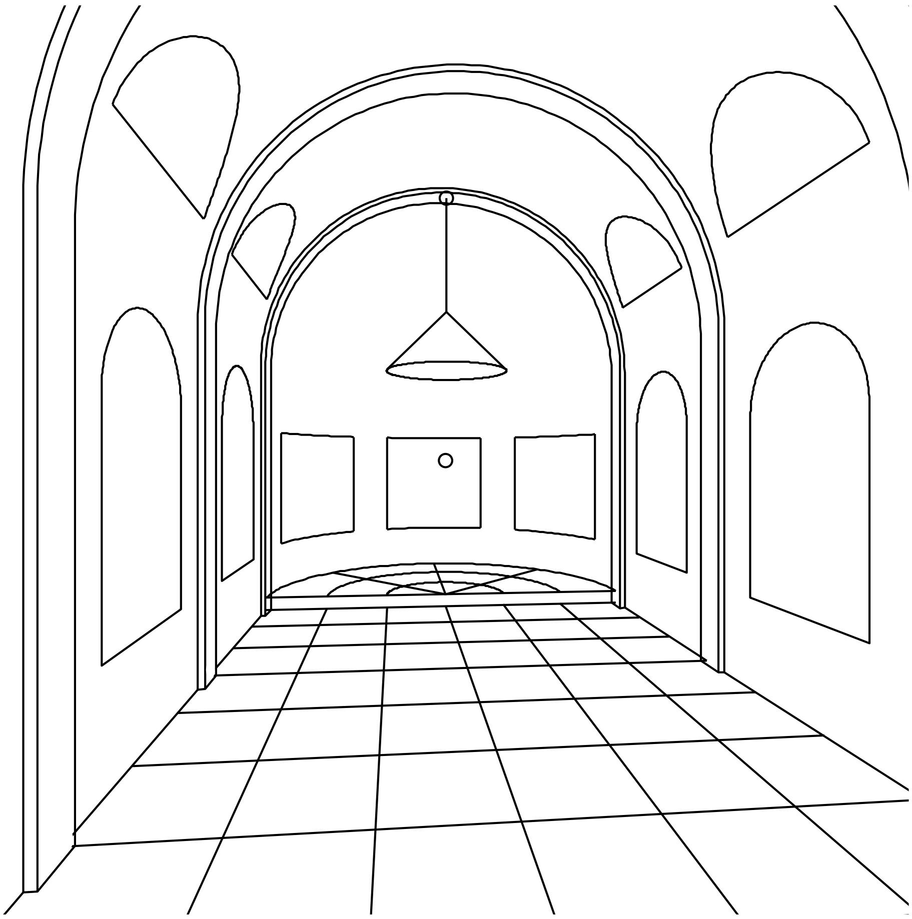
# Darstellende Geometrie

## für Architekten



**Erich Hartmann**

Fachbereich Mathematik
Technische Universität Darmstadt
SS 05

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einleitung

Die Aufgabe der *Darstellenden Geometrie* besteht darin, räumliche Objekte in einer Zeichenebene darzustellen. Dabei spielen zwei konkurrierende Gesichtspunkte eine wesentlichen Rolle. Will man *Maßgenauigkeit* erreichen, so ist dies meistens nur unter Verlust von *Anschaulichkeit* möglich. Z.B. lassen die beiden folgenden Bilder eines Hauses leicht auf Länge, Breite und Höhe schließen; sie sind aber nicht sehr anschaulich.

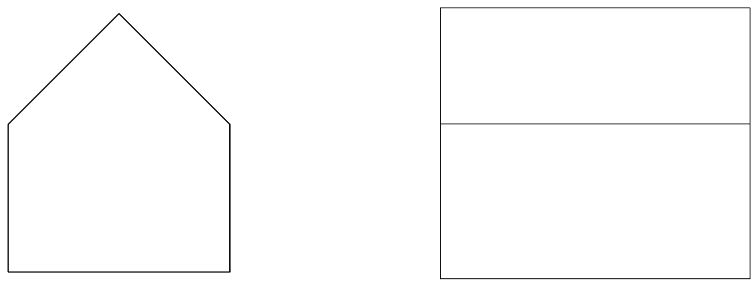
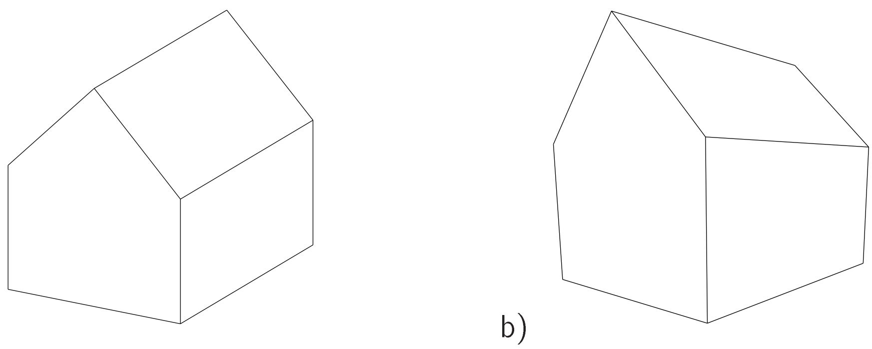


Abbildung 1.1: Haus in Seitenansicht

Dagegen bringen die nächsten beiden Bilder den räumlichen Eindruck mehr zur Geltung. Genaue Abmessungen lassen sich aber (insbesondere aus dem rechten Bild) nur schwer ablesen.



a) b)

Abbildung 1.2: Haus in a) senkrechter Parallel- und b) Zentralprojektion

## 1.1 Abbildungsverfahren

In der Darstellenden Geometrie bedient man sich im wesentlichen zweier Abbildungsverfahren. Dabei werden Punkte und Kurven eines Objektes mit Hilfe von Strahlen (Geraden) auf eine Bildtafel (Ebene) projiziert:

### 1.1.1 a) Parallelprojektion

Die Abbildungsstrahlen sind **parallel**, wie z.B. beim Sonnenlicht. Dabei unterscheidet man noch die beiden Fälle:

a1) Die Strahlen stehen **senkrecht** zur Bildtafel (*senkrechte Parallelprojektion*).

a2) Die Strahlen stehen **nicht senkrecht** zur Bildtafel (*schiefe Parallelprojektion*).

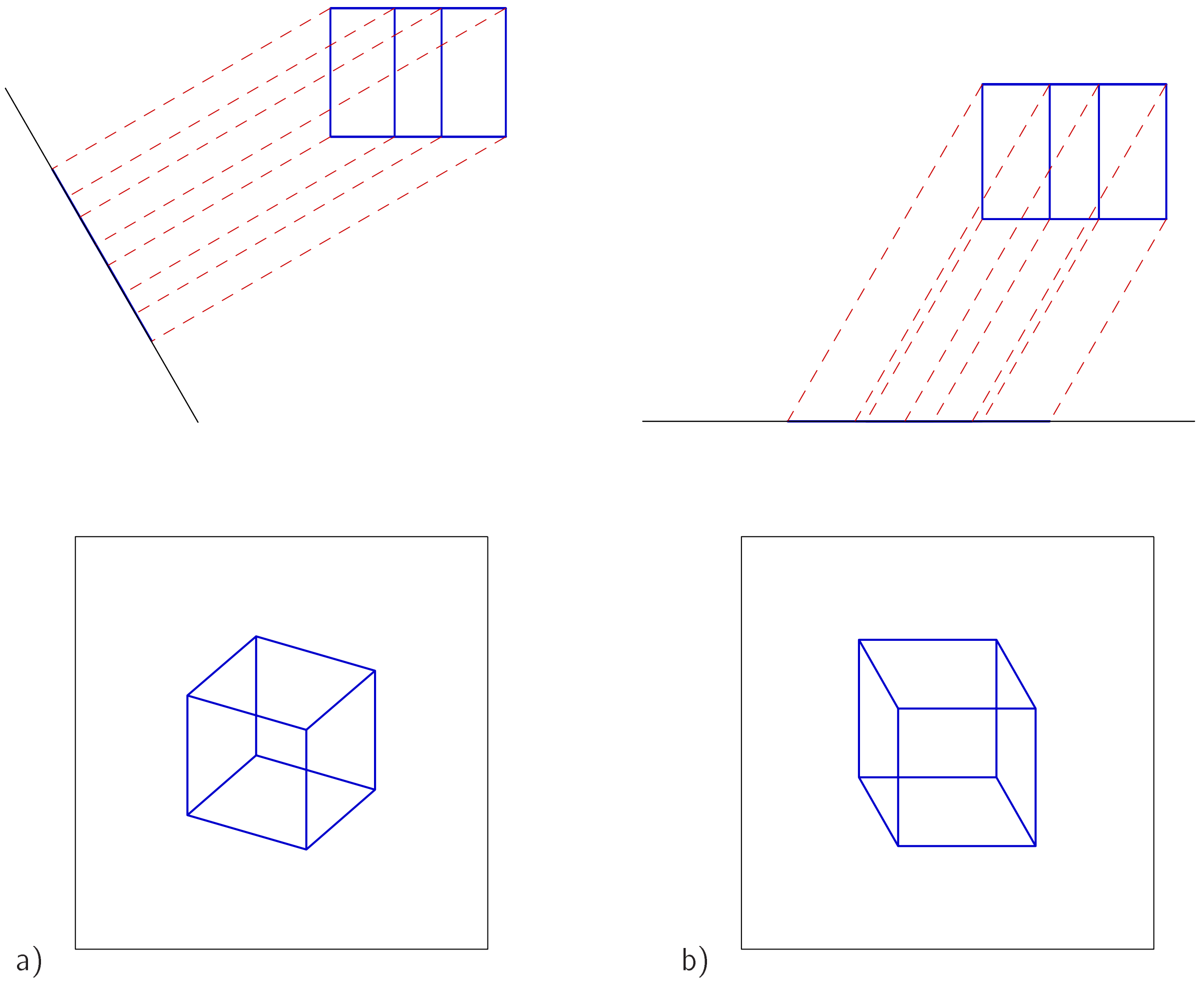



Abbildung 1.3: Quader in a) senkrechter und b) schiefer Parallelprojektion

**Bemerkung:**
Parallelprojektionen werden gerne von Ingenieuren verwendet wegen ihrer Verhältnistreue. Der Spezialfall **Vogelperspektive** ist eine schiefe Parallelprojektion (siehe Absch. 2.2.1), die insbesondere zur Veranschaulichung von Stadtplänen verwendet wird. Sie lässt sich relativ einfach von Hand herstellen.
Wir werden hier im Wesentlichen sog. **axonometrische** Bilder (schiefe/senkrechte Parallelprojektionen) mit Hilfe des *Einschneideverfahrens* herstellen.

### 1.1.2 b) Zentralprojektion

Alle Abbildungsstrahlen gehen durch einen Punkt, *Projektionszentrum* oder *Augpunkt* genannt.

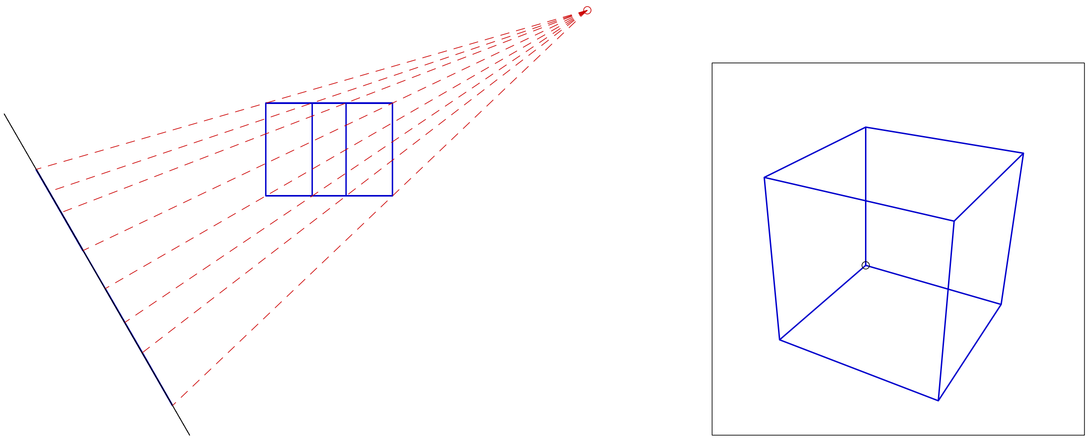


Abbildung 1.4: Quader in Zentralprojektion

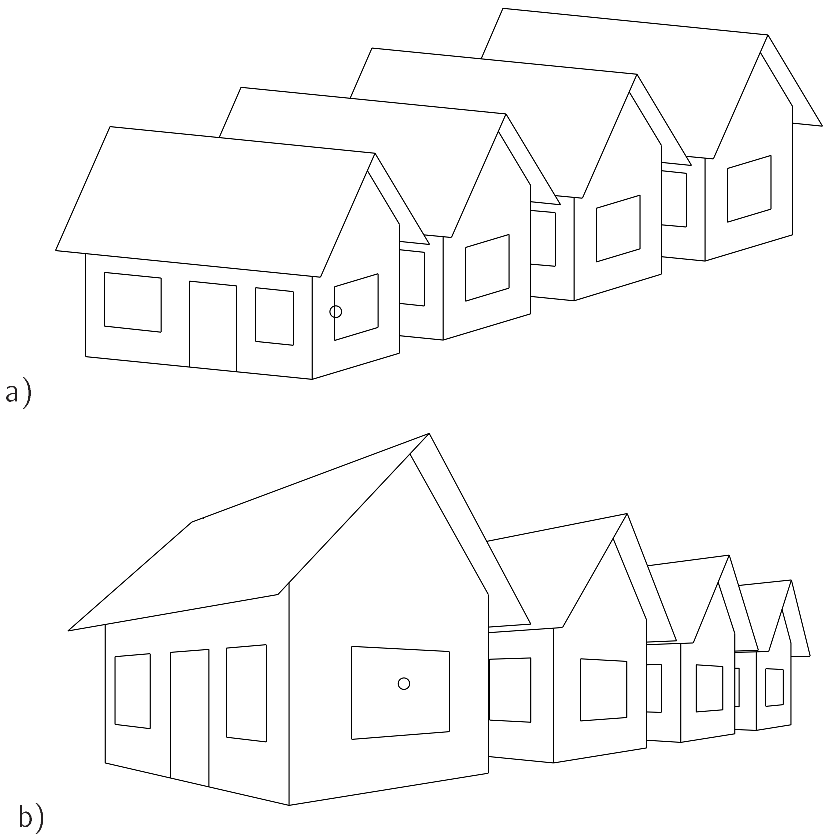



Abbildung 1.5: Häuser in a) Parallelprojektion b) Zentralprojektion

**Merke:**
Bei Parallelprojektion sind die Bilder paralleler Geraden i.a. wieder parallel.
Bei Zentralprojektion schneiden sich die Bilder paralleler Geraden i.a. in einem Punkt, dem *Fluchtpunkt* des Parallelbüschels.

Abbildung 1.6: Festsaal in Zentralprojektion

## 1.2 Lernziele der Vorlesung

Ziel der Vorlesung ist **nicht** das Erstellen komplexer Zeichnungen, hierzu verwendet man Computer. **Statt dessen** sollen die folgenden **Fähigkeiten** erlangt werden:

- von einem 3D–Objekt schnell eine *Skizze anfertigen*,
- vorgefertigte Zeichnungen *lesen*,
- in vorgefertigte Zeichnungen oder Photos *Ergänzungen einfügen*,
- aus vorgefertigten Zeichnungen oder Photos *wahre Längen und Winkel* oder ganze Grund– und Aufrisse bestimmen.

## 1.3 Literatur

Das **Skript** zur Vorlesung ist nicht als Lehrbuch zum Selbststudium gedacht, sondern als Arbeitsblätter. Wesentliche Konstruktionen werden in der Vorlesung erarbeitet und in das Skript eingezeichnet. Da das Skript in der Klausur als einziges Hilfsmittel zugelassen ist, ist es ratsam, regelmäßig an der Vorlesung teilzunehmen und das Skript dort zu vervollständigen.
Wichtige Konstruktionen werden stichwortartig beschrieben und durch Einrahmungen optisch hervorgehoben.
Als weiterführende Literatur für Vorlesung und Praxis werden empfohlen:

a) Leopold: *Geometrische Grundlagen der Architekturdarstellung*, Kohlhammer-Verlag, Köln
b) Fucke, Kirch, Nickel: *Darstellende Geometrie*, Fachbuchverlag Leipzig,
c) Graf, Barner: *Darstellende Geometrie*, (nur noch in Bibliotheken zu finden).

Im Folgenden werden **Hinweise** auf entsprechende Textstellen gegeben (z.B.: s. LEO, S. xx, s. FKN, S. yy).

## 1.4 Grundbegriffe

Wir verwenden hier die folgenden Bezeichnungen und Symbole.

### 1.4.1 Bezeichnungen

Punkte: Große lateinische Buchstaben $P, A, B, C, \ldots,$
Geraden, Kurven: kleine lateinische Buchstaben $a, b, c, \ldots,$
Ebenen: kleine griechische Buchstaben $\varepsilon, \pi, \ldots,$
Winkel: kleine griechische Buchstaben $\alpha, \beta, \delta, \varphi, \ldots.$

### 1.4.2 Symbole

$PQ$: Gerade durch die Punkte $P, Q$, $\overline{PQ}$: Strecke mit den Endpunkten $P, Q$,
$|PQ|$: Länge der Strecke $PQ$.
$g \parallel h$: Gerade g parallel zu Gerade h, $\nparallel$: nicht parallel,
$\sphericalangle(a, b)$: Winkel mit den Schenkeln $a$ und $b$,
$g \perp h$: Gerade $g$ ist senkrecht (orthogonal) zu Gerade $h$.

Wir fassen Geraden, Kurven, Ebenen, Flächen, ... als Punkt*mengen* auf und benutzen die für Mengen üblichen Symbole:
$P \in \varepsilon$: Punkt $P$ liegt in der Ebene $\varepsilon$, $P \notin \varepsilon$: Punkt $P$ liegt nicht in der Ebene $\varepsilon$,
$g \subset \varepsilon$: Gerade $g$ ist in der Ebene $\varepsilon$ enthalten,
$g \cap \varepsilon$: Schnitt der Geraden $g$ mit der Ebene $\varepsilon$, $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$: Schnitt zweier Ebenen,
Zwei sich **nicht** schneidende Geraden, die nicht in einer Ebnene liegen, heißen *windschief*.

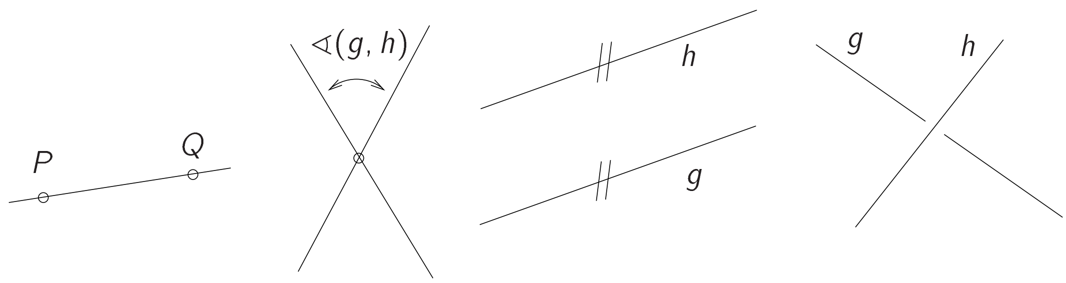



Abbildung 1.7: Gerade sowie schneidende, parallele, windschiefe Geraden

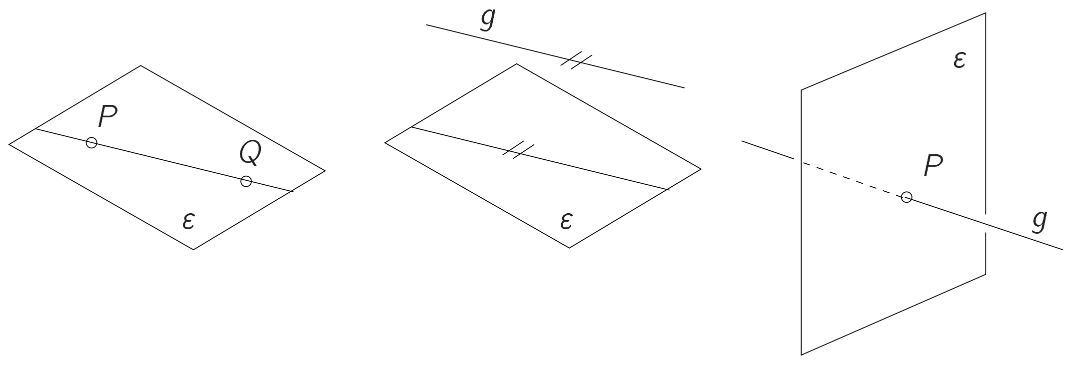



Abbildung 1.8: Gerade enthalten in, parallel und senkrecht zu einer Ebene

**Vereinbarung:**
Verdeckte (*unsichtbare*) Kanten oder Kurven werden gestrichelt, abgesetzt oder weggelassen.

## 1.5 Eigenschaften von Projektionen

Projektionen sind i.a.:

- *punkttreu*, d.h. jeder Punkt $P$ wird auf genau einen Punkt $P'$ abgebildet.
- *geradentreu*, d.h. eine Gerade $g$ wird auf eine Gerade $g'$ abgebildet. Fällt $g$ mit einem Projektionsstrahl zusammen, so wird $g'$ zu einem Punkt; in diesem Fall heißt $g$ *projizierend*.
- *inzidenzerhaltend*, d.h. aus $P \in g$ folgt $P' \in g'$.

Im Folgenden sind einige Besonderheiten von Parallel– bzw. Zentralprojektionen zusammengestellt.

### 1.5.1 Parallelprojektion

(P1) Die Bilder paralleler Geraden sind i.a. wieder parallel. (Ausnahmen: projizierende Geraden.)

(P2) Parallele Geradenstücke werden im gleichen Verhältnis verzerrt.

(P3) Ebene Figuren erscheinen im Bild unverzerrt, wenn sie parallel zur Bildtafel liegen.

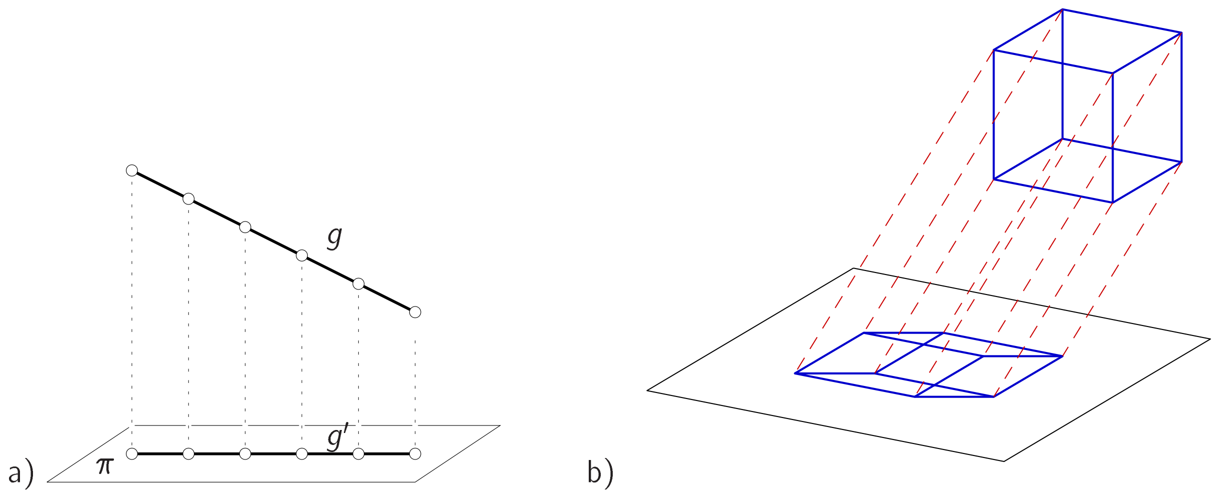



Abbildung 1.9: a) Teilverhältnistreue der Parallelprojektion b) In Vogelperspektive bleiben Deckel und Boden des Quaders unverzerrt, während die vier vertikalen Kanten im gleichen Maß verzerrt sind (s. auch Abb. 1.3).

### 1.5.2 Zentralprojektion

Die Eigenschaften (P1) – (P3) gelten bei Zentralprojektion **nicht**. (Vergleiche die Beispiele in Figur 1.2.) Aber es gilt:

(Z) Die Bilder paralleler Geraden schneiden sich i.a. in einem Punkt, dem *Fluchtpunkt* des zugehörigen Parallelbüschels (Menge der zu einer festen Gerade parallelen Geraden). Ausnahme: Die Bilder von parallelen Geraden, die in einer Ebene parallel zur Bildtafel liegen, bleiben parallel.

Weiterhin: Alle Geraden einer Ebene durch das Zentrum $Z$ (*projizierende Ebene*) werden in eine Gerade abgebildet.

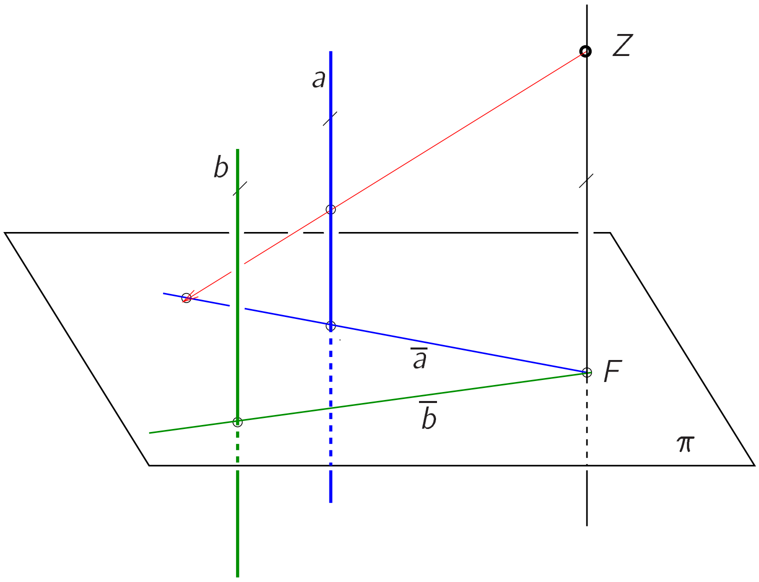



Abbildung 1.10: Fluchtpunkt bei Zentralprojektion

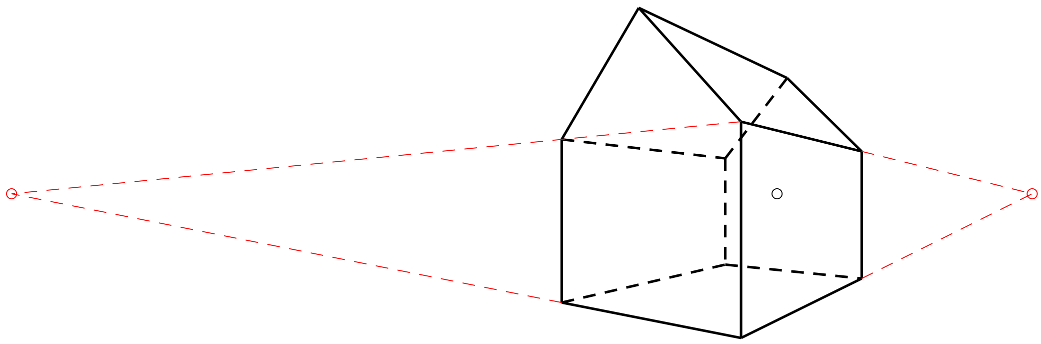


Abbildung 1.11: Fluchtpunkte bei Zentralprojektion eines Hauses

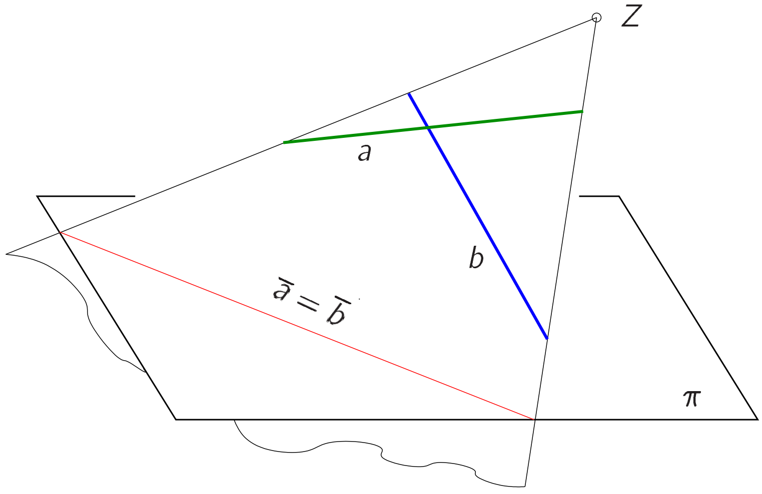



Abbildung 1.12: Projizierende Ebene bei Zentralprojektion

## 1.6 Grundriss, Aufriss, Risskante, Ordner

Im nächsten Kapitel benötigen wir die Begriffe "Grundriss" und "Aufriss"; wir werden sie im Kapitel 3, Zweitafelprojektion noch näher studieren.
Es seien $\pi_1, \pi_2$ zwei auf einander senkrecht stehende Ebenen und $P$ ein Punkt. $\pi_1$ sei horizontal und heißt *Grundrissebene* (oder *–tafel*), $\pi_2$ *Aufrissebene* (oder *–tafel*). Die Schnittgerade $k_{12} := \pi_1 \cap \pi_2$ nennt man *Risskante*. Projiziert man $P$ **senkrecht** auf die Ebene $\pi_1$ bzw. $\pi_2$, so erhält man den *Grundriss* $P'$ bzw. den *Aufriss* $P''$ von $P$. Um Operationen oder Konstruktionen, bei denen $P$ eine Rolle spielt, in **einer** Zeichenebene darstellen zu können, klappt man die Aufrisstafel $\pi_2$ um die Risskante $k_{12}$ in die Grundrisstafel $\pi_1$. **Nach** dieser Umklappung liegen $P'$ und $P''$ auf einer Senkrechten zur Risskante. Ein *Ordner* verbindet $P'$ und $P''$, er steht senkrecht zu $k_{12}$.

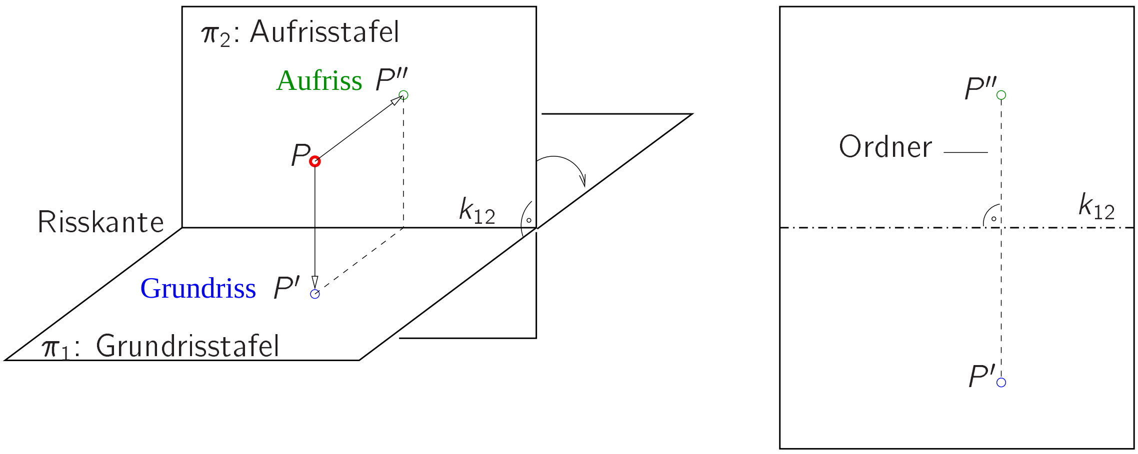



Abbildung 1.13: Grundriss und Aufriss eines Punktes

**Merke:**
Grundriss $P'$ und Aufriss $P''$ eines Punktes liegen auf demselben Ordner!
Ein Punkt $P$ ist durch seinen Grund– und Aufriss eindeutig bestimmt.

Zur eindeutigen Beschreibung eines Objektes sind also mindestens **zwei** senkrechte Parallelprojektionen notwendig.

Im Folgenden sind Grund– und Aufrisse einiger Objekte gegeben, die den gleichen Grundriss besitzen.

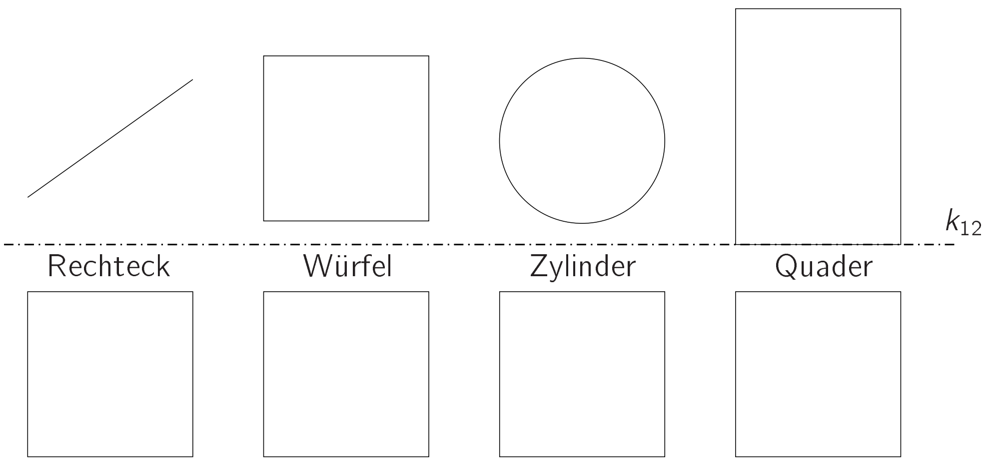



Abbildung 1.14: Verschiedene Objekte mit dem gleichen Grundriss

# Kapitel 2

# Axonometrie

## 2.1 Konstruktion eines Bildpunktes

(s. LEO S.67)

Die Axonometrie dient dem Erstellen anschaulicher Bilder. Sie basiert auf der folgenden **Idee**:

Man führt im Raum ein geeignetes Koordinatensystem ein und beschreibt wesentliche Punkte des Objektes, das abgebildet werden soll, durch Koordinaten bezüglich des Koordinatensystems. Üblicherweise benutzt man ein **rechtwinkliges** Koordinatensystem $(O; x, y, z)$, bei dem die x–, y– und z–Achsen ein **Rechtssystem** bilden, d.h. blickt man in negativer z-Richtung auf die x-y–Ebene, so haben die x– und y–Achsen die "übliche" Orientierung.

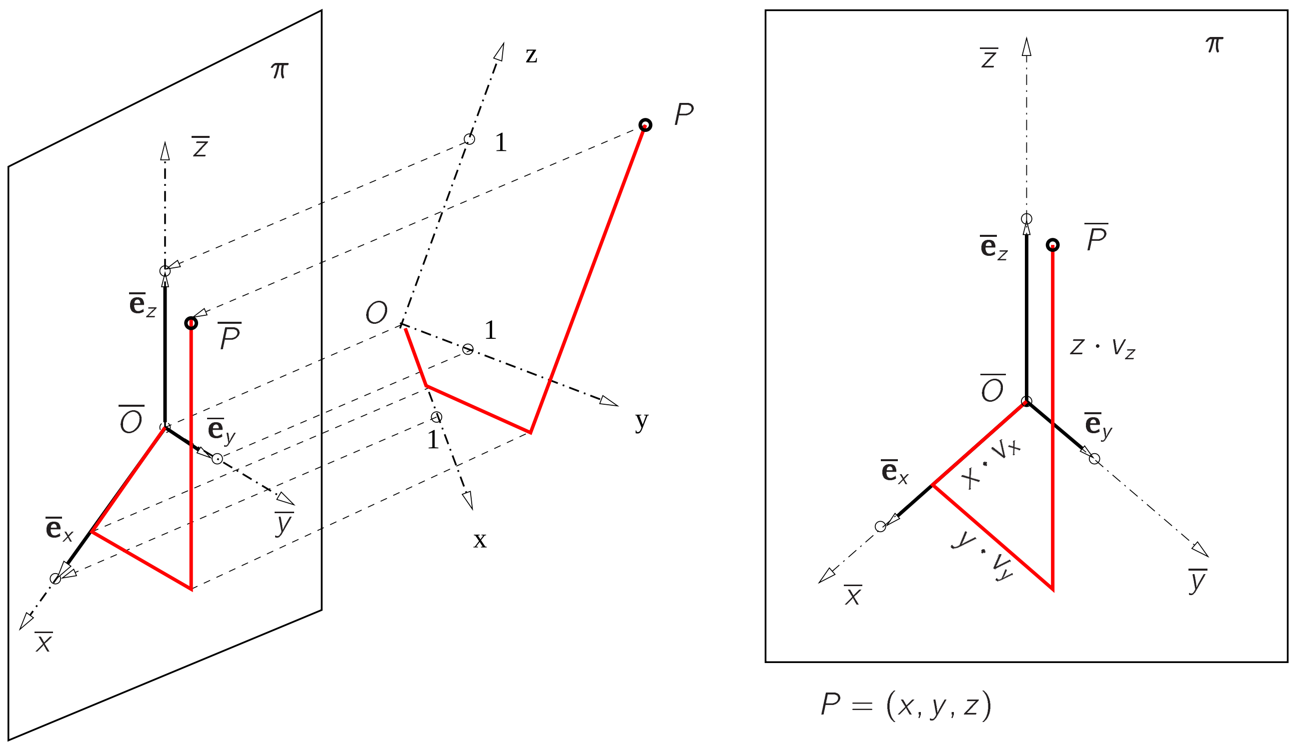



Abbildung 2.1: Axonometrie: Bilder der Koordinatenachsen und Konstruktion eines Bildpunktes

Man projiziert jetzt die Koordinatenachsen zusammen mit ihren Basisvektoren $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Die Bilder der Basisvektoren seien $\overline{\mathbf{e}}_x, \overline{\mathbf{e}}_y, \overline{\mathbf{e}}_z$. Durch die Projektion werden i.a. alle drei Maßstäbe der Achsen verzerrt wiedergegeben. Die **Verzerrungsverhältnisse** $|\mathbf{e}_x| : 1, |\mathbf{e}_y| : 1, |\mathbf{e}_z| : 1$ werden mit $v_x, v_y, v_z$ bezeichnet.

