringungskurven zweier Flächen

Die *Durchdringungs-* oder *Verschneidungskurven* zweier Flächen Φ_1, Φ_2 konstruiert man punktweise wie folgt. Man wählt eine **Hilfsfläche** Ψ , die die gegebenen Flächen Φ_1, Φ_2 in einfachen Kurven (z.B. Geraden, Kreise) k_1 und k_2 schneidet. Jeder Schnitt $k_1 \cap k_2$ liefert einen oder mehrere Punkte von Φ_1 und Φ_2 . Das Verfahren wird so lange wiederholt, bis man eine "genügende" Anzahl von gemeinsamen Punkten gefunden hat.

4.9.1 Hilfsebenenverfahren

(s. LEO S.152)

Gegeben: Kegel Φ_1 (Achse a_1), Zylinder Φ_2 (Achse a_2) (Abb. 4.24).

Gesucht: Durchdringungskurve $k = \Phi_1 \cap \Phi_2$.

Lösungs**idee**: Hilfs**ebene** $\varepsilon \perp a_1$ schneidet den Kegel in einem Kreis und den Zylinder in einem Geradenpaar.

Durchführung:

1. Wähle eine geeignete **Ebene** ε und zeichne ε'' .
2. Zeichne den Grundriss c' des **Schnittkreises** $\varepsilon \cap \Phi_1$ (Radius r).
3. Ziehe im Grundriss die **Parallelen** g', h' zu a_2' im Abstand d .
4. Die (max. vier) Schnittpunkte P', Q' des Kreises c' mit g', h' sind die Grundrisse von Punkten der Durchdringungskurve.
5. Auf ε'' erhält man dann P'', Q'' .
6. Wiederhole 1.–5. genügend oft.
7. Verbinde die gefundenen Punkte mit einer Kurve.

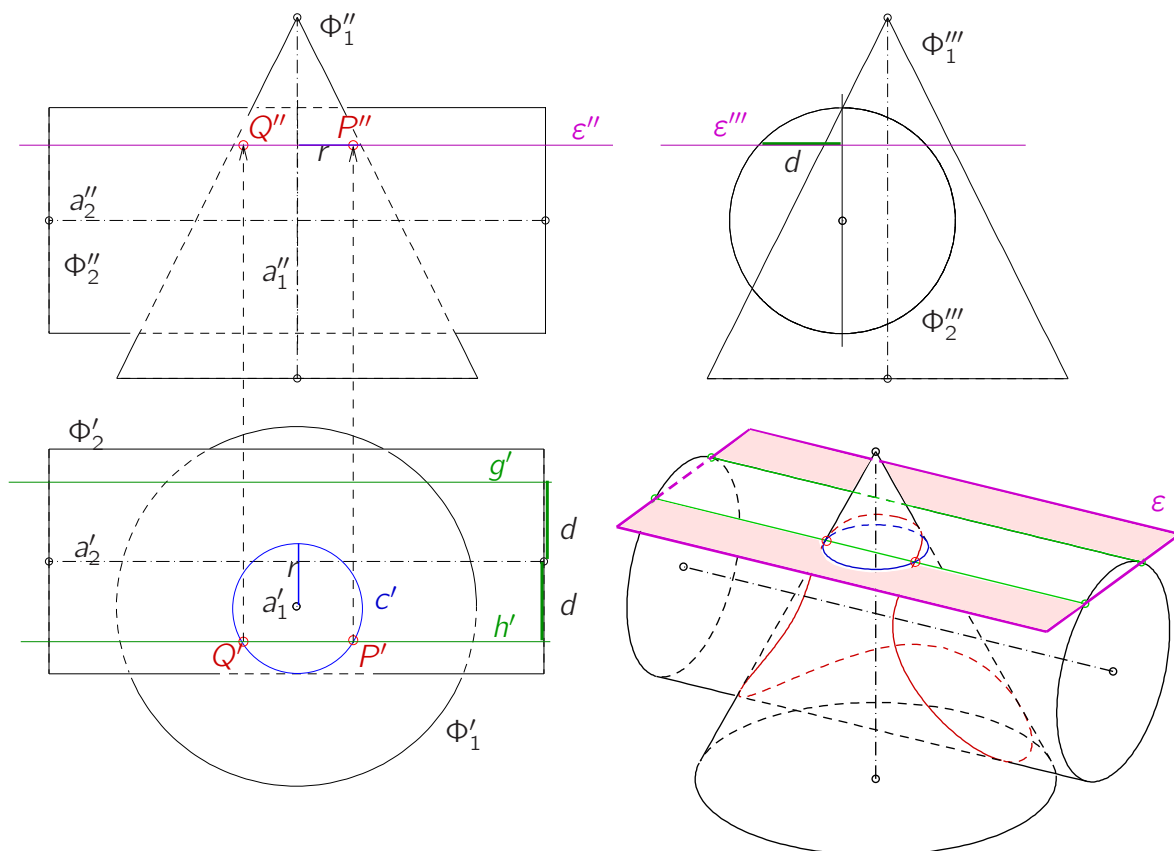


Abbildung 4.24: Veranschaulichung des Hilfsebenenverfahrens

Aufgabe 4.6 :

Gegeben: Kegel und Zylinder in Grund- und Aufriss (Abb. 4.25).

Gesucht: Durchdringungskurve in Grund- und Aufriss.

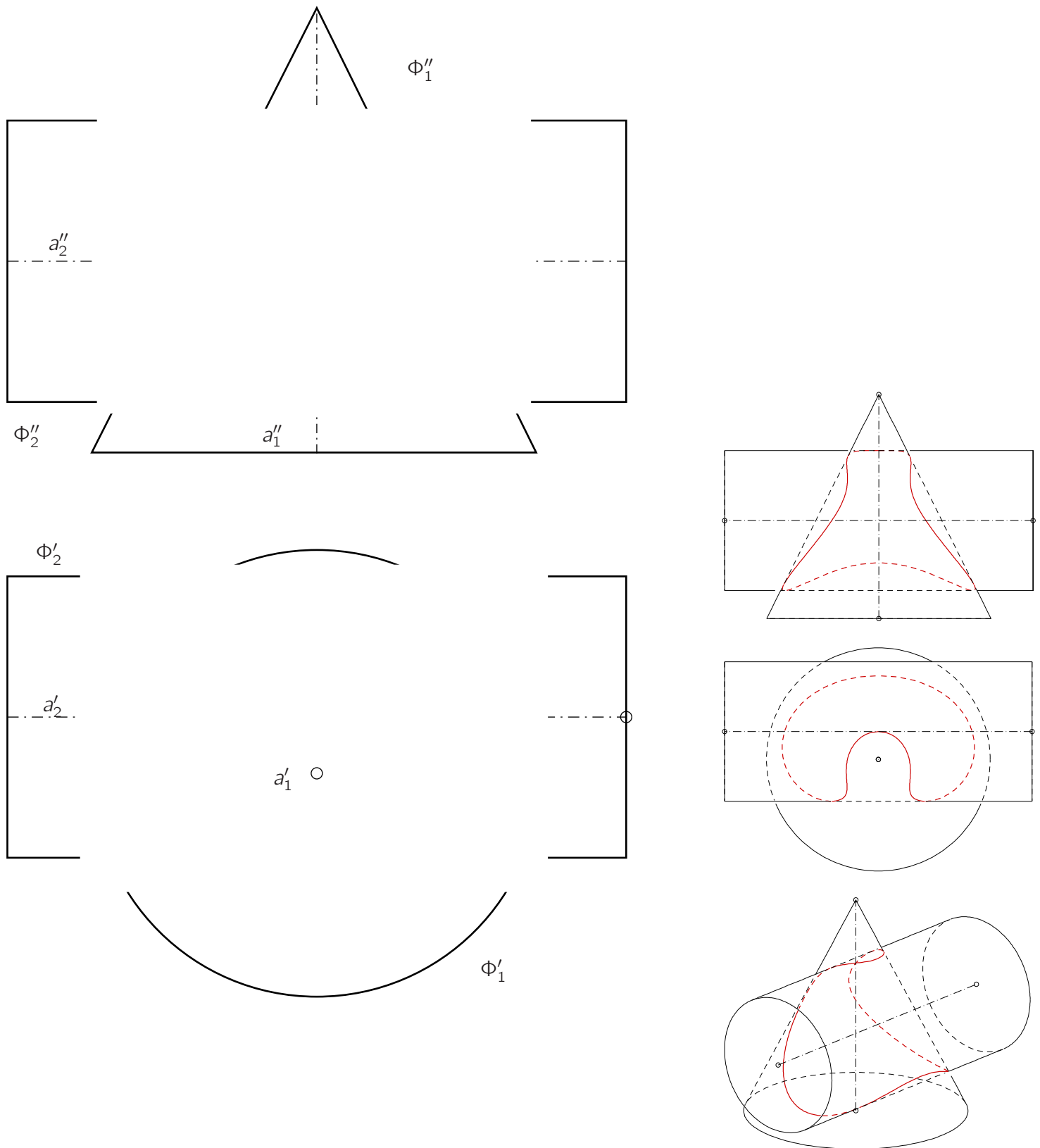


Abbildung 4.25: Schnitt: Kegel-Zylinder (Hilfsebenenverfahren)

4.9.2 Hilfskugelverfahren

(s. LEO S.155)

Gegeben: Kegel Φ_1 und Zylinder Φ_2 , deren Achse a_1 bzw. a_2 sich schneiden, siehe Abb. 4.24.

Gesucht: Durchdringungskurve $k = \Phi_1 \cap \Phi_2$.

Lösungsidee: Horizontale Schnitte mit dem Zylinder würden Ellipsen liefern, d.h. nicht einfach zu zeichnende Kurven. Statt dessen wählen wir eine Schar von **Kugeln** als Hilfsflächen. Ihr gemeinsamer Mittelpunkt soll der Achsenschnittpunkt $M = a_1 \cap a_2$ sein, so dass jede Kugel sowohl den Kegel als auch den Zylinder in **Kreisen** schneidet. Die Schnittpunkte der Kreise liegen auf der Durchdringungskurve der Flächen.

Durchführung:

1. Wähle eine Kugel Ψ mit Mittelpunkt M , die beide Flächen schneidet.
2. Bestimme im Aufriss die zwei Schnittkreise k_1, k_2 der Kugel mit dem Kegel Φ_1 .
Von den beiden Schnittkreisen von Kugel und Zylinder Φ_2 benötigen wir nur einen, den Kreis l .
Die Aufrisse k_1'', k_2'', l'' sind Strecken, da alle Kreise zu π_2 senkrecht sind.
3. Im Grundriss zeichne k_1', k_2' durch Übertragen der Radien; die Ellipse l' wird nicht benötigt.
4. Im Aufriss liefert $k_1'' \cap l''$ (maximal) zwei Punkte $P'' = Q''$; im Grundriss finde P', Q' im Schnitt von Ordnern mit k_1' . Bestimme genauso die Punkte R, S in $k_2 \cap l$.
5. Wiederhole 1.–4. genügend oft und verbinde die gefundenen Punkte mit einer Kurve.

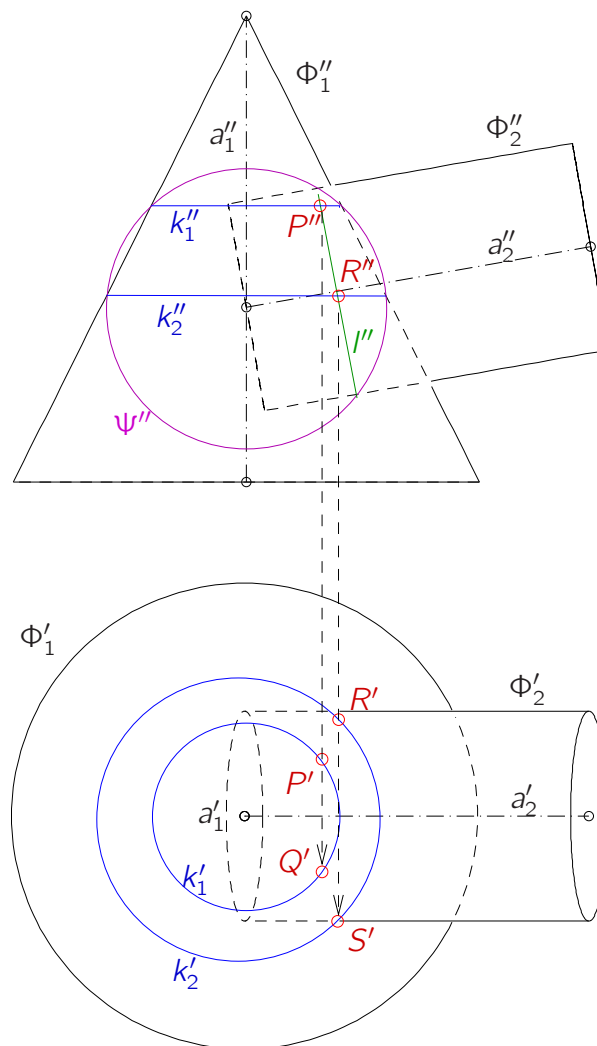


Abbildung 4.26: Veranschaulichung des Hilfskugelverfahrens

Aufgabe 4.7 :

Gegeben: Kegel und Zylinder in Grund- und Aufriss (Abb. 4.27).

Gesucht: Durchdringungskurve in Grund- und Aufriss.