**Konstruktion eines Bild-Punktes**: Gegeben $(x, y, z)$

Gehe (in der Bildtafel von $\overline{O}$ aus)
1. um $x \cdot v_x$ in $\overline{\mathbf{e}}_x$–Richtung und dann
2. um $y \cdot v_y$ in $\overline{\mathbf{e}}_y$–Richtung und dann
3. um $z \cdot v_z$ in $\overline{\mathbf{e}}_z$–Richtung.

(Die Reihenfolge kann beliebig vertauscht werden.)

Beim Zeichnen der Projektionen mehrerer Punkte sollte man vorhandene Parallelitäten (wie z.B. bei einem Quader) ausnutzen. (Parallele Geraden gehen in parallele Geraden über !)

Ist die Projektionsrichtung **senkrecht** zur Bildtafel, so spricht man von *senkrechter Axonometrie*. Im anderen Fall von *schiefer* Axonometrie.

In der Praxis projiziert man nicht mühsam das Koordinatensystem, sondern wählt irgendeinen Punkt $\overline{O}$ als Bild des Koordinatenursprungs $O$ und drei von $\overline{O}$ in verschiedene Richtungen verlaufende Vektoren $\overline{\mathbf{e}}_x, \overline{\mathbf{e}}_y, \overline{\mathbf{e}}_z$. Die Grundlage hierfür ist der **Satz von Pohlke**:
*Drei in verschiedenen Richtungen von einem Punkt $\overline{O}$ ausgehende Strecken können, bis auf Ähnlickeit, als die Parallelprojektion eines Koordinatendreibeins eines senkrechten, rechtsorientierten Koordinatensystems aufgefasst werden.*

Um ein anschauliches Bild eines Gegenstandes zu erhalten, muss man allerdings die Vektoren $\overline{\mathbf{e}}_x, \overline{\mathbf{e}}_y, \overline{\mathbf{e}}_z$ "geeignet" wählen. Dies wollen wir uns an dem Beispiel des Einheitswürfels klar machen (Abb. 2.2):

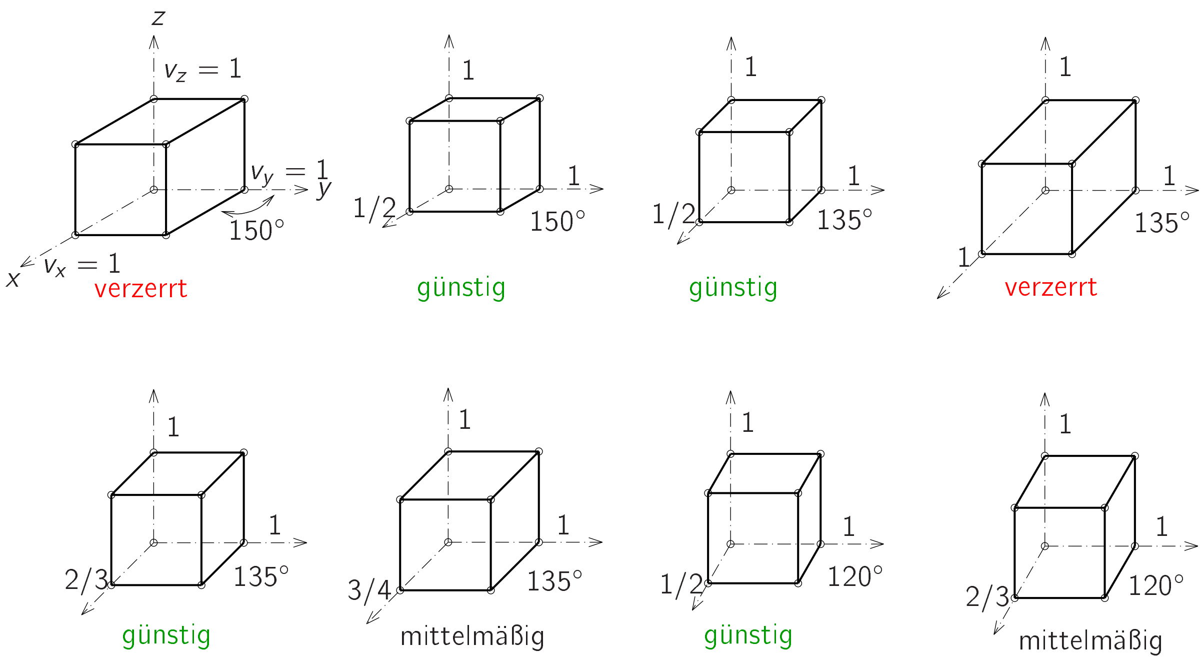



Abbildung 2.2: Verschiedene Axonometrien eines Würfels

Man unterscheidet

| | |
|---|---|
| **iso**metrische Axonometrie: | **alle** Verzerrungen sind **gleich**, |
| **di**metrische Axonometrie: | **zwei** Verzerrungen sind **gleich**, |
| **tri**metrische Axonometrie: | **alle** Verzerrungen sind **verschieden** |

Die **Sichtbarkeit** folgt aus der Anordnung der Achsen im Bild und der Tatsache, dass das Koordinatensystem ein Rechtssystem ist.

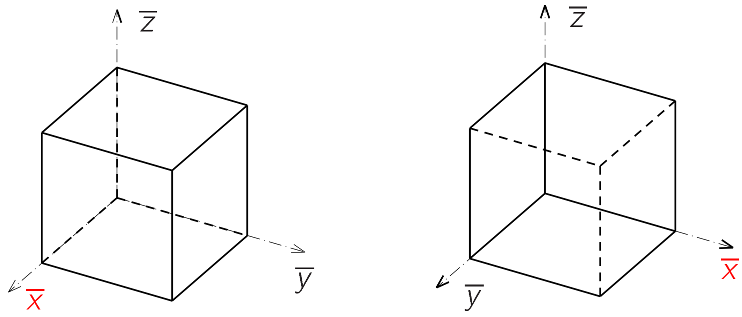



Abbildung 2.3: Sichtbarkeit und Achsenorientierung

**Beispiel 2.1** *Stelle axonometrische Bilder eines Hauses her (Abb. 2.4).*

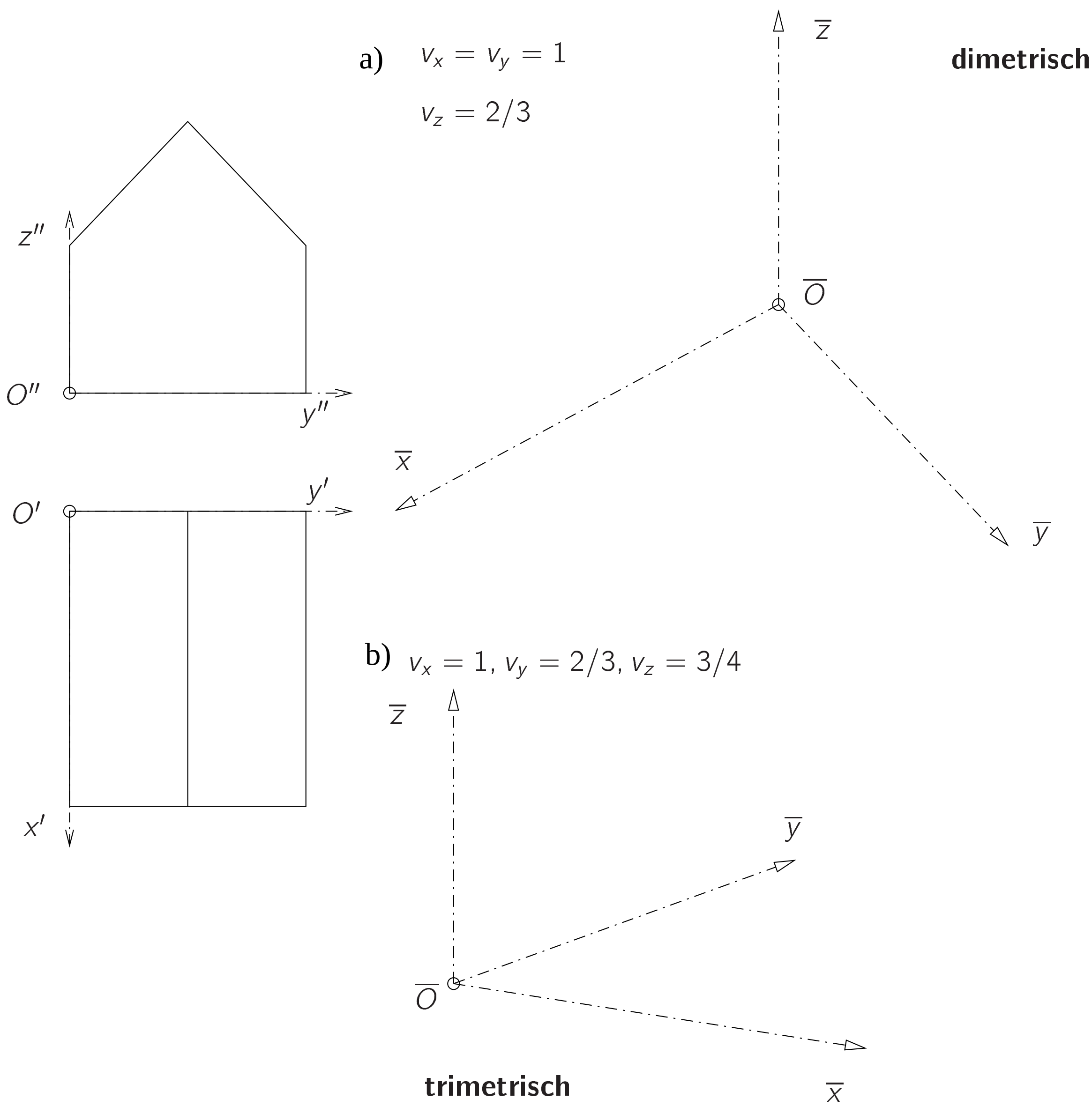



Abbildung 2.4: Axonometrien eines Hauses

## 2.2 Spezielle Axonometrien

### 2.2.1 Vogel– und Kavalierperspektive

(s. LEO S.70,71)

Die Herstellung eines axonmetrischen Bildes eines Gegenstandes ist besonders einfach, wenn Verzerrungsverhältnisse **1** sind. Deshalb treffen wir die folgende **Vereinbarung**:

| Eine Koordinatenebene sei parallel zur Bildtafel $\pi$. |
|---|

In diesem Fall können nicht nur zwei Koordinaten unverzerrt übernommen werden, sondern jede Objektfigur parallel zu der ausgewählten Koordinatenebene hat ein kongruentes Bild.
Man unterscheidet:
(1) **Kavalierperspektive**: Die Bildtafel ist parallel zur x-z– oder y-z–Ebene.
(2) **Vogelperspektive**: Die Bildtafel ist parallel zur x-y–Ebene.

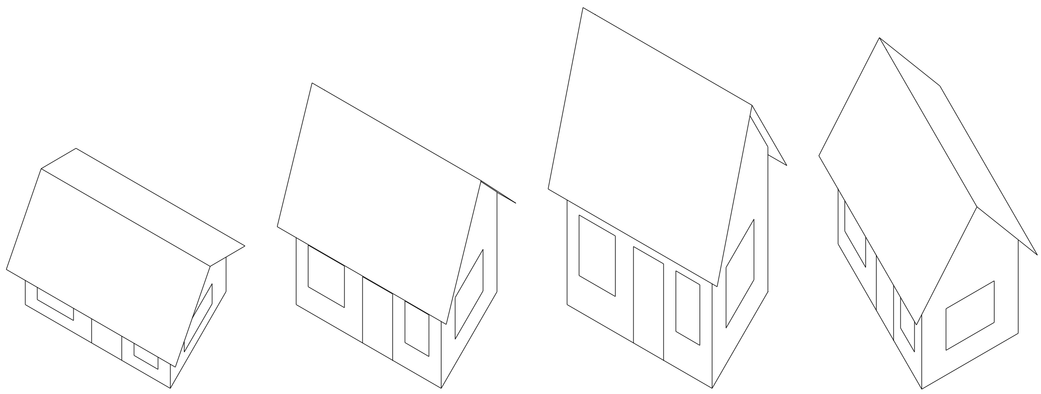


Abbildung 2.5: Vogelperspektiven eines Hauses

**Aufgabe 2.1** *Zeichne von dem durch Grund– und Aufriss gegebenen Haus (Abb. 2.6) ein "günstiges" Bild a) in Kavalierperspektive b) in Vogelperspektive.*

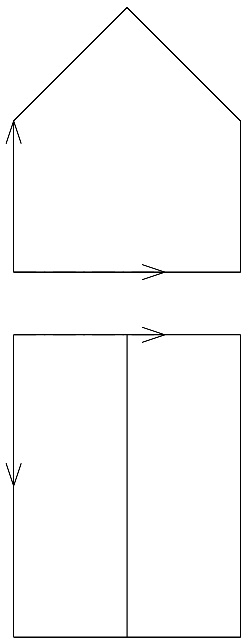
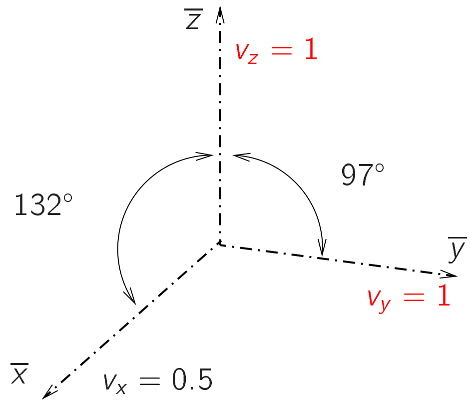


Abbildung 2.6: Kavalier– und Vogelperspektive eines Hauses

### 2.2.2 Ingenieur–Axonometrie

Bei der Ingenieur–Axonometrie trifft man folgende **Vereinbarung**:

1. Die Verzerrungen sind $v_x = 0.5$, $v_y = v_z = 1$ (dimetrische Axonometrie) .
2. In der Projektion ist der
   Winkel zwischen der z–Achse und der x–Achse 132°,
   Winkel zwischen der z–Achse und der y–Achse 97°.
   (siehe Geodreieck !)




Die **Vorteile** der Ingenieur–Axonometrie sind:

- Das axonometrische Bild ist nahezu eine um den Faktor 1.06 skalierte **senkrechte** Parallelprojektion.
- Die hierzu notwendigen Winkel von 7° und 42° sind auf vielen Geodreiecken markiert.
- Der Umriss einer Kugel ist ein Kreis.

**Aufgabe 2.2** *Zeichne von dem durch Grund– und Aufriss gegebenen Turm (Abb. 2.7) ein axonometrisches Bild in Ingenieur–Axonometrie.*

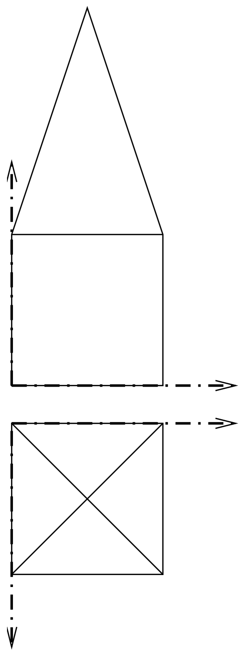


Abbildung 2.7: Aufgabe: Ingenieur–Axonometrie eines Turmes

**Bemerkung:**
Falls es geeignet erscheint, kann man auch die Winkel und Verzerrungen vertauschen:
a) $v_x = 1$, $v_y = 0.5$,
b) Winkel zwischen z–Achse und x–Achse: 97° und Winkel zwischen z–Achse und y–Achse: 132°.

## 2.3 Einschneideverfahren

(s. LEO S.75)

Das Antragen der einzelnen Punkte ist bei komplexen Objekten mühsam. Hier hilft das **Einschneideverfahren**:

**Vorgabe**: Objekt in zwei orthogonalen, zugeordneten Projektionen (Rissen).
**Einschneideverfahren**:

1. Man legt die beiden Risse "beliebig" in die Zeichenebene $\pi$ und
2. wählt zwei verschiedene *Einschneiderichtungen* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.
3. Durch die Risse $P', P''$ eines Punktes $P$ werden je ein Strahl $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ in $\mathbf{e}_1-$, $\mathbf{e}_2-$Richtung gezogen.
4. $\mathbf{p}_1 \cap \mathbf{p}_2 = \overline{P}$ ist das axonometrische Bild von $P$.

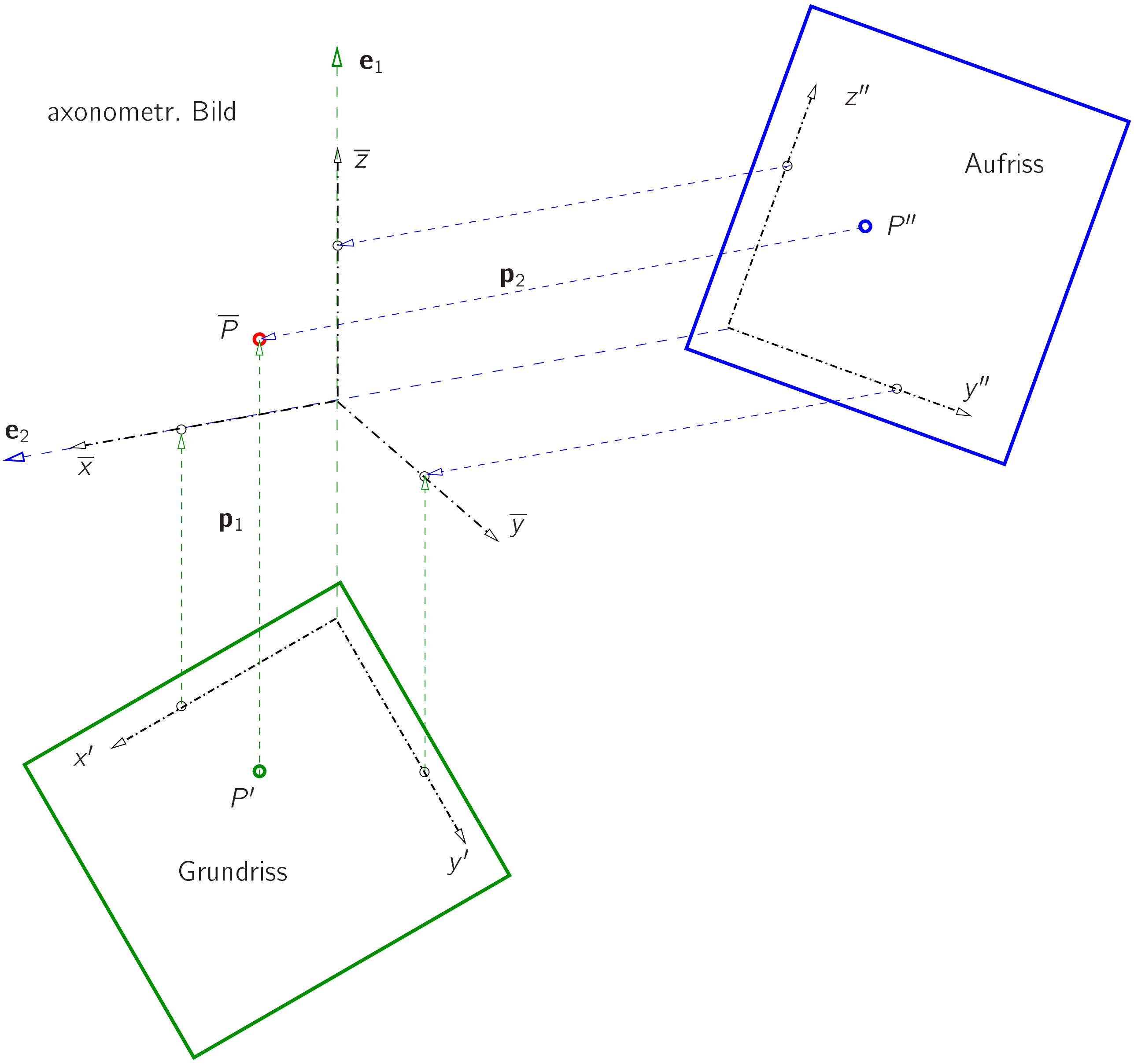



Abbildung 2.8: Einschneideverfahren

**Aufgabe 2.3** *Stelle ein axonometrisches Bild eines Hauses mit Hilfe des Einschneideverfahrens her (Abb. 2.9).*

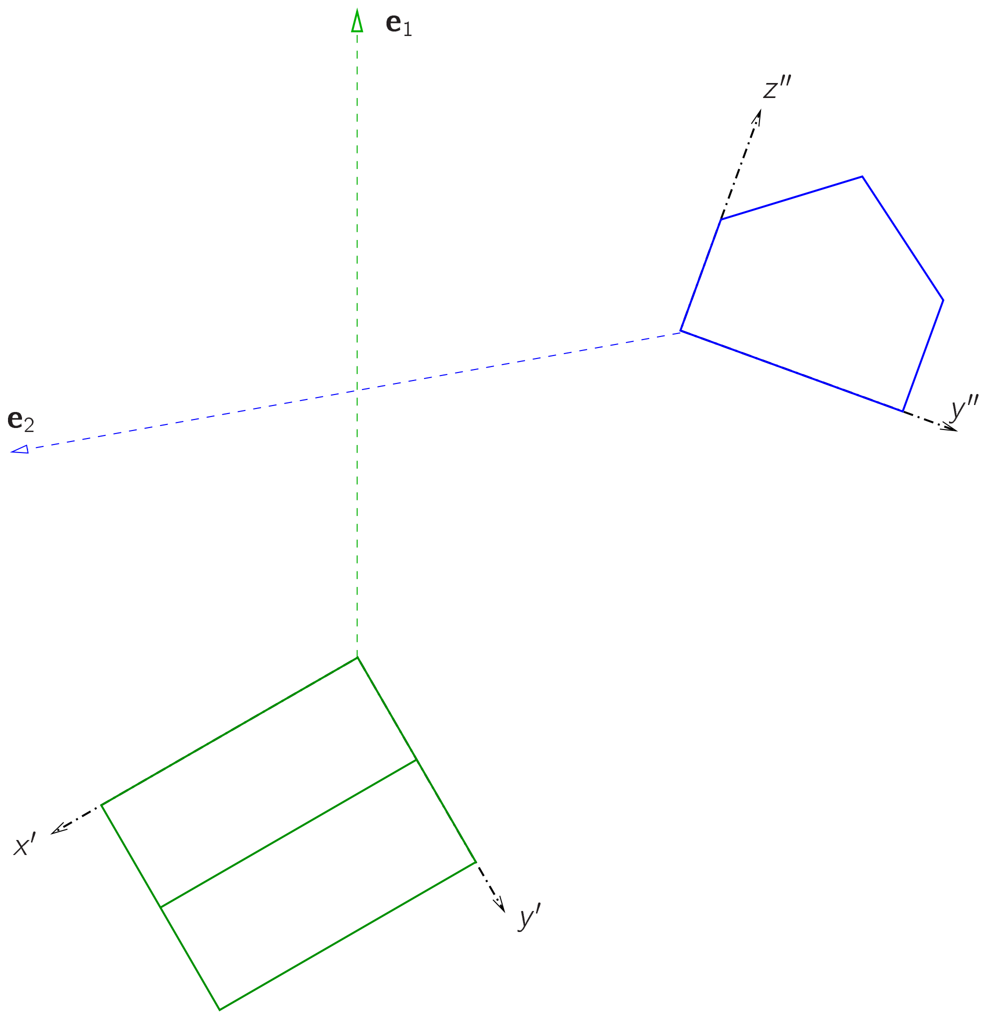



Abbildung 2.9: Einschneideverfahren: Haus

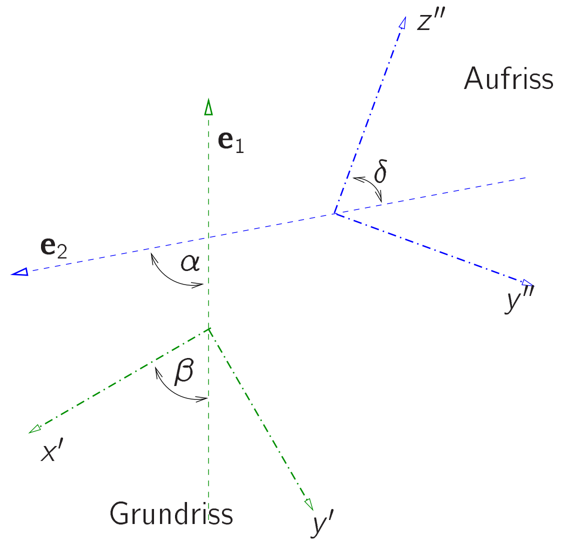



Abbildung 2.10: "Gute" Bilder bei: $\alpha = 50^o ... 90^o, \beta = 5^o ... \alpha, \delta \approx \beta$

## 2.4 Bemerkungen zur senkrechten Axonometrie

Senkrecht axonometrische Bilder haben eine deutlich bessere Bildwirkung als "beliebige" schiefe axonometrische Bilder. Allerdings muss dafür etwas mehr Vorarbeit geleistet werden. Es können zwar immer noch die Bilder der Achsen frei vorgegeben werden, aber
a) die **Verkürzungen** für die axonometrische Konstruktion und
b) die **Lagen** der Grund– und Aufrisse für das Einschneideverfahren
können nicht mehr beliebig gewählt werden (s. Abschnitt 3.6).

Weitere **Vorteile** der senkrechten Axonometrie sind:
1) Umrisse von Kugeln sind Kreise,
2) Bilder von Kreisen, die zu Koordinatenebenen parallel sind, lassen sich relativ leicht konstruieren (s. Aufgabe 4.5).

## 2.5 Schatten in der Axonometrie

Um den räumlichen Eindruck eines axonometrischen Bildes noch zu verstärken, wollen wir für einfache Fälle Schatten konstruieren.
Wir setzen im axonometrischen Bild den Schattenwurf einer senkrechten Kante bei **parallelem/zentralen** Licht voraus, womit die Lichtrichtung eindeutig festgelegt ist. Um nicht schon Durchstoßpunkte konstruieren zu müssen, betrachten wir hier nur Fälle mit Schatten auf **senkrechten** und/oder **waagrechten** Ebenen.

**Idee:** Um den Schatten $\tilde{P}$ eines Punktes $P$ auf der *Grundriss*-Ebene zu finden, schneidet man den Lichtstrahl $\mathbf{l}$ durch $P$ mit dem Grundriss $\mathbf{l}'$ des Lichtstrahls durch den Grundriss $P'$ von P. Bei **parallelem** Licht sind alle Lichtstrahlen parallel, bei **zentralem** Licht gehen alle Lichtshralen durch einen Punkt !

### 2.5.1 Schatten bei parallelem Licht (s. LEO S.172)

**Aufgabe 2.4** *Gegeben ist ein axonometrisches Bild eines Hauses und Lichtrichtung* $\mathbf{l}$ *durch den Schattenwurf einer senkrechten Kante. Zeichne den Schatten in das axonometrische Bild (Abb. 2.11).*

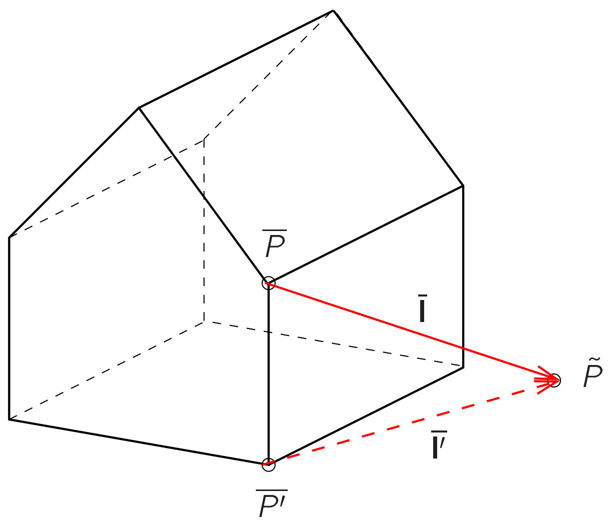



Abbildung 2.11: Schatten eines Hauses bei parallelem Licht

**Aufgabe 2.5** *Gegeben ist ein axonometrisches Bild (Kavalierperspektive) zweier Quader und Lichtrichtung* **l** *durch den Schattenwurf einer Kante (Abb. 2.12). Zeichne den Schatten.*

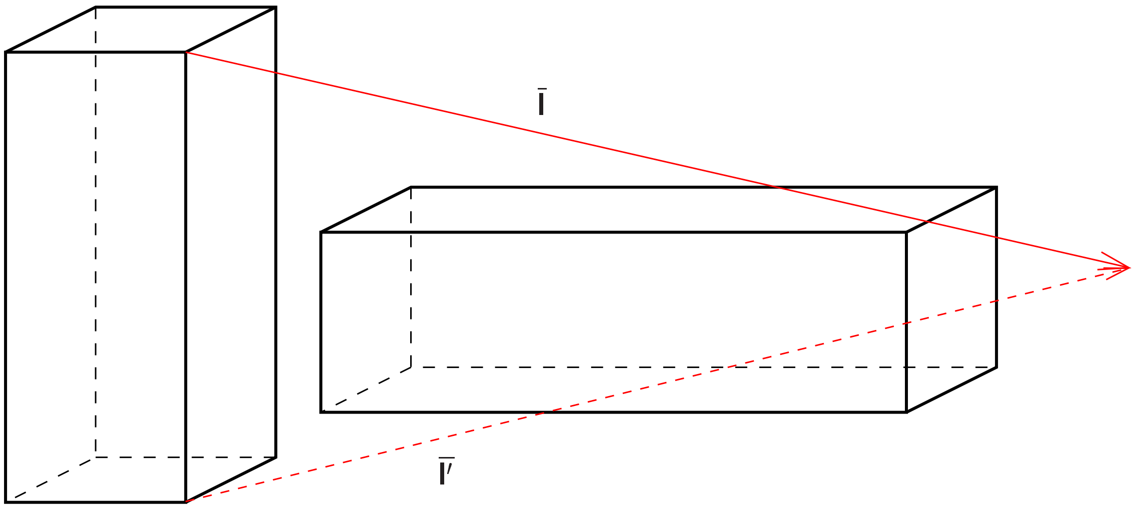



Abbildung 2.12: Schatten zweier Quader bei parallelem Licht

## 2.5.2 Schatten bei zentralem Licht

(s. LEO S.181)

Nun setzen wir Licht voraus, das von einem Punkt (Lampe) ausgeht. Die Lichtquelle ist durch die Position der Lampe $L$ und deren Fußpunkt $L'$ (Grundriss der Lampe in der Standebene des Objektes) eindeutig bestimmt. Die Konstruktion verläuft analog zu der bei parallelem Licht (s. Fig. 2.13).

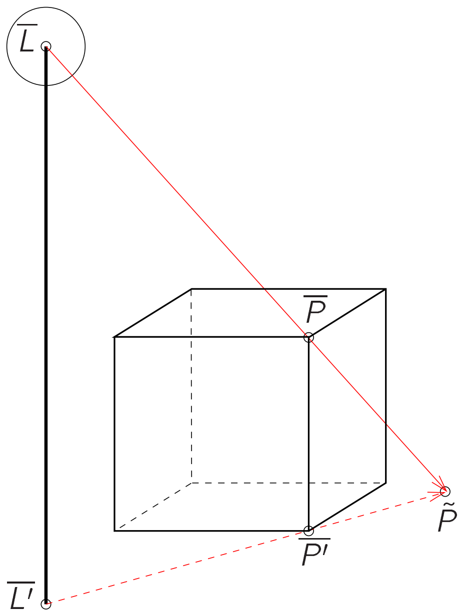



Abbildung 2.13: Schatten eines Quaders bei zentralem Licht

**Aufgabe 2.6** *Gegeben ist ein axonometrisches Bild eines Hauses und die Lichtquelle L mit ihrem Grundriss. Zeichne den Schatten in das axonometrische Bild (Abb. 2.14).*

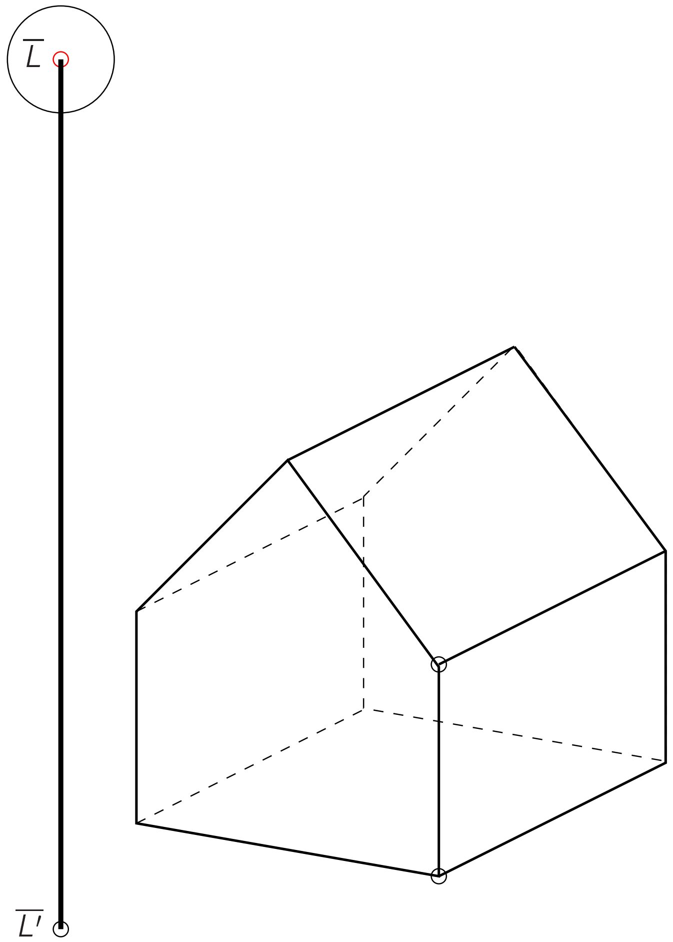



Abbildung 2.14: Schatten eines Hauses bei zentralem Licht

**Bemerkung:**
Bei komplizierteren Fällen konstruiert man den Schatten zuerst in Grund– und Aufriss.

# Kapitel 3

# Zwei– und Mehrtafelprojektion, Dachausmittelung

## 3.1 Zweitafelprojektion von Punkten

(s. LEO S.82)

Wir erinnern zunächst an die in Abschnitt 1.6 erklärten Begriffe **Grundriss**, **Aufriss**, **Risskante**, **Ordner**. Die nächste Zeichnung zeigt einige Sonderlagen von Punkten:

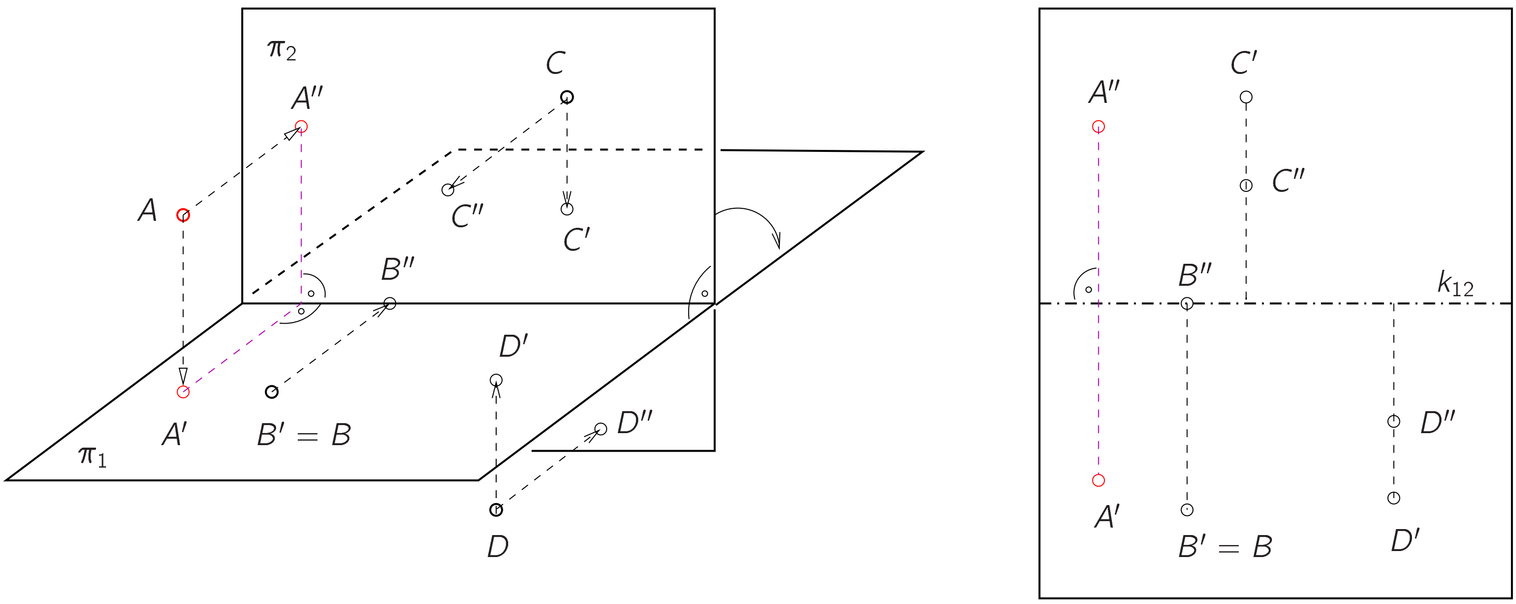



Abbildung 3.1: Zweitafelprojektion von Punkten

**Beachte:** Der Aufriss eines Punktes liegt nicht immer oberhalb der Risskante (s. Abb. 3.1). Analog muss der Grundriss eines Punktes nicht immer unterhalb der Risskante liegen !

## 3.2 Zweitafelprojektion von Geraden

(s. LEO S.83,89)

Die Projektion einer Gerade ist i.a. wieder eine Gerade:

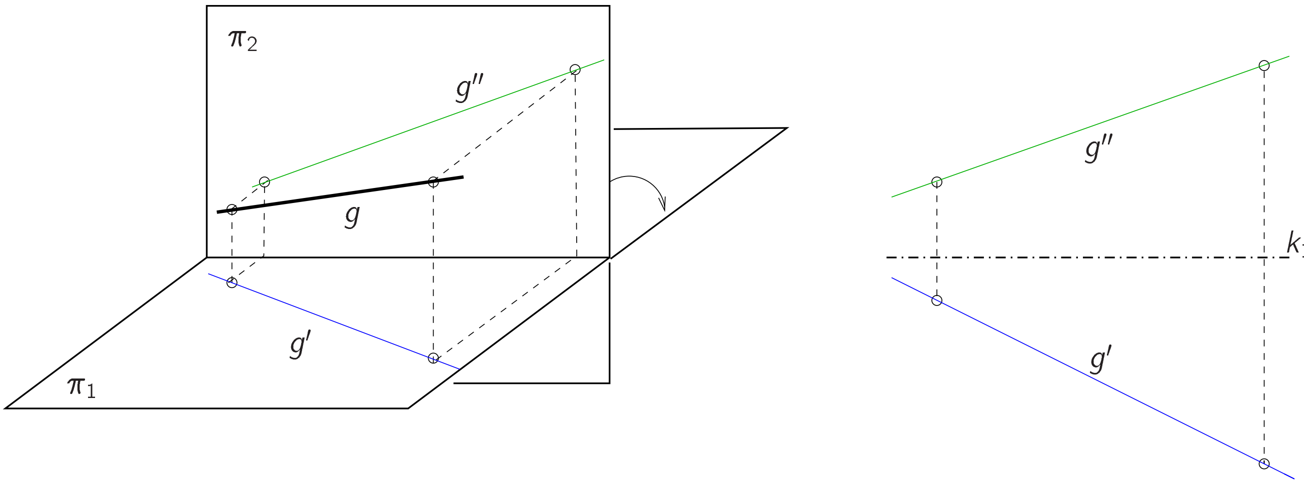



Abbildung 3.2: Zweitafelprojektion einer Gerade

Es gibt einige Sonderlagen für Geraden:

(a) Eine zu $\pi_1$ parallele Gerade heißt **Höhenlinie**, eine zu $\pi_2$ parallele **Frontlinie**. Eine **Hauptgerade** ist eine Höhenlinie oder eine Frontlinie. Eine für Maßaufgaben wichtige Eigenschaft von Hauptgeraden ist:

| Der Grundriss einer Höhenlinie ist unverzerrt. Der Aufriss einer Frontlinie ist unverzerrt. |
|---|

(b) Eine zu $\pi_1$ bzw. $\pi_2$ senkrechte Gerade heißt **Erst**–bzw. **Zweitprojizierende**.

(c) Eine Gerade, deren Grund– und Aufriss ein Ordner ist, heißt eine **gelehnte** Gerade.

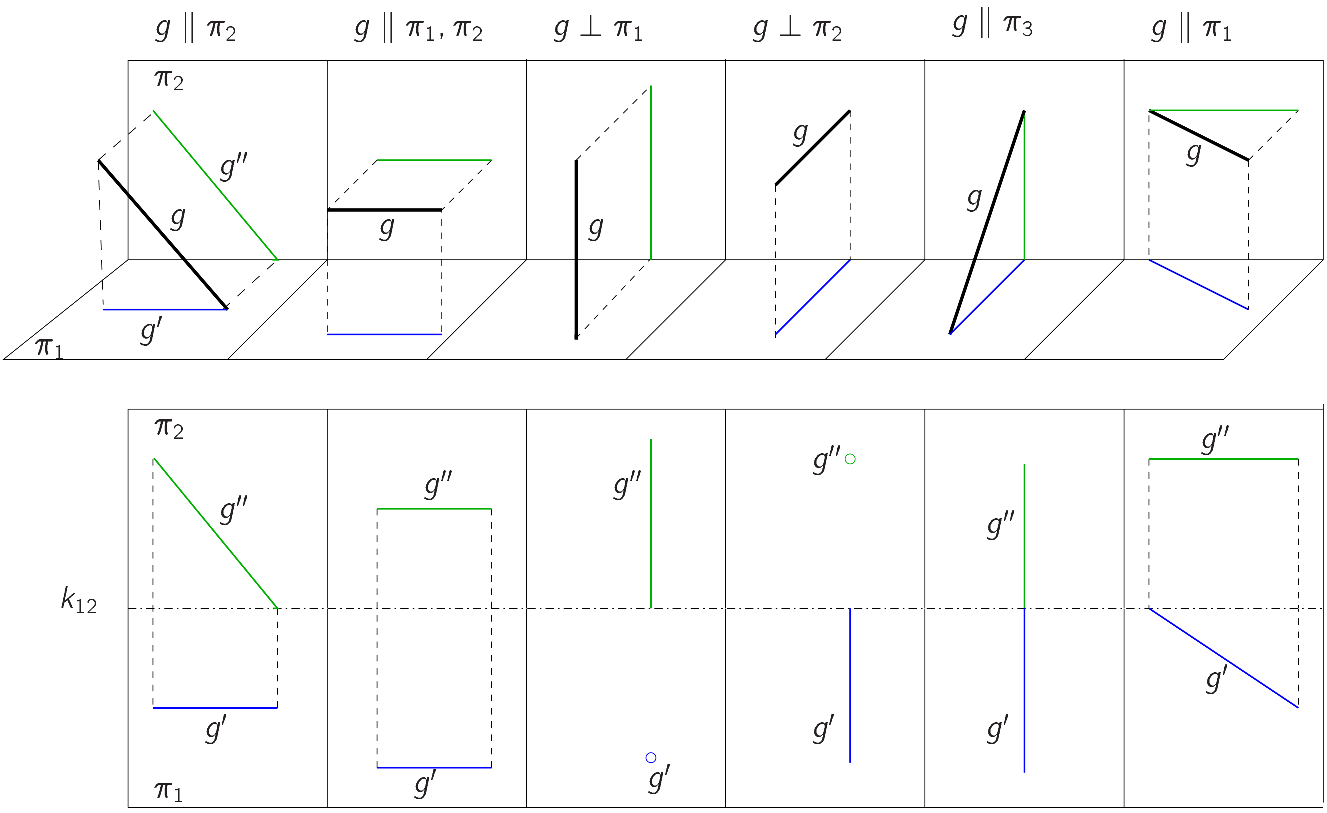



Abbildung 3.3: Sonderlagen von Geraden

Die Durchstoßpunkte einer Geraden g mit den Risstafeln nennt man **Spurpunkte** von g.

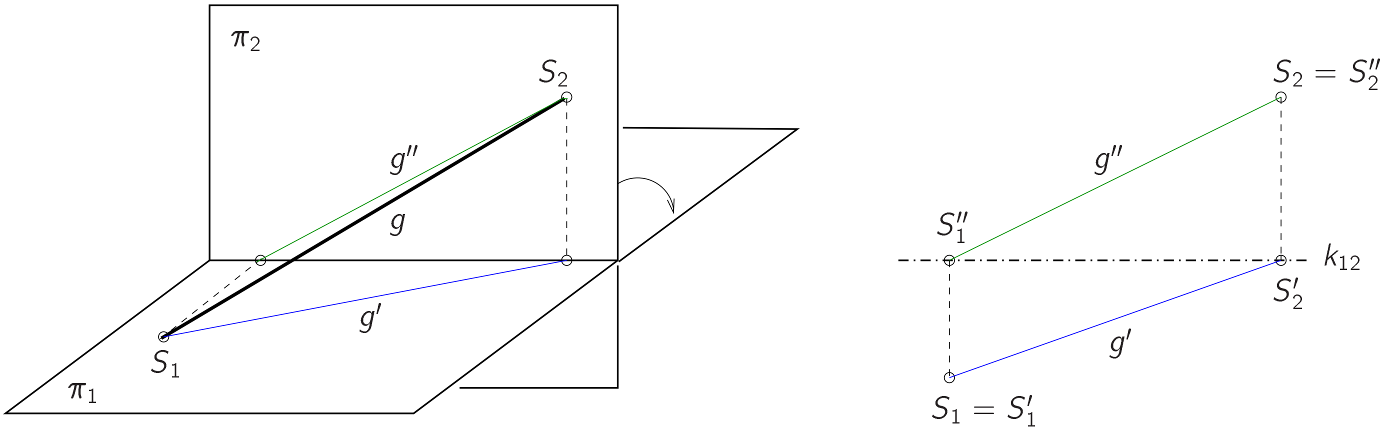



Abbildung 3.4: Spurpunkte einer Gerade

| |
|---|
| Die Risse paralleler Geraden sind parallel: |

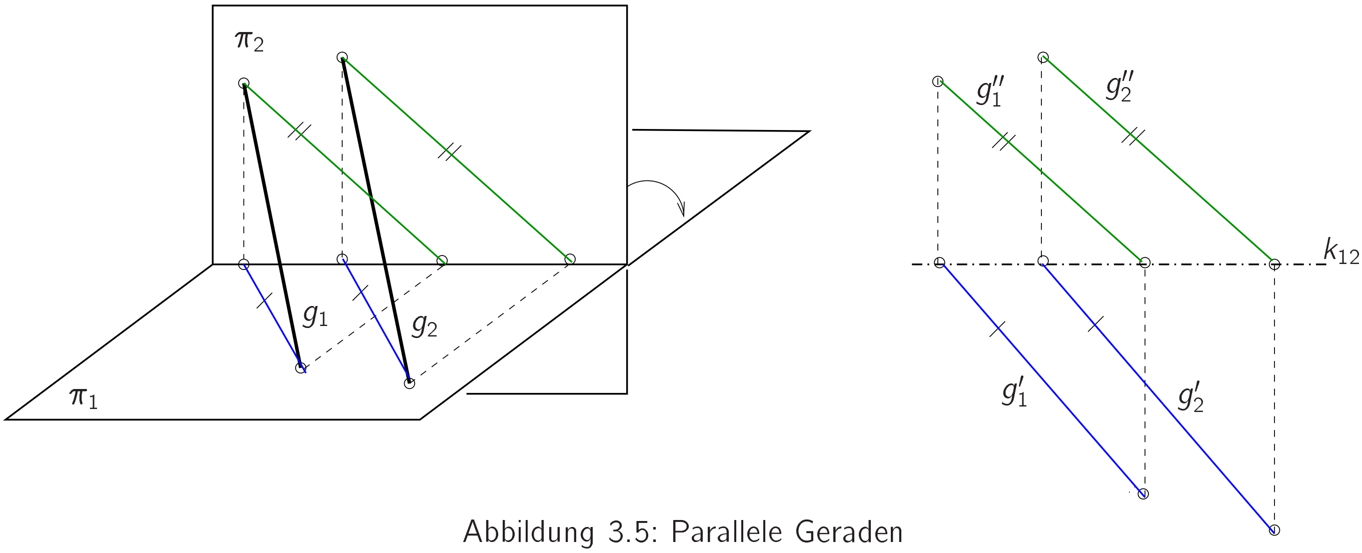



Abbildung 3.5: Parallele Geraden

| |
|---|
| Zwei Geraden $g_1, g_2$ haben einen Schnittpunkt, wenn $g_1' \cap g_2'$, $g_1'' \cap g_2''$ auf demselben Ordner liegen. Zwei nicht parallele Geraden, die keinen Schnittpunkt haben, heißen **windschief**. |

*Schneiden* sich zwei Geraden $g_1, g_2$ in einem Punkt $S$, so müssen $S'$ (in $\pi_1$) und $S''$ (in $\pi_2$) auf einem Ordner liegen. Nur dann ist $S', S''$ das Bildpunktpaar eines beiden Geraden gemeinsamen Punktes (s. Abb. 3.6).

Sind zwei Geraden $g_1, g_2$ zueinander *windschief*, dann liegt der Schnittpunkt $S'$ von $g_1'$ und $g_2'$ im Grundriss mit dem Schnittpunkt $T''$ (von $g_1''$ und $g_2''$) im Aufriss nicht auf einem Ordner (s. Abb. 3.7).

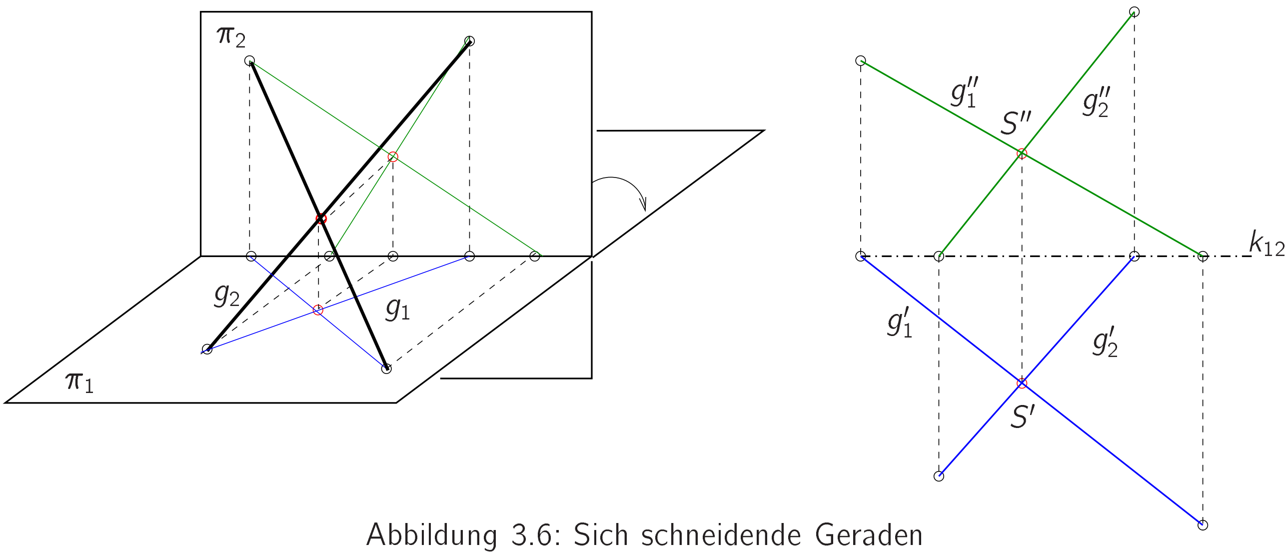



Abbildung 3.6: Sich schneidende Geraden

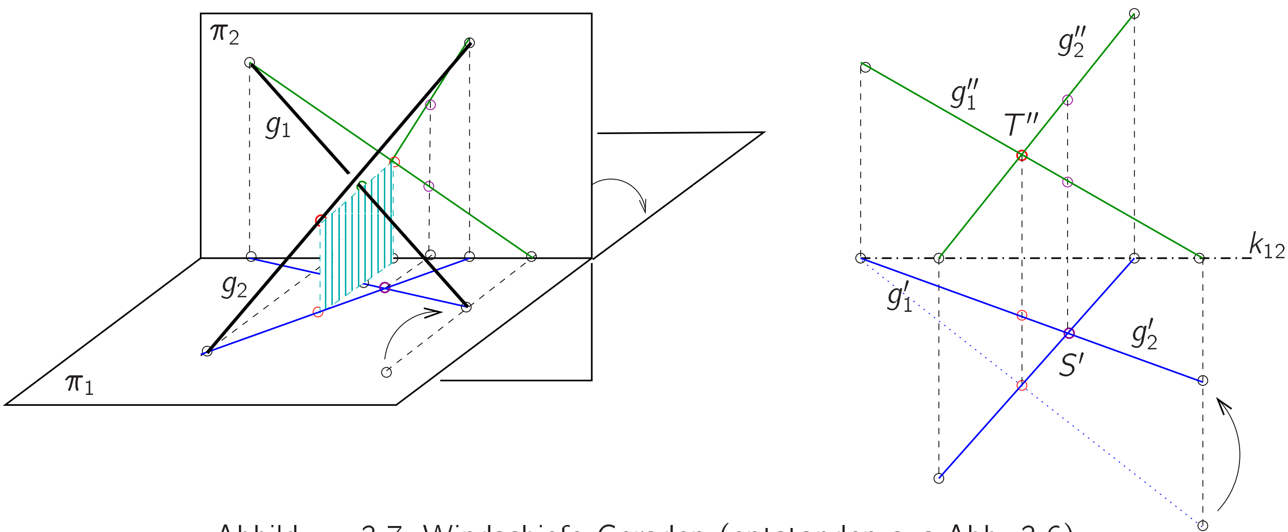



Abbildung 3.7: Windschiefe Geraden (entstanden aus Abb. 3.6)

**Aufgabe 3.1** *Liegen die vier in Grund– und Aufriss gegebenen Punkte (Abb. 3.8) in einer Ebene?*

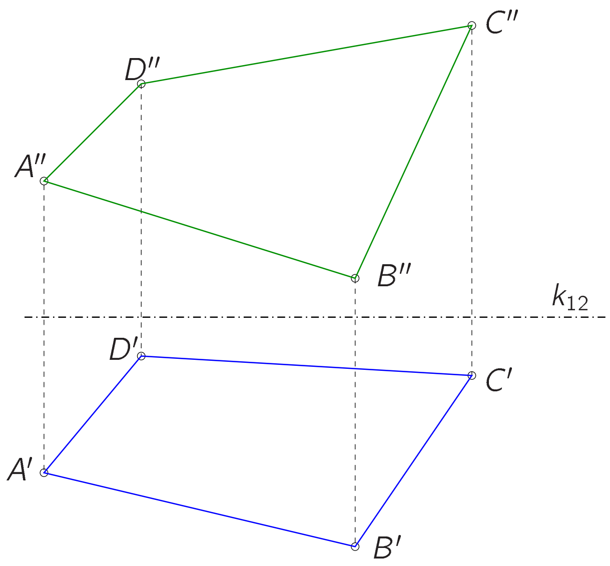



Abbildung 3.8: Ist das Viereck eben?

**Aufgabe 3.2** *Durch die Grund– und Aufrisse der Geraden $a, b, c, d$ ist ein Prisma gegeben (Abb. 3.9). Bestimme die Schnittfigur des Prismas mit der Grundrisstafel $\pi_1$.*

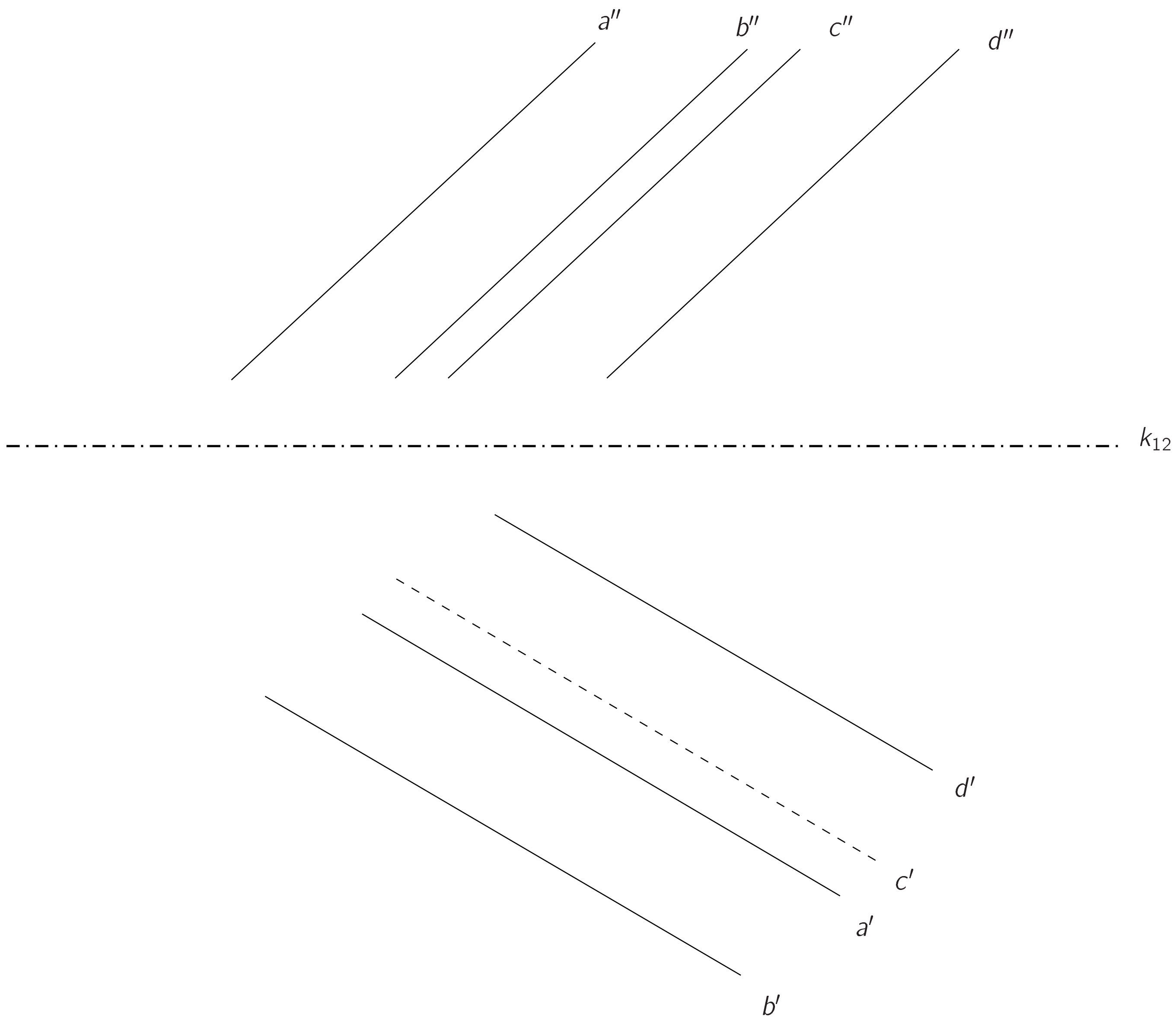



Abbildung 3.9: Grundriss–Spur eines Balkens

Bei sich schneidenden Geraden interessiert oft die wahre Größe des Schnittwinkels. Da ebene Figuren unverzerrt abgebildet werden, wenn sie parallel zur Bildtafel sind, gilt:

Der Schnittwinkel zweier Geraden erscheint in der Risstafel $\pi_i$ unverzerrt, wenn beide Geraden parallel zu $\pi_i$ sind.

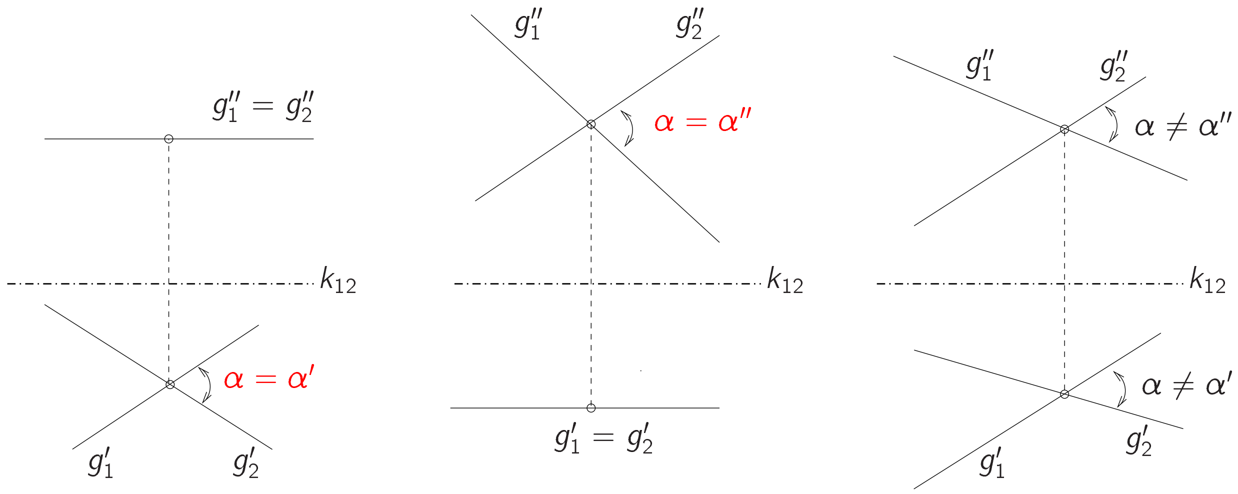



Abbildung 3.10: Winkel schneidender Geraden

Für den rechten Winkel kann die Voraussetzung abgeschwächt werden:

Ein **rechter Winkel** wird in der Risstafel $\pi_i$ als rechter Winkel abgebildet, wenn (wenigstens) **ein** Schenkel parallel zu $\pi_i$ ist.

**Aufgabe 3.3** *Wo erscheinen in den folgenden Rissen eines Hauses (Abb. 3.11) Winkel in wahrer Größe?*

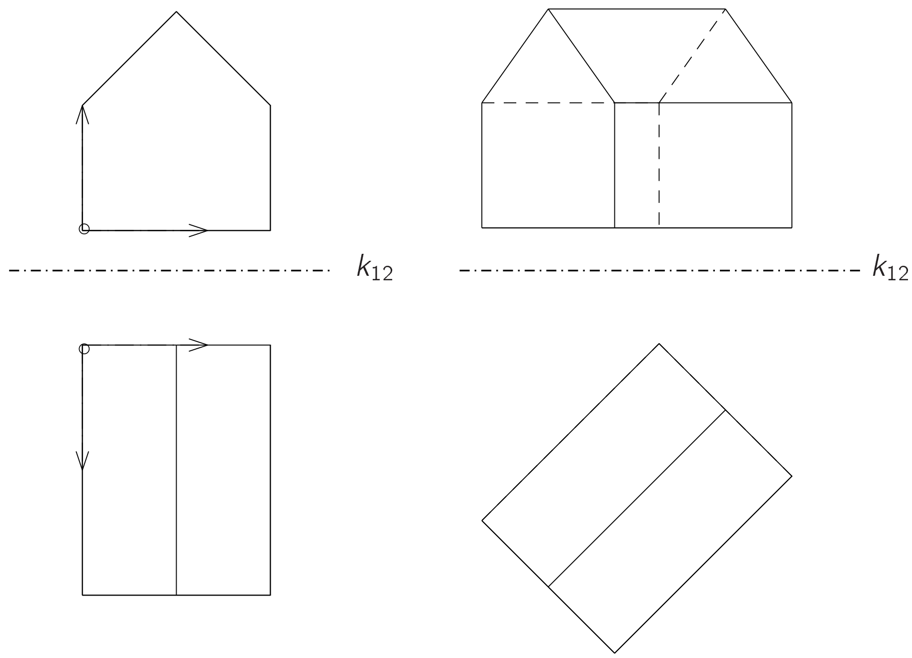



Abbildung 3.11: Wahre Winkel?

## 3.3 Zweitafelprojektion einer Ebene

(s. LEO S.91)

Eine Ebene kann im Raum festgelegt werden durch
(a) drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen,
(b) eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Gerade liegt,
(c) zwei parallele oder sich schneidende Geraden.

**Aufgabe 3.4** *Durch die Punkte $A, B, C$ ist eine Ebene $\varepsilon$ gegeben (Abb. 3.12). Von einem Punkt $P \in \varepsilon$ ist $P''$ bekannt. Bestimme $P'$.*

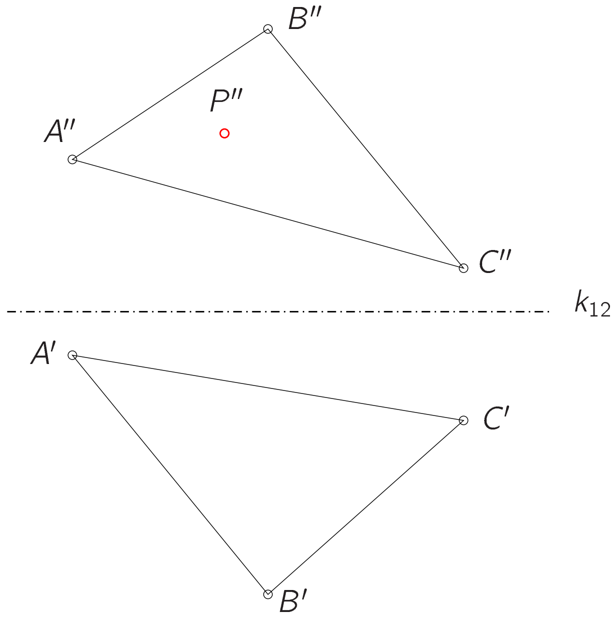



Abbildung 3.12: Punkt in einem Dreieck

Die Schnittgeraden einer Ebene $\varepsilon$ mit den Risstafeln, falls sie existieren, heißen die **Spuren** von $\varepsilon$ .

**Aufgabe 3.5** *Die Ebene $\varepsilon$ ist durch die Hauptgeraden $h_1$, $h_2$ durch den Punkt $P$ gegeben (Abb. 3.13). Bestimme die Spuren von $\varepsilon$.*

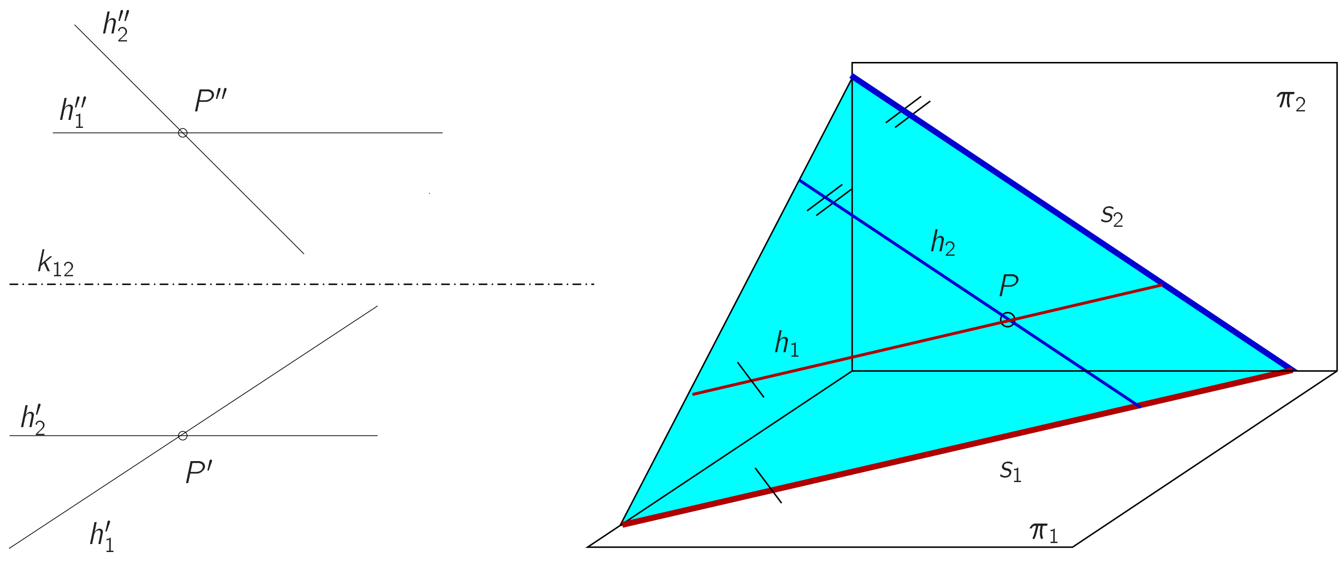



Abbildung 3.13: Spuren einer Ebene

**Aufgabe 3.6** *Die Ebene $\varepsilon$ ist durch ihre Spuren $s_1$, $s_2$ gegeben (Abb. 3.14). Von dem Punkt $P$ ist der Aufriss $P''$ bekannt. Bestimme $P'$ und die Hauptgeraden durch $P$.*

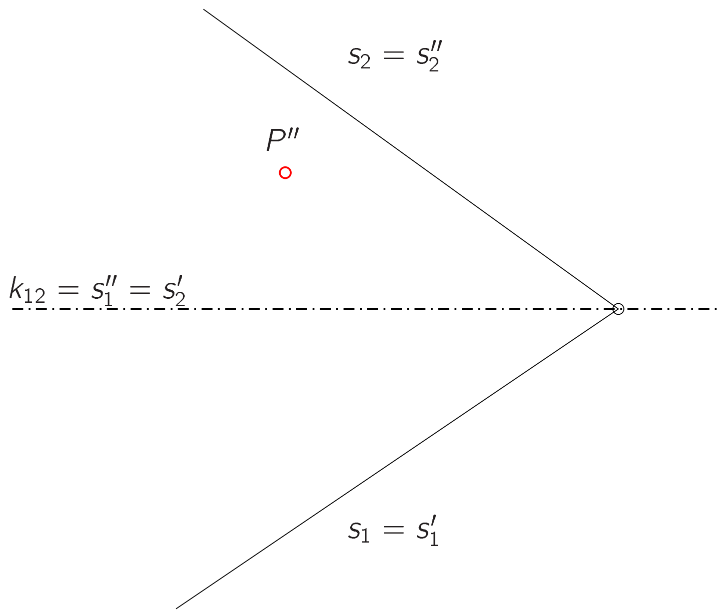



Abbildung 3.14: Punkt und Hauptgeraden in einer Ebene

**Aufgabe 3.7** *Gegeben: Satteldach eines Hauses und der Grundriss zweier Reklamebuchstaben auf einer Dachfläche (Abb. 3.15). Gesucht: Aufriss der Buchstaben.*

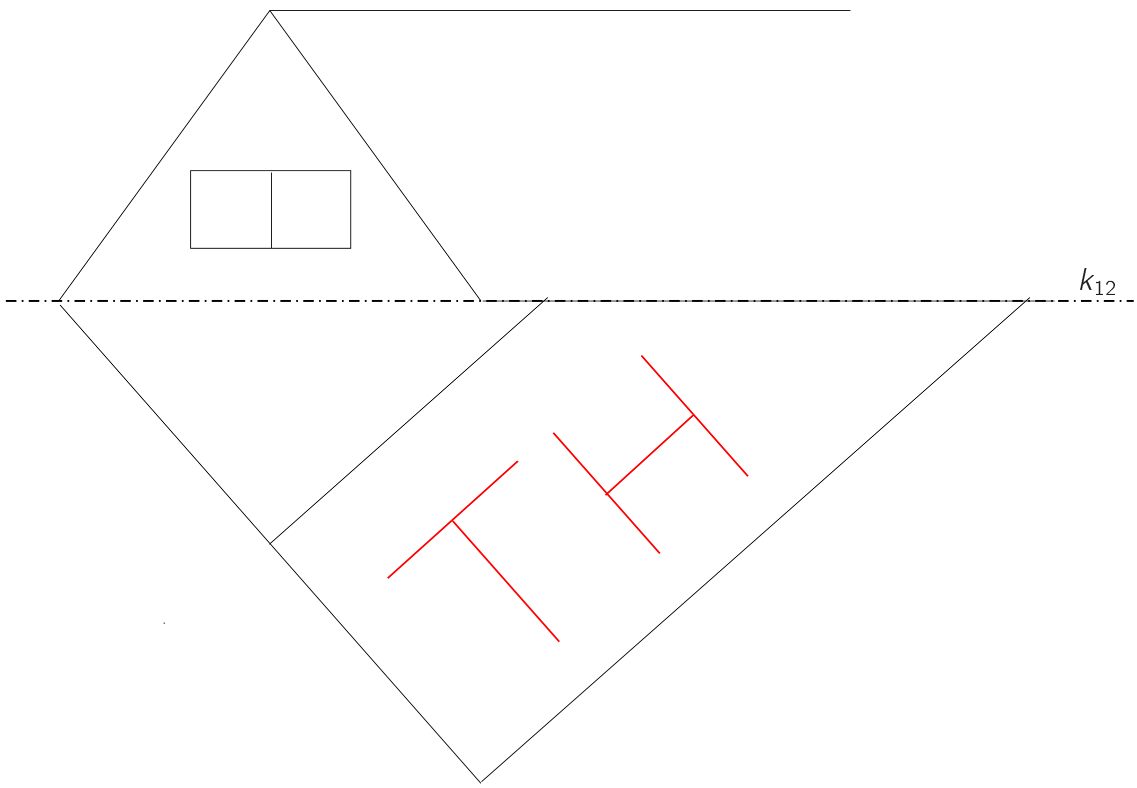



Abbildung 3.15: Reklame auf einem Dach

Einige Sonderlagen für Ebenen (Abb. 3.16):

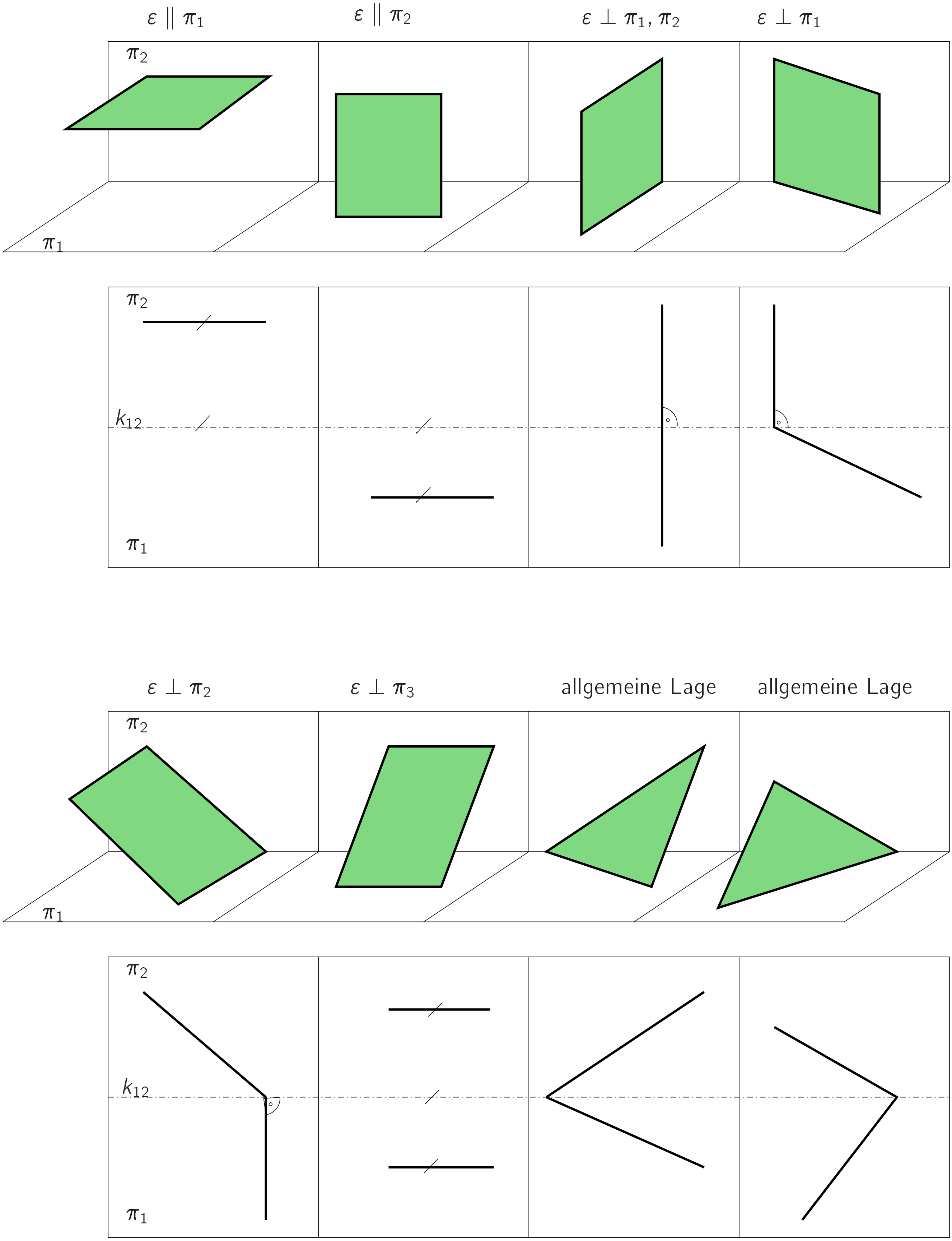



Abbildung 3.16: Sonderlagen von Ebenen

## 3.4 Weitere Risse (Umprojektionen)

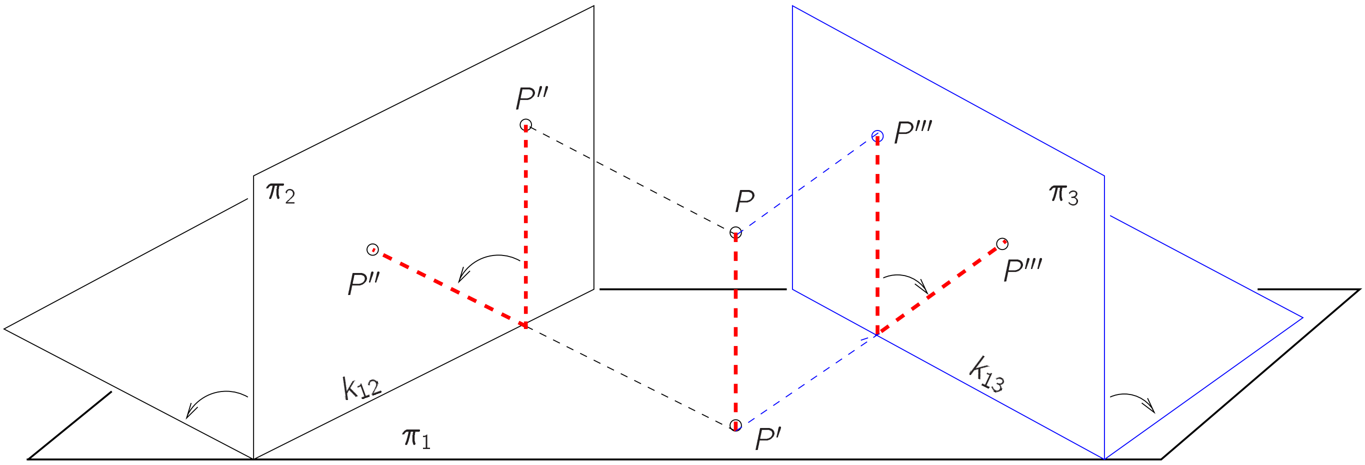
(s. LEO S.96)

Man kommt oft nicht mit Grund- und Aufriss aus, wenn z.B.