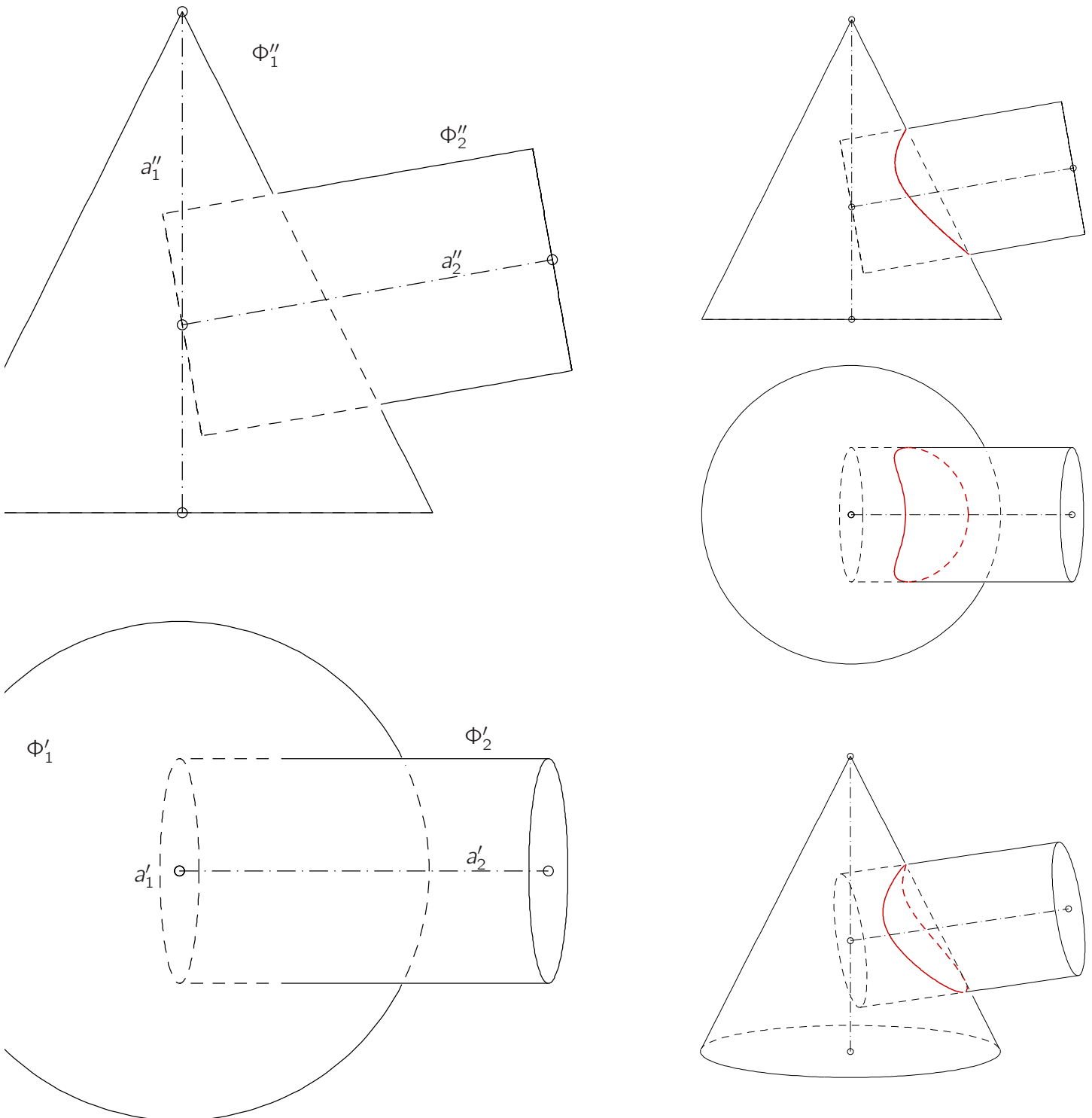


Abbildung 4.27: Schnitt: Kegel-Zylinder (Hilfskugelverfahren)

Wann ist welches Verfahren sinnvoll?

a) Das **Hilfskugelverfahren** ist auf alle Rotationsflächen mit sich **schneidenden Achsen** anwendbar. Hilfskurven sind dann immer Kreise.

b) Die Voraussetzung für das **Hilfsebenenverfahren** ist: Das Schneiden mit geeigneten Ebenen ergibt **einfach** zu zeichnende **Hilfskurven**. Meistens werden die Hilfsebenen senkrecht zu einer Risstafel gewählt.

4.9.3 Wie sehen Schnittkurven von Flächen aus?

Grundsätzlich schneiden sich zwei Flächen in einer oder mehreren Schnittkurven. Diese Kurven können sich in Punkten treffen. Nehmen wir an, zwei Flächen schneiden sich in einem Schnittpunkt P , so gilt:

- Haben die beiden Flächen in einem Schnittpunkt P **unterschiedliche Tangentialebenen**, so läuft die Schnittkurve der Flächen glatt (ohne Spitzen oder Kreuzungen) durch P .
- Bei **übereinstimmender Tangentialebene** beider Flächen im Punkt P können sich aber mehrere Schnittkurven in P schneiden, siehe Abb. 4.28, Mitte, oder Abb. 4.29.

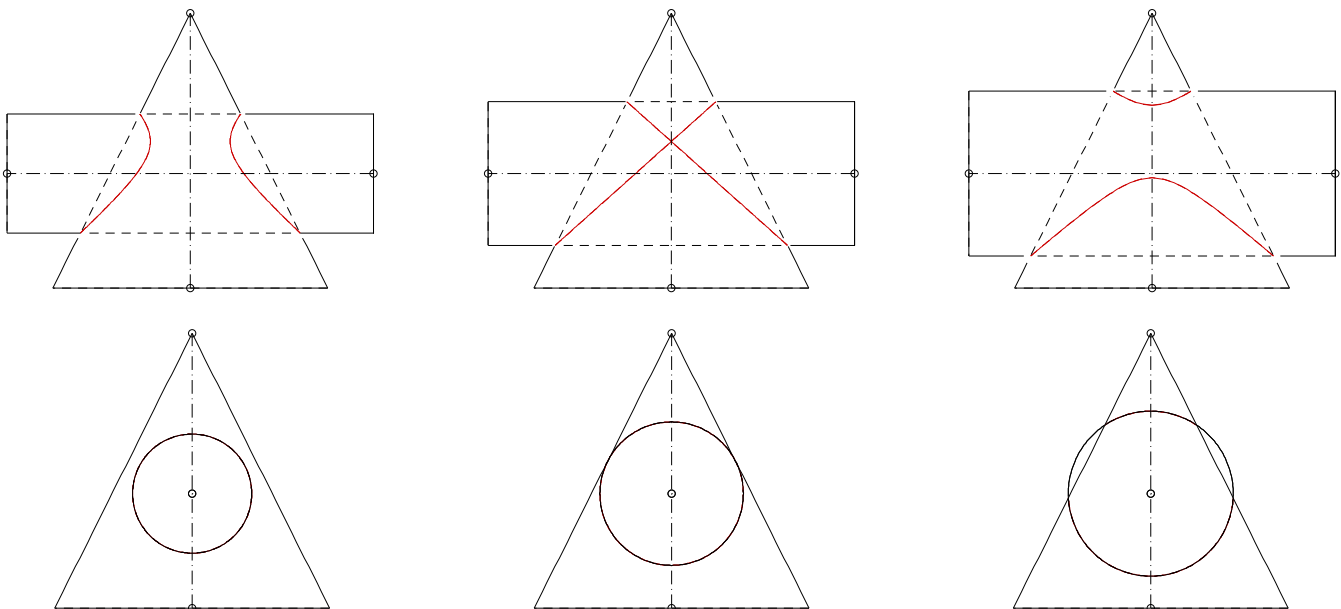


Abbildung 4.28: Veränderung der Schnittkurven von Kegel und Zylinder bei wachsendem Zylinderradius

Schneiden sich speziell zwei **Drehzylinder** oder **Drehkegel** in einem Punkt, für den beide Flächen eine gemeinsame, in diesem Punkt tangentielle Kugel besitzen, so zerfällt die Durchdringungskurve in zwei **Ellipsen**: Beispiele sind das Kreuzgewölbe, Abb. 4.29, und der in Abb. 4.28, Mitte, dargestellte Schnitt.

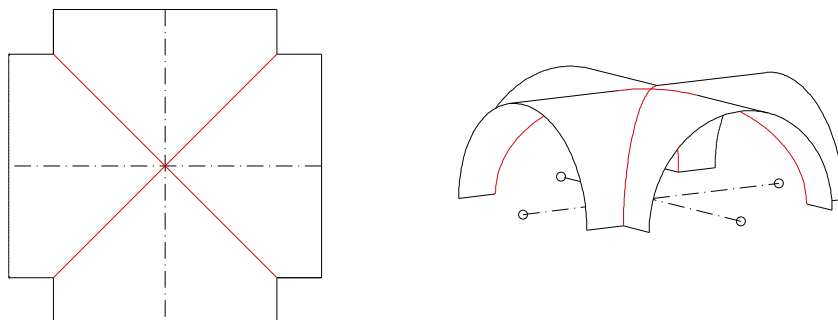


Abbildung 4.29: Kreuzgewölbe (Schnitt zweier Zylinder mit gleichen Radien und sich schneidenden Achsen)

Kapitel 5

Zentralprojektion

In diesem Abschnitt werden wir zunächst die Zentralprojektion beschreiben und verstehen. Als zweites wollen wir sehen, wie man eine Zentralprojektion aus Grund- und Aufriss gewinnen kann. In Architekturdarstellungen benutzt man gern Schatten zur Verbesserung der räumlichen Eindrucks; daher befassen wir uns mit Schatten in der Zentralprojektion in einem Abschnitt. Danach behandeln wir, wie man aus einer Zentralprojektion, z.B. einer Fotografie, sich Grund- und Aufriss beschaffen kann; diese Aufgabe nennt man auch *Rekonstruktion*. Abschließend befassen wir uns mit der Darstellung von Kurven und Umrissen in der Zentralprojektion.

5.1 Zentralprojektion als Abbildung

(s. LEO S.213)

In Kapitel 1 wurden bereits wesentliche Eigenschaften einer Zentralprojektion erwähnt und auf die wichtigsten Unterschiede zur Parallelprojektion hingewiesen. Zur Erinnerung: Räumliche Gegenstände (Punkte, Strecken, Kurven,...) werden von einem Punkt (*Zentrum oder Augpunkt*) aus auf eine Ebene projiziert, siehe Abb. 5.1. Man nennt die Zentralprojektion auch **Perspektive**, ihr Bild auch *perspektives* oder *perspektivisches* Bild. Auch eine **Fotografie** ist eine Zentralprojektion.

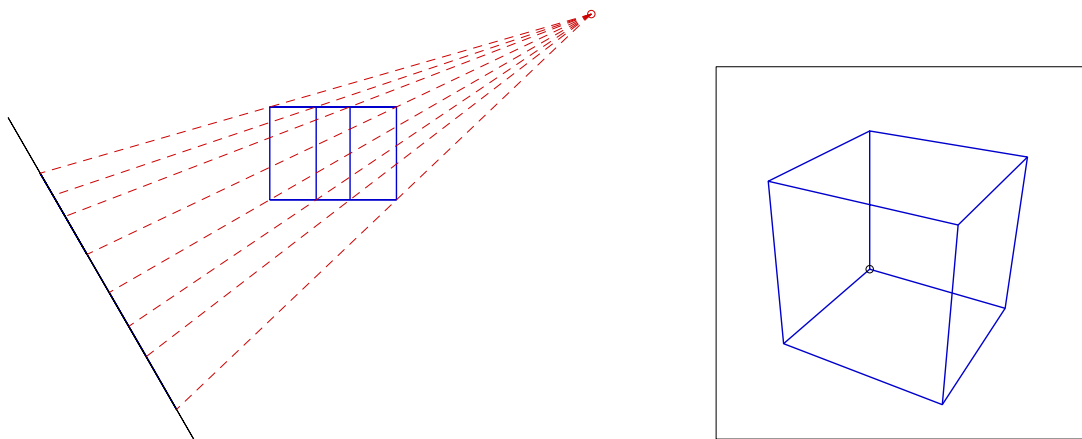


Abbildung 5.1: Quader in Zentralprojektion

Betrachtet man eine Zentralprojektion mit nur einem Auge, und zwar mit dem Auge im Zentrum, so lässt sich kein Unterschied zum Betrachten des Gegenstandes selbst feststellen. Diese Tatsache ist ein Grund für die große Bedeutung der Zentralprojektion. Beachten Sie aber, dass die Betrachtung von jedem anderen Punkt aus zu einem nicht mehr korrekten räumlichen Eindruck führt. Es gibt also für jede Fotografie nur einen einzigen idealen Betrachtungspunkt!

5.2 Bezeichnungen und Konventionen

- O : **Augpunkt**: Projektionszentrum, alle Sehstrahlen laufen durch O
 π : **Bildtafel**: Die Ebene, die das Bild enthält.
 H : **Hauptpunkt** : Fußpunkt des Lotes vom Augpunkt auf die Bildtafel.
 Bei Fotografien ist H der Mittelpunkt des des aufgenommenen Bildes.
 π_v : **Verschwindungsebene**: Ebene durch O , die parallel zur Bildtafel ist.
 d : **Distanz**: Abstand Augpunkt–Hauptpunkt oder Bildtafel–Verschwindungsebene.

Die Zentralprojektion eines Punktes P erhält man, indem man den Sehstrahl durch O mit π schneidet. Punkte in der Verschwindungsebene besitzen kein Bild, da die zugehörigen Projektionsstrahlen die Bildtafel nicht treffen. Es ist üblich, nur solche Teile von Gegenständen abzubilden, die **vor** der Verschwindungsebene liegen.

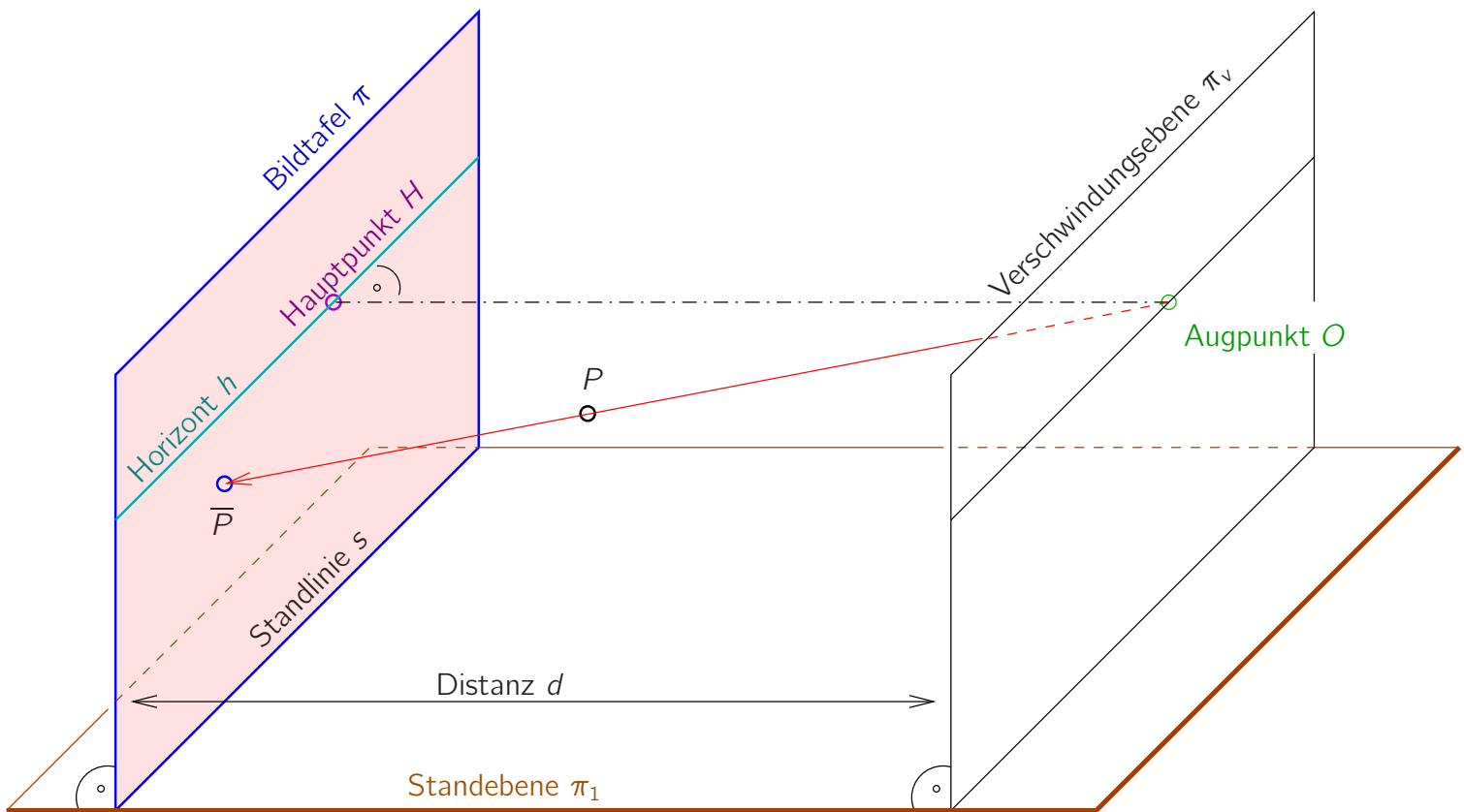


Abbildung 5.2: Definitionen zur Zentralprojektion

Die folgenden Begriffe sind sinnvoll, wenn wir eine *horizontale* Bezugsebene wie die Erdoberfläche haben. Wir nehmen in diesem Kapitel immer an, dass die Bildebene π senkrecht zu dieser Bezugsebene gewählt ist, also *vertikal* steht. Im Falle der Fotografie machen wir dann eine Aufnahme mit “gerade” gehaltener Kamera.

- π_1 : **Standebene**: Eine Ebene senkrecht zu π ,
 die die Erdoberfläche oder die Grundrissebene eines Objekts darstellt.
 s : **Standlinie**: Schnittgerade der Standebene mit der Bildtafel
 h : **Horizont**: Schnittgerade der horizontalen Ebene durch O mit der Bildtafel.
 Bei senkrechter Bildtafel geht h immer durch H .

5.3 Fluchtpunkte

Zwei **parallele Geraden** werden unter Zentralprojektion auf zwei Bildgeraden abgebildet. Die Bildgeraden sind jedoch im allgemeinen *nicht* mehr parallel, sondern schneiden sich in einem Punkt, dem **Fluchtpunkt**.

Um den Fluchtpunkt zu bestimmen, benutzen wir folgende Bezeichnung: Der Durchstoßpunkt S_g einer Geraden g mit der Bildtafel π heißt **Spurpunkt** von g . Man erhält den Fluchtpunkt F von g als Spurpunkt derjenigen zu g parallelen Geraden g_0 , die durch den Augpunkt O geht. Daher besitzen sämtliche parallele Geraden denselben Fluchtpunkt. Man sagt: *Jede Schar paralleler Geraden bestimmt einen Fluchtpunkt.*

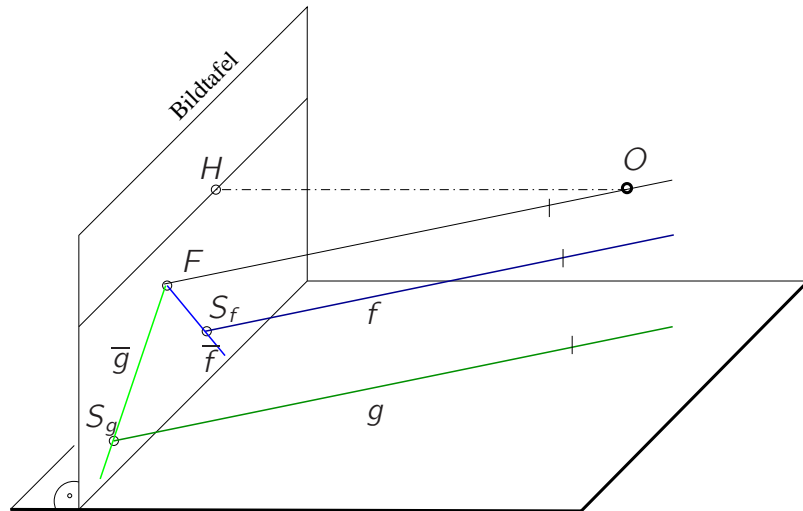


Abbildung 5.3: Flucht- und Spurpunkt paralleler Geraden

Es gibt folgende Sonderlagen von Geradenscharen:

1. Fluchtpunkte **horizontaler Geraden** liegen auf dem Horizont h .
2. Sind horizontale Geraden speziell senkrecht zur Bildtafel, so heißen sie **Tiefenlinien**. Ihr Fluchtpunkt ist der Hauptpunkt H .
3. Sind Geraden **zur Bildtafel parallel**, so sind die Bildgeraden parallel. Genau diese Geradenscharen besitzen keinen Fluchtpunkt.

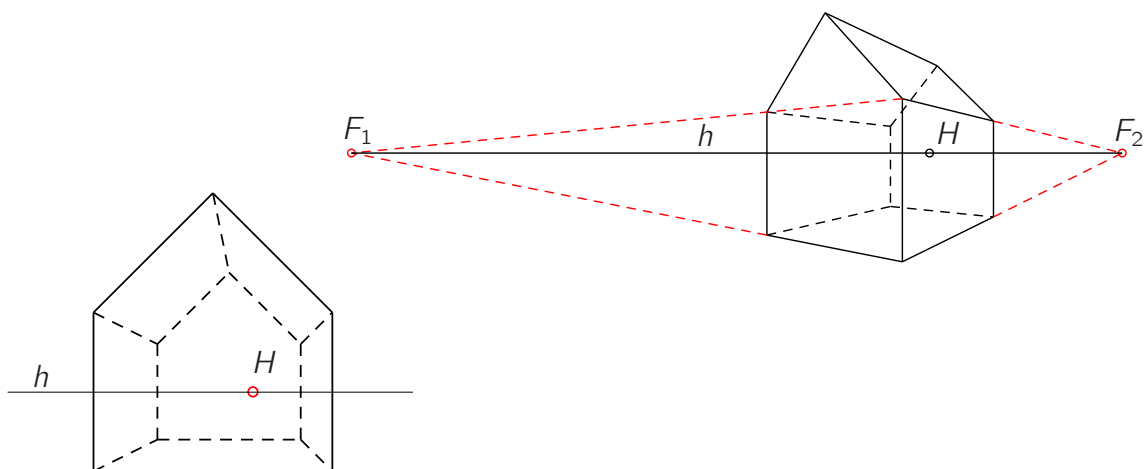


Abbildung 5.4: Fluchtpunkte eines Hauses

So wie parallele Geraden einen Fluchtpunkt bestimmen, so definieren parallele Ebenen eine *Fluchtgerade*. Beispielsweise hat die Schar horizontaler Ebenen den Horizont als Fluchtgerade.

5.4 Subjektive Aspekte der Perspektive

Wir befassen uns hier mit der Frage, wann die perspektivische Abbildung einen guten Bildeindruck erzeugt.

5.4.1 Sehkegel und -kreis

Nehmen wir an, ein perspektivisches Bild sei entstanden mit einer Distanz d . Dann liefert das Bild einen korrekten Eindruck, wenn es aus Entfernung d senkrecht über dem Hauptpunkt betrachtet wird. Alle anderen Betrachtungsorte führen nicht zum exakten räumlichen Eindruck, d.h. es entstehen Verzerrungen.

Allerdings gibt es noch weitere Beschränkungen. Das Auge sieht nur solche Dinge gut, die innerhalb eines **Sehkegels** mit halbem Öffnungswinkel $\approx 30^\circ$ liegen.

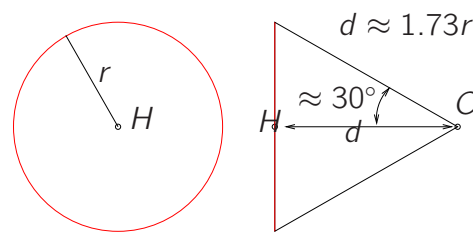


Abbildung 5.5: Sehkreis und -kegel

Auch wenn unsere Wahrnehmung recht tolerant gegenüber Abbildungsfehlern ist, hat dies folgenden Effekt:

- Die Betrachtung aus dem korrekten Abstand ist nicht möglich: Entweder ist dieser Abstand zu gering und Objekte außerhalb des Sehkreises werden nicht mehr wahrgenommen; testen Sie dies an Abb. 5.6! Oder der Abstand müßte so groß sein, dass Details nicht erkannt werden; dies ist bei Teleaufnahmen der Fall.
- Bei Betrachtung des Bildes aus dem üblichen Abstand nimmt man Verzerrungen außerhalb des Sehkegels deutlich wahr, siehe Abb. 5.6. Oder das Bild erscheint in Tiefenrichtung zu eng gestuft (Teleeffekt).

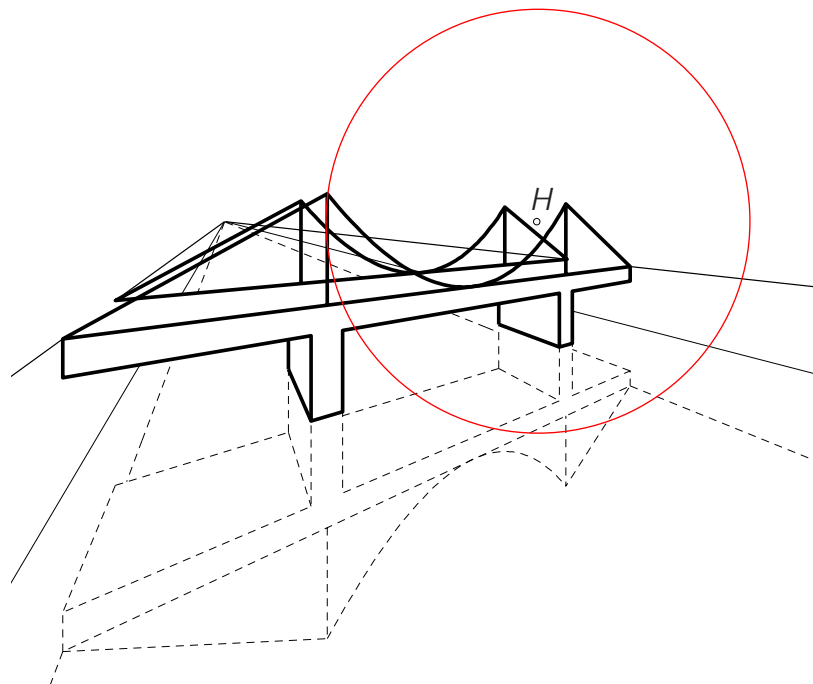


Abbildung 5.6: Zentralprojektion mit Sehkreis

Für einen korrekten räumlichen Eindruck muss also:

- das Objekt innerhalb des Sehkegels liegen, und
- die Distanz d dem gewünschten Betrachtungsabstand des Bildes entsprechen.

Benutzt man statt des perspektivischen Bildes eine Vergrößerung um einen Faktor m , so muss md dem Betrachtungsabstand des vergrößerten Bildes entsprechen.

5.4.2 Wahl von Hauptpunkt und Distanz

Wir untersuchen an einem Beispiel, wie verschiedene Wahlen von Distanz und Bildebene das perspektivische Bild beeinflussen.

Bei festem Augpunkt führt die Verschiebung der Bildtafel lediglich zu einer Vergrößerung oder Verkleinerung des perspektivischen Bildes. Diesen Effekt zeigen die oberen beiden Bilder von Abb. 5.7. Die Begründung dafür liefern ähnliche Dreiecke bzw. der Strahlensatz.