(a) gelehnte Lagen auftreten, da dann ohne Zusatzangaben Projektionen nicht eindeutig sind, oder wenn

(b) Grund- und Aufriss nicht „anschaulich“ sind.

Mit Hilfe weiterer Risstafeln lassen sich in Sonderlagen Konstruktionen (z.B. Antragen eines Winkels oder einer Länge) leichter ausführen.
Im Folgenden heißen zwei Risse (senkrechte Parallelprojektionen) einander **zugeordnet**, wenn die zugehörigen Risstafeln senkrecht zueinander stehen.
**Prinzip:** Man führt eine neue Risstafel $\pi_3$ so ein, dass sie entweder $\pi_1$ oder $\pi_2$ zugeordnet ist. In jedem Fall wird $\pi_3$ um die neue Risskante $k_{13}$ oder $k_{23}$ in die Zeichenebene geklappt.



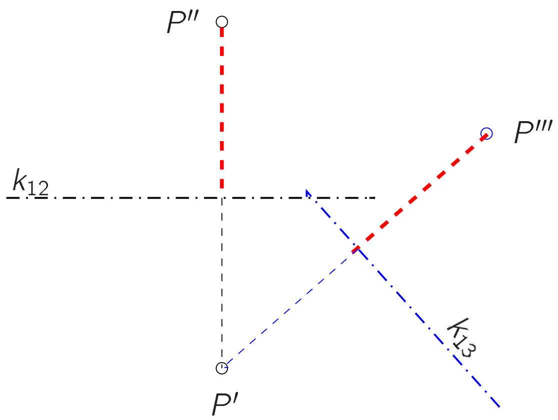




Abbildung 3.17: Umprojektion eines Punktes

**Durchführung**, falls $\pi_3$ der Tafel $\pi_1$ zugeordnet ist.
In diesem Fall kann man $\pi_3$ als eine neue Aufrisstafel auffassen.

(1) Zeichne die neue Risskante $k_{13}$.

(2) Der (neue) Riss $P'''$ des Punktes $P$ liegt auf der Senkrechten zu $k_{13}$ durch $P'$ (neuer Ordner) und hat denselben Abstand von der neuen Risskante $k_{13}$ wie $P''$ (der alte Aufriss) von (der alten Risskante) $k_{12}$.

Der neue Riss in $\pi_3$ ist über die Risskante $k_{13}$ dem Riss in $\pi_1$ zugeordnet.

**Aufgabe 3.8** *Stelle durch Umprojektion ein anschauliches Bild eines Hauses her (Abb. 3.18).*

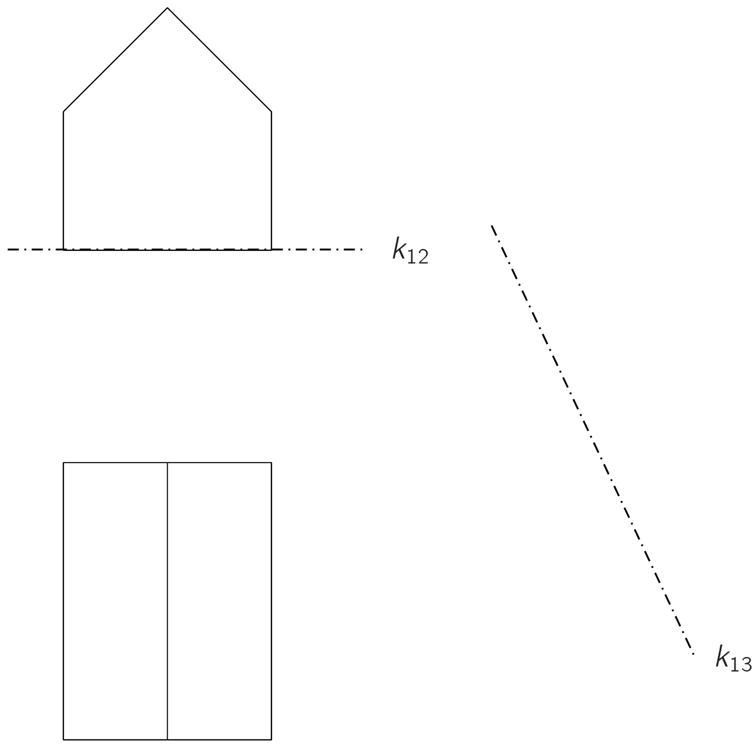



Abbildung 3.18: Umprojektion eines Hauses

Die Durchführung für den Fall, dass $\pi_3$ der Aufrisstafel zugeordnet ist, verläuft analog (Abb. 3.19).

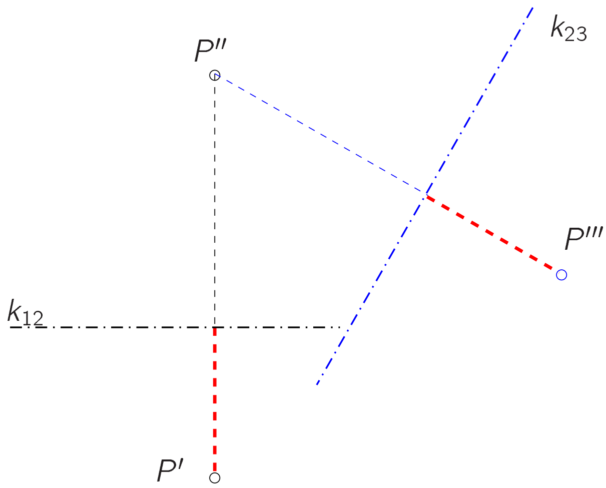



Abbildung 3.19: Umprojektion eines Punktes (Grundriss wird ersetzt)

**Aufgabe 3.9** *Stelle durch Umprojektion ein anschauliches Bild einer Pyramide her (Abb. 3.20).*

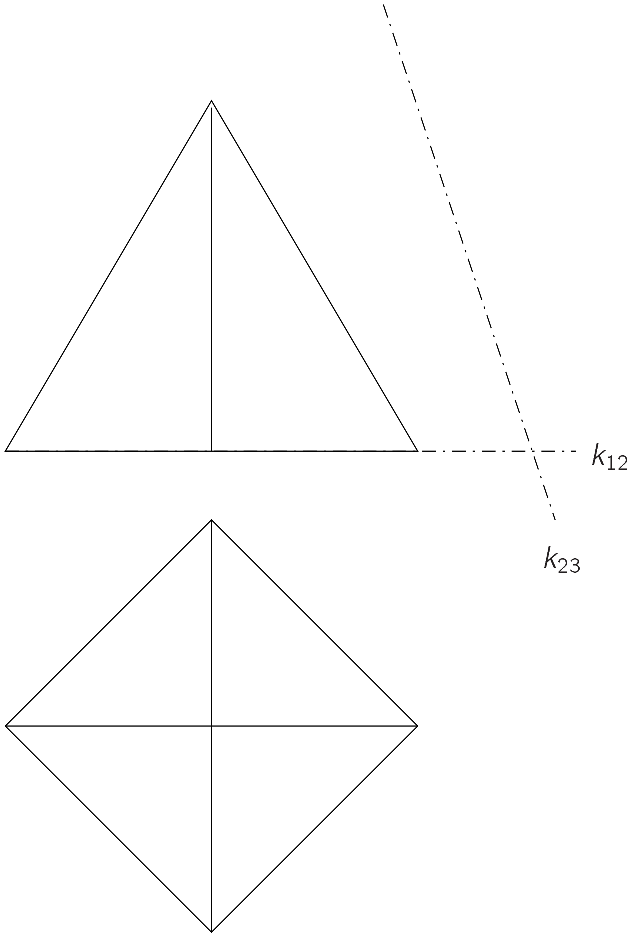



Abbildung 3.20: Umprojektion einer Pyramide (Grundriss wird ersetzt)

Umprojektionen können mehrfach hintereinander durchgeführt werden. Dabei muss man auf folgendes achten:
(a) Man muss von zwei **zugeordneten Rissen** ausgehen.
(b) Aus dem **wegfallenden** Riss muss der in **(2)** notwendige Abstand zur Risskante entnommen werden.

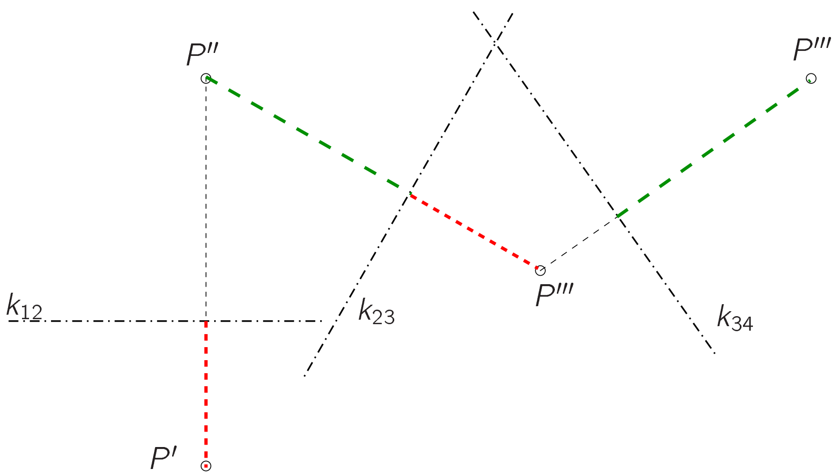



Abbildung 3.21: Mehrfachumprojektion eines Punktes

## 3.5 Grundaufgaben

### 3.5.1 Schnittpunkt (Durchstoßpunkt) Gerade–Ebene

(s. LEO S.92)

Gegeben: Gerade $g$ durch Grundriss $g'$ und Aufriss $g''$,
Ebene $\varepsilon$ durch drei Punkte $A, B, C$ in Grund- und Aufriss (Aufgabe 3.10).
Gesucht: Schnittpunkt $D = g \cap \varepsilon$.
Lösungs**idee**: Es sei $\mu$ die zu $\pi_1$ (oder $\pi_2$) senkrechte Ebene, die $g$ enthält. Sie schneidet $\varepsilon$ in der Schnittgeraden $s = \mu \cap \varepsilon$. Dann gilt für den gesuchten Durchstoßpunkt $D = s \cap g$.

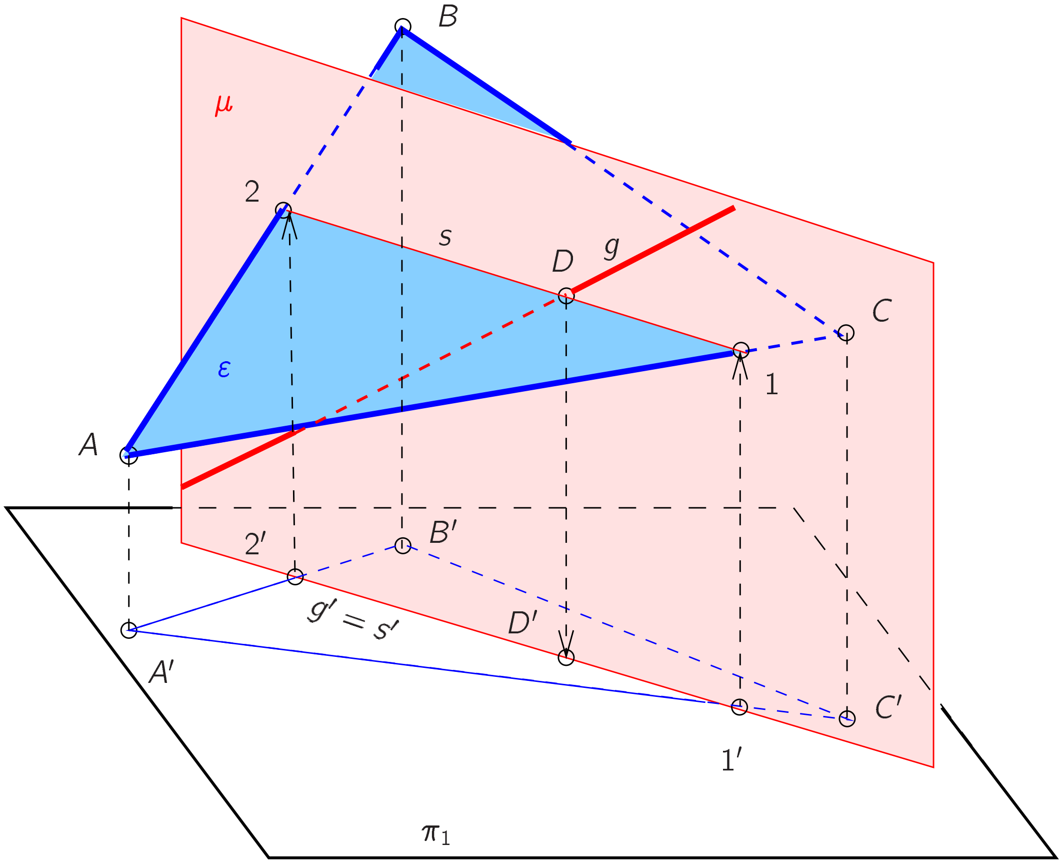



Abbildung 3.22: Schnitt Gerade–Ebene

**Durchführung**, falls $\mu \perp \pi_1$ gewählt ist:

(1) Wähle zwei Geraden $e_1$, $e_2$ der Ebene $\varepsilon$, die nicht zu $g'$ parallel sind. $e_1'$, $e_1''$, $e_2'$, $e_2''$ seien ihre Risse.
(2) Der Schnitt von $g'$ mit $e_1'$ bzw. $e_2'$ liefert $E_1'$ bzw. $E_2'$.
(3) Bestimme (mit Ordnern) $E_1''$, $E_2''$ auf $e_1''$, $e_2''$.
(4) Die Gerade durch $E_1''$ und $E_2''$ ist der Aufriss $s''$ der Hilfsgeraden $s$.
(5) $D'' = s'' \cap g''$ ist der Aufriss des Durchstoßpunktes $D$.
(6) $D'$ ist der Schnittpunkt des Ordners durch $D''$ mit $g'$.

Die Durchführung für den Fall, dass $\mu \perp \pi_2$ gewählt wurde, verläuft analog; man muss nur die Rollen von Grund- und Aufriss vertauschen.

**Aufgabe 3.10** *Bestimme den Schnittpunkt einer Gerade mit der durch ein Dreieck gegebenen Ebene (Abb. 3.23).*

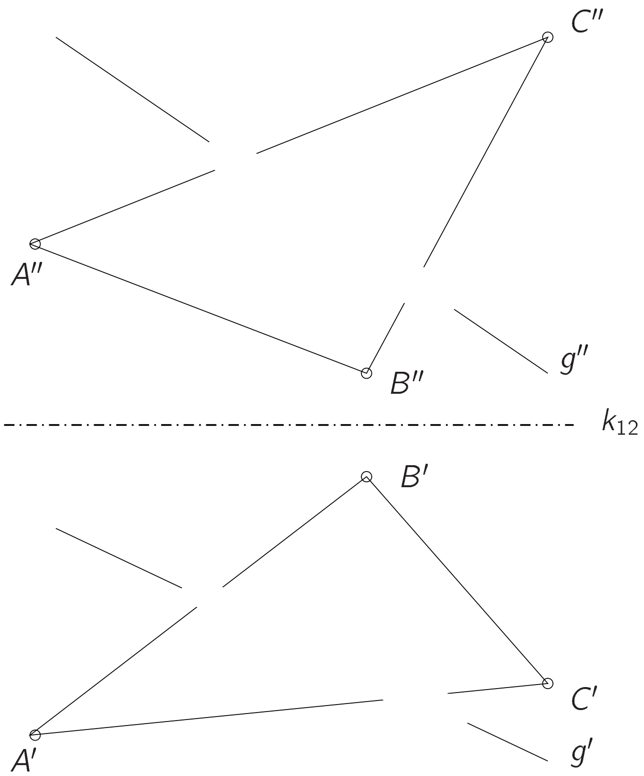



Abbildung 3.23: Schnitt Gerade–Ebene

**Aufgabe 3.11** *In Grund- und Aufriss ist ein dreikantiger Balken und ein ebenes Viereck gegeben (Abb. 3.24). Bestimme Grund- und Aufriss der Schnittfigur.*

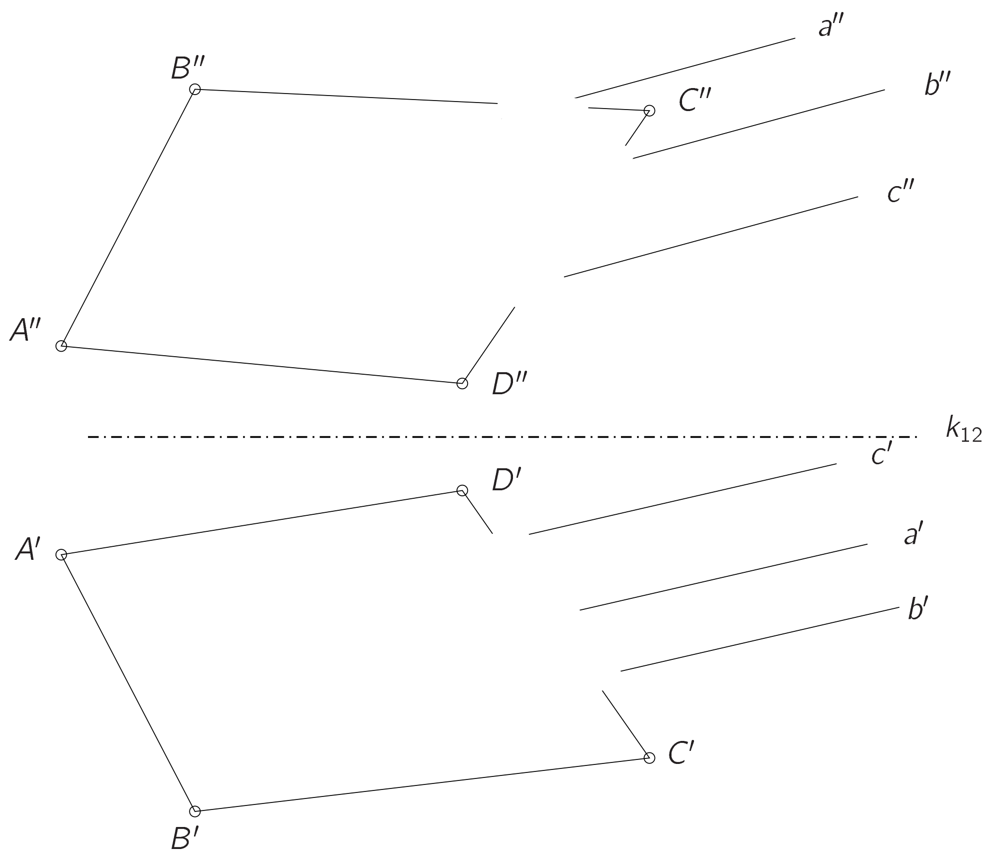



Abbildung 3.24: Schnitt Balken–Ebene

Die Idee, den Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene mit Hilfe einer senkrechten Hilfsebene zu bestimmen, lässt sich direkt bei der Kontruktion eines Schattenpunktes auf eine geneigte Ebene verwenden.

**Aufgabe 3.12** *Gegeben ist ein axonometrisches Bild (Kavalierperspektive) eines Hochhauses (Quader), zweier Fabrikhallen mit schrägen Dächern, sowie paralleles Licht durch die Lichtrichtung* **l** *und den Schattenwurf einer Kante (Abb. 3.25). Zeichne den Schatten.*

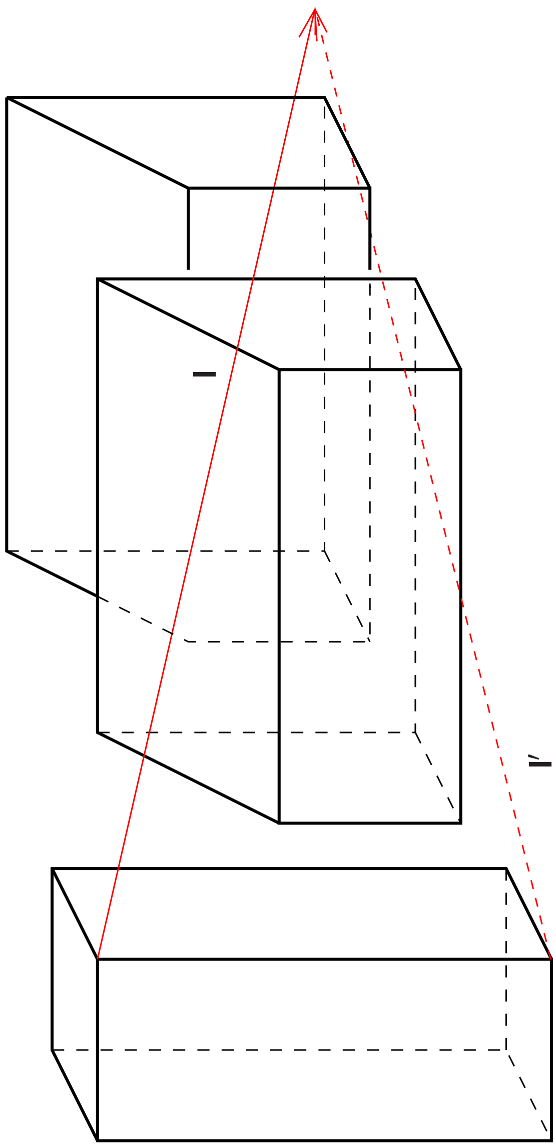


Abbildung 3.25: Schatten auf geneigte Ebenen bei parallelem Licht

### 3.5.2 Wahre Länge einer Strecke

(s. LEO S.100)

Gegeben: Strecke $\overline{AB}$ in Grund- und Aufriss.
Gesucht: Die wahre Länge dieser Strecke.

Lösungs**idee**: Eine Strecke erscheint im Aufriss (bzw. Grundriss) in wahrer Länge, wenn die Strecke zur Aufrisstafel (bzw. Grundrisstafel) parallel ist.
Wir geben hier zwei Möglichkeiten an, die Strecke „tafelparallel“ zu machen:

**1. Möglichkeit:**

Man dreht die Strecke um eine zur Grundrisstafel (bzw. Aufrisstafel) senkrechte Achse bis sie parallel zur Aufrisstafel (bzw. Grundrisstafel) ist.

**Durchführung** der Drehung um eine zu $\pi_1$ senkrechte Achse durch $B$:

(1) Drehe $A'$ um $B'$, bis die gedrehte Strecke parallel zu $k_{12}$ ist. Der gedrehte Punkt sei $\tilde{A}'$ (Grundriss von $\tilde{A}$, dem um $B$ gedrehten Punkt $A$).
(2) $\tilde{A}''$ liegt auf dem Ordner durch $\tilde{A}'$ und auf der Parallelen durch $A''$ zur Risskante (bei der Drehung bleibt $\tilde{A}$ auf der gleichen Höhe wie $A$ !).
(3) $|\tilde{A}''\,B''|$ ist die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$.

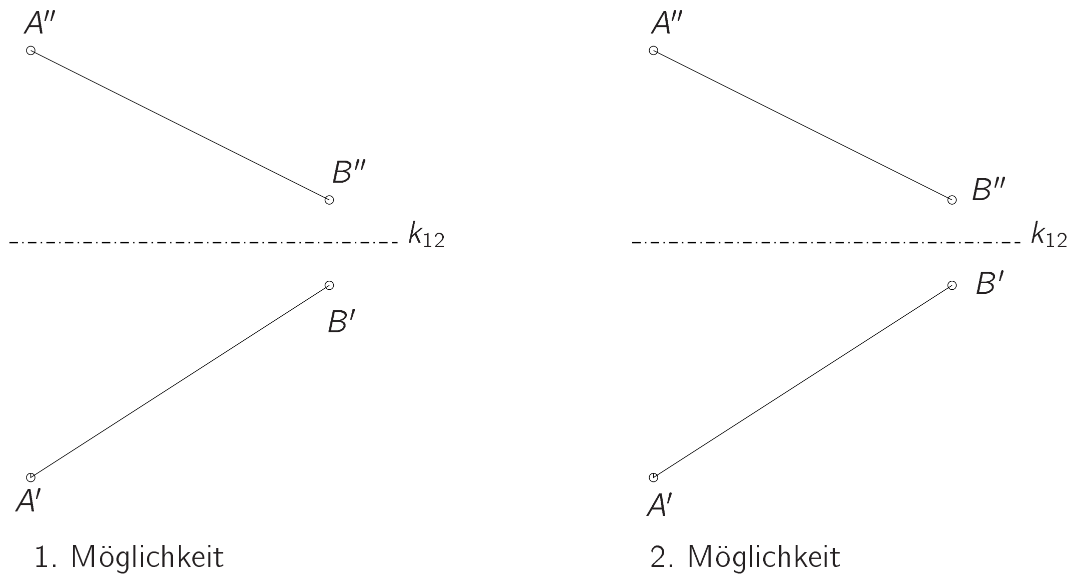



Abbildung 3.26: Wahre Länge einer Strecke

**2. Möglichkeit:**

Man legt durch die Strecke $\overline{AB}$ eine zu $\pi_1$ (bzw. $\pi_2$) senkrechte Ebene $\mu$ und dreht $\mu$ um eine Höhenlinie (Frontlinie) in eine horizontale (senkrechte) Lage.

**Durchführung** der Drehung um eine Höhenlinie durch $B$:

(1) Zeichne den Aufriss $C''$ des Punktes $C$, der senkrecht unter $A$ liegt und dieselbe Höhe wie $B$ hat. Es ist $C' = A'$.
(2) Man drehe das rechtwinklige Dreieck $A, B, C$ um die Kathete $\overline{BC}$ um 90° parallel zu $\pi_1$, indem man in $A'(= C')$ senkrecht die Strecke $\overline{C''A''}$ anträgt. Die Hypothenuse des entstandenen Dreiecks ist die wahre Länge der Strecke $\overline{A, B}$.

(Entspricht der Einführung einer neuen Risstafel parallel zur Strecke $\overline{AB}$.)

**Aufgabe 3.13** *Von einem Punkt P und einer Geraden g sind Grund- und Aufriss gegeben (Abb. 3.27). Trage auf g eine in P beginnende Strecke der Länge 3 cm ab.*

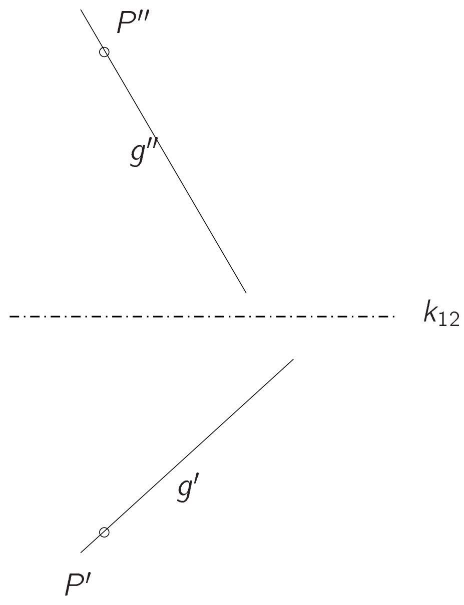



Abbildung 3.27: Antragen einer wahren Länge einer Strecke

**Aufgabe 3.14** *Gegeben: Satteldach, Kaminkopf (K) und die Richtung der Sonnenstrahlen (S) (Abb. 3.28). Gesucht: a) Schnitt des Kamins mit der Dachfläche. b) Schatten des Kamins auf der Dachfläche. c) Wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$ und die Dachneigung $\alpha$.*

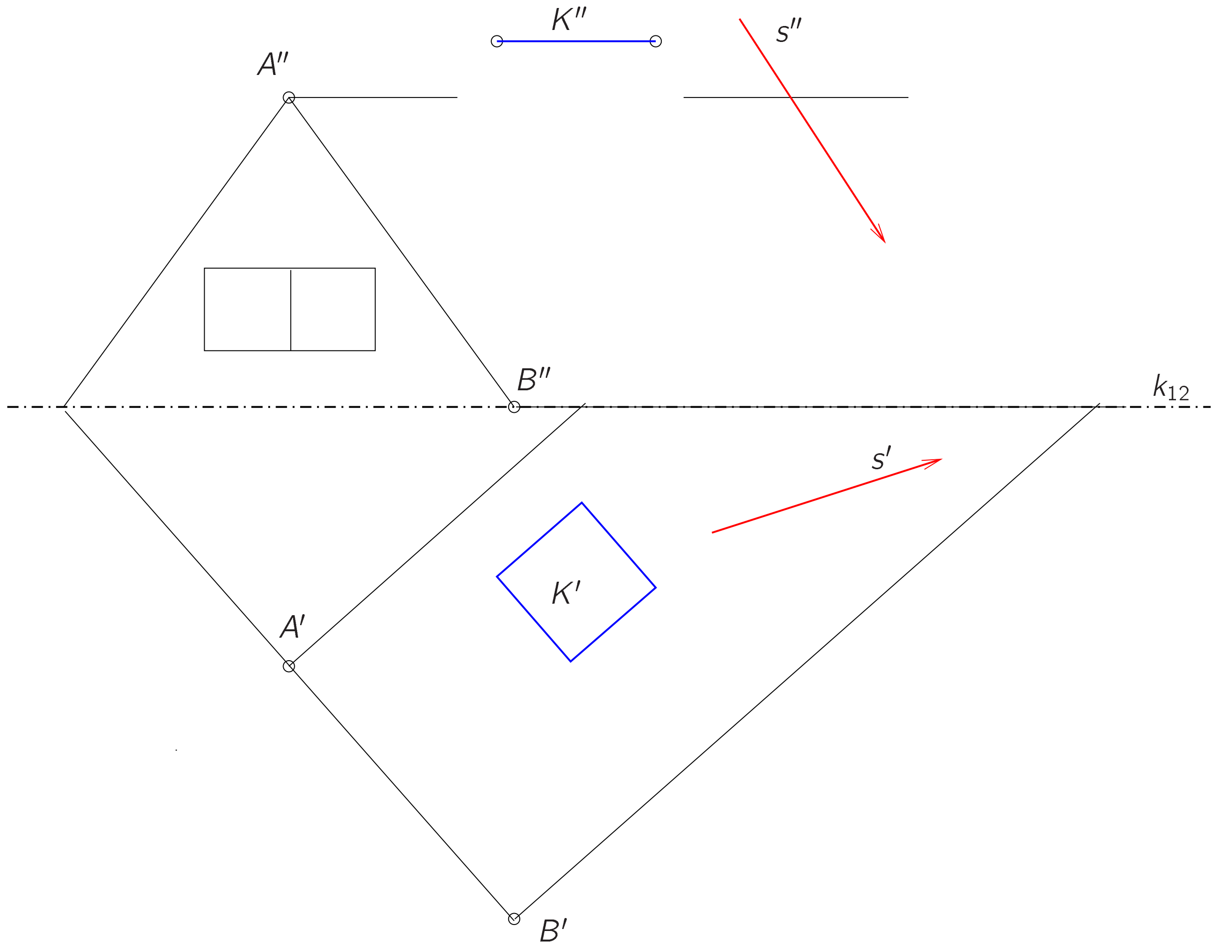



Abbildung 3.28: Schatten eines Kamins

### 3.5.3 Wahre Gestalt einer ebenen Figur

(s. LEO S.103)

Gegeben: Das Dreieck $A, B, C$ in Grund- und Aufriss.
Gesucht: Die Wahre Gestalt des Dreiecks.

Lösungs**idee**: Einführung einer Risstafel $\pi_3$ senkrecht zum Dreieck. Der Riss des Dreiecks erscheint in $\pi_3$ als Strecke. Jetzt lässt sich eine Risstafel $\pi_4$ parallel zu dem Dreieck einführen und das Dreieck erscheint in $\pi_4$ in wahrer Gestalt.

**Durchführung**, falls $\pi_3$ der Grundrisstafel zugeordnet wird:

(1) Bestimme eine Höhenlinie $h$ des Dreiecks.
(2) Neue Risskante $k_{13} \perp h'$. Umprojektion des Dreiecks.
$A''', B''', C'''$ liegen auf einer Geraden $d'''$.
(3) Neue Risskante $k_{34} || d'''$. Der neue Riss zeigt das Dreieck in wahrer Gestalt.

**Aufgabe 3.15** *Bestimme die wahre Gestalt eines in Grund– und Aufriss gegebenen Dreiecks (Abb. 3.29).*

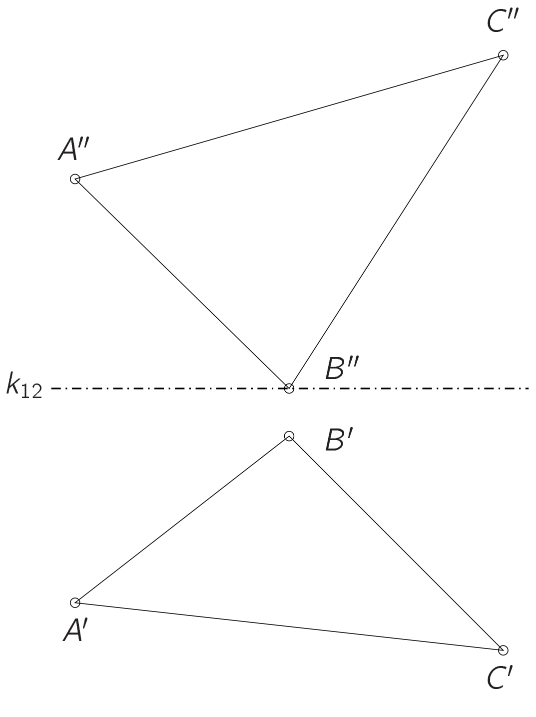



Abbildung 3.29: Wahre Gestalt eines Dreiecks

### 3.5.4 Lot auf eine Ebene (s. LEO S.105)

Gegeben: Ebene $\varepsilon$ durch drei Punkte $A, B, C$ und Punkt $P$.
Gesucht: Lot $l$ auf $\varepsilon$ durch $P$.

Lösungs**idee**: Ein rechter Winkel erscheint in einer senkrechten Parallelprojektion wieder als rechter Winkel, wenn ein Schenkel parallel zur Bildtafel ist. Höhenlinien (bzw. Frontlinien) sind parallel zu $\pi_1$ (bzw. $\pi_2$).

**Durchführung:**
(1) Zeichne die Höhenlinie $h$ und die Frontlinie $f$ von $\varepsilon$ durch (z.B.) $C$ in Grund- und Aufriss.
(2) Das Lot von $P'$ auf $h'$ ist der Grundriss $l'$ und das Lot von $P''$ auf $f''$ ist der Aufriss $l''$ des Lotes $l$ von $P$ auf $\varepsilon$.

**Aufgabe 3.16** *Bestimme den Fußpunkt des Lotes vom Punkt P auf die durch ein Dreieck bestimmte Ebene (Abb. 3.30, links).*

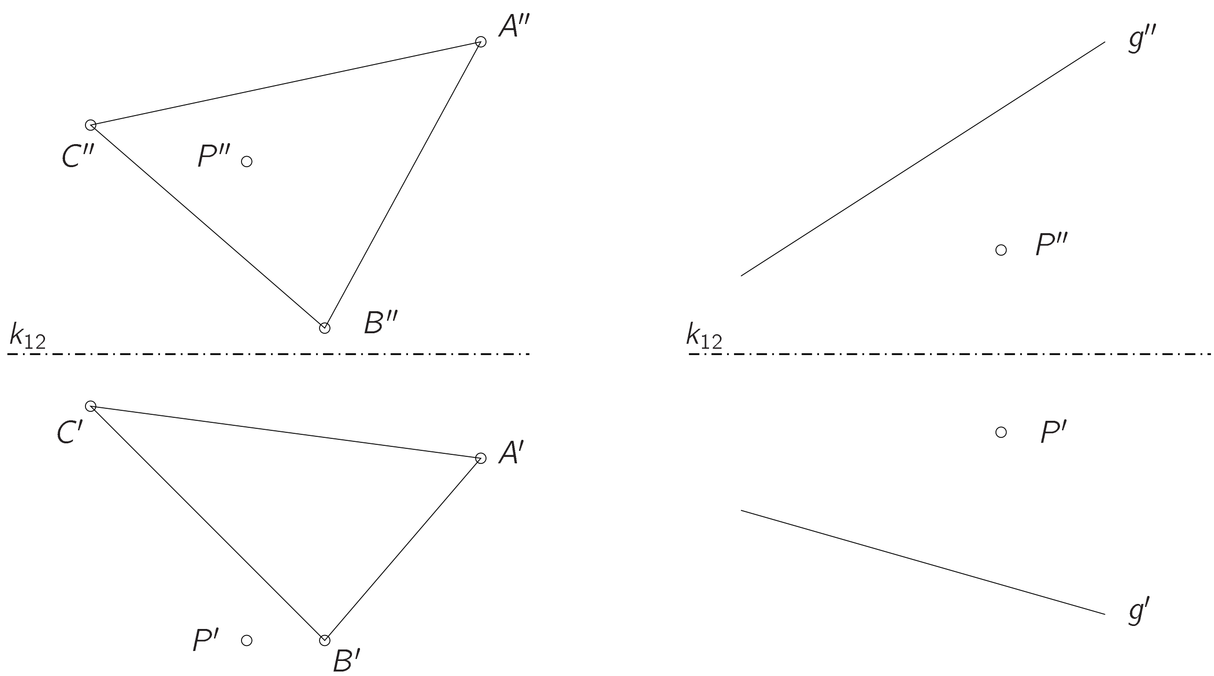



Abbildung 3.30: Lot auf Ebene bzw. Lotebene

**Aufgabe 3.17** *:*
*Gegeben:* *Gerade $g$, Punkt $P$, $P \notin g$ (Abb. 3.30 rechts).*
*Gesucht:* *Die Hauptgeraden der Lotebene $\mu$ zu $g$ durch $P$.*

## 3.6 Einschneideverfahren bei senkrechter Axonometrie

(s. LEO S.199,204,208)

Bei der **senkrechten** Axonometrie stehen die Projektionsstrahlen senkrecht zur Bildtafel. Da senkrechte Projektionen auf die Koordinatenebenen meistens nur unanschauliche Bilder liefern (z.B. bei einem Haus: Grund– Auf– und Seitenriss) machen wir hier die folgende Annahme:

**Keine** Koordinatenebene ist **parallel** zur Bildtafel !!

Wesentlich für die Orientierung der Risse, um ein **senkrecht** axonometrisches Bild beim Einschneiden zu erhalten, ist das *Spurdreieck* $S_x$, $S_y$, $S_z$. Es besteht aus den Schnittpunkten der Bildtafel mit den Koordinatenachsen (s. Fig. 3.31).

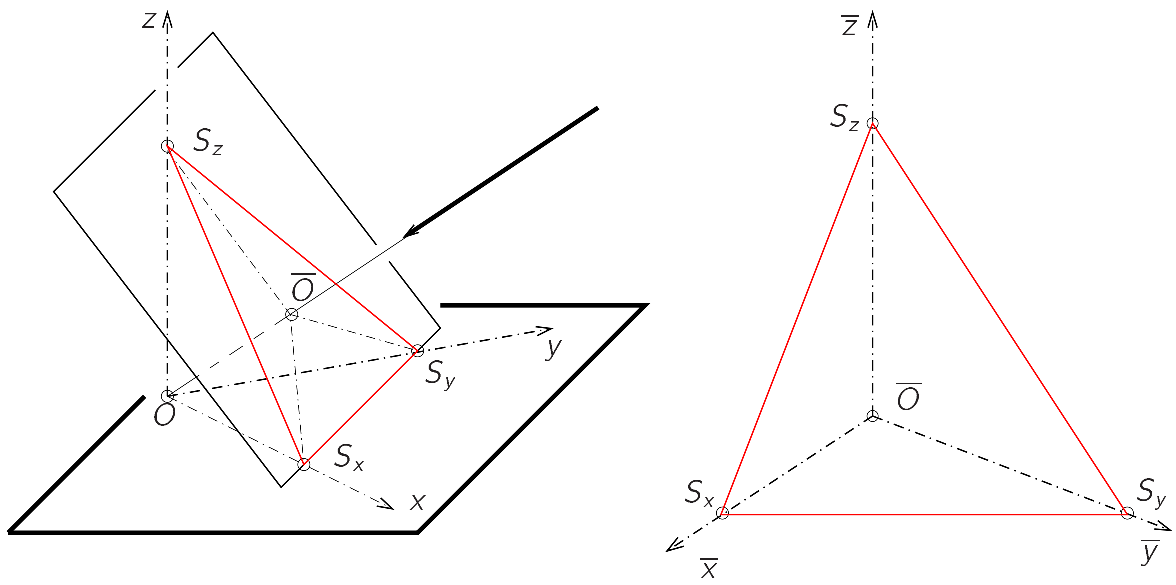



Abbildung 3.31: Senkrechte Axonometrie: Spurdreieck

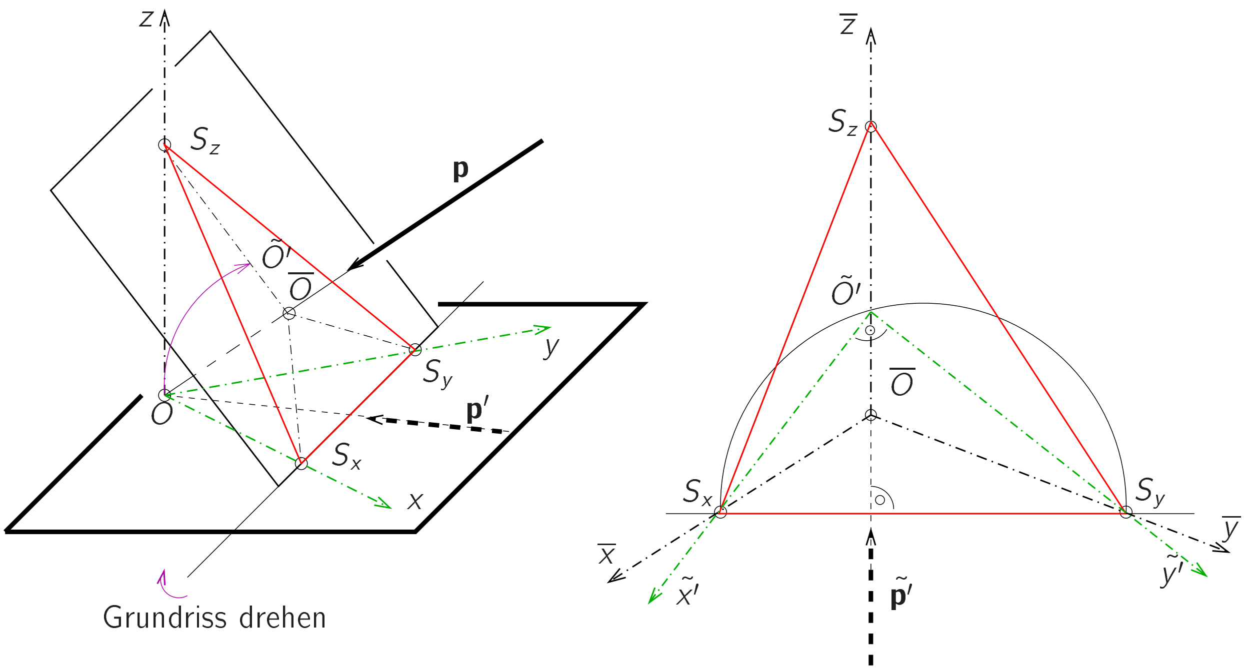



Abbildung 3.32: Senkrechte Axonometrie: Grundriss in die Bildtafel drehen

Für das Einschneideverfahren muss der Grundriss und die Bildtafel in derselben Zeichenebene liegen. Also drehen wir den Grundriss um die Grundrissspur in die Bildebene (Fig. 3.32).
Aus dem rechten Bild von Fig. 3.32 erkennen wir

- wie wir den Grundriss in die Zeichenebene legen müssen und in welche Richtung wir einschneiden müssen (senkrecht zur Grundrissspur).
- nach analogen Überlegungen für die Aufrisse:
  Das Bild $\overline{\mathbf{O}}$ des Kooridnatenursprungs ist der **Schnittpunkt der Höhen** des Spurdreiecks und die Höhen sind die Bilder der Koordinatenachsen.

Es gibt nun **drei Möglichkeiten** die Orientierung für das Einschneideverfahren (bei senkrechter Axonometrie) vorzugeben:

a) Man legt das **Spurdreieck** $S_x, S_y, S_z$ (im Einschneidebild) fest. Dann sind die Höhen des Spurdreiecks die Bilder der Koordinatenachsen und der Höhenschnittpunkt ist $\overline{O}$.
Der Nullpunkt des Grundrisses findet man über den Thaleskreis (s. Fig. 3.32). Durch Herausziehen des umgeklappten Grundrisses in Richtung $\overline{\mathbf{p}'}$ liegt die Position und die Einschneiderichtung für den Grundriss fest. Analog verfährt man mit einem der Aufrisse.

b) Man legt das Bild des **Koordinatendreibein**s fest, wählt irgendeinen Punkt der x-Achse als **Spurpunkt** $S_x$ und ergänzt $S_y, S_z$ so, dass die Koordinatenbilder die Höhen des Spurdreiecks sind. Der Rest verläuft wie in a).

c) Man legt in Grund– und Aufriss die **Projektionsrichtung** fest und wählt (z.B.) den **Spurpunkt** $S_x$. Die Grundrissspur muss senkrecht zum Grundriss der Projektionsrichtung sein (s. Fig.3.33). Damit findet man $S_y$ im Grundriss und Aufriss. Die Aurissspur muss senkrecht zum Aufriss der Projektionsrichtung sein. Damit findet man $S_z$. Also sind von dem Spurdreieck die Seiten $S_xS_y$, $S_yS_z$ und die Höhe auf der Seite $S_xS_y$ bekannt (s. Fig. 3.33). Mit der Länge von $S_yS_z$ lässt sich $S_z$ im Einschneidebild zeichnen. Der Rest verläuft wie bei a). Statt der Höhe auf $S_xS_y$ kann man auch die wahre Länge von $S_xS_z$ verwenden (sie muss zuerst bestimmt werden !).

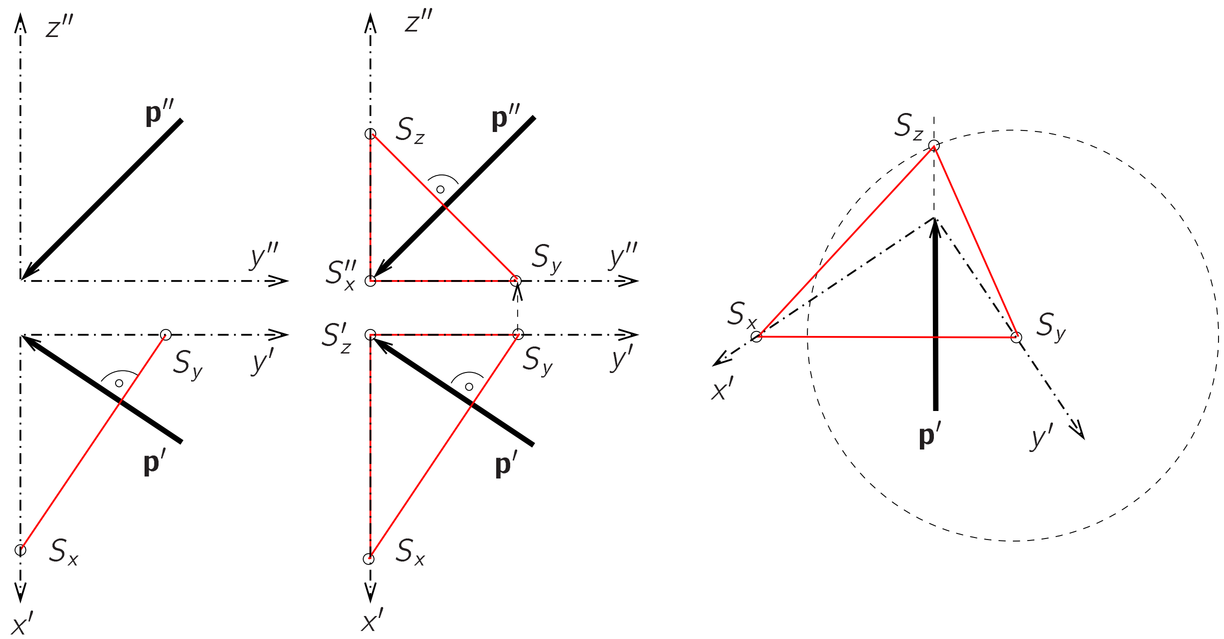



Abbildung 3.33: Konstruktion des Spurdreiecks aus der Projektionsrichtung

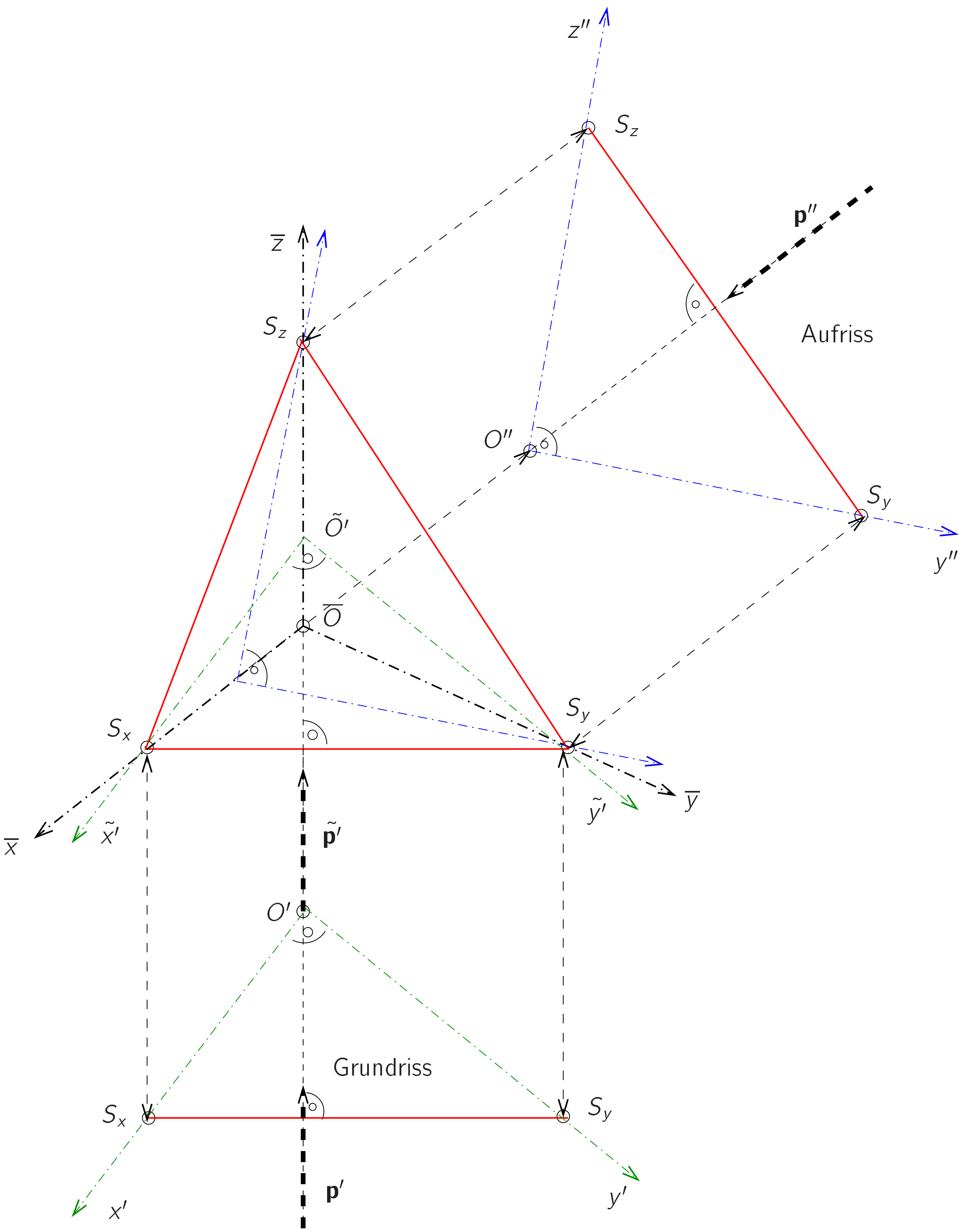



Abbildung 3.34: Senkrechte Axonometrie: Einschneideverfahren

**Mögliche Vorgaben**:

- Das **Spurdreieck** ist gegeben oder
- die Bilder der **Koordinatenachsen** sind gegeben oder
- die **Projektionsrichtung** ist in Grund– und Aufriss gegeben.

**Aufgabe 3.18** *Gegeben: Grund– und Afriss eines "halben" Würfels und die Bilder der Koordinatenachsen. Gesucht: Ein anschauliches Bild in senkrechter Axonometrie mit Hilfe des Einschneideverfahrens. Gib die Projektionsrichtung in Grund– und Aufriss an.*

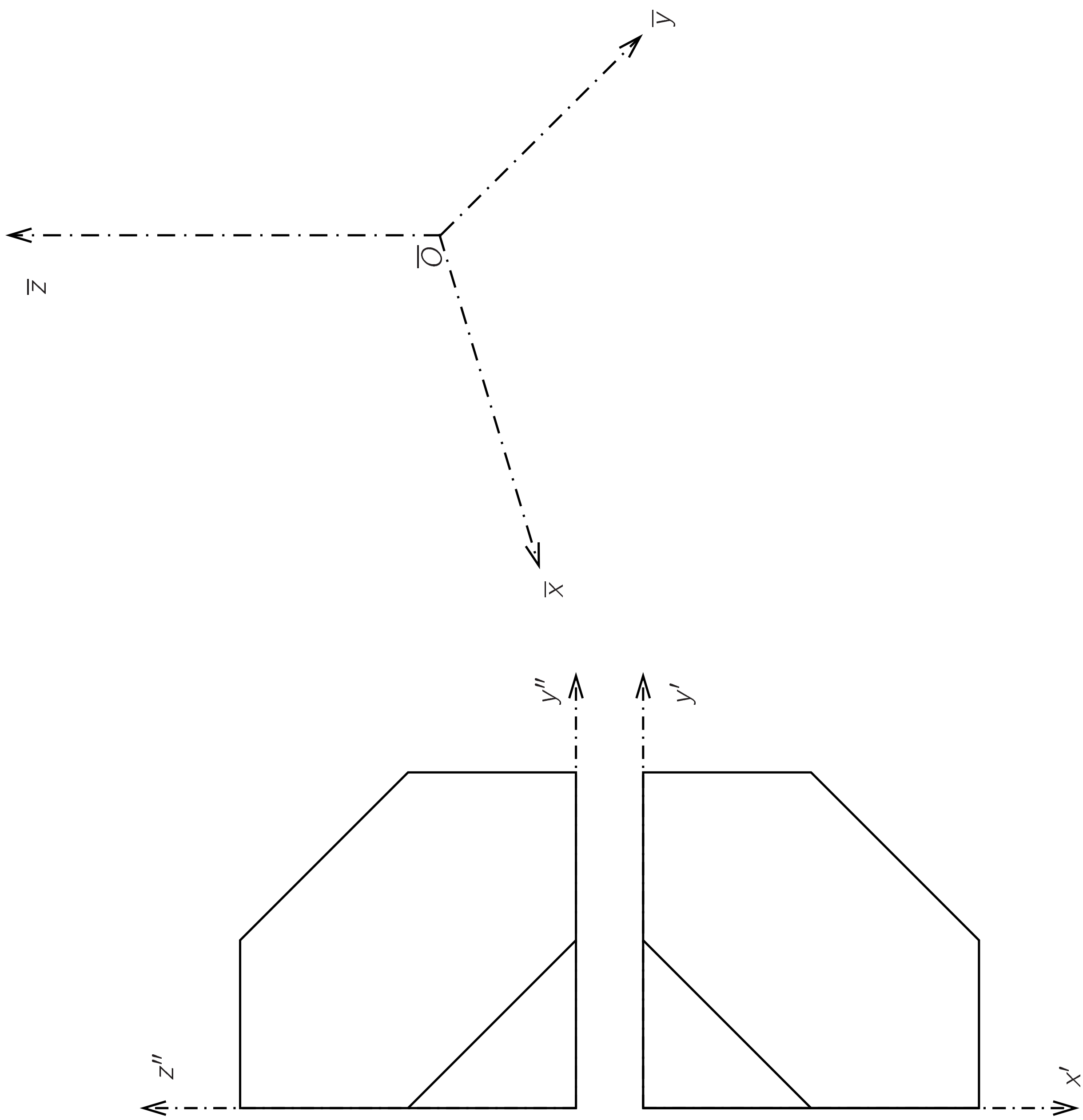



Abbildung 3.35: Senkrechte Axonometrie: Beispiel "halber" Würfel

**Aufgabe 3.19** *Gegeben: Grund– und Afriss eines Hauses und die Projektionsrichtung für eine senkrechte Axonometrie.*
*Gesucht: Das zugehörige senkrechte axonometrische Bild mit Hilfe des Einschneideverfahrens.*

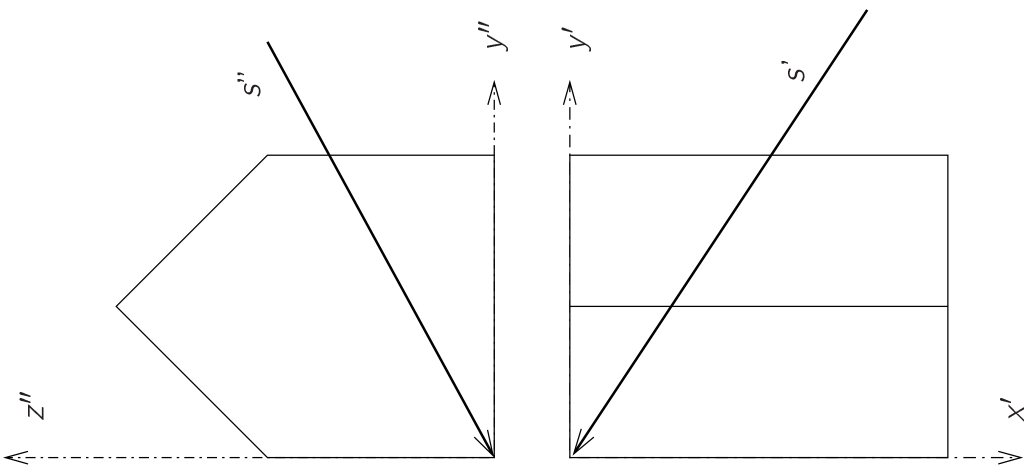



Abbildung 3.36: Senkrechte Axonometrie: Haus mit vorg. Projektionsrichtung

## 3.7 Dachausmittelung (s. LEO S.195,197)

Ein Dach besteht i.a. aus ebenen geradlinig begrenzten Flächenstücken. Wir nehmen an, dass die unteren Begrenzungsstrecken, die **Traufkanten**, horizontal sind und auf **gleicher Höhe** liegen. Wir nennen zwei sich auf der Traufkante schneidende Dachflächen *benachbart*. Eine Schnittgerade benachbarter Dachebenen heißt **Grat**- oder **Kehllinie**, je nachdem sie von einer "ausspringenden" oder "einspringenden" Ecke der Traufe ausgeht. Die Schnittgerade zweier nicht benachbarter Dachebenen heißt **First**.

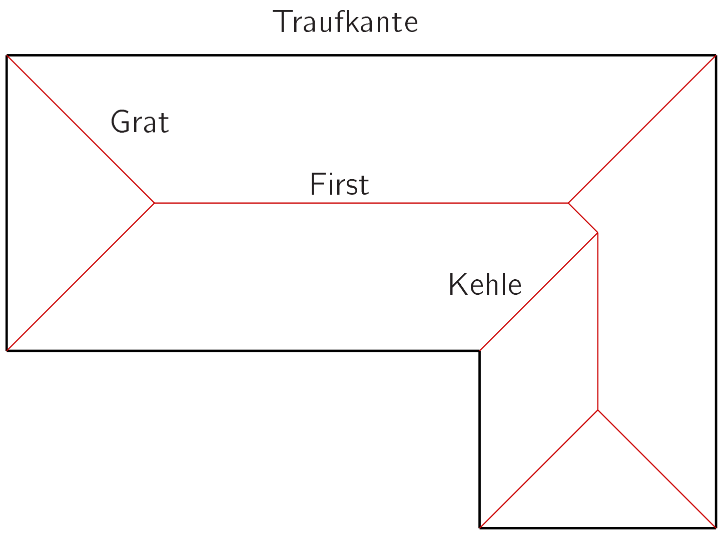



Abbildung 3.37: First, Grat- und Kehllinien eines Daches (Dachausmittelung)

Die **Aufgabe** der Dachausmittelung besteht darin, First, Grat- und Kehllinien sowie die wahre Gestalt der einzelnen Dachflächen zu bestimmen.

**Lösungsprinzip:**

Eine horizontale Hilfsebene $\varepsilon$ wird in geeigneter Höhe durch das Dach gelegt. $\varepsilon$ schneidet das Dach in Höhenlinien. Die Höhenlinien schneiden sich in Grat- und Kehllinien. Und Grat- und Kehllinien schneiden sich in Firstlinien.

**Durchführung:**

(1) Wähle die Höhe der Ebene $\varepsilon$ so, dass die Höhenlinien im Grundriss einen Abstand von wenigstens 1-2 cm von der Traufkante haben.
Bei *gleicher Dachneigung* haben Höhenlinien überall den gleichen Abstand von der Traufkante !

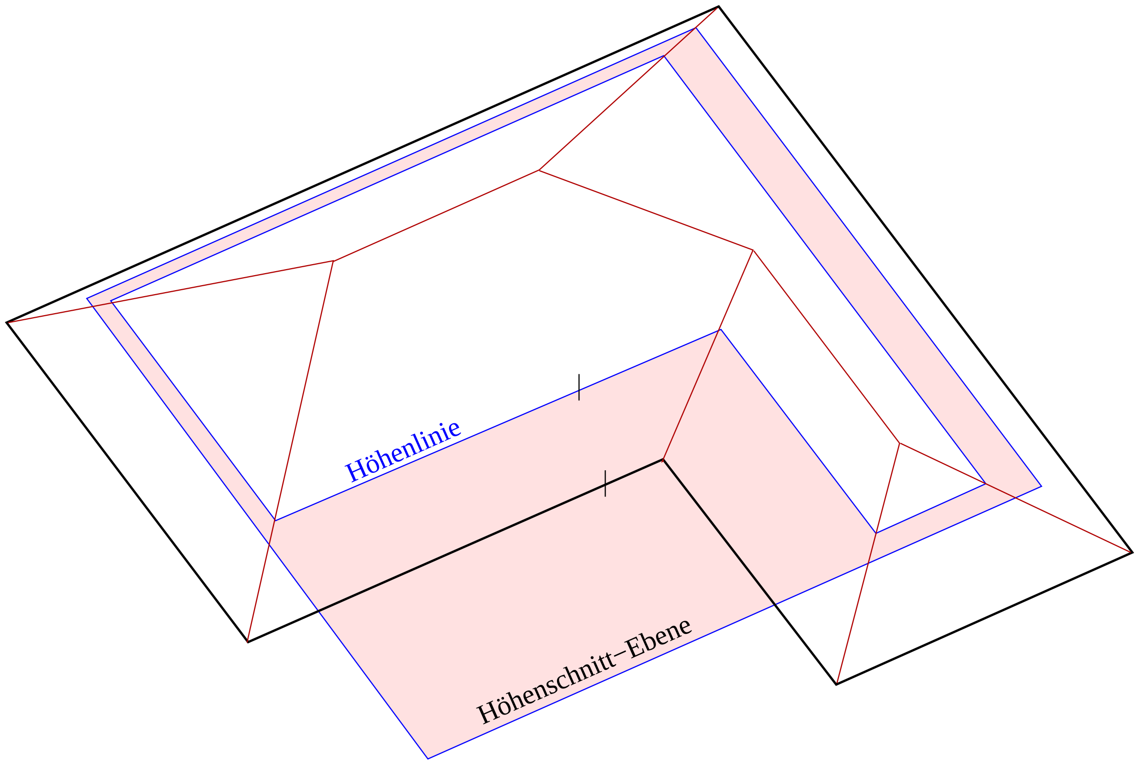
(2) Zeichne die Höhenlinien für jede Dachebene in den Grundriss.

(3) Schneide die Höhenlinien benachbarter Dachflächen und verbinde die Schnittpunkte mit den entsprechenden Ecken des Traufpolygons. Dadurch erhält man die Grat- und Kehllinien.
Bei *gleicher Dachneigung* sind Grat– und Kehllinien Winkelhalbierenden der zugehörigen Traufkanten !

(4) Schnitt von „entsprechenden" Grat- oder Kehllinien ergeben Punkte von Firstlinien.

(5) Fehlende Firstlinien ergeben sich, indem man die entsprechenden (nicht benachbarten) Dachebenen (mit Hilfe der Höhenlinien) schneidet.

(6) Die wahre Gestalt einer bestimmten Dachfläche erhält man durch Drehen der Ebene um die Traufkante in die Zeichenebene. Der wahre Abstand eines Punktes von der Traufkante ergibt sich als Hypothenuse des zugehörigen Stützdreiecks.