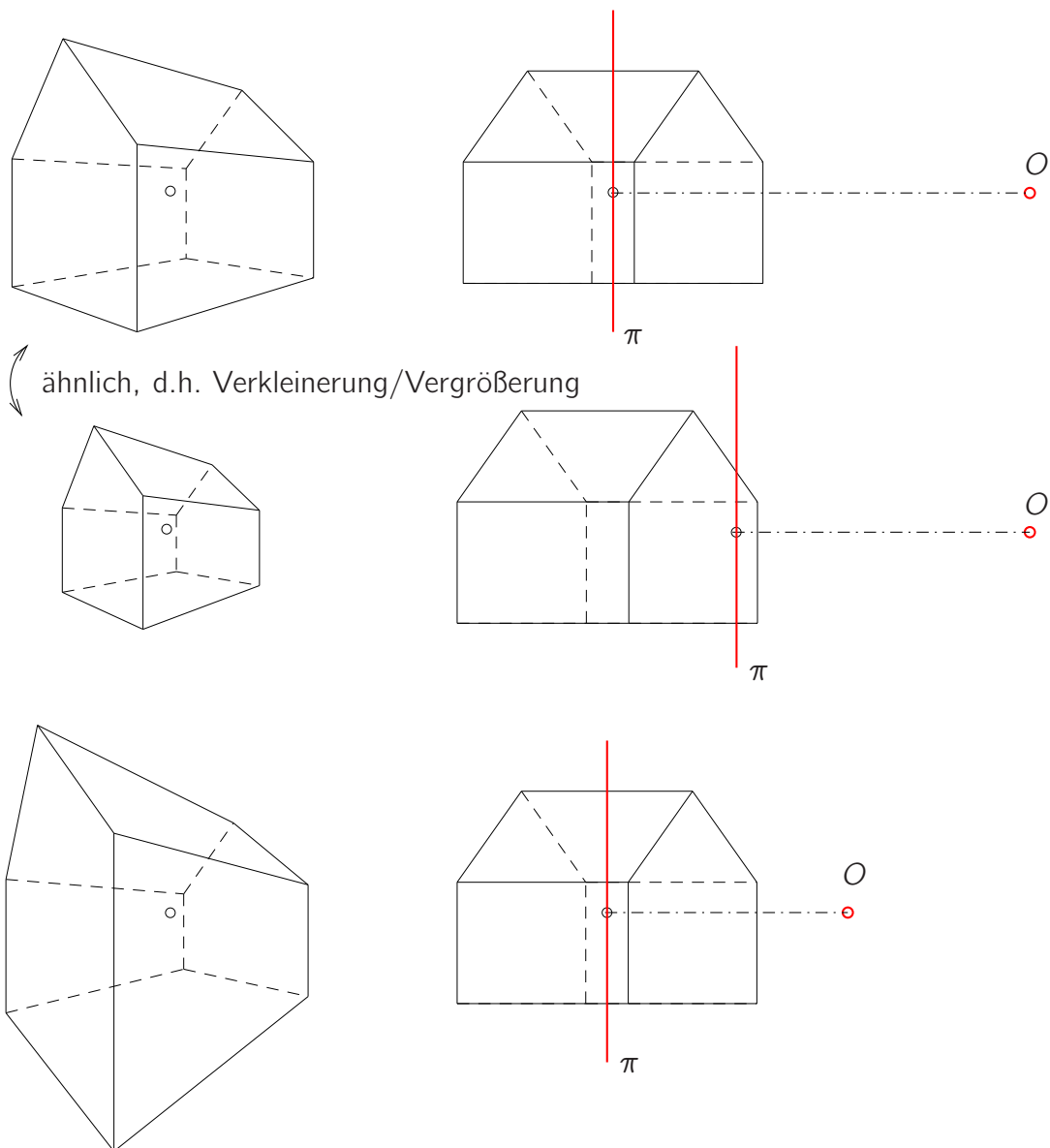


Abbildung 5.7: Wirkung der Wahl von Hauptpunkt und Distanz bei Zentralprojektion

Verschiebt man jedoch das Objekt relativ zu festem Augpunkt und Bildebene, so verändert sich neben der Größe auch die Stärke des perspektivischen Eindrucks. Kommt man dem Objekt zu nahe, so wird der Sehkegel überschritten und das Bild wirkt überrissen, wie im unteren Bild von Abb. 5.7.

In der folgenden Abbildung wird die Höhe des Augpunkts über der Standebene variiert. Diese Höhe entspricht unterschiedlichen Betrachtshöhen eines Objekts. Die im ersten Bild gezeigte Froschperspektive ist sprichwörtlich; auch eine zu große Höhe wie im zweiten Bild ist unnatürlich. Im dritten Bild wird eine schräge Zentralprojektion gezeigt, bei der die Bildtafel nicht vertikal ist. Das Ergebnis entspricht einem Luftbild.

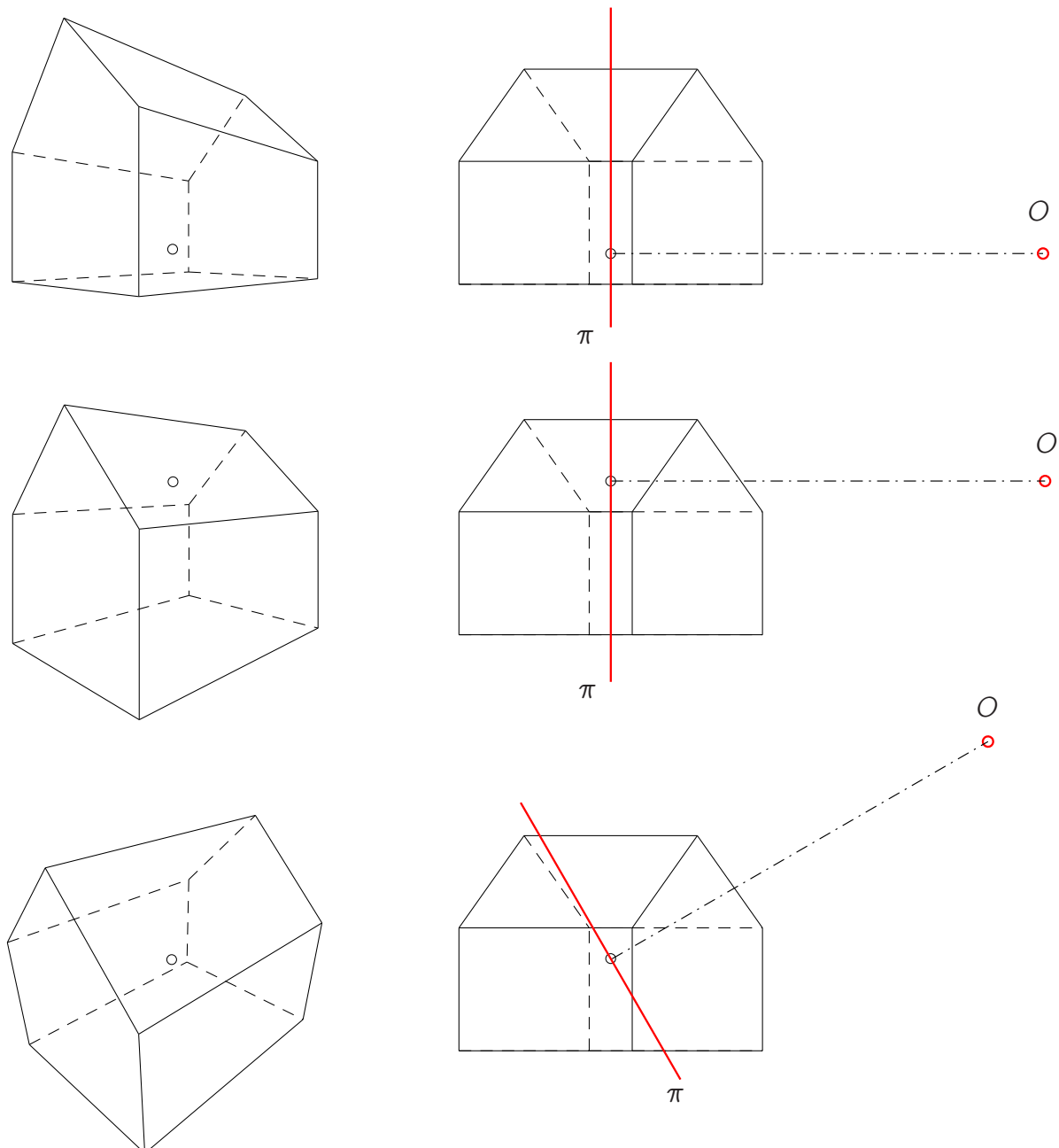


Abbildung 5.8: Wirkung der Wahl von Hauptpunkt und Distanz bei Zentralprojektion

5.5 Konstruktion perspektivischer Bilder aus Grund- und Aufriss

Üblicherweise wird diese Aufgabe in Architektenanordnung bearbeitet. Die zuerst behandelte Durchstoßpunkt-methode führt darauf hin.

5.5.1 Durchstoßpunkt-methode

Wir beschränken uns auf den Fall einer vertikalen Bildtafel π bzw. einer horizontalen Grundrissebene π_1 . Wir erinnern daran, dass der Schnitt der Bildebene mit derjenigen horizontalen Ebene, die O und H enthält, gerade der Horizont h ist. Der Horizont enthält also die Flucht-punkte aller horizontalen Geraden, und man kann ihn auch als Fluchtgerade der horizontalen Ebenen verstehen.

- Vorgabe : a) Bildtafel π und der Augpunkt O in Grund- und Aufriss.
 b) Objekt in Grund- und Aufriss.
 Gesucht : Das perspektive Bild des Objekts.

Verfahren:

(s. LEO S.217)

- (0) Bestimmung des **Hauptpunktes** H (Lot von O' auf π') und des **Horizonts** h (Höhenlinie durch O in π) in Grund- und Aufriss. Festlegung der Zeichenfläche durch Wahl des Horizonts h und des Hauptpunktes $H \in h$.
- (1) Abbildung eines **Punktes** P als Durchstoßpunkt:
 (a) Zeichnen des Projektionsstrahls p durch O und P in Grund- und Aufriss.
 (b) Bestimmung des Schnittpunktes $\bar{P} = p \cap \pi$ (perspektivischer Bildpunkt) in Grund- und Aufriss.
 (c) Zeichnen des Bildpunktes \bar{P} :
 • Der horizontale Abstand eines Bildpunktes zu H wird dem Grundriss entnommen,
 • der vertikale Abstand zum Horizont h dem Aufriss.
 Liegt speziell P in der Bildebene, also $P = \bar{P}$, kann man den vertikalen Abstand direkt aus dem Aufriss ablesen.
- (2) Abbildung einer **Geraden** g :
 (a) Man bestimmt den Fluchtpunkt $F'_g \in \pi'$ der Geraden g im Grundriss (F'_g ist der Spurpunkt der zu g parallelen Geraden durch O).
 (b) Durch Übertragen des horizontalen Abstands gewinnt man $\bar{F}_g \in h$.
 (c) Hat man bereits das perspektivische Bild \bar{P} eines Punktes $P \in g$ konstruiert, so erhält man \bar{g} als Verbindungsgerade von \bar{F}_g und \bar{P} .
 Hat man noch keinen Punkt auf g konstruiert, so wählt man statt P z.B. den Spurpunkt S_g .
- (3) Abbildung eines **Punktes** P als Geradenschnittpunkt:
 Man bestimmt das Bild \bar{P} als Schnitt zweier "leicht" zu zeichnenden **Hilfsgeraden**.
 Als Hilfsgeraden eignen sich besonders:
 (a) Geraden, deren Fluchtpunkte schon bekannt sind.
 (b) Tiefenlinien (ihre Bilder gehen durch H),
 (c) Zur Bildebene π parallele Geraden (ihre Bilder stehen senkrecht auf h).

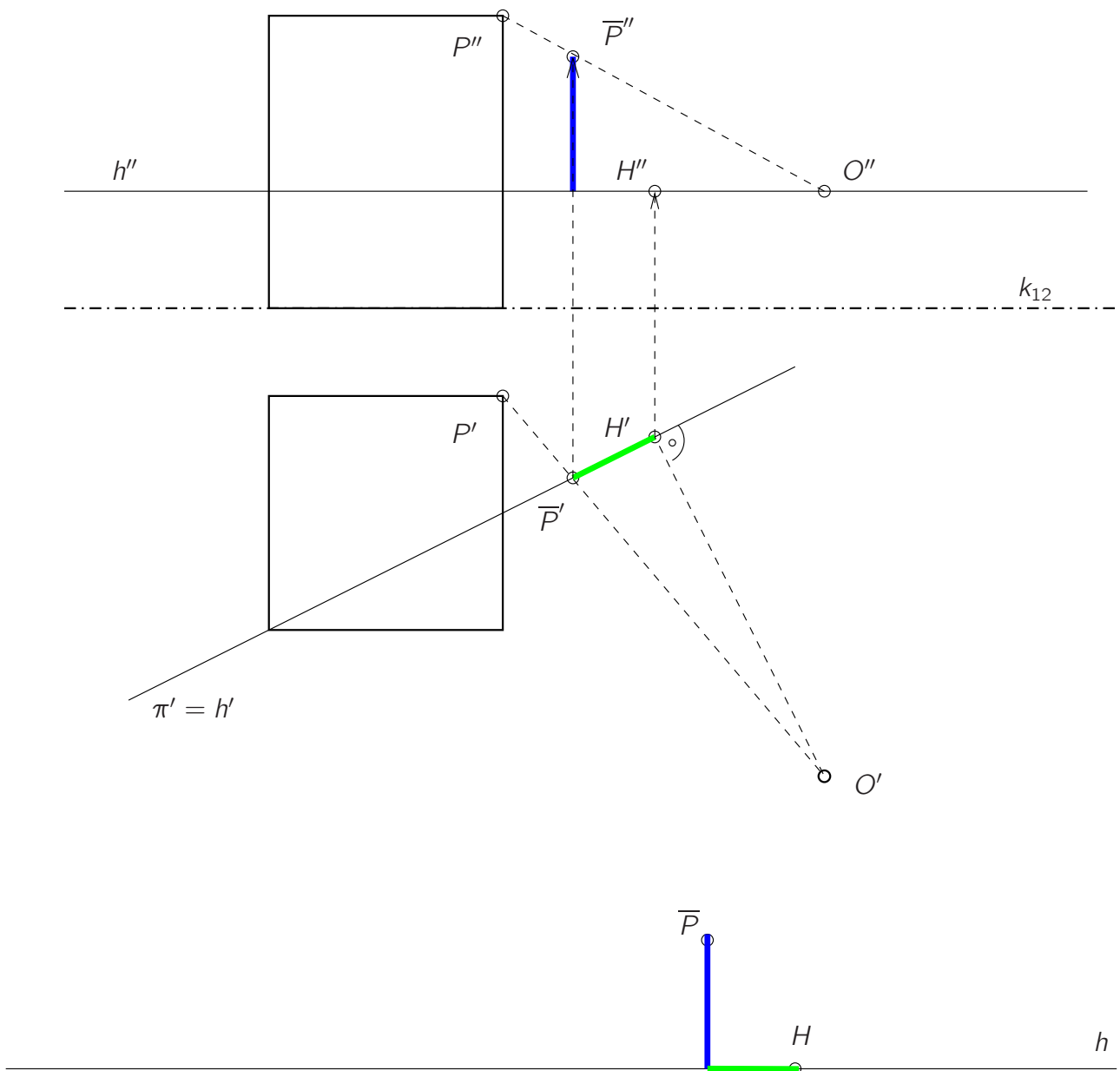


Abbildung 5.9: Zentralprojektion eines Quaders mit der Durchstoßpunktmethod

5.5.2 Architektenanordnung

(s. LEO S.221)

Um das Übertragen der in Grund- und Aufriss konstruierten Punkte in das perspektive Bild zu erleichtern, wird gern die Architektenanordnung gewählt:

1. Der **Grundriss** wird so gedreht, dass der Horizont h parallel zu π' liegt. Dann wird er so verschoben, dass er unter- oder oberhalb des perspektiven Bild liegt, mit dem Augpunkt H auf der Geraden $\overline{O'H'}$.
2. Der **Aufriss** wird so neben das perspektive Bild gelegt, dass h'' mit h übereinstimmt.