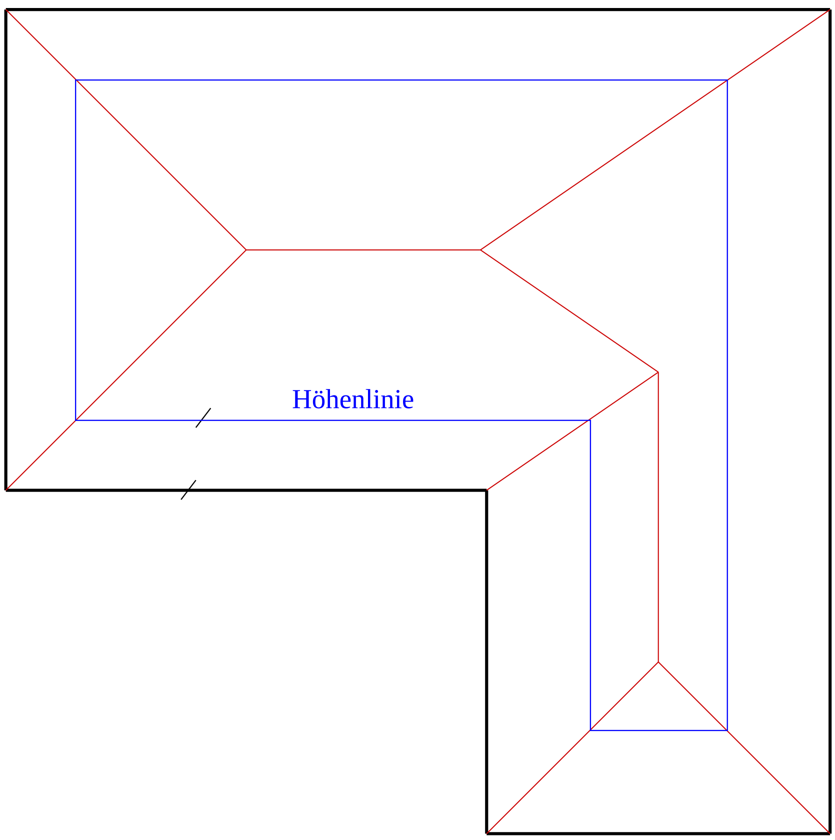




Abbildung 3.38: Höhenschnitt und Höhenlinien

**Aufgabe 3.20** :

*Gegeben:* *Grundriss der Traufkanten eines Daches mit Dachneigungen $\alpha, \beta$ (Abb. 3.39).*

*Gesucht:* *a) Grat-, First- und Kehllinien,*

*b) die wahre Gestalt der Dachfläche, die an der Traufkante $\overline{AB}$ anliegt.*

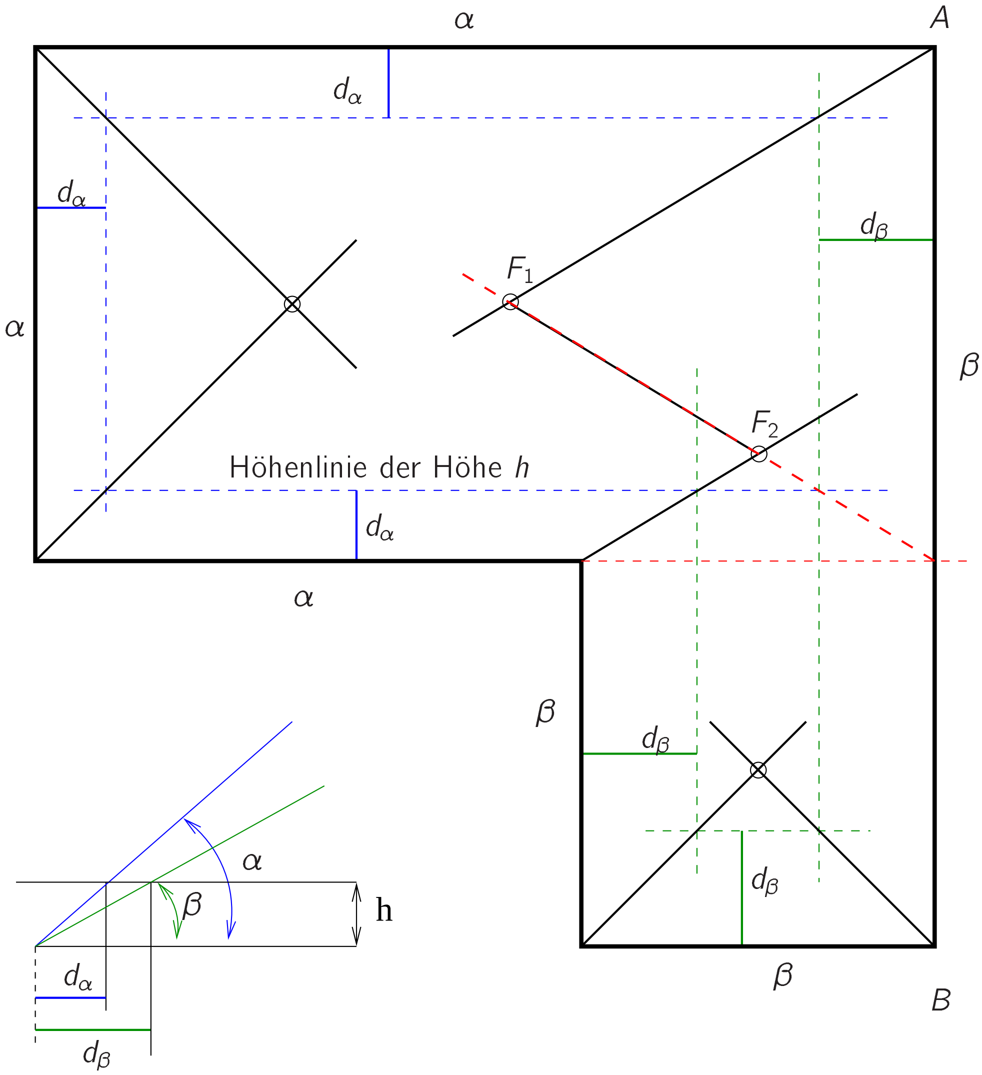



Abbildung 3.39: Grat– und Kehllinien zu Aufgabe 3.20

**Beachte** die Konstruktion der Strecke $F_1F_2$ als Grat zweier **nicht benachbarter** Dachflächen !

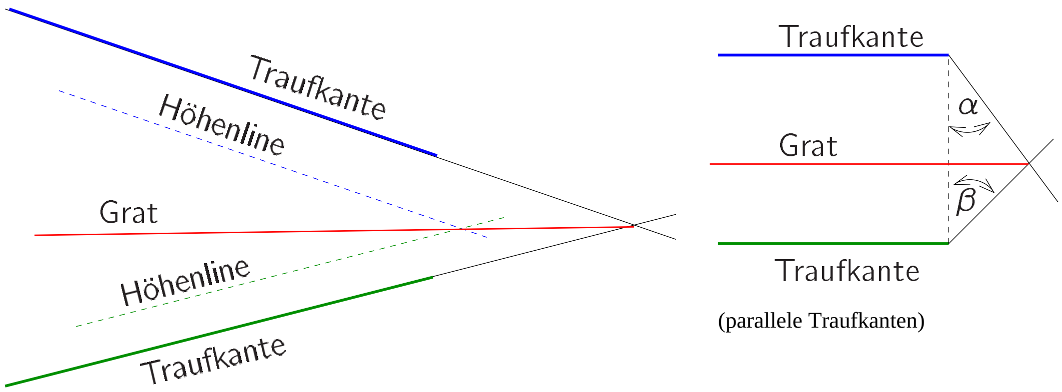



Abbildung 3.40: Konstruktionsprinzip einer Grat/Kehl–linie

**Aufgabe 3.21** :
*Gegeben:* *Grundriss der Traufkanten eines Daches mit Dachneigungen in Grad (Abb. 3.41).*
*Gesucht:* *Grat–, First– und Kehllinien.*

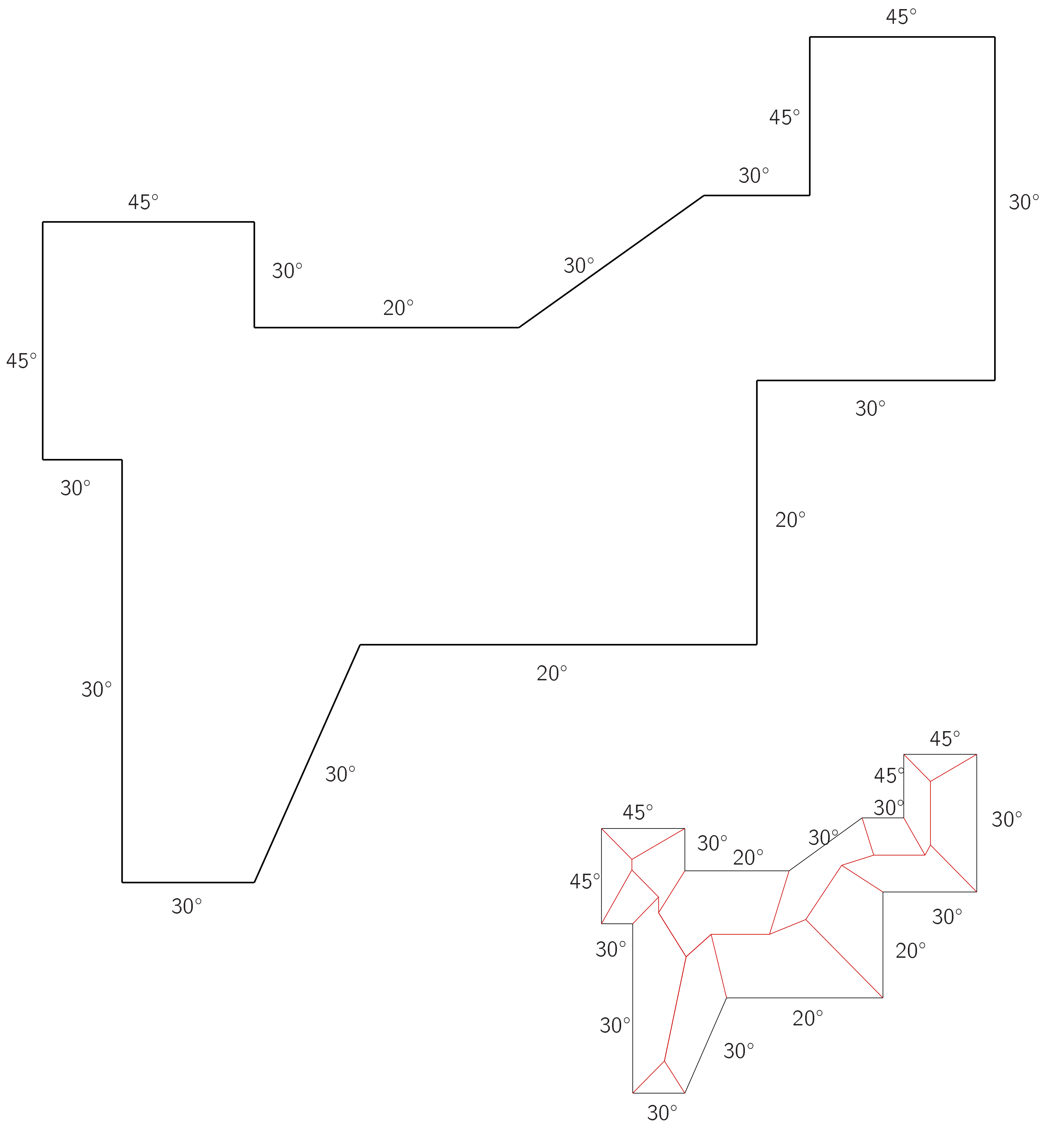



Abbildung 3.41: Aufgabe 2 zur Dachausmittelung

# Kapitel 4

# Projektion von Kurven und Flächen

## 4.1 Kreis und Ellipse

(s. LEO S.55)

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem lässt sich ein **Kreis** mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $r$ durch die **Gleichung**: $x^2 + y^2 = r^2$ oder durch die
**Parameterdarstellung**: $x = r\cos\varphi$ , $y = r\sin\varphi$ , $0 \le \varphi \le 2\pi$ beschreiben.

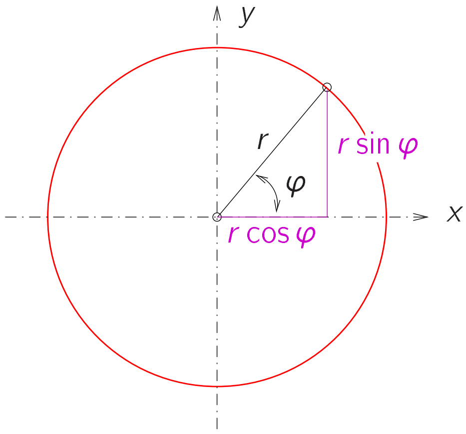



Abbildung 4.1: Parameterdarstellung eines Kreises

Es gibt viele Möglichkeiten, eine Ellipse zu definieren. Wir wollen hier die folgende Definition wählen:

Eine ebene Kurve $k$, die sich in einem geeigneten rechtwinkligen Koordinatensystem durch eine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a, b > 0$$

beschreiben lässt, ist eine **Ellipse** mit **Mittelpunkt** $(0,0)$ und den **Halbachsen** $a, b$. Für $a = b$ erhält man einen Kreis.

Die Strecke zweier Ellipsenpunkte heißt **Sehne** der Ellipse.

Eine Sehne durch den Mittelpunkt heißt **Durchmesser** der Ellipse.

Die Punkte $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$, $(0,-b)$ sind die **Scheitel** der Ellipse.

Im Fall $a \neq b$ sind die $x$-Achse und die $y$-Achse die einzigen Symmetriegeraden der Ellipse, d.h., nur die Spiegelungen an $x$- und $y$-Achse bilden die Ellipse auf sich ab. Die Durchmesser auf den Symmetrieachsen heißen die **Hauptachsen** der Ellipse.

Die **Parameterdarstellung** der Ellipse $k$ ist: $x = a\cos\varphi$ , $y = b\sin\varphi$ mit $0 \le \varphi \le 2\pi$ .

### Ellipsenkonstruktionen

a) **Scheitelkreiskonstruktion.**

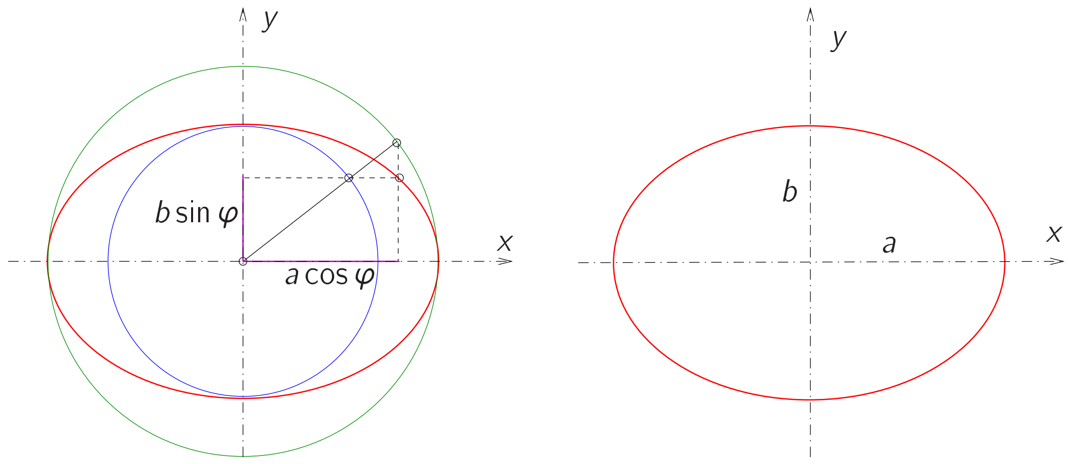



Abbildung 4.2: Parameterdarstellung einer Ellipse

Aus der Parameterdarstellung der Ellipse erkennt man, dass der Ellipsenpunkt $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ dieselbe $x$-Koordinate wie der Punkt $(a\cos\varphi,\ a\sin\varphi)$ des Kreises $x^2+y^2=a^2$ und dieselbe $y$-Koordinate wie der Punkt $(b\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ des Kreises $x^2+y^2=b^2$ zum Parameter $\varphi$ hat. Die beiden Kreise $x^2+y^2=a^2$ und $x^2+y^2=b^2$ heißen die **Scheitelkreise** der obigen Ellipse.

Daher kann man Ellipsenpunkte konstruieren, indem man die $y$-Koordinate eines Punktes des großen Scheitelkreises mit dem Faktor $b/a$ staucht (bzw. die $x$-Koordinate des kleinen Scheitelkreises mit dem Faktor $a/b$ streckt):

**Voraussetzung:** Mittelpunkt und Scheitel sind bekannt.

(1) Zeichne die beiden Scheitelkreise der Ellipse (s. Abb. 4.3, links).

(2) Wähle einen Strahl durch den Mittelpunkt der Ellipse.

(3) Der Strahl schneidet den kleinen (bzw. großen) Kreis in einem Punkt $P$ (bzw. $Q$).

(4) Fälle das Lot von $P$ ($Q$) auf die kleine (große) Achse. Der Schnittpunkt dieser Lote ist ein Punkt der Ellipse.

Eine Abbildung, die nur eine Koordinate streckt oder staucht, nennt man **Affinität**.

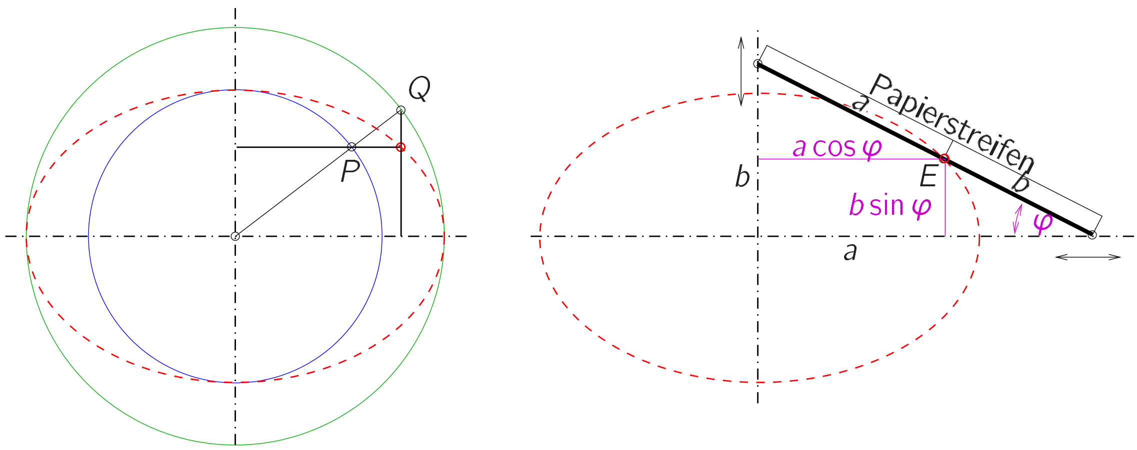



Abbildung 4.3: Konstruktion von Punkten einer Ellipse

b) **Papierstreifenmethode.** (Abb. 4.3, rechts) (s. LEO S.60)

**Voraussetzung:** Mittelpunkt und Scheitel sind bekannt.

(1) Schneide einen Papierstreifen der Länge $a+b$ aus und markiere die Stelle, an denen die Strecken der Länge $a$ und $b$ zusammengesetzt sind, durch $E$.

(2) Gleitet der Papierstreifen wie in der Skizze (Abb. 4.3, rechts) auf den Achsen der Ellipse, so beschreibt der Punkt $E$ in jeder Lage einen Ellipsenpunkt.

c) **Gärtner- oder Fadenkonstruktion.** (Abb. 4.4, links)

**Voraussetzung:** Die „Brennpunkte" $F_1$, $F_2$ und die große Halbachse $a$ der Ellipse sind bekannt.

(1) Schneide einen Faden der Länge $2a$ zurecht.

(2) Befestige die Enden des Fadens in den Punkten $F_1, F_2$.

(3) Ziehe den Faden wie in der Skizze straff. Der Punkt, an dem sich die Bleistiftspitze befindet, ist ein Ellipsenpunkt.

(4) Für die Brennweite $e = \frac{1}{2}|F_1F_2|$ gilt: $e^2 = a^2 - b^2$.

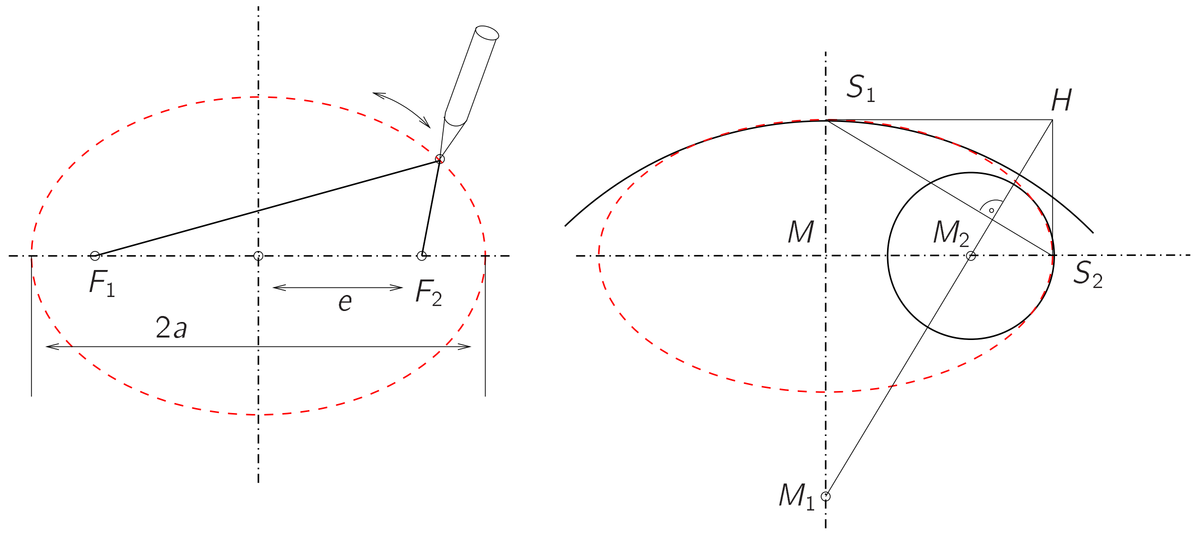



Abbildung 4.4: "Gärtnerkonstruktion" und Scheitel-Krümmungskreise einer Ellipse

d) **Scheitelkrümmungskreismethode.** (Abb. 4.4, rechts) (s. LEO S.64)

Die Methoden a), b), c) bestimmen Ellipsenpunkte exakt. Wir geben nun noch eine sehr praktische Näherungsmethode an:

**Idee:** Man bestimmt Mittelpunkte und Radien der Krümmungskreise für die Scheiteln der Ellipse, zeichnet die Scheitelkrümmungskreise und nähert die Ellipse durch tangentiale Kurvenbögen an.

**Voraussetzung:** Mittelpunkt $M$ und Scheitel sind bekannt.

(1) Wähle zwei nicht auf einem Durchmesser liegende Scheitel $S_1$, $S_2$.

(2) Ergänze das rechtwinklige Dreieck $M$, $S_1$, $S_2$ durch den Punkt $H$ zu einem Rechteck.

(3) Fälle das Lot von $H$ auf die Gerade durch $S_1$, $S_2$.

(4) Die Schnittpunkte $M_1$, $M_2$ des Lotes mit den Achsengeraden sind die Mittelpunkte der Scheitelkrümmungskreise für die Scheitel $S_1$, $S_2$.

(5) Zeichne die Scheitelkrümmungskreise in allen Scheiteln.

(6) Zeichne eine Kurve durch die Scheitel, die die Krümmungskreise von innen bzw. von außen berührt.

## 4.2 Normalriss eines Kreises

Der Normalriss eines Kreises ist i.a. eine Ellipse, deren Mittelpunkt das Bild des Kreismittelpunktes ist. Die große Halbachse der Ellipse ist gleich dem Kreisradius.
(Falls der Kreis in einer projizierenden Ebene liegt, ist das Bild eine Strecke.)

Um dies einzusehen, betrachten wir die folgende Zweitafelprojektion eines Kreises (Abb. 4.5):
Gegeben: Kreis $k \perp \pi_2$ durch seinen Aufriss $k''$.
Gesucht: Grundriss $k'$ des Kreises.

Zur Lösung führen wir $x - y-$Koordinaten in der Kreisebene und $\xi - \eta-$Koordinaten im Grundriss ein (s. Abb. 4.5, rechts). Die Kreisgleichung ist dann $x^2 + y^2 = r^2$. In der Skizze erkennt man, dass ein Punkt $(x, y)$ der Kreisebene den Grundriss $(\xi, \eta)$ mit $\xi = x$ und $\eta = y \cos\alpha$ hat. Wegen $x^2 + y^2 = r^2$ gilt

$$\xi^2 + (\eta/\cos\alpha)^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad \xi^2/r^2 + \eta^2/(r\cos\alpha)^2 = 1\,.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren große Halbachse gleich $r$ ist.

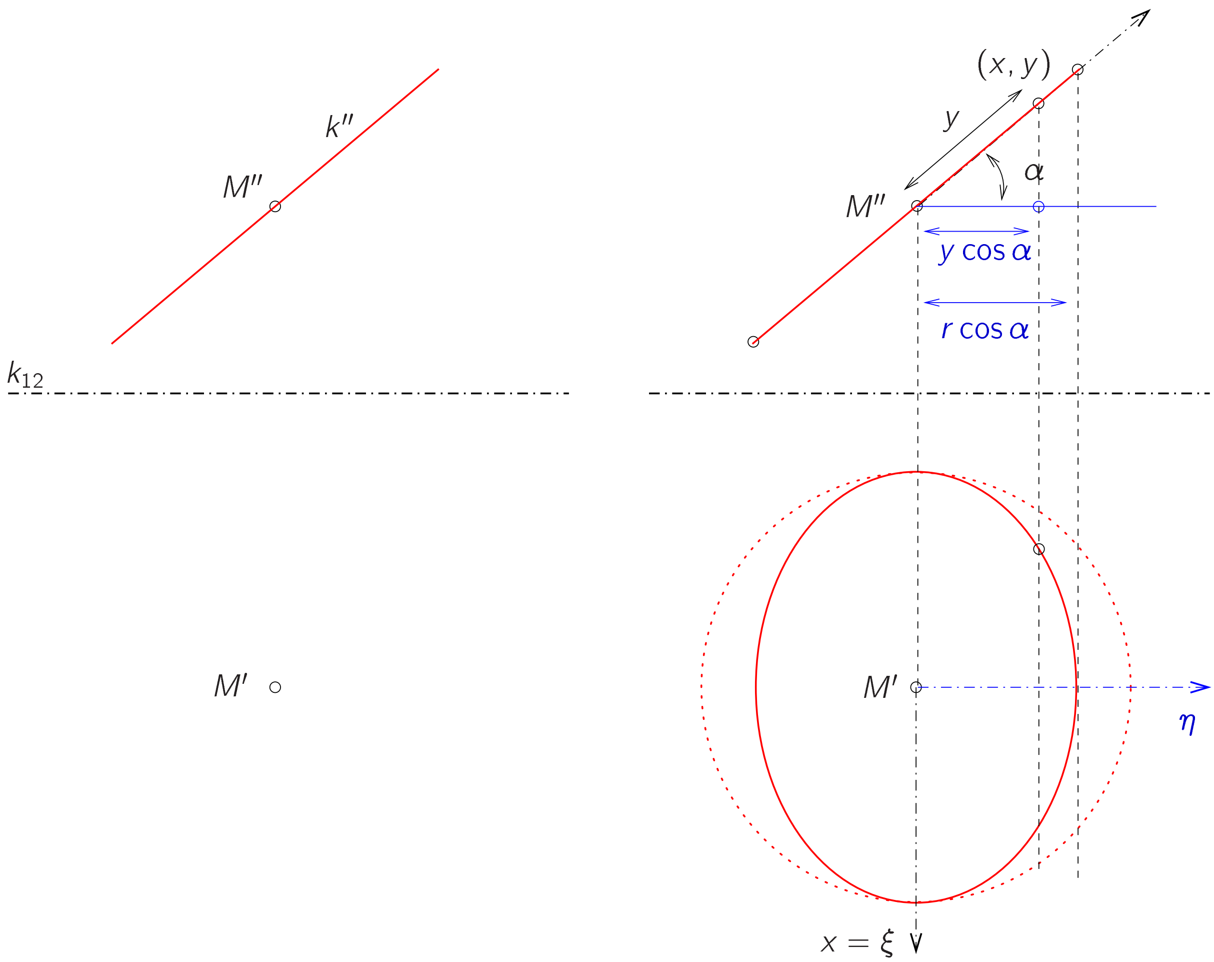



Abbildung 4.5: Projektion eines Kreises

**Aufgabe 4.1** *Zeichne den Grundriss des obigen Kreises (Abb. 4.5, links) mit Hilfe der Schreitelkrümmungskreismethode.*

## 4.3 Parallelprojektion einer Ellipse

Die Parallelprojektion einer Ellipse ist eine Ellipse oder eine Strecke. Der Mittelpunkt geht in den Mittelpunkt der Bildellipse über. Da rechte Winkel i.a. nicht auf rechte Winkel abgebildet werden, sind die Bilder der Scheitel i.a. **nicht** die Scheitel der Bildellipse. Deshalb führt man eine Verallgemeinerung des Begriffs „senkrechte Durchmesser“ einer Ellipse ein:

Zwei Durchmesser einer Ellipse heißen **konjugiert**, wenn die Tangenten in den Endpunkten des einen Durchmessers parallel zum anderen Durchmesser sind (s. Abb. 4.6).

Die Hauptachsen einer Ellipse sind spezielle konjugierte Durchmesser.
Je zwei senkrechte Durchmesser eines Kreises sind konjugiert.

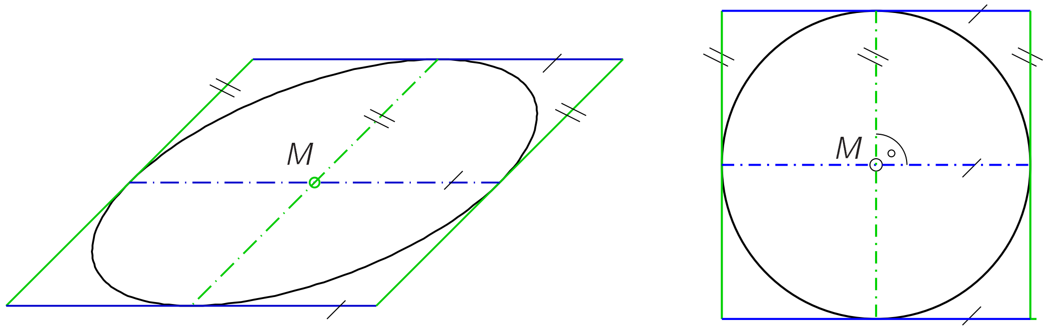



Abbildung 4.6: Konjugierte Durchmesser einer Ellipse

Für die Konstruktion des Bildes einer Ellipse bei Parallelprojektion sind die folgenden Aussagen wichtig:

Bei **Parallel**projektion einer Ellipse werden

a) der **Mittelpunkt** auf den Mittelpunkt und
b) **konjugierte** Durchmesser auf konjugierte Durchmesser

der Bildellipse abgebildet.

Die oben beschriebenen Verfahren, eine Ellipse zu zeichnen, verlangen alle die Kenntnis des Mittelpunktes und der Scheitel der Ellipse. Deshalb benötigen wir noch eine Methode, um aus dem Mittelpunkt und zwei konjugierten Durchmessern die Scheitel zu bestimmen.

**Rytzsche Konstruktion:** (s. LEO S.62,63)

Gegeben: Mittelpunkt $M$ und zwei konjugierte Halbmesser $\overline{MP}, \overline{MQ}$ einer Ellipse (Abb. 4.7).
Gesucht: Scheitel der Ellipse.

(1) Drehung von $\overline{MQ}$ um 90° in $\overline{MQ'}$ so, dass der Winkel zwischen $\overline{MP}$ und $\overline{MQ'} < 90°$ ist.
(2) Mittelpunkt $R$ der Strecke $\overline{PQ'}$ bestimmen.
(3) Kreis um $R$ durch $M$.
(4) Schnitt dieses Kreises mit der Geraden durch $P, Q'$ liefert die Punkte $A, B$.
(5) Die Geraden $\overline{MA}$ durch $M, A$ und $\overline{MB}$ durch $M, B$ geben die *Richtung* der Hauptachsen an.
(6) Die *Längen* der Hauptachsen sind $b = |AP|$ und $a = |BP|$.
(7) Die Scheitel ergeben sich aus (6) und dem “Papierstreifen” $AB$ (vgl. mit Fig 4.3) .

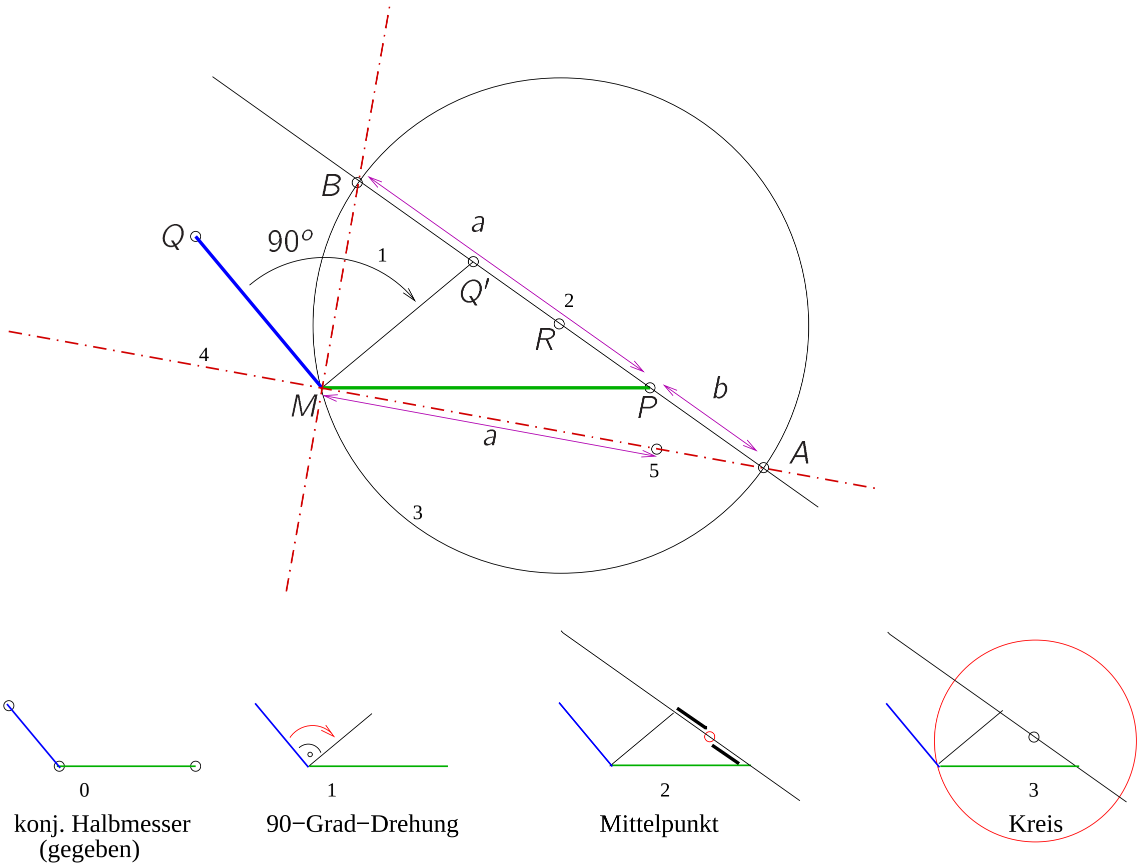



Abbildung 4.7: Rytz–Konstruktion

**Aufgabe 4.2** *Bestimme in Abb. 4.8 jeweils zu vorgegebenem Mittelpunkt $M$ und konjugierten Halbmessern $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$ die Scheitel der zugehörigen Ellipse.*


Abbildung 4.8: Aufgaben zur Rytz–Konstruktion

**Aufgabe 4.3** *Es sind Grund- und Aufriss eines Kreises und eine weitere Risskante $k_{23}$ gegeben (Abb. 4.9). Bestimme das Bild des Kreises in $\pi_3$.*

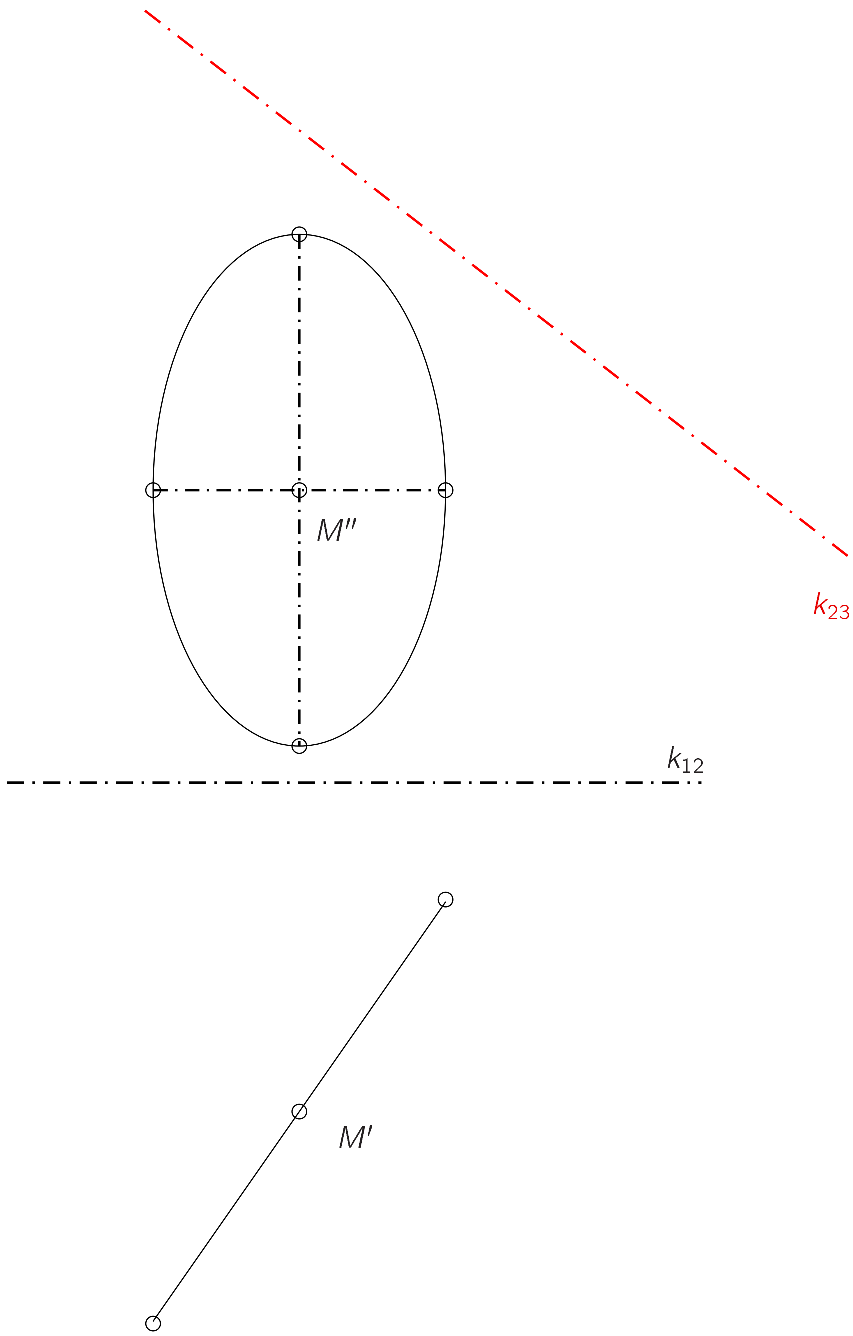



Abbildung 4.9: Umprojektion eines Kreises

## 4.4 Kreis und Ellipse in der Axonometrie

Das axonometrische **Bild** eines Kreises oder einer Ellipse ist eine **Ellipse** oder eine Strecke.
Im **allgemeinen** Fall geht man so vor:

(1) Bestimme das Bild des Mittelpunktes.
(2) Wähle zwei **konjugierte** Halbmesser im Urbild und bilde diese ab.
(Bei einem Kreis wählt man zwei senkrechte Halbmesser, die sich „leicht“ abbilden lassen. Bei einer Ellipse wählt man zwei senkrechte Haupthalbachsen.)
(3) Bestimme die Hauptachsen der Bildellipse mit Hilfe der **Rytz**-Konstruktion.
(4) Zeichne die Ellipse z.B. mit Hilfe der Scheitelkrümmungskreismethode.

Es gibt einige Sonderfälle:

a) Falls die Ellipse **parallel zur Bildtafel** liegt, wird sie **unverzerrt** abgebildet.
b) Der zur Bildtafel parallele Durchmesser eines **Kreises** wird unverzerrt abgebildet und ist im Falle einer **senkrechten** Projektion gleich der großen Halbachse der Bildellipse.

**Aufgabe 4.4** :
*Gegeben: Grund– und Aufriss eines Zylinderstumpfes (Abb. 4.10).*
*Gesucht: Isometrische Vogelperspektive des Zylinderstumpfes.*

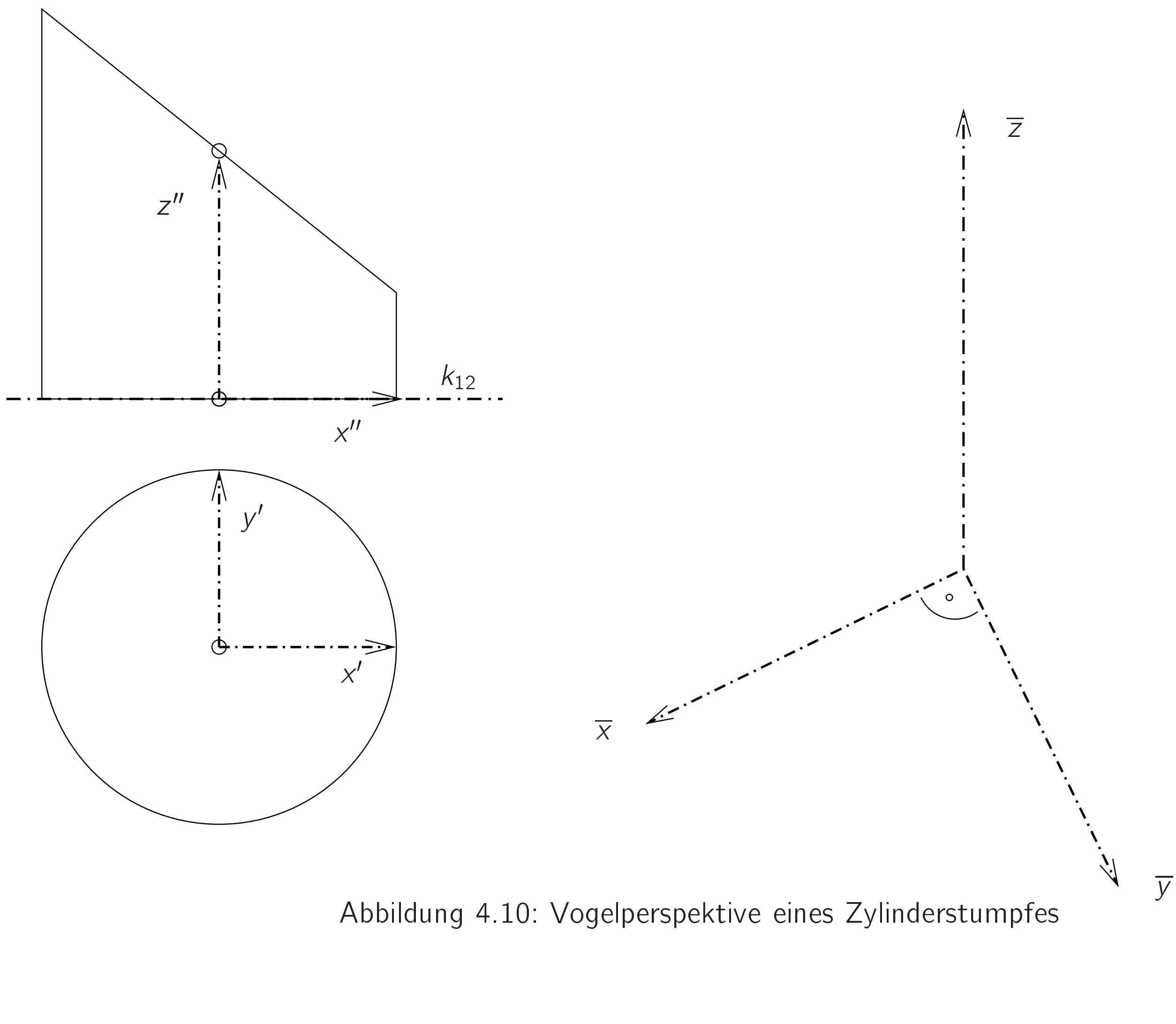



Abbildung 4.10: Vogelperspektive eines Zylinderstumpfes

**Aufgabe 4.5** :
*Stelle den in Grund– und Aufriss gegebenen Zylinder mit aufgesetzter Kugel mit Hilfe des Einschneideverfahrens in* **senkrechter** *Axonometrie dar (s. Abschnitt 3.6).*
*(Für die Bildellipsen der Zylinder-Kreise ist* **kein Rytz** *nötig ! Die großen Hauptachsen sind parallel zur Grundrissspur und gleich dem Durchmesser der Kreise. Zur Bestimmung der Länge der kleinen Halbachse bilde man einen geeigneten Kreispunkt ab und beachte Abb. 4.3, links )*

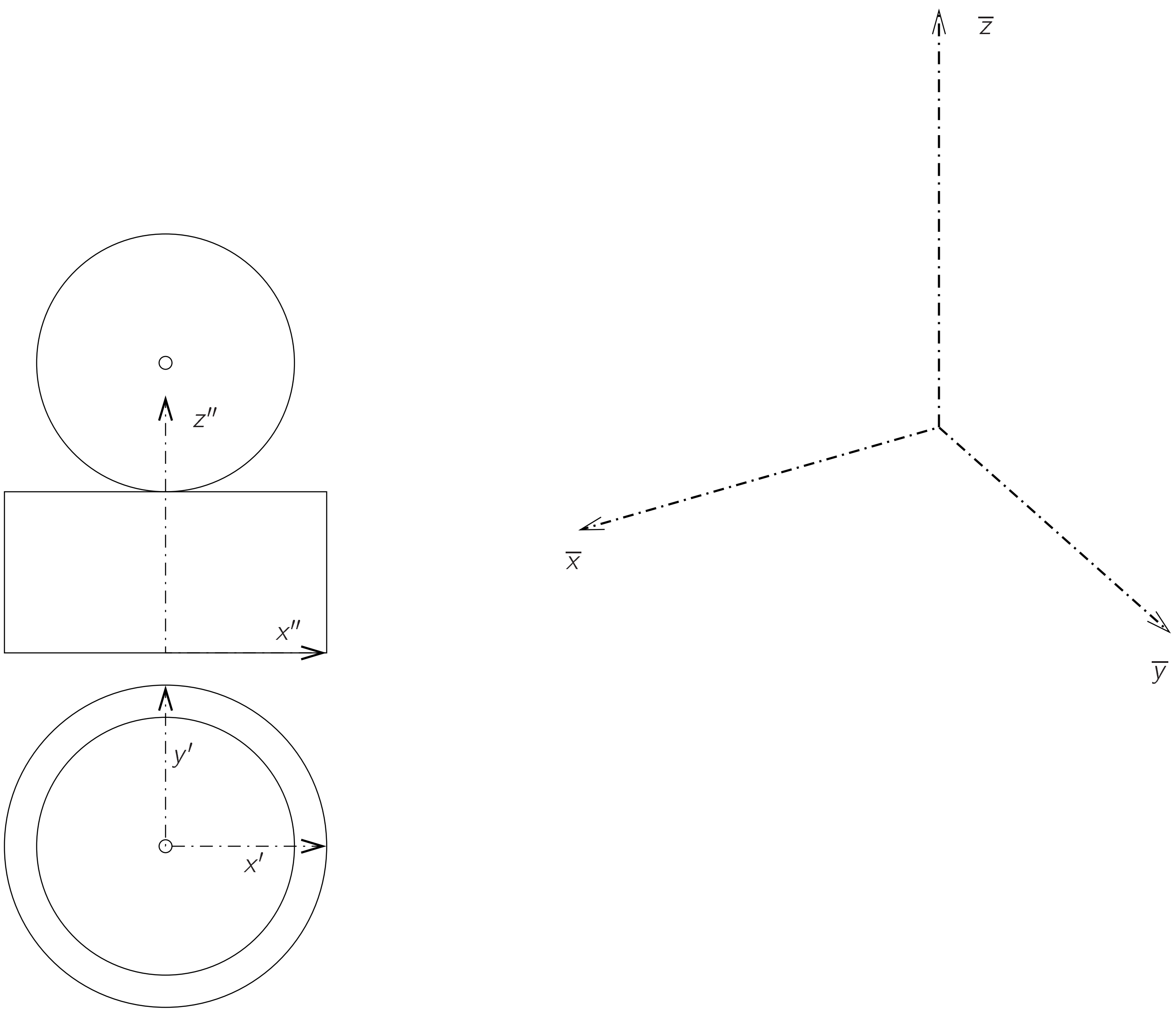



Abbildung 4.11: Zylinder mit Kugel in senkrechter Axonometrie

## 4.5 Zylinder und Kegel

(s. LEO S.137,140)

Durch Parallelverschieben einer Geraden $g$ **(Erzeugende)** längs einer ebenen Kurve $c$ **(Leitkurve)** entsteht eine **allgemeine Zylinderfläche** (Abb. 4.12 a)).

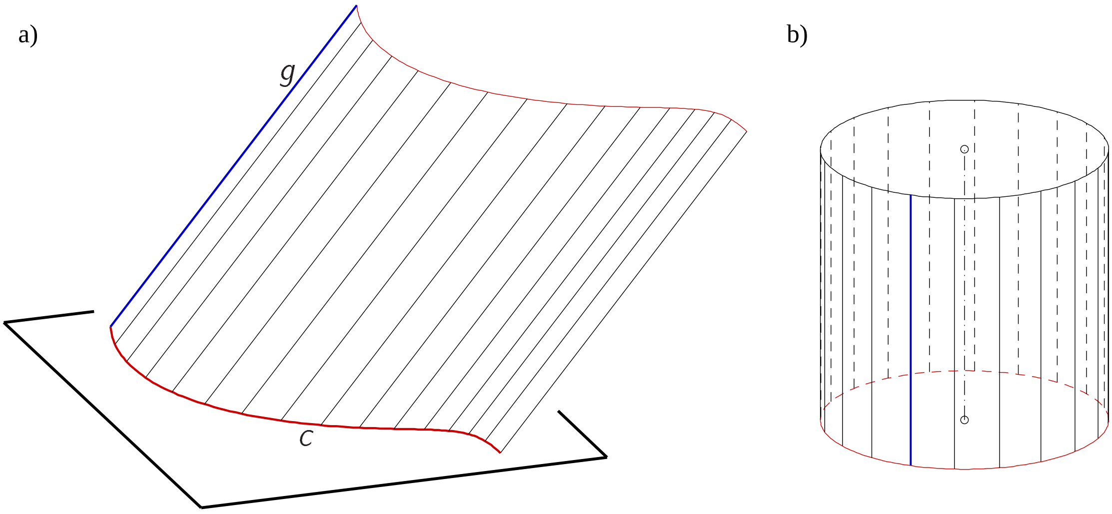



Abbildung 4.12: Erzeugung eines a) allgemeinen Zylinders b) senkrechten Kreiszylinders

Ist $c$ speziell ein **Kreis** und stehen die Erzeugenden **senkrecht** zur Kreisebene, entsteht ein **senkrechter Kreiszylinder** (Abb. 4.12 b)). Die Leitkurve heißt **Basiskreis**, die Erzeugenden heißen **Mantellinien**. Die Symmetriegerade $a$ heißt **Achse**. Da der senkrechte Kreiszylinder auch durch Drehung einer Erzeugenden um die Achse $a$ erzeugt werden kann, nennt man diese Fläche auch **Dreh**- oder **Rotationszylinder**.

| |
|---|
| Eine **Ebene schneidet** einen senkrechten Kreiszylinder in einem Kreis, in einer Ellipse, oder in ein oder zwei Mantellinien (Abb. 4.13). |

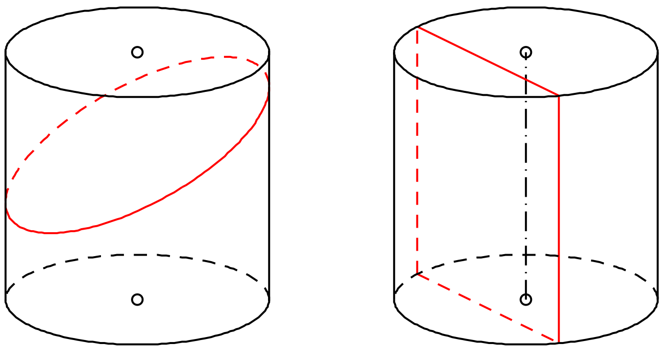


Abbildung 4.13: Ebene Schnitte eines Kreiszylinders

Gleitet eine Gerade $g$ auf einer ebenen Kurve $c$ und geht $g$ stets durch einen festen Punkt $S$ (Kegel**scheitel** oder -**spitze**), so entsteht eine **allgemeine Kegelfläche** (Abb. 4.14 a)).
Ist $c$ speziell ein **Kreis** und liegt $S$ auf einer Senkrechten zur Kreisebene durch den Kreismittelpunkt $M$, so entsteht ein **senkrechter Kreiskegel** (Abb. 4.14 b)). Die Gerade $a$ durch $M, S$ steht senkrecht auf der Kreisebene und heißt **Kegelachse**. Da der senkrechte Kreiskegel auch durch Rotation einer Geraden durch $S$ um $a$ erzeugt werden kann, nennt man ihn auch **Dreh**- oder **Rotationskegel**.

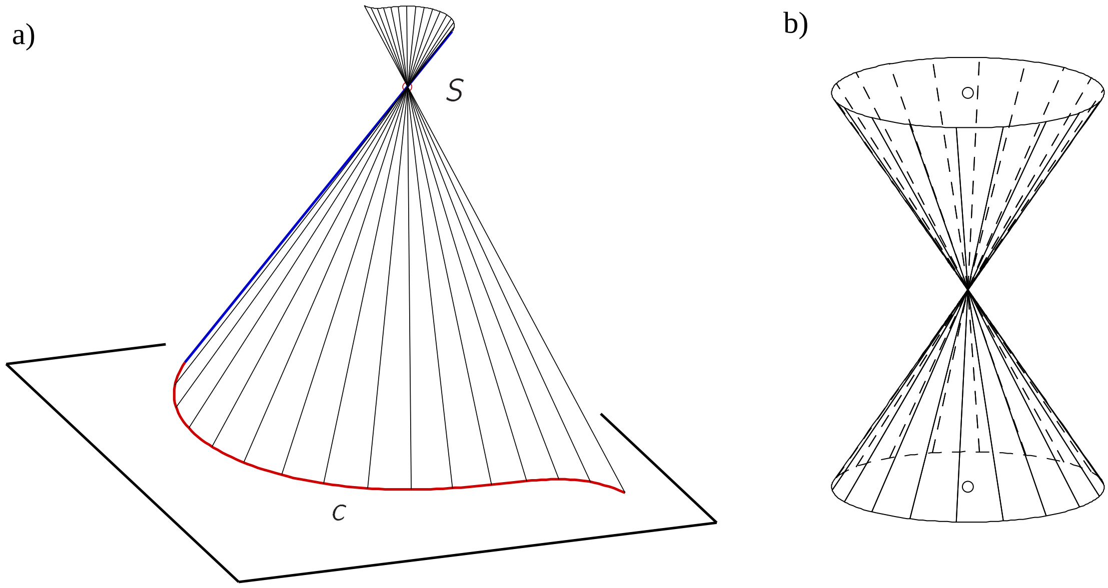



Abbildung 4.14: Erzeugung eines a) allgemeinen Kegels b) senkrechten Kreiskegels

Den Schnitt einer **Ebene** $\varepsilon$ mit einem Drehkegel nennt man **Kegelschnitt**:

Falls die Kegelspitze $S$ nicht in der Ebene $\varepsilon$ liegt, so sind, je nach Steilheit von $\varepsilon$, folgende Kegelschnitte möglich:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | Kreis | ($\varepsilon \perp a$) | (b) | Ellipse | ($\varepsilon$ flacher als Mantellinie) |
| (c) | Parabel | ($\varepsilon \parallel$ Mantellinie) | (d) | Hyperbel | ($\varepsilon$ steiler als Mantellinie) |

Ebenen durch $S$ schneiden den Kegel in zwei, einer oder keiner Geraden.

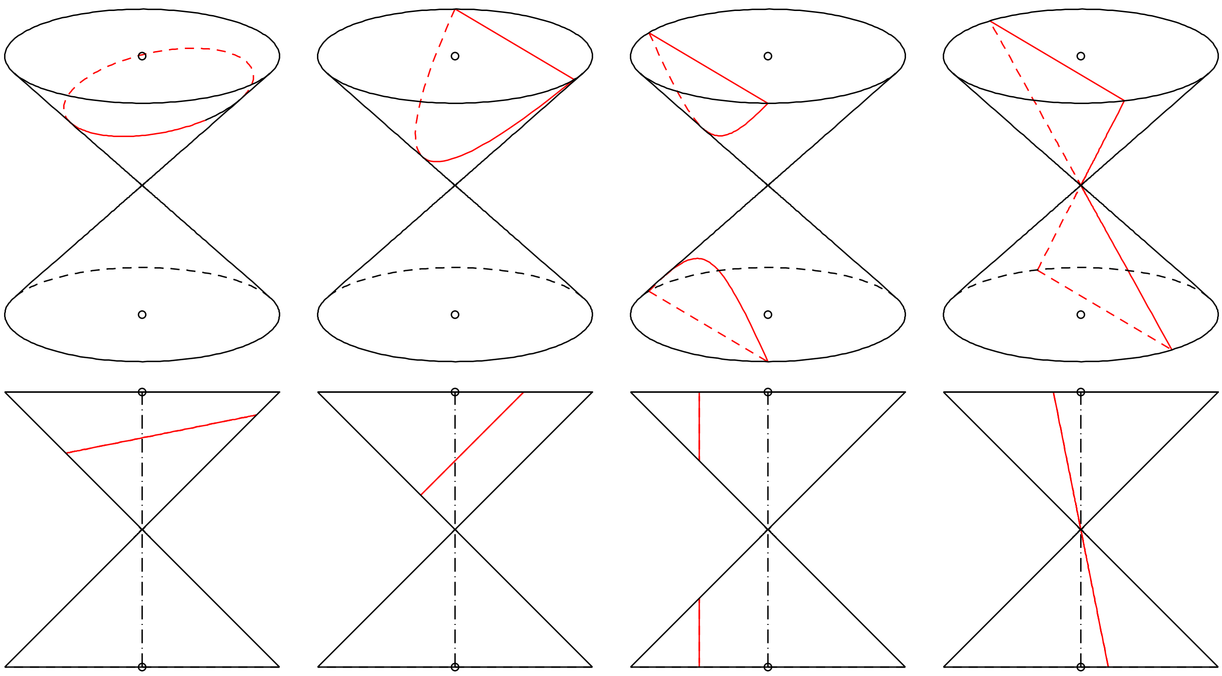


Abbildung 4.15: Ebene Schnitte eines Kreiskegels: Ellipse, Parabel, Hyperbel, Geradenpaar

## 4.6 Abwickelbare Flächen

(s. LEO S.162,164)

Eine Fläche nennt man **abwickelbar**, wenn sie sich **längentreu** in die Ebene abbilden lässt, d.h. man kann sie unter Erhaltung der Längen sämtlicher auf ihr liegender Kurven in die Ebene ausbreiten.

**Beispiele:** a) Zylinder b) Kegel
c) die von den Tangenten einer Raumkurve erzeugte Fläche (Tangentialfläche).

### 4.6.1 Abwicklung eines Drehzylinders

Gegeben: Ein Drehzylinder und ein Punkt darauf in Grund- und Aufriss.
Gesucht: Die Abwicklung des Drehzylinders und des Punktes $P$.

Lösungs**idee:** Man nähert den Zylinder durch ein **Prisma** (Querschnitt ist ein regelmäßiges $n$-Eck) an, „schneidet“ das Prisma längs einer Kante auf und wickelt es in die Ebene ab.

**Durchführung:** (Abb. 4.16)

(1) Teile den Basiskreis in $n$ ($\geq 12$) Teile und zeichne das $n$-Eck.

(2) Nimm die Länge $d$ einer Seite des $n$-Ecks in den Zirkel und zeichne ein Rechteck der Höhe $h$ (Zylinderhöhe) und Breite $n \cdot d$.

(3) Der Punkt $P$ liegt auf oder zwischen zwei Kanten des Prismas. Zeichne diese zwei Kanten in der Abwicklung, nimm den kleineren Abstand von $P$ zu einer dieser Kanten und zeichne die entsprechende „Zwischenkante“ $k$ in die Abwicklung.

(4) Übertrage $P$ in die Abwicklung auf die Zwischenkante. Die Höhe des Punktes $P$ ergibt sich aus dem Aufriss.

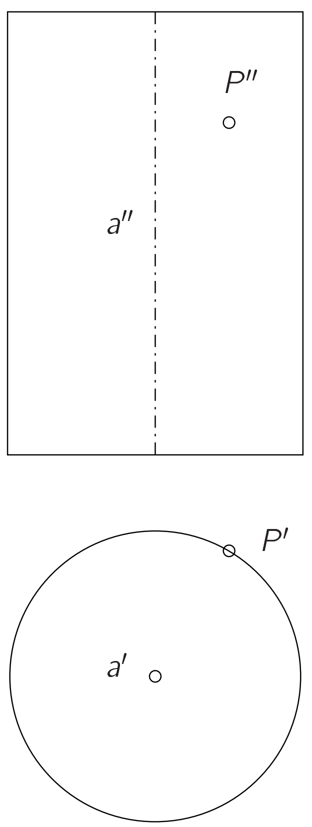



Abbildung 4.16: Abwicklung eines Zylinders

### 4.6.2 Abwicklung eines Drehkegels

Gegeben: Ein Drehkegel und ein Punkt darauf in Grund– und Aufriss (Abb. 4.17).
Gesucht: Die Abwicklung des Kegels und des Punktes $P$.

Lösungs**idee:** Annäherung des Kegels durch eine $n$-kantige **Pyramide**. Die Abwicklung des Kegels ist ein Kreissektor, dessen Öffnungswinkel $\alpha = 2\pi r/l$ durch den entsprechenden Winkel der abgewickelten Pyramide angenähert wird. Die Abwicklung des Punktes $P$ erhält man durch eine zur Zylinderabwicklung analogen Näherungskonstruktion. Die notwendige wahre Länge der Strecke $\overline{SP}$ erhält man durch Paralleldrehen zu $\pi_2$.

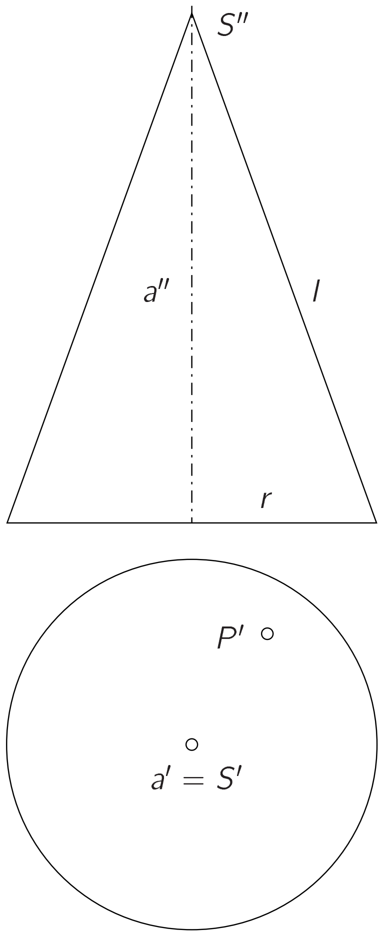
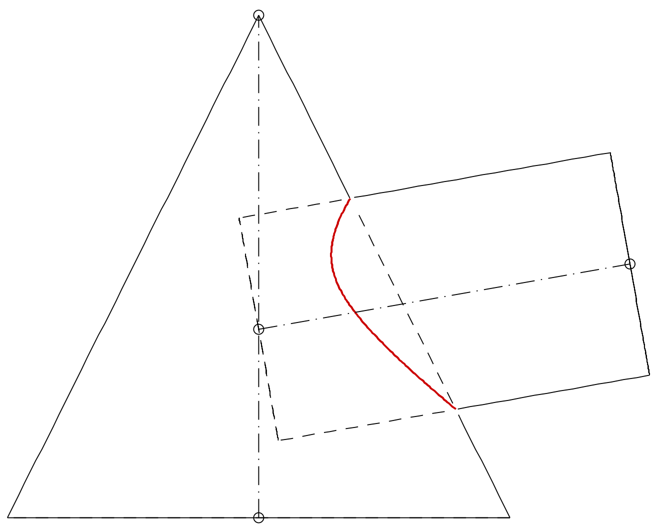



Abbildung 4.17: Abwicklung eines Kegels

**Aufgabe 4.6** *Wickle Kegel- und Zylinderteil aus Abb. 4.34 (Durchdringung Kegel–Zylinder) ab, schneide die Abwicklungen aus und bastele ein Modell.*



Interessant sind auch **Auf**wicklungen:

**Aufgabe 4.7** *Wickle das Plakat in Abb. 4.18 auf die Reklamesäule (Zylinder) auf.*

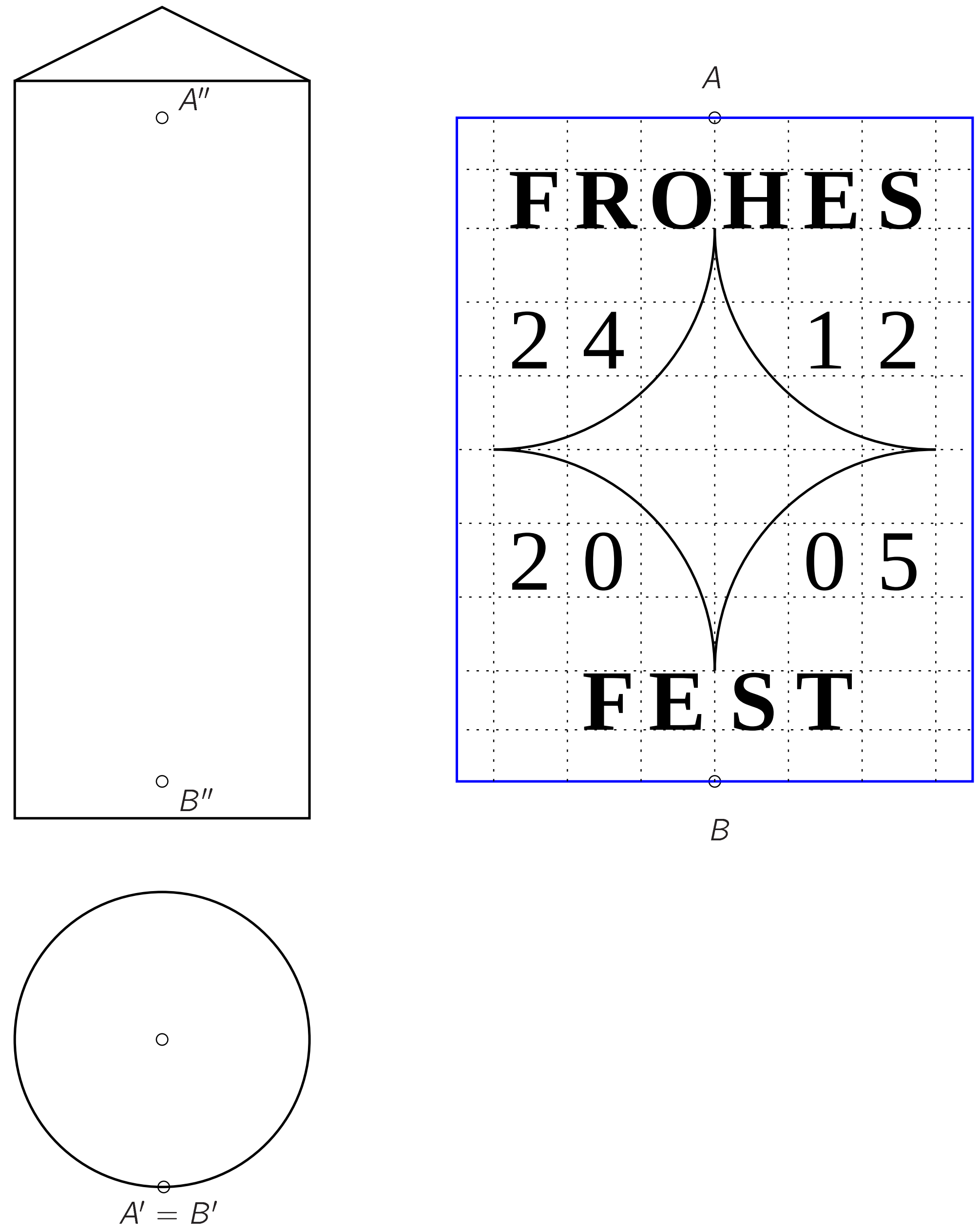
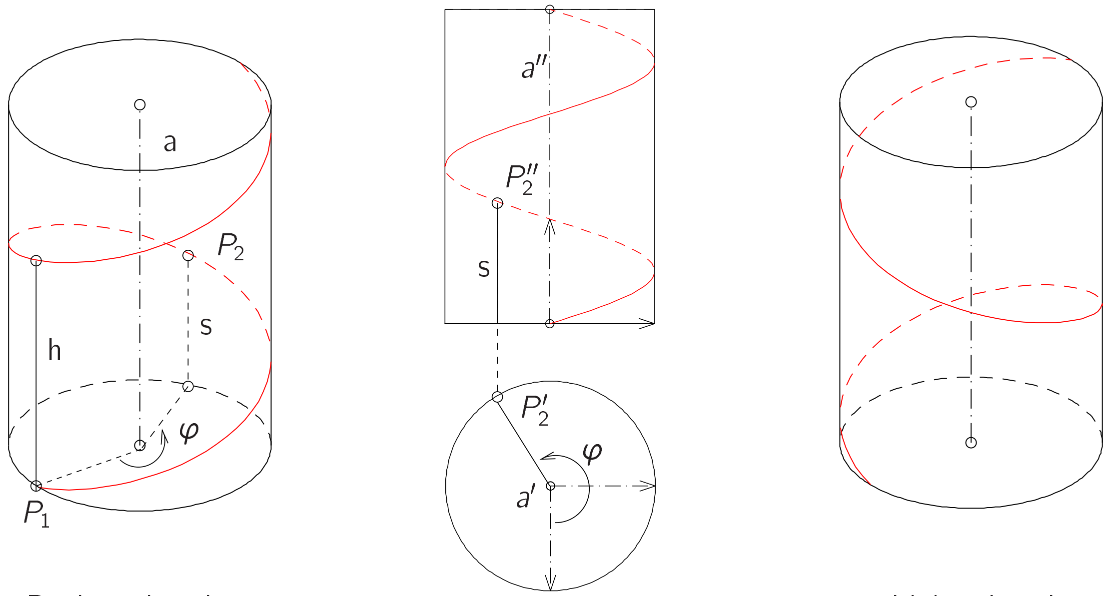



Abbildung 4.18: Aufwicklung auf einen Zylinder

## 4.7 Schraublinien und Schraubflächen

Wird ein Punkt $P$ um eine Achse $a$, der **Schraubachse**, **gedreht** (Winkel $\varphi$) und dabei proportional (Faktor $c$) zum Drehwinkel in Richtung $a$ **verschoben** (**Schiebstrecke** $s = c\varphi$)., so beschreibt $P$ eine **Schraublinie**. Die Schiebstrecke nach einer vollen Umdrehung ($\varphi = 2\pi$) nennt man **Ganghöhe** $h$. Der Quotient $h/2\pi$ heißt **reduzierte Ganghöhe**.




Rechtsschraube　　　　　　　　Linksschraube

Abbildung 4.19: Schraublinien

Bewegt sich der Grundriss von $P$ in der x-y–Ebene (eines Rechtssystems) in mathematisch positivem Sinn (Gegen die Uhr) und wird $P$ entlang der positiven z–Achse verschoben, so entsteht eine **Rechtsschraube** ($h > 0$). Wird $P$ in negativer z–Richtung verschoben, entsteht eine **Linksschraube** (s. Abb. 4.19).

**Aufgabe 4.8** *Gegeben: Punkt P, Schraubachse a, Ganghöhe h in Grund und Aufriss (Abb. 4.21).*
*Gesucht: Verschraubung von P um Achse a mit Ganghöhe h als Rechtsschraube.*

Man kann auch eine Gerade oder eine Kurve verschrauben. Es entsteht dann eine **Schraubfläche**.

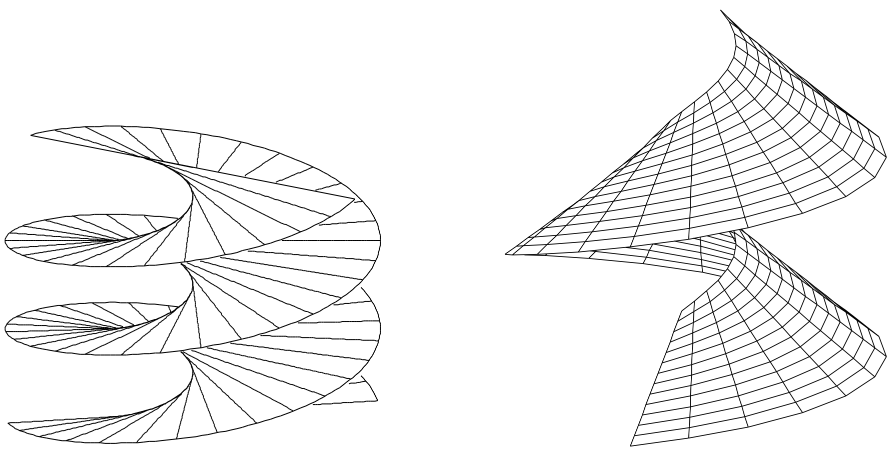


Abbildung 4.20: Verschraubung von Strecken

**Aufgabe 4.9** *Gegeben: Strecke $l$, Schraubachse $a$, Ganghöhe $h$ in Grund– und Aufriss. (Abb. 4.21, rechts). Gesucht: Verschraubung von $l$ um $a$ mit Ganghöhe $h$ als Rechtsschraube.*

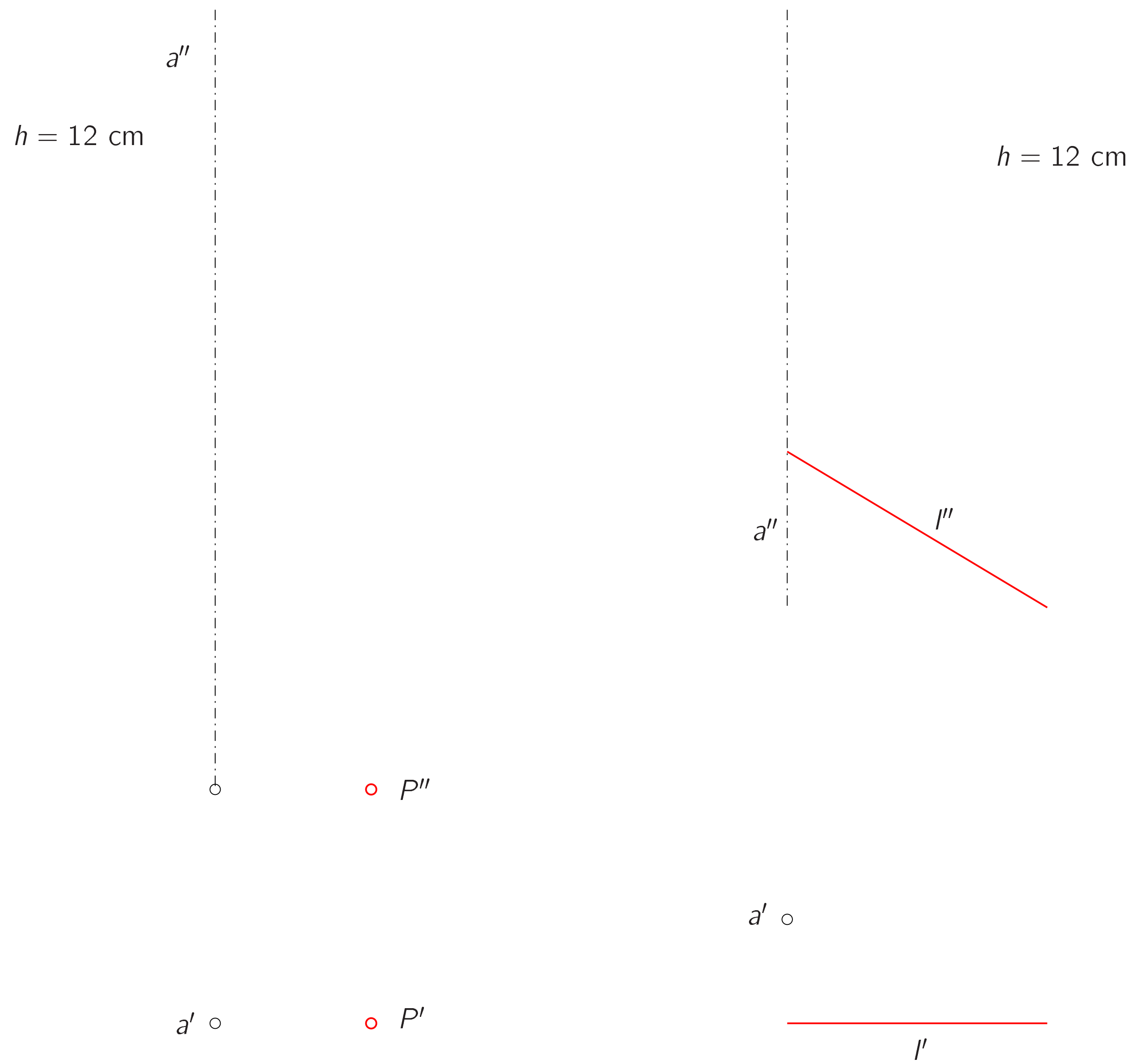



Abbildung 4.21: Verschraubung eines Punktes bzw. einer Strecke

**Aufgabe 4.10** *Gegeben: Zwei Stufen einer Wendeltreppe in Grund– und Aufriss (Abb. 4.22).*
*Gesucht: Grund– und Aufriss der 10–stufigen Treppe.*

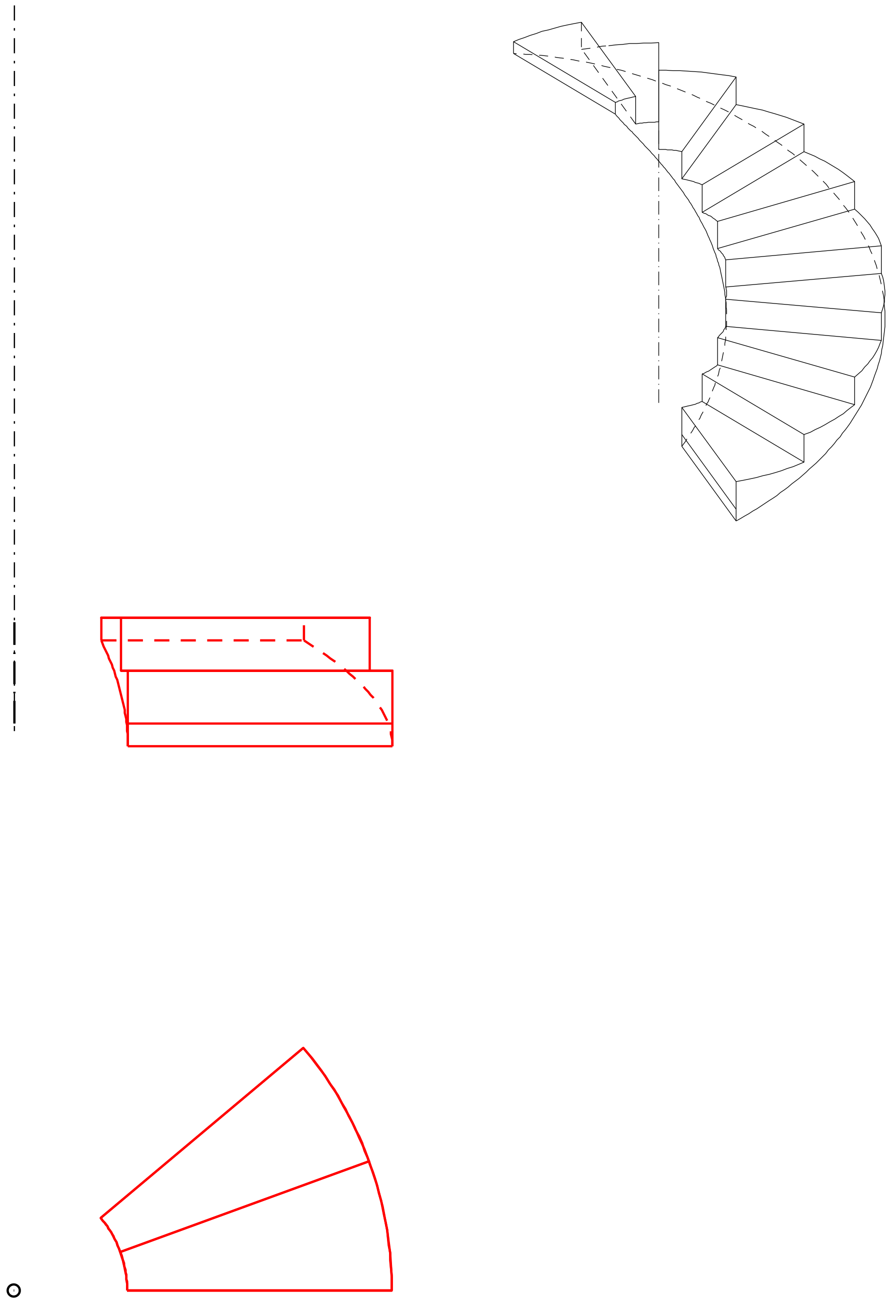


Abbildung 4.22: Verschraubung einer Treppenstufe

## 4.8 Rotationsflächen

Eine Fläche, die bei der Drehung um eine Achse, der *Rotationsachse*, in sich übergeht heißt **Rotationsfläche**.