Das perspektive Bild eines Punktes liegt dann auf dem Lot zu π' ("Ordner") im Grundriss des Bildpunktes. Die Höhe eines Spurpunktes über dem Horizont h kann dann direkt aus dem Aufriss in das perspektive Bild übertragen werden.

Aufgabe 5.1 Zeichne ein perspektives Bild eines Quaders in Architektenanordnung.

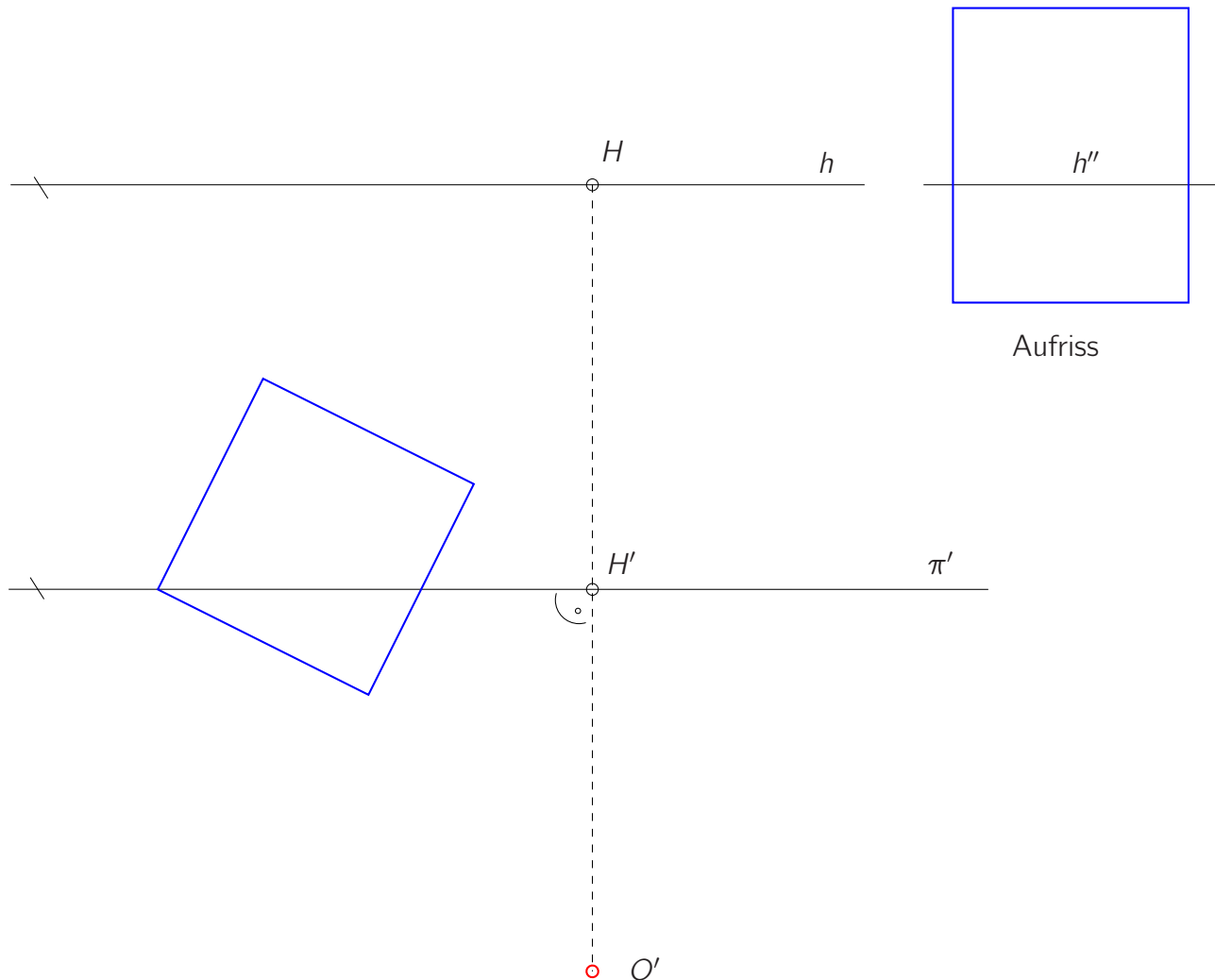


Abbildung 5.10: Zentralprojektion eines Quaders in Architektenanordnung

Aufgabe 5.2 Zeichne ein perspektives Bild eines Hauses mit Fahnenstange a in Architektenanordnung. Verwende Tiefenlinien zur Konstruktion der Fahnenstange.

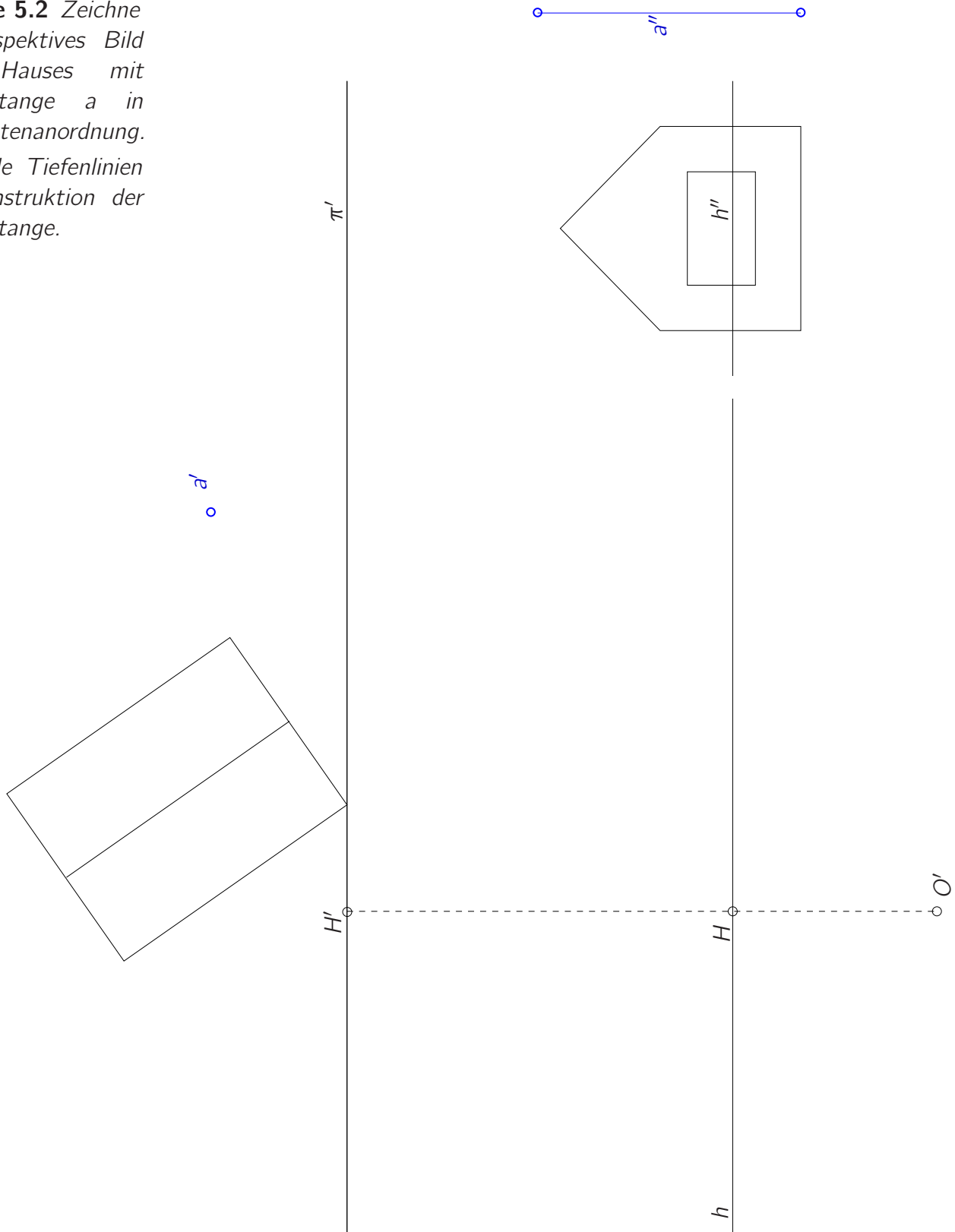


Abbildung 5.11: Zentralprojektion eines Hauses in Architektenanordnung

5.6 Rekonstruktion von Grund- und Aufriss

In Umkehrung der Architektenanordnung kann man aus einer Perspektive auch Grund- und Aufriss gewinnen. Allerdings muss zuerst die Lage der Bildtafel und des Augpunktes bestimmt werden. Daher spricht man bei dieser Aufgabe auch davon, die **äußere Orientierung** einer Zentralprojektion zu bestimmen.

Der Maßstab eines Objekts ist aus einer Perspektive nicht ablesbar. Im folgenden werden zwei zusätzliche Informationen genutzt: Erstens wird eine Standlinie im perspektivischen Bild als gegeben angenommen. Zweitens nehmen wir an, dass das Objekt einen rechtwinkligen Grundriss besitzt.

Durchführung:

1. Zeichne unter- oder oberhalb des perspektivischen Bildes eine Parallele π' zum Horizont h . Betrachte π' als Grundriss der **Bildtafel** bei Architektenanordnung.
2. Übertrage den **Hauptpunkt** H und **Fluchtpunkte** in den Grundriss. Bestimme daraus den Augpunkt O' (und damit die Distanz d):
 - O' liegt auf dem Lot zu π' durch H' .
 - Ist das Objekt rechtwinklig mit entsprechenden Fluchtpunkten F_1, F_2 , so liegt O' auch auf einem **Thaleskreis** unterhalb von π' , dessen Endpunkte F'_1, F'_2 sind.
3. Rekonstruktion des *Grundrisses* P' eines *Punktes* P in Umkehrung der Architektenanordnung:
 - Liegt P in der Standebene, so liegt P' im Schnitt von π' mit einem Ordner durch P .
 - Bei P in allgemeiner Lage übertrage zuerst P auf π' und zeichne dann den Projektionsstrahl von O' durch diesen Punkt. Auf diesem Strahl befindet sich P' .
 - Liegt P auf einer *Geraden* g mit Fluchtpunkt F , so liegt P' auf einer Geraden g' parallel zu $O'F'$. Der Spurpunkt S_g oder jeder andere bekannte Punkt auf g bestimmt die Gerade eindeutig.
4. Den *Aufriss* erhält man aus bekannter Standlinie durch Abtragen von "wahren Höhen" und Übernahme von Längen aus dem Grundriss.

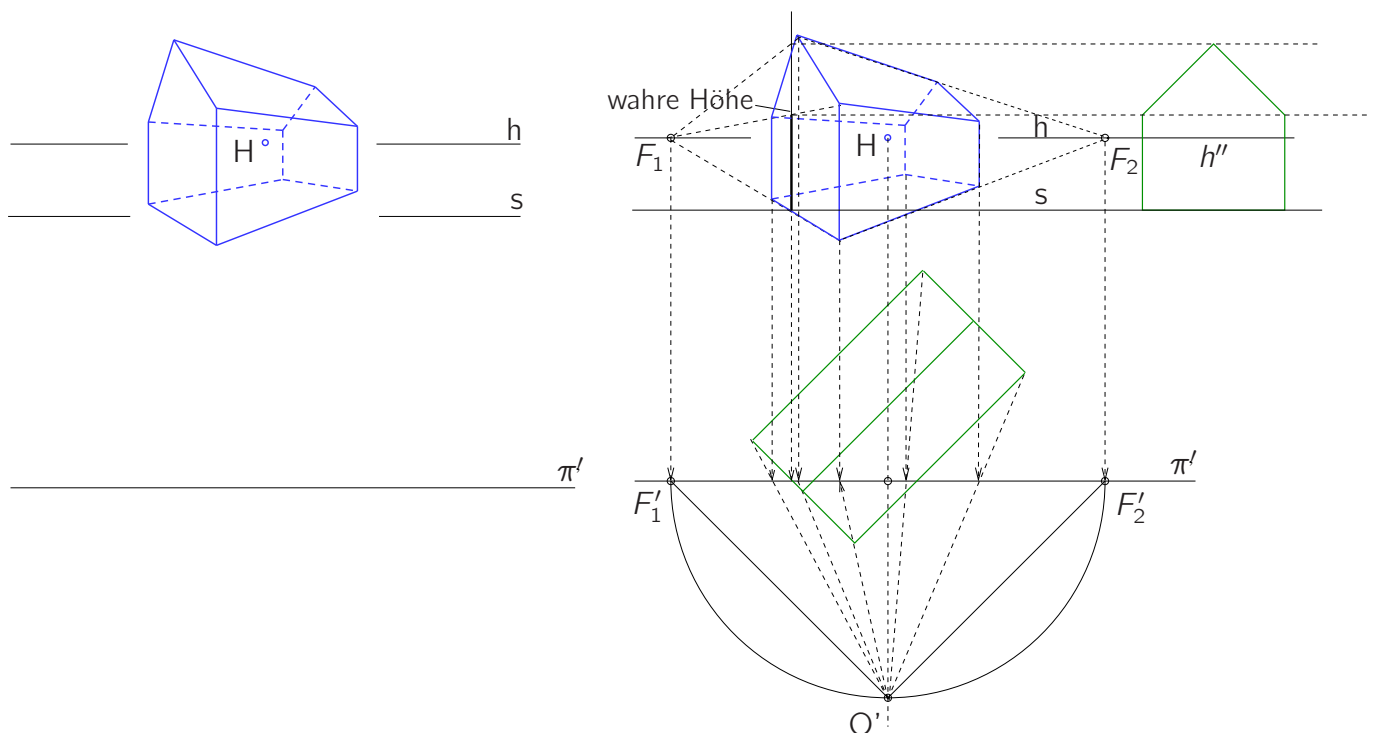


Abbildung 5.12: Rekonstruktion von Grund- und Aufriss mittels Thaleskreis über Fluchtpunkten

Aufgabe 5.3 Gegeben ein Haus mit rechtwinkeligem Grundriss, sowie Hauptpunkt und Standlinie.

a) Rekonstruiere den Grundriss, eventuell auch den Aufriss der Giebelseite.

b) Füge der Perspektive einen Anbau mit Grundfläche $2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ hinzu, und zwar im hinteren Teil der sichtbaren Traufseite; die Höhe soll der Traufhöhe des Hauses entsprechen.

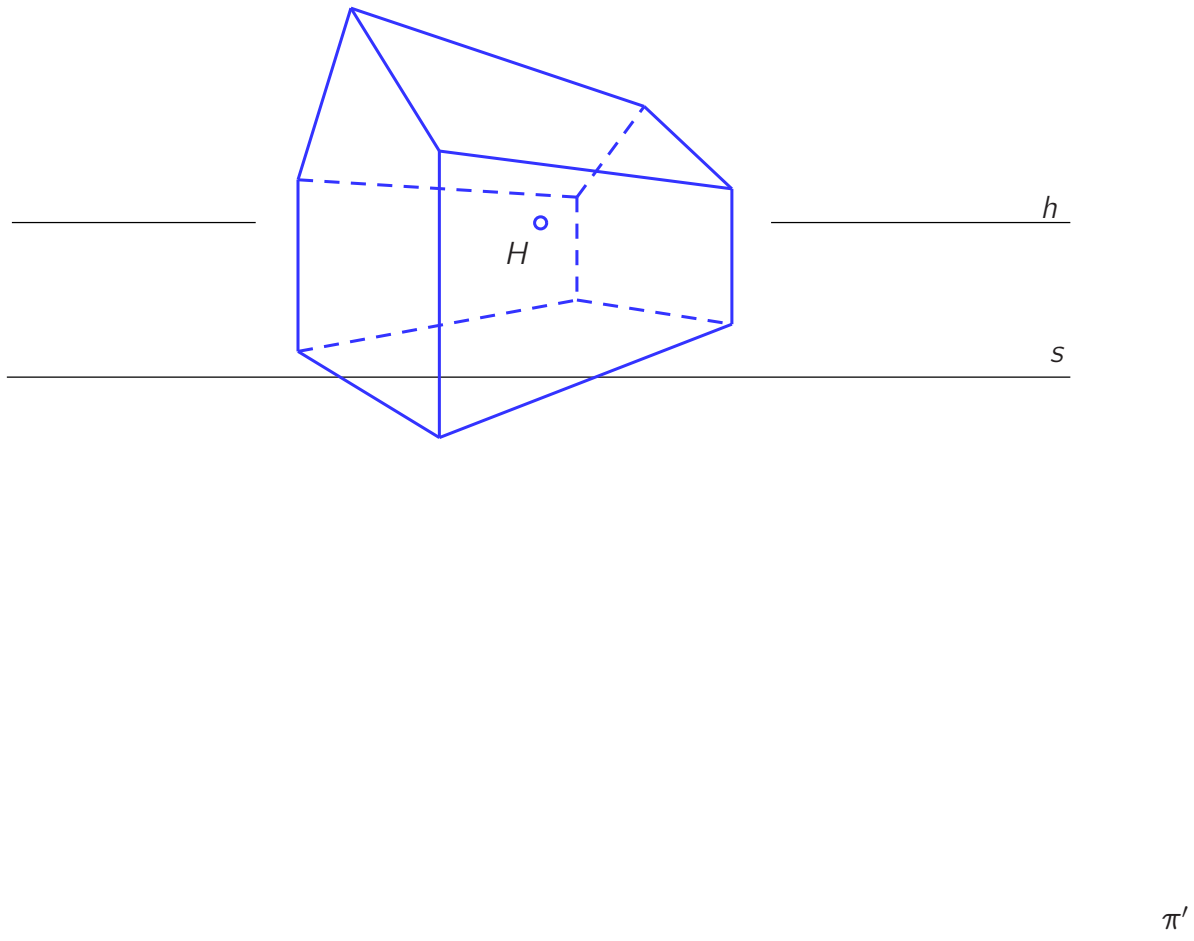


Abbildung 5.13: Rekonstruktion von Grund- und Aufriss eines Hauses

Rekonstruktion einer Frontalperspektive

Wir wollen den Grundriss des in Abb. 5.14 in Frontalperspektive dargestellten *U*-förmigen Gebäudes bestimmen. Dabei nehmen wir wieder an, dass das Gebäude nur rechte Winkel besitzt. Die Rekonstruktion kann natürlich nur bis auf den Maßstab möglich sein; tatsächlich benötigt man sogar zwei Maße, die nicht aus dem Bild ablesbar sind.

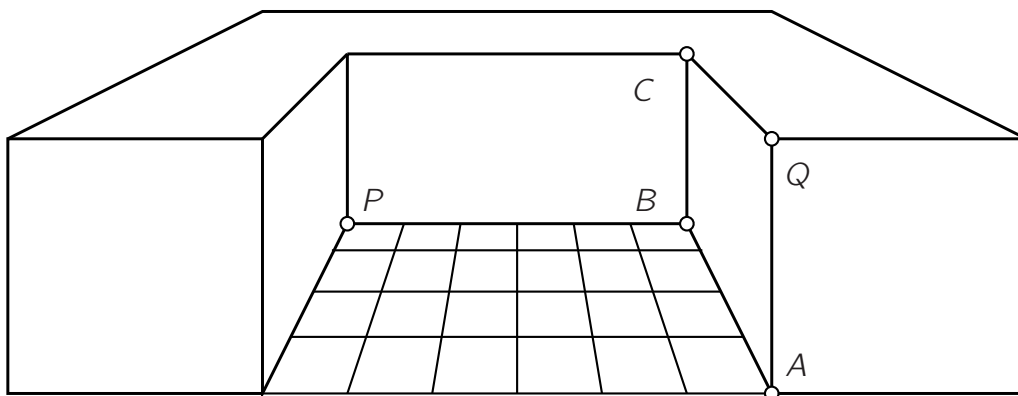
 π'

Abbildung 5.14: Rekonstruktion des Grundrisses aus einer Frontalperspektive

Bei einer Frontalperspektive ist der Hauptpunkt der Fluchtpunkt. Die Distanz, also der Abstand des Augpunkts von der Bildebene π , ist damit aber noch nicht bestimmt. Dies bedeutet, dass wir das *Verhältnis von Tiefen zu Breiten* aus einer Frontalperspektive nicht ablesen können. Beispielsweise geht aus Abb. 5.14 das Seitenverhältnis des Innenhofes nicht hervor. Kennt man dieses aber, so kann man den Grundriss bis auf Maßstab rekonstruieren.

Oftmals enthält ein Foto Objekte, deren Seitenverhältnis man kennt: In Abb. 5.14 weiß man vielleicht, dass die im Innenhof angedeuteten Platten quadratisch sind; in anderen Fällen sieht man möglicherweise liegende Kreise, aus denen man ebenfalls ein Seitenverhältnis ablesen kann. Wir können dann wie im Fall von zwei Fluchtpunkten vorgehen:

Durchführung:

1. Der Hauptpunkt H ist der Fluchtpunkt der Tiefenlinien, der Horizont h geht parallel zu den Bildebenenparallelen Objektkanten durch H .
2. Scharen von Diagonalen der Platten sind parallel. Die Fluchtpunkte der Diagonalen $D_1, D_2 \in \pi$ nennt man **Distanzpunkte**. Wir tragen auf π' die Punkte D_1', D_2', H' ab. Weil wir annehmen, dass die Diagonalen aufeinander rechtwinklig stehen, können wir O' wieder im Thaleskreis durch D_1', D_2' konstruieren. (Genausogut könnten wir O' als Schnitt der beiden Fluchtpunktgeraden durch D_1', D_2' bestimmen, die π' im Winkel 45° schneiden.)
3. Wir konstruieren den Grundriss in Umkehrung des Architektenverfahrens:
Der Maßstab bestimmt sich, indem wir einen ersten Punkt festlegen, z.B. können wir verlangen, dass die Standlinie durch P geht, so dass $P' \in \pi'$. Die verbleibenden Punkte finden wir dann im Schnitt ihrer Sehstrahlen mit solchen Geraden durch bereits konstruierte Punkte, die parallel oder senkrecht zu π' sind.

Wie würden wir vorgehen, wenn die Platten ein anderes Seitenverhältnis haben? Wenn sich die Diagonalen im Winkel α schneiden, so müßten wir O' so bestimmen, dass von O' aus gesehen die beiden Distanzpunkte den Winkel α einschließen.

Als Maaufgabe wollen wir nun noch aus einem bekannten Grundriss-Maßstab die Länge der Strecke \overline{PQ} bestimmen. Beispielsweise sei der Maßstab so, dass die Platten 2 m Kantenlänge haben. Wir zerlegen \overline{PQ} in drei achsenparallele Strecken und berechnen mit dem Satz des Pythagoras

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{|\overline{PB}|^2 + |\overline{BA}|^2 + |\overline{AQ}|^2} m = \sqrt{12^2 + 8^2 + 6^2} m = \sqrt{144 + 64 + 36} m = \sqrt{244} m \approx 15,6 m.$$

Dabei haben wir für die vertikale Länge $|\overline{AQ}| = |\overline{BC}|$ ausgenutzt. Die Strecke $\overline{BC} \subset \pi$ erscheint in der Perspektive in wahrer Länge, und ist dort halb so lang ist wie $|\overline{PC}|$. Entsprechend kann man wahre Längen auch im allgemeinen mit Hilfe einer Projektion nach π ermitteln.

Die Bezeichnung **Frontalperspektive** bezieht sich auf eine Perspektive, bei der rechtwinklige Objekte mit nur einem Fluchtpunkt abgebildet werden. Dieser Fluchtpunkt ist der Hauptpunkt, und die in ihn laufenden Objektlinien sind Tiefenlinien. Wegen der Rechtwinkeligkeit sind alle anderen Objektlinien parallel zur Bildebene. Im Gegensatz dazu wird eine Perspektive mit zwei Fluchtpunkten auch als **Perspektive über Eck** bezeichnet. Eine Objektlage ganz ohne Bildebenenparallele Geraden, bzw. eine relativ zum Objekt geneigte Bildebene, die wir in dieser Vorlesung nicht behandeln, führt zu einer **3-Punkt-Perspektive**. Die genannten Perspektivtypen lassen sich nur dann unterscheiden, wenn das dargestellte Objekt drei Scharen von aufeinander senkrechten Geraden besitzt.

5.7 Schatten

(s. LEO S.237)

Wie im Falle der Parallelprojektion unterscheiden wir wieder die Fälle parallelen und zentralen Lichts. Allerdings verhalten sich perspektivische Bilder der Schattenwürfe bei beiden Beleuchtungstypen recht ähnlich.

5.7.1 Parallelbeleuchtung

Die parallelen Lichtstrahlen besitzen in der Perspektive einen gemeinsamen Fluchtpunkt S , und zwar den Durchstoßpunkt des durch den Augpunkt laufenden Lichtstrahls mit der Bildebene. Wir unterscheiden Fälle:

- Bei **Gegenlicht** kommen die Lichtstrahlen von jenseits (hinter) der Bildebene und reichen bis zur Verschwindungsebene. Wir stellen uns dabei wieder vor, dass die Lichtquelle unendlich weit entfernt ist, so wie in guter Näherung die Sonne. Im perspektivischen Bild gehen die Lichtstrahlen dann *vom Fluchtpunkt S aus* in Richtung der Objekte (S ist "Sonnenpunkt"). Dabei liegt S normalerweise *oberhalb des Horizonts* denn nur abwärts gerichtete Lichtstrahlen können Standebene und die Objekte darauf erreichen.
- Bei **Rückenlicht** kommen die Lichtstrahlen von hinter der Verschwindungsebene, also aus dem in der Perspektive üblicherweise nicht abgebildeten Teil des Raums. Nun laufen die Lichtstrahlen alle *zum Fluchtpunkt S hin*. Dabei laufen sie wiederum abwärts, was bedeutet, dass der Fluchtpunkt S nun *unterhalb des Horizonts* liegen muss.

Auf den seltenen Grenzfall von **Seitenlicht**, bei dem die Lichtstrahlen genau parallel zur Bildebene verlaufen und keinen Fluchtpunkt besitzen, wollen wir hier nicht eingehen.

Gegeben in Grund- und Aufriss: Lichtrichtung l

Gesucht, im perspektivischen Bild: Fluchtpunkt S der Lichtstrahlen und der Fluchtpunkt $S_F \in h$ der (horizontalen) Projektionen der Lichtstrahlen in die Standebene π_1 ; es ist $S' = S'_F$.

1. Konstruiere zuerst im Grundriss S' als Durchstoßpunkt, daraus im Aufriss S'' .
Durch Übertragen der Abstände zum Hauptpunkt H konstruiert man den Fluchtpunkt S .
2. Die Projektion $S_F \in h$ liegt in einem Ordner durch S , senkrecht zu h .

Zur Konstruktion des Schattenwurfs geht man genauso wie bei Parallelprojektion vor:

Gegeben in der Perspektive: S , S_F , und ein Punkt P .

Gesucht: Der Schattenwurf \overline{P} von P .

1. \overline{P} ist der Schnitt der Geraden SP (Lichtstrahl) mit seiner Grundrissprojektion $l' = S_F P'$ (l' enthält den Schattenwurf von $P'P$ auf die Standebene).
2. Konstruiert man mehrere Punkte, so kann man ausnutzen:
 - Der Schattenwurf verschiedener *vertikaler* Geraden besteht aus parallelen Geraden in der Standebene π_1 . Die perspektivischen Bilder der Geraden haben daher alle den Fluchtpunkt $S_F \in h$.
 - Eine *horizontale* Gerade g und ihr Schattenwurf $g' \in \pi_1$ sind parallel. Daher haben die beiden perspektivischen Bilder denselben Fluchtpunkt.

Unter dem *Schattenwurf* eines Objekts wollen wir, wie in den bisherigen Schattenkonstruktionen auch, die Konstruktion der folgenden Dinge verstehen:

- **Schlagschatten**: auf die Grundrissebene oder andere Objekte geworfener Schatten
- **Eigenschatten**: Seiten des Objekts, die im vom Objekt geworfenen Schatten liegen.
- **Schattengrenze**: Grenzlinie am Objekt, die beleuchtete Teilflächen von beschatteten trennt (besteht bei Objekten mit ebenen Seiten nur aus Objektkanten).

Aufgabe 5.4 Konstruiere den Schattenwurf eines Hauses auf die Standebene bei Gegenlicht in Richtung I .
Tipp: Die Schattengrenze ist aus dem Grundriss ablesbar.

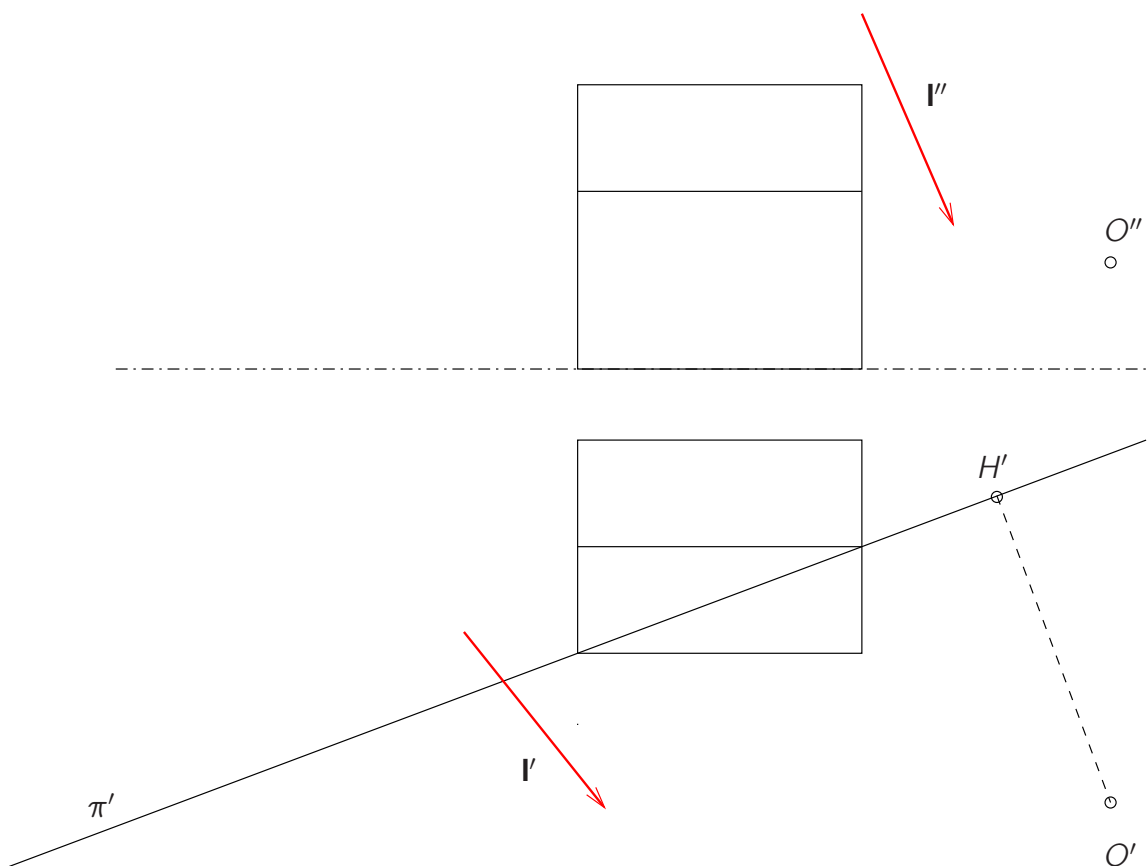
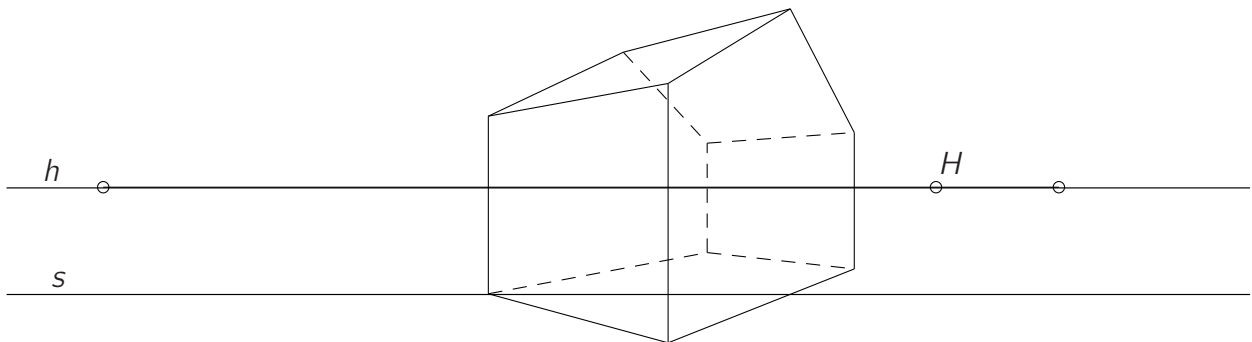


Abbildung 5.15: Schatten eines Hauses bei Gegenlicht: Grund- und Aufriss sowie Perspektive

Aufgabe 5.5 Paralleles Licht ist durch S und S_F gegeben. Konstruiere die sichtbaren Teile des Schlagschattens einer Tafel (Rechteck) auf Haus und Standebene. Tipp: Der Schatten von P ergibt sich als Durchstoßpunkt D des Lichtstrahls PS mit der Dachebene. Zur Konstruktion betrachte eine geeignete vertikale Hilfsebene

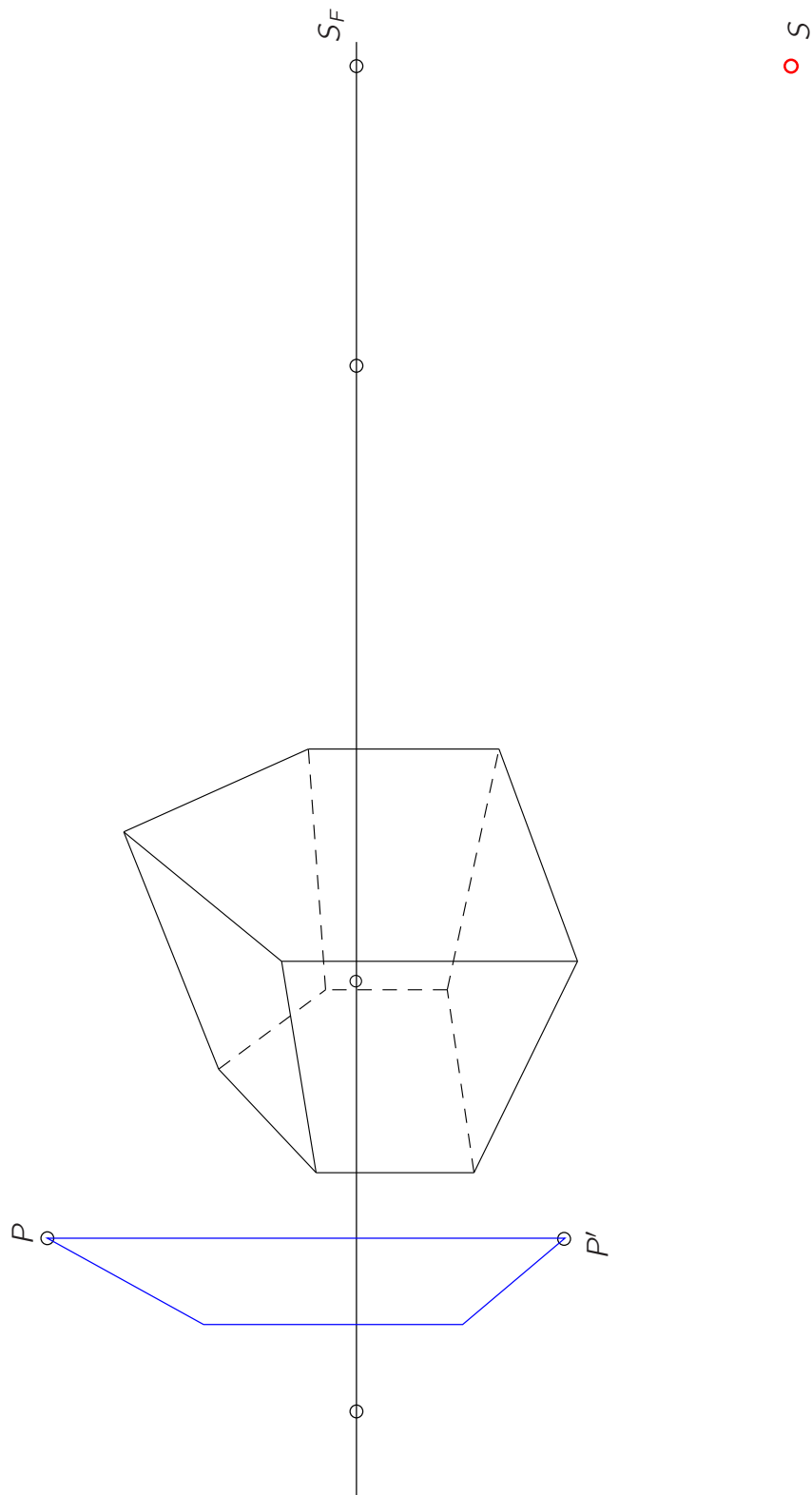


Abbildung 5.16: Schattenwurf einer vertikalen Tafel auf ein Haus bei Rückenlicht

5.7.2 Zentralbeleuchtung

Gegeben eine Lichtquelle L und ihre Grundrissprojektion $L' \in \pi_1$, erhält man den Schatten $\bar{P} \in \pi_1$ von P als Schnitt der Geraden LP und $L'P'$, D.h. L und L' übernehmen nun die Rolle von S und S_F .

Aufgabe 5.6 *Konstruiere L in der Perspektive sowie den Schattenwurf des Hauses unter zentralem Licht von L .*

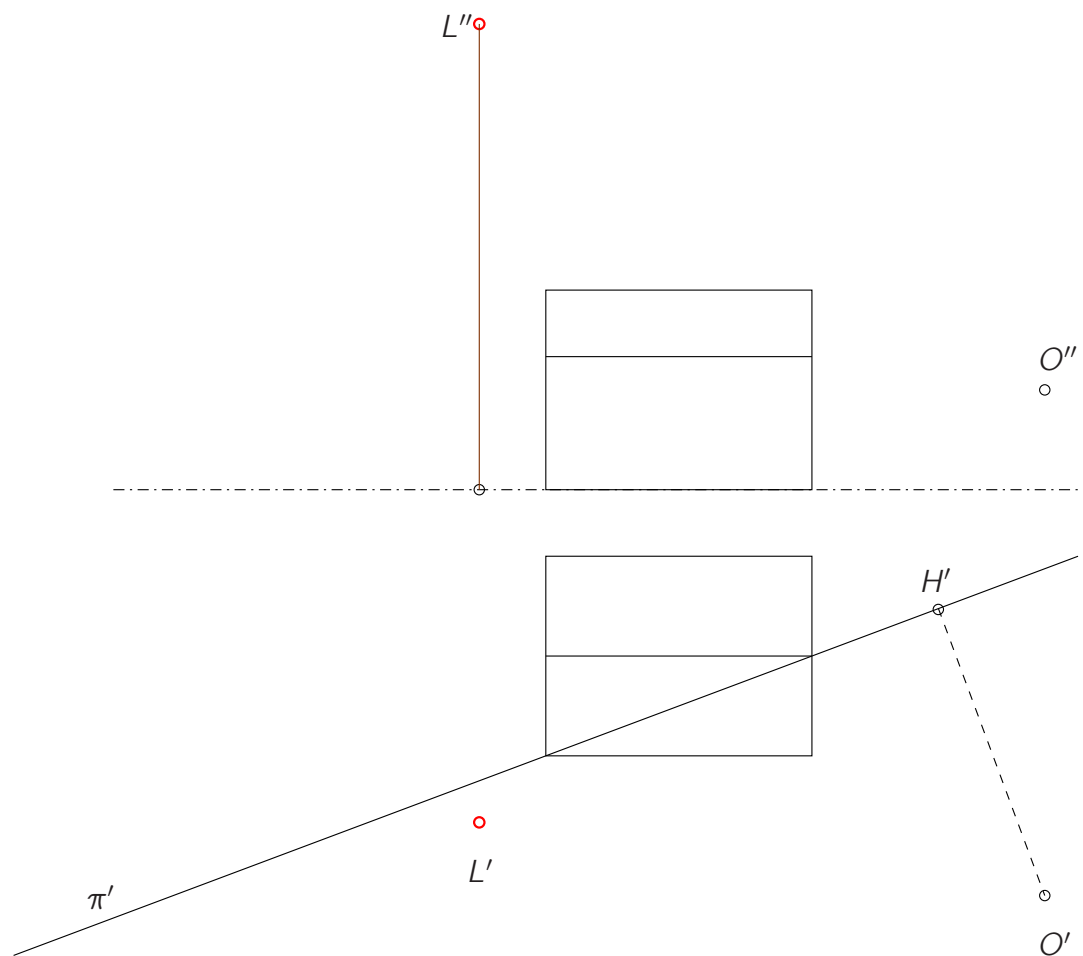
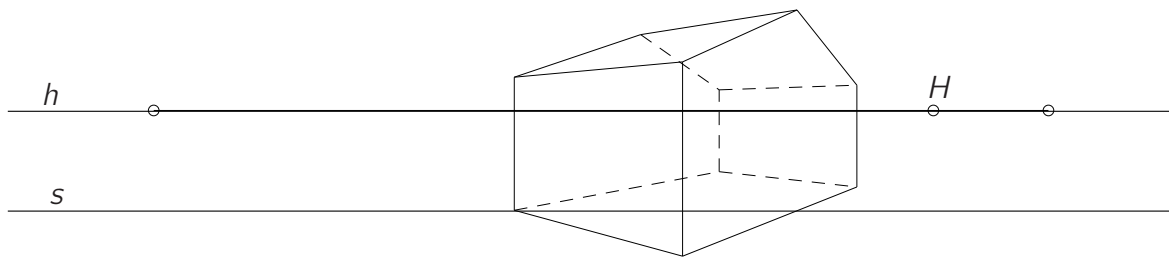


Abbildung 5.17: Schatten eines Hauses bei zentralem Licht: Grund- und Aufriss sowie Perspektive

5.8 Zentralprojektion von Kurven und Flächen

Punkte und Tangenten

Gegeben: Kurve Γ in Grund- und Aufriss.

Gesucht: das perspektivische Bild von Γ .

Durchführung:

Wir bestimmen die perspektivischen Bilder einiger Punkte P_1, P_2, \dots und, soweit möglich, auch die Bilder der Tangenten in diesen Punkten. Bei genügend vielen Punkten und Tangenten kann man das perspektivische Bild der Kurve in guter Näherung zeichnen.

Aufgabe 5.7 Zeichne die Projektion einer Kurve in der Standebene (Fig. 5.18) .

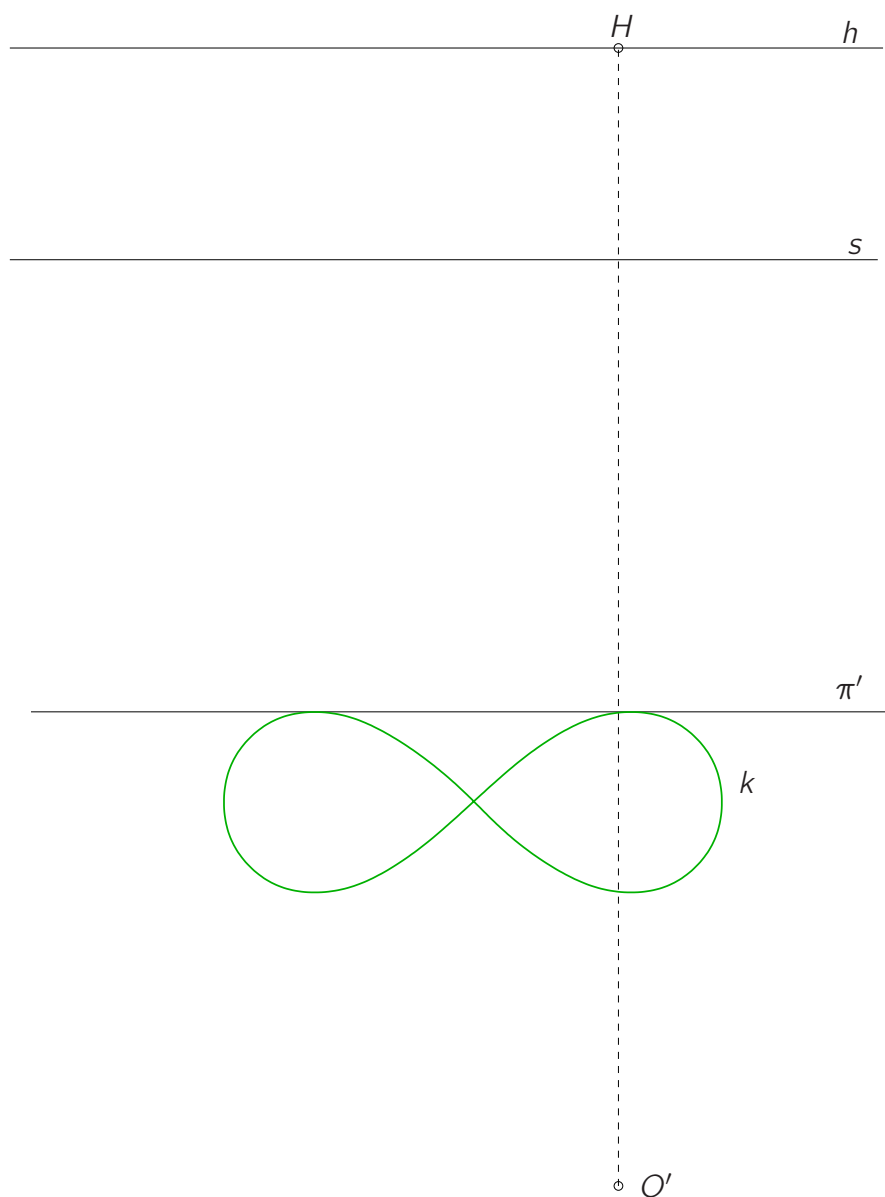


Abbildung 5.18: Zentralprojektion einer Kurve: Beispiel

Zentralprojektion einer Kugel

Man ist es gewohnt, den Umriss einer Kugel als Kreis zu sehen. Erstaunlicherweise stimmt dieser Eindruck nicht, siehe Abb. 5.19! Wir wollen überlegen, warum das so ist.

Der Schattenwurf einer Kugel im Raum ist ein Kreiskegel mit Spitze O und Achse durch den Kugelmittelpunkt. Dabei berührt der Kegelmantel die Kugel in einem Kreis (kein Großkreis). Der Schattenwurf auf eine Ebene π ist damit ein Kegelschnitt:

- Wenn Kugelmittelpunkt und Kegelachse auf dem Hauptsehstrahl liegen (und nur dann), schneidet der Kegel die Bildebene in einem *Kreis*.
- Wenn die Kugel ganz auf einer Seite der Verschwindungsebene liegt, projizieren sämtliche Umrisspunkte und man erhält eine *Ellipse*.
- Berührt die Kugel gerade die Verschwindungsebene, so projiziert ihr Umriss auf eine *Parabel*;
- liegt die Kugel beiderseits der Verschwindungsebene, so projiziert ihr Umriss auf eine *Hyperbel*.

Wie erscheint also der Erdhorizont von einem erhöhten Punkt aus gesehen?

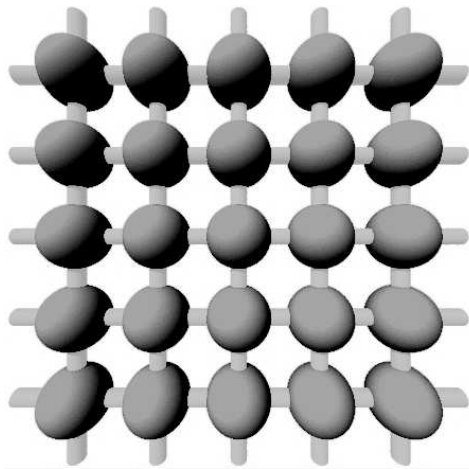


Abbildung 5.19: Perspektivisches Bild von Kugeln. Nur der Umriss der mittleren Kugel ist ein Kreis.

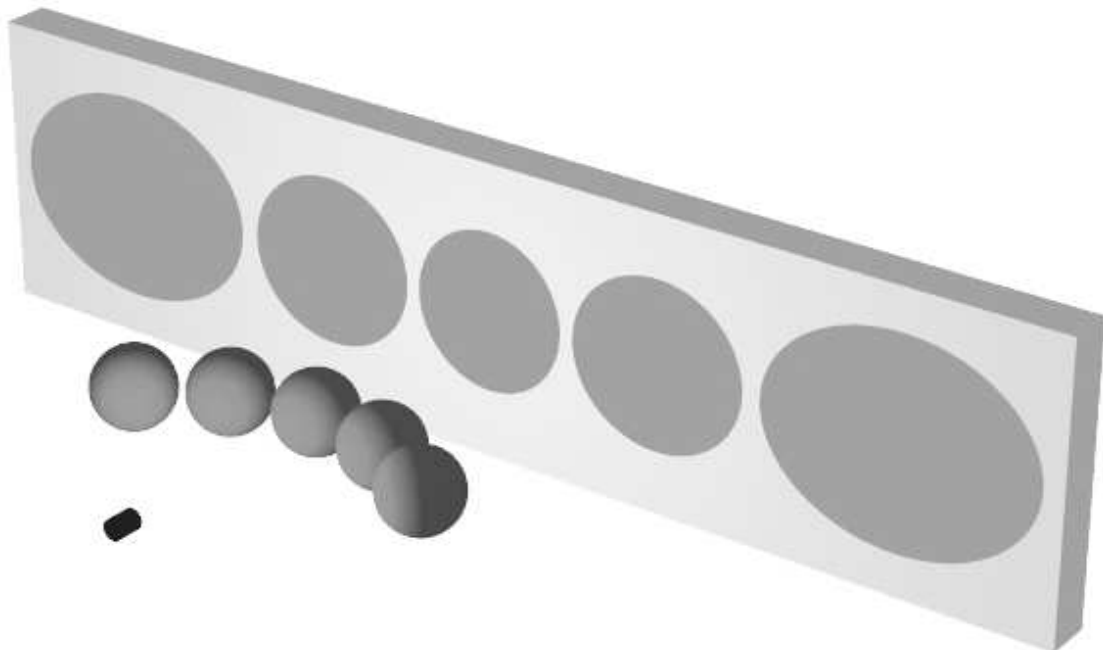


Abbildung 5.20: Perspektivische Bilder von Kugeln als Schattenwürfe unter Beleuchtung.

Index

- abwickelbare Fläche, 54
- Architektenanordnung, 76
- Aufbauverfahren, 7
- Aufriss, 5
- Augpunkt, 69
- Axonometrie, 6, 9

- Böschungsfäche, 58
- Bildtafel, 69
- Blickrichtung, 2, 13

- Dachausmittelung, 41
- Distanz, 69, 72
- Distanzpunkt, 81
- Durchdringung, 61, 63
- Durchstoßpunkt, 27
- Durchstoßpunktmethode (Perspektive), 74

- Ebene, 24
- Einschneideverfahren, 10, 36
- Ellipse, 45, 51, 87
- Erdhorizont, 87

- Falllinien, 58
- First, 41
- Fluchtgerade, 70
- Fluchtpunkt, 4, 70
- Fotografie, 68, 69
- Frontalperspektive, 80
- Frontlinie, 20

- Gerade, 20
- Geradentreue, 3, 4
- Grat, 41
- Grundaufgaben, 19
- Grundriss, 5

- Höhenlinie, 20, 57
- Hauptachsen, 46
- Hauptgerade, 20
- Hauptpunkt, 69, 72
- Horizont, 69

- Hyperbel, 51, 87
- hyperbolisches Paraboloid, 52
- Hyperboloid, einschaliges, 49, 52

- Ingenieur–Axonometrie, 8

- Kavalierprojektion, 9
- Kegel, 50, 55, 58
- Kegelschnitt, 51, 87
- Kehle, 41
- kotierte Projektion, 57
- Krümmungskreise, 46
- Kreis, 45, 51

- Längentreue, 3
- Lot, 35

- Ordner, 5

- Parabel, 51, 87
- Paraboloid, hyperbolisches, 52
- paralleles Licht, 15, 82
- Perspektive, 68
- Perspektive über Eck, 81
- Pohlke, Satz von, 9
- projizierende Gerade, 3

- Regelfläche, 52
- Rekonstruktion, 78
- Risskante, 5
- Rotationsfläche, 49
- Rotationsparaboloid, 49, 57

- Schatten, 15, 29, 82
- Scheitel, 46
- Scheitel-Krümmungskreis-Konstruktion (Ellipse), 47
- Scheitelkreis-Konstruktion (Ellipse), 46
- schiefe Parallelprojektion, 2
- Sehkegel, 71
- Seitenriss, 5
- senkrechte Parallelprojektion, 2, 36
- Sichtbarkeit, 13
- Spurdreieck, 36

Spurgerade, 24
Spurpunkt, 21, 70
Standebene, 69
Standlinie, 69

Teilverhältnistreue, 3
Tiefenlinie, 70
Torus, 49
Traufe, 41

Umprojektion, 12, 61
Umprojektion, doppelte, 14, 32

Verfallgrat, 41
Verschwindungsebene, 69
Verzerrungsverhältnisse, 6
Vogelprojektion, 9

wahre Gestalt, 32, 43
Wendelfläche, 52
windschief, 21
Winkel, 33
Winkeltreue, 3

zentrales Licht, 17, 85
Zylinder, 50, 54