Eine Rotationsfläche kann durch Drehung einer Kurve $k$ um eine Rotationsachse $a$ erzeugt werden. Jeder Punkt von $k$ beschreibt bei der Drehung einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf $a$ liegt und der senkrecht zu $a$ steht. Eine Ebene, die die Rotationsachse $a$ enthält, schneidet aus der Rotationsfläche $\Phi$ eine (ebene) Kurve $m$, den **Meridian** aus. Alle Meridianschnitte sind kongruent. Ist die Achse einer Rotationsfläche parallel zu einer Risstafel, so ist der Umriss in dieser Risstafel ein Meridian (Hauptmeridian).

**Beispiel 4.1** *Abb. 4.23 zeigt Beispiele von Rotationsflächen.*

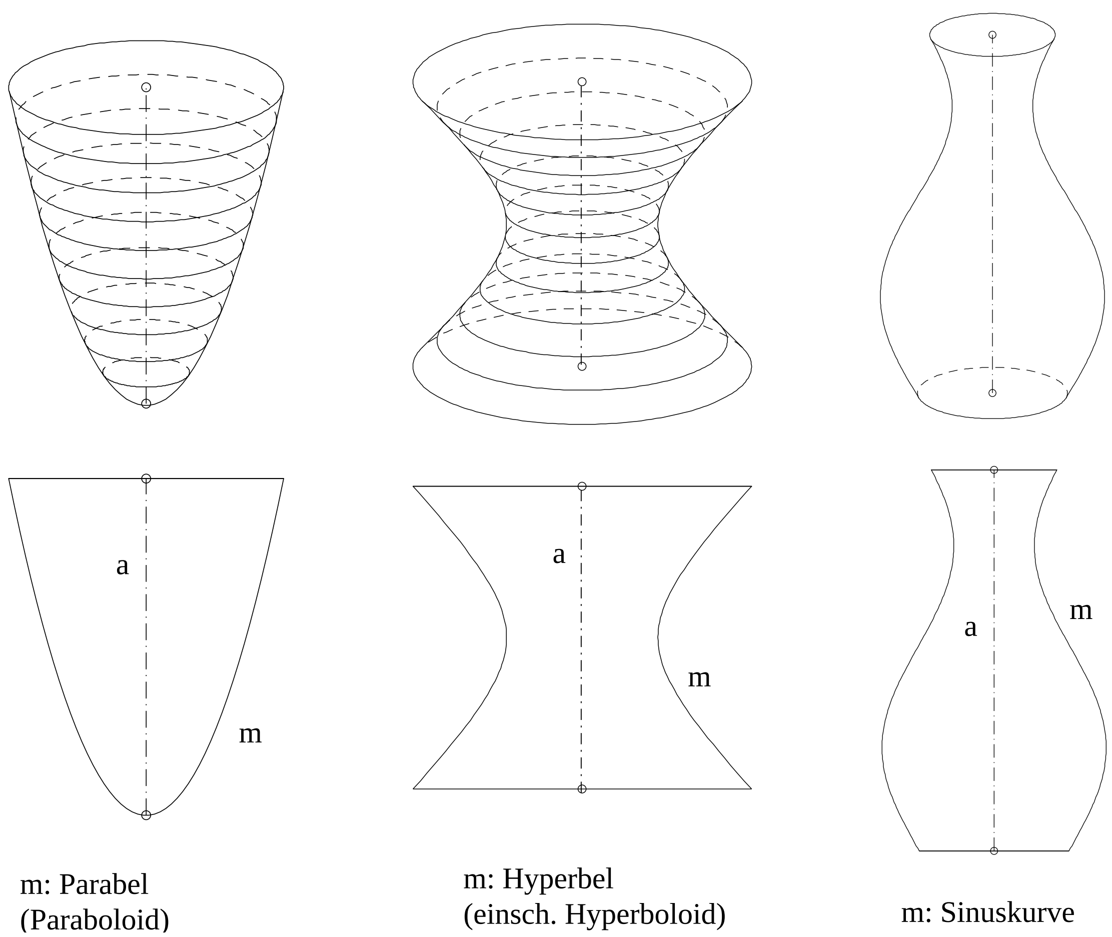



Abbildung 4.23: Rotationsflächen

**Umriss**–Konstruktion mit Hilfe von **Berührkugeln**:

Gegeben: Achse und Meridian einer Rotationsfläche $\Phi$ im Aufriss.
Gesucht: Umriss der Rotationsfläche im Grundriss.

Lösungs**idee**: Zu jedem Querschnittkreis $k$ der Rotationsfläche $\Phi$ gibt es eine Kugel $\Gamma$, die die Fläche in dem Kreis berührt. Der Mittelpunkt der Kugel liegt auf der Achse $a$ von $\Phi$. Überträgt man genügend viele Berührkugeln in den Grundriss, so ergibt sich der Umriss als Einhüllende der Kugelumrisse.

**Durchführung** für das Beispiel in Figur 4.24 (Der Meridian besteht aus zwei Kreisbögen !):

(1) Wähle im Aufriss einen Querschnittkreis $k$. $k''$ ist eine Strecke senkrecht zu $a''$.

(2) Bestimme den Mittelpunkt $M_k$ der Berührkugel durch $k$. $M_k$ liegt auf der Flächennormalen eines beliebigen Punktes $P \in k$ und der Achse $a$. Wir wählen $P$ auf dem Meridian. $M_k''$ ist hier also der Schnittpunkt der Gerade $P''M_u''$ mit $a''$.

(3) Zeichne $M_k'$ auf $a'$ und den Umrisskreis der Berührkugel im Grundriss.

(4) Führe (1)–(3) "genügend" oft für verschiedene Querschnittkreise durch.

(5) Zeichne die **Einhüllende** der so bestimmten Kreise.

(6) Aufriss des Umrisses: Für jede Berührkugel schneide man den Berührkreis mit dem Umriss der Kugel (Äquatorkreis). Dies liefert jeweils zwei hintereinander liegende Punkte des gesuchten Umrisses.

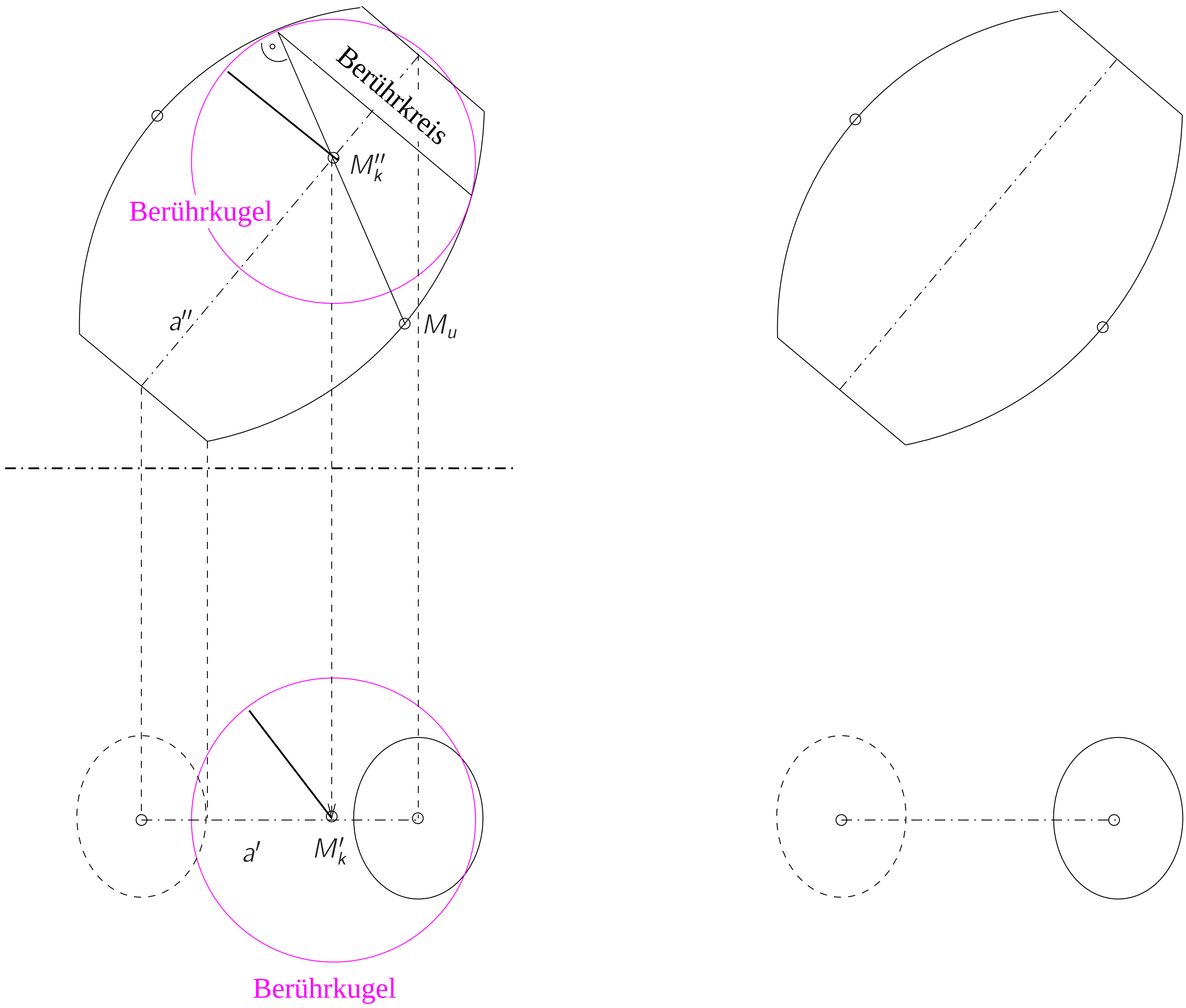



Abbildung 4.24: Umriss einer Rotationsfläche

## 4.9 Regelflächen

Als **Regelfläche** wird eine Fläche bezeichnet, die durch Bewegung einer Geraden erzeugt wird. Um ein **anschauliches Bild** einer Regelfläche zu erhalten, genügt es meistens, die erzeugende Gerade in "genügend" vielen Lagen zu zeichnen.

**Beispiel 4.2** *Einfache Beispiele sind* **Zylinder** *und* **Kegel***.*
*a) Abb. 4.25a) zeigt ein* **einschaliges Hyperboloid***, das durch Rotation einer nicht zur z–Achse parallelen Gerade um die z–Achse ensteht. b) Abb. 4.25b) zeigt ein* **hyperbolisches Paraboloid***, das durch Bewegung einer Strecke mit Endpunkten auf zwei gegebenen Strecken entsteht.*

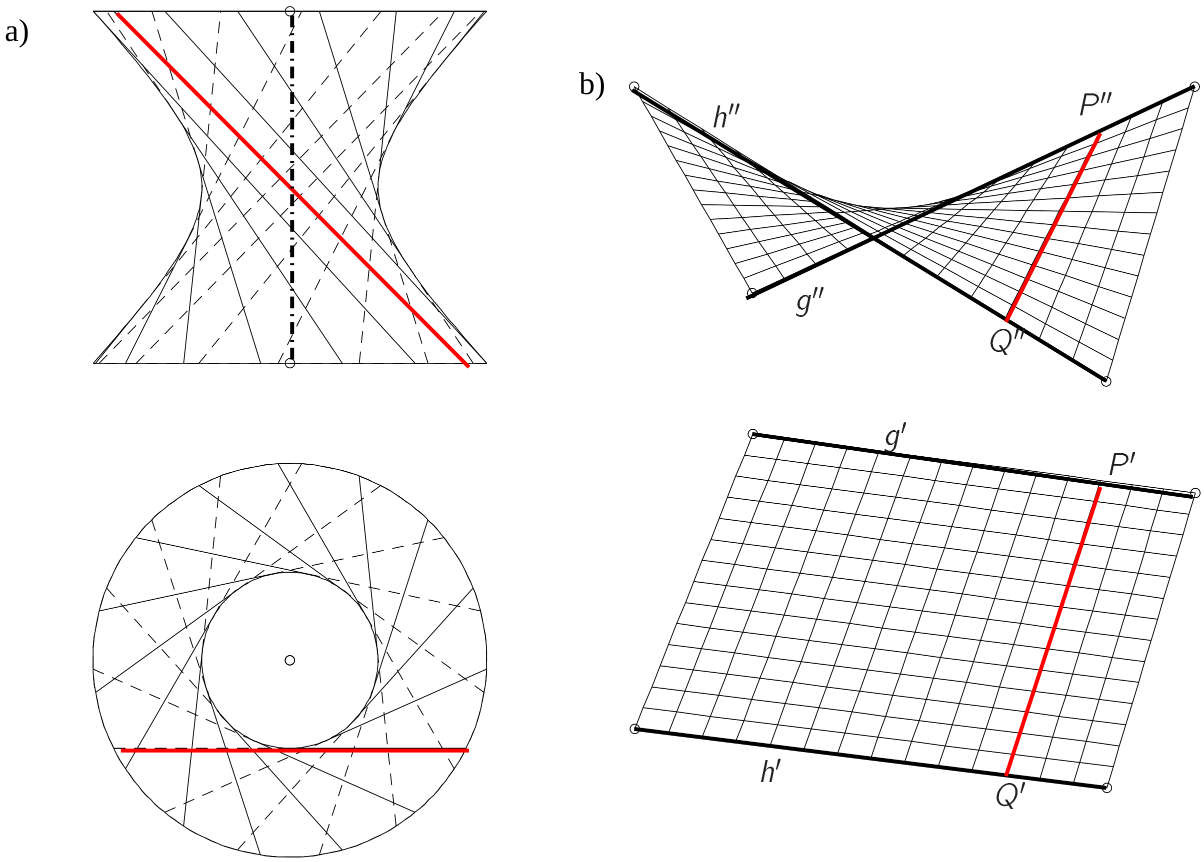



Abbildung 4.25: a) einschaliges Hyperboloid b) hyperbolisches Paraboloid

**Aufgabe 4.11** *a) Gegeben ist in Grund– und Aufriss eine erzeugende Strecke und die Rotationsachse eines einschaligen Hyperboloids. Zeichnen Sie den Umriss in Grund– und Aufriss.*
*b) Gegeben ist in Grund– und Aufriss das Randviereck eines hyperbolischen Paraboloids. Zeichnen Sie den Umriss.*

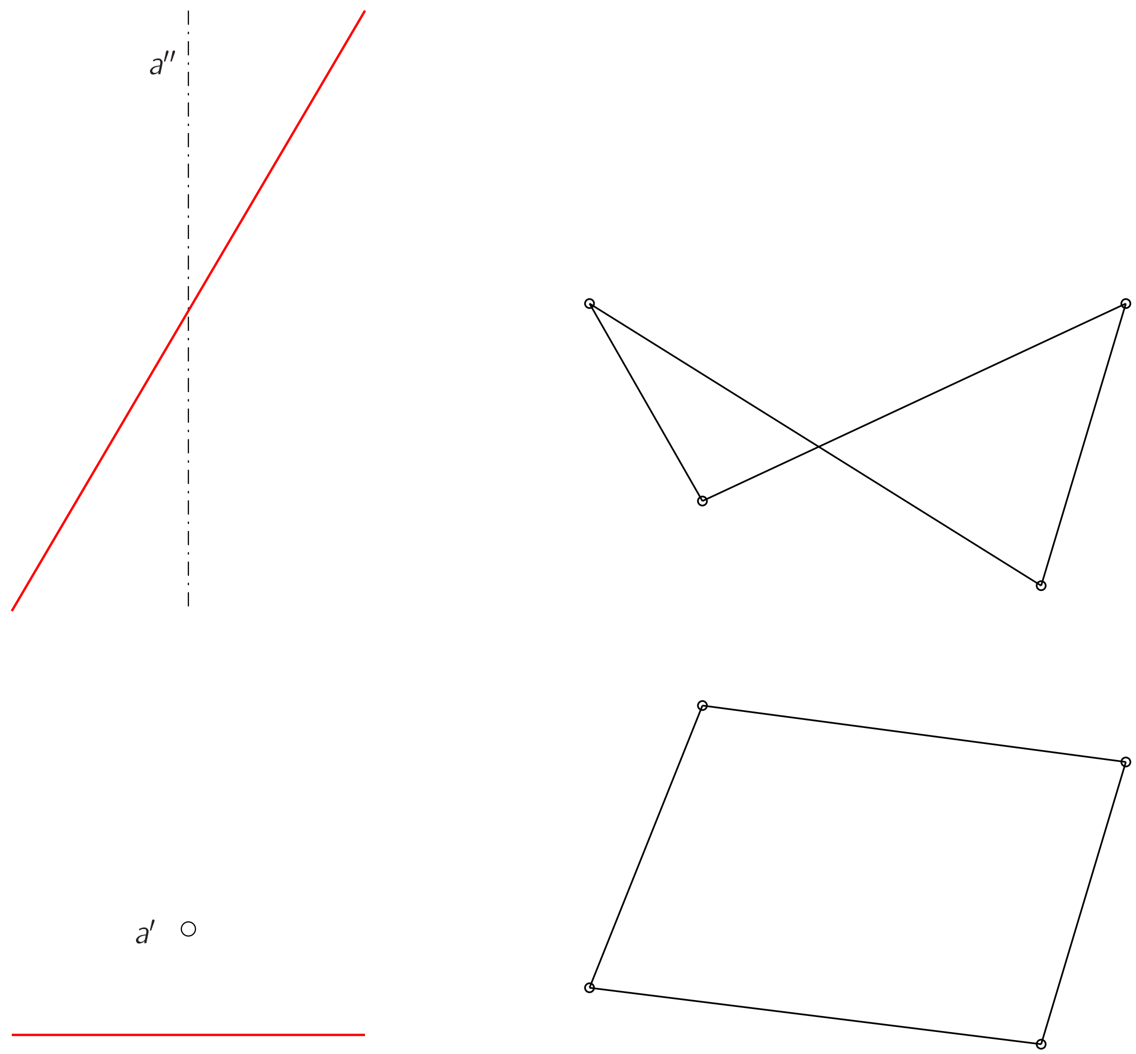



Abbildung 4.26: Regelflächen: a) einschal. Hyperboloid b) hyperbol. Praboloid

## 4.10 Rohrflächen

Eine **Rohrfläche** entsteht durch Bewegung einer Kugel (mit festem Radius) durch den Raum so, dass der Mittelpunkt jeweils auf einer fest vorgegebenen Kurve liegt.

**Beispiel 4.3** *Abb. 4.27 zeigt eine Rohrfläche, deren Leitkurve ein Teil einer Schraublinie ist.*

Den **Umriss** einer Rohrfläche in Grund– und Aufriss erhält man als Einhüllende der Kugelumrisse (Kreise).

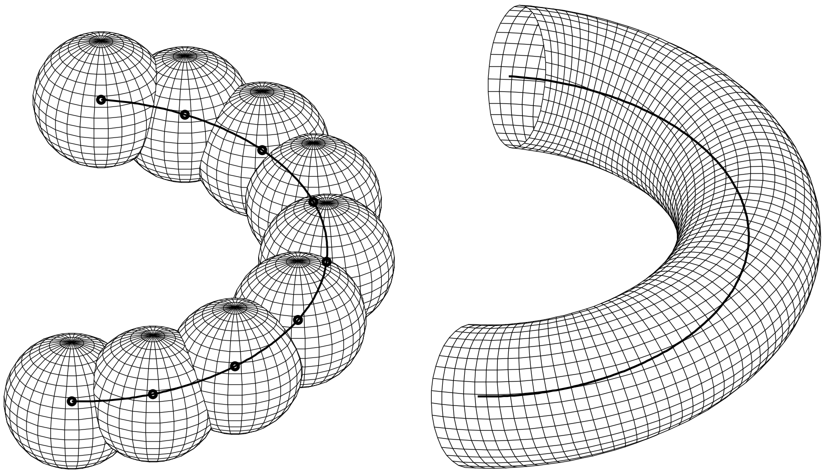


Abbildung 4.27: Rohrfläche

**Aufgabe 4.12** *Gegeben: In Grund– und Aufriss die Leitkurve eines Torus (Kreis, Abb. 4.28). Zeichne den Umriss des Torus, der durch Bewegung einer Kugel mit Radius 1cm erzeugt wird.*

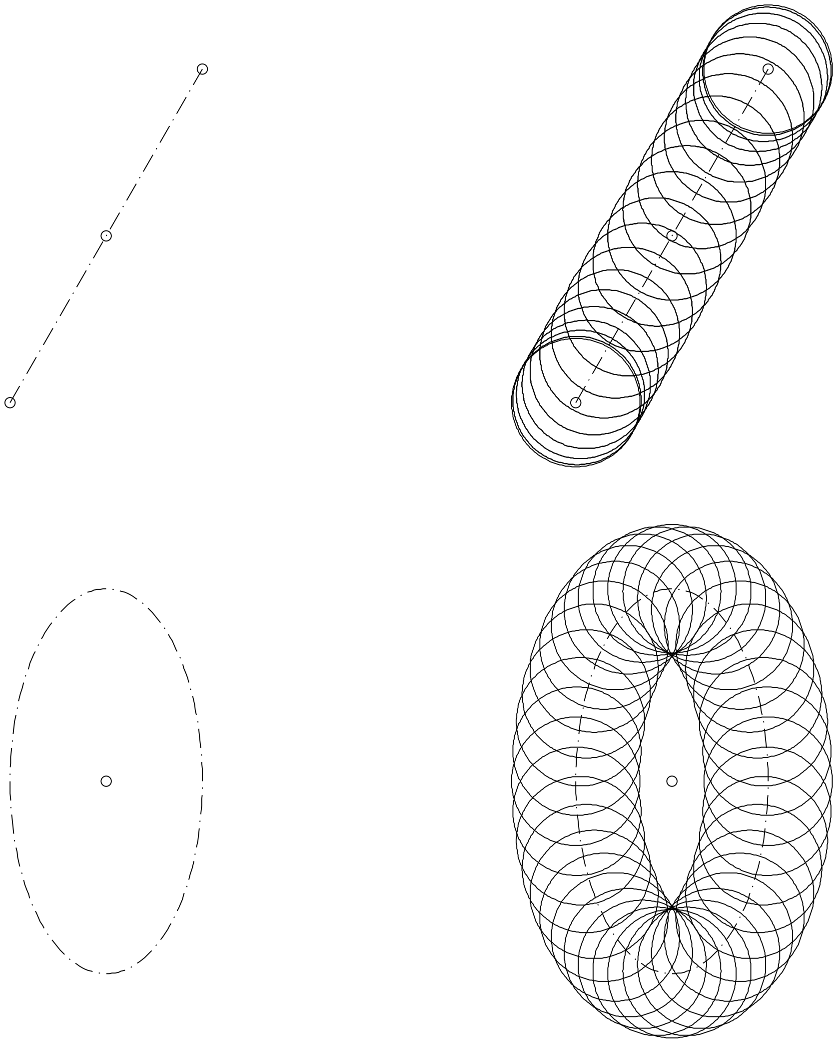


Abbildung 4.28: Rohrfläche: Torus

## 4.11 Durchdringungen

Gegeben: Kurve $k$ und Fläche $\Phi$.
Gesucht: Durchstoßpunkt $S = k \cap \Phi$.
Lösungsidee: Die Kurve wird in eine Hilfsfläche $\Psi$ (meistens: Ebene oder Kugel) so eingebettet, dass die Schnittkurve $h := \Psi \cap \Phi$ (Gerade oder Kreis) einfach zu konstruieren ist. Der/die Durchstoßpunkt(e) ergeben sich dann aus $k \cap h$.

### 4.11.1 Beispiel 1: Gerade $g$ – Kugel $\Phi$

Gegeben: Gerade $g$, Kugel mit Mittelpunkt $M$ in Grund– und Aufriss.

**Durchführung:**

1. Führe eine neue Risstafel $\pi_3$ so ein, dass die Gerade $g$ zu $\pi_3$ parallel ist.
2. Wir nehmen an, dass $\pi_3$ der Grundrisstafel $\pi_1$ zugeordnet ist. Als **Hilfsfläche** wählen wir die Ebene $\varepsilon$, die $g$ enthält und parallel zu $\pi_3$ ist. $\varepsilon$ schneidet aus der Kugel einen **Kreis** $c$ aus, dessen Mittelpunkt $M_c$ in $\pi_3$ mit $M'''$ (der Kugel) zusammenfällt.
3. $c''' \cap g'''$ liefert die Durchstoßpunkte $D_1''', D_2'''$ zunächst in $\pi_3$.
4. Konstruiere $D_1', D_2'$ und dann $D_1'', D_2''$.

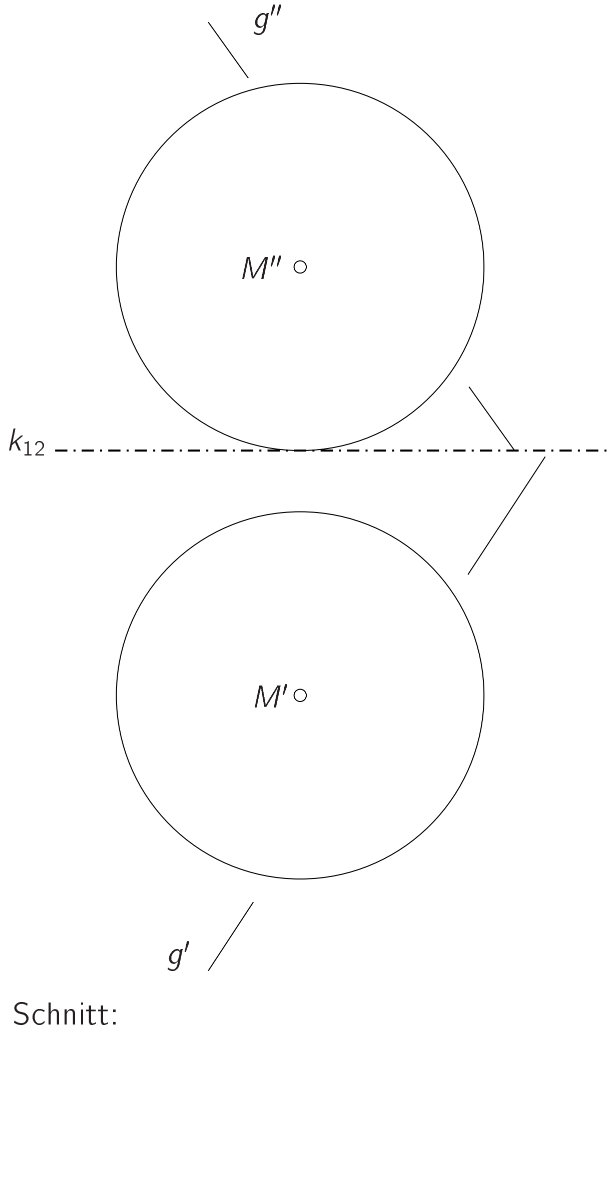



Abbildung 4.29: Schnitt:
Kugel–Gerade

### 4.11.2 Beispiel 2: Gerade $g$ – Kegel $\Phi$

Gegeben: Gerade $g$, Kegel mit Spitze $S$, Achse $a$, Basiskreis $c$ in Grund– und Aufriss.

**Durchführung:**

1. Als **Hilfsfläche** wählen wir die Ebene $\varepsilon$ durch die Kegelspitze $S$ und $g$. $\varepsilon$ schneidet aus dem Kegel zwei Mantellinien $l_1, l_2$ aus. $l_1, l_2$ bestimmt man über die Spur $s'_\varepsilon$ der Ebene $\varepsilon$. Hierzu schneidet man zwei Geraden von $\varepsilon$ (eine Gerade kann $g$ sein) mit $\pi_1$.
2. $s'_\varepsilon \cap c'$ liefert Punkte $L_1, L_2$. Die Gerade durch $S$ und $L_1$ bzw. $L_2$ ist die Gerade $l_1$ bzw. $l_2$.
3. $D_1 = l_1 \cap g$ und $D_2 = l_2 \cap g$ sind die gesuchten Durchstoßpunkte.

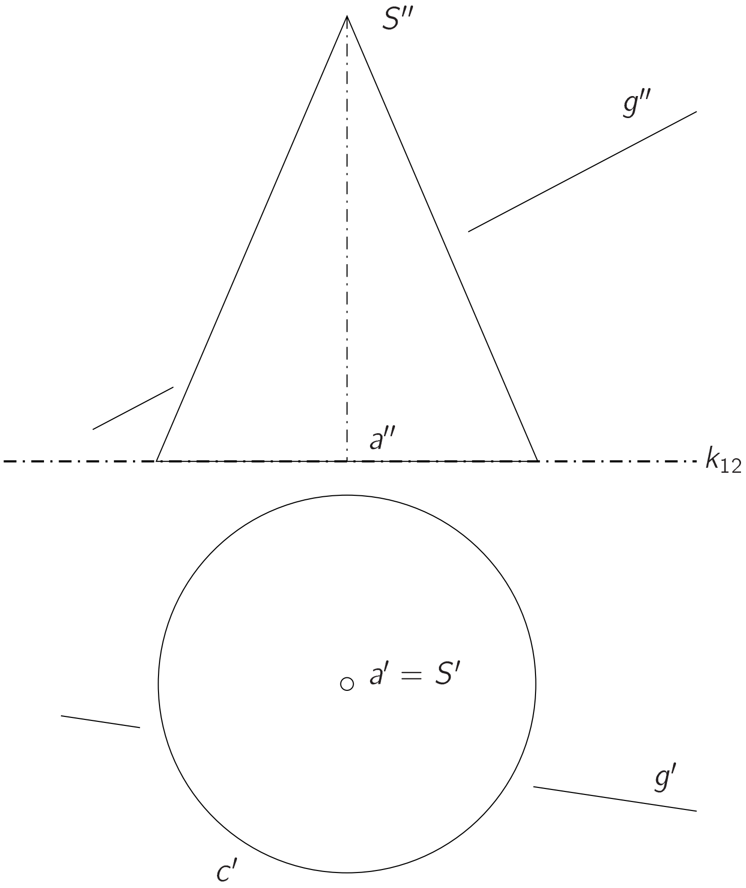



Abbildung 4.30: Schnitt: Kegel–Gerade

## 4.12 Durchdringungskurve zweier Flächen

Die Durchdringungs– oder Verschneidungskurven zweier Flächen $\Phi_1, \Phi_2$ wird i.a. punktweise konstruiert.

**Prinzip**: Man wählt eine **Hilfsfläche** $\Psi$, die die gegebenen Flächen $\Phi_1, \Phi_2$ in einfachen Kurven (Geraden, Kreise) $k_1$ und $k_2$ schneidet. Der Schnitt $k_1 \cap k_2$ liefert einen oder mehrere Punkte von $\Phi_1$ und $\Phi_2$. Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis man eine "genügende" Anzahl von gemeinsamen Punkten gefunden hat.

### 4.12.1 Beispiel 1: Hilfsebenen

(s. LEO S.152)

Gegeben: Kegel $\Phi_1$ (Achse $a_1$), Zylinder $\Phi_2$ (Achse $a_2$) (Abb. 4.31).
Gesucht: Durchdringungskurve $k = \Phi_1 \cap \Phi_2$.
Lösungs**idee**: Hilfs**ebene** $\varepsilon \perp a_1$ schneidet den Kegel in einem Kreis und den Zylinder in einem Geradenpaar.

**Durchführung:**

1. Wähle eine geeignete Ebene $\varepsilon$ und zeichne $\varepsilon''$.
2. Zeichne den Grundriss $c'$ des Schnittkreises $\varepsilon \cap \Phi_1$ (Radius r) .
3. Ziehe im Grundriss die Parallelen $g', h'$ zu $a_2'$ im Abstand $d$.
4. Die (max. vier) Schnittpunkte $P', Q'$ des Kreises $c'$ mit $g'$, $h'$ sind die Grundrisse von Punkten der Durchdringungskurve.
5. Auf $\varepsilon''$ erhält man dann $P'', Q''$.
6. Wiederhole 1.–5. $n$–mal.
7. Verbinde die Punkte in der "richtigen" Reihenfolge mit einer Kurve.

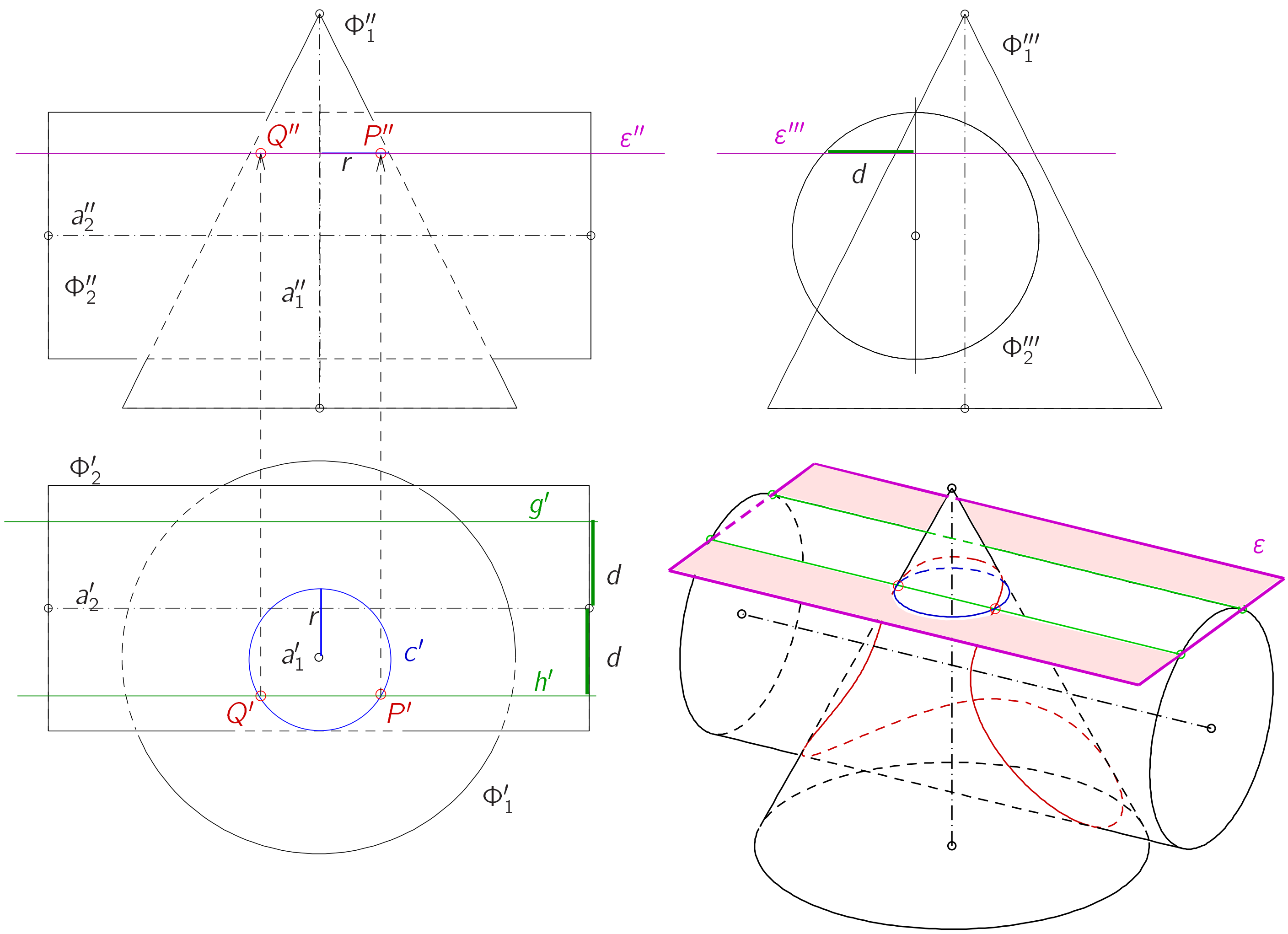



Abbildung 4.31: Schnitt: Kegel–Zylinder

**Aufgabe 4.13** :
*Gegeben: Kegel und Zylinder in Grund– und Aufriss (Abb. 4.32).*
*Gesucht: Durchdringungskurve in Grund– und Aufriss.*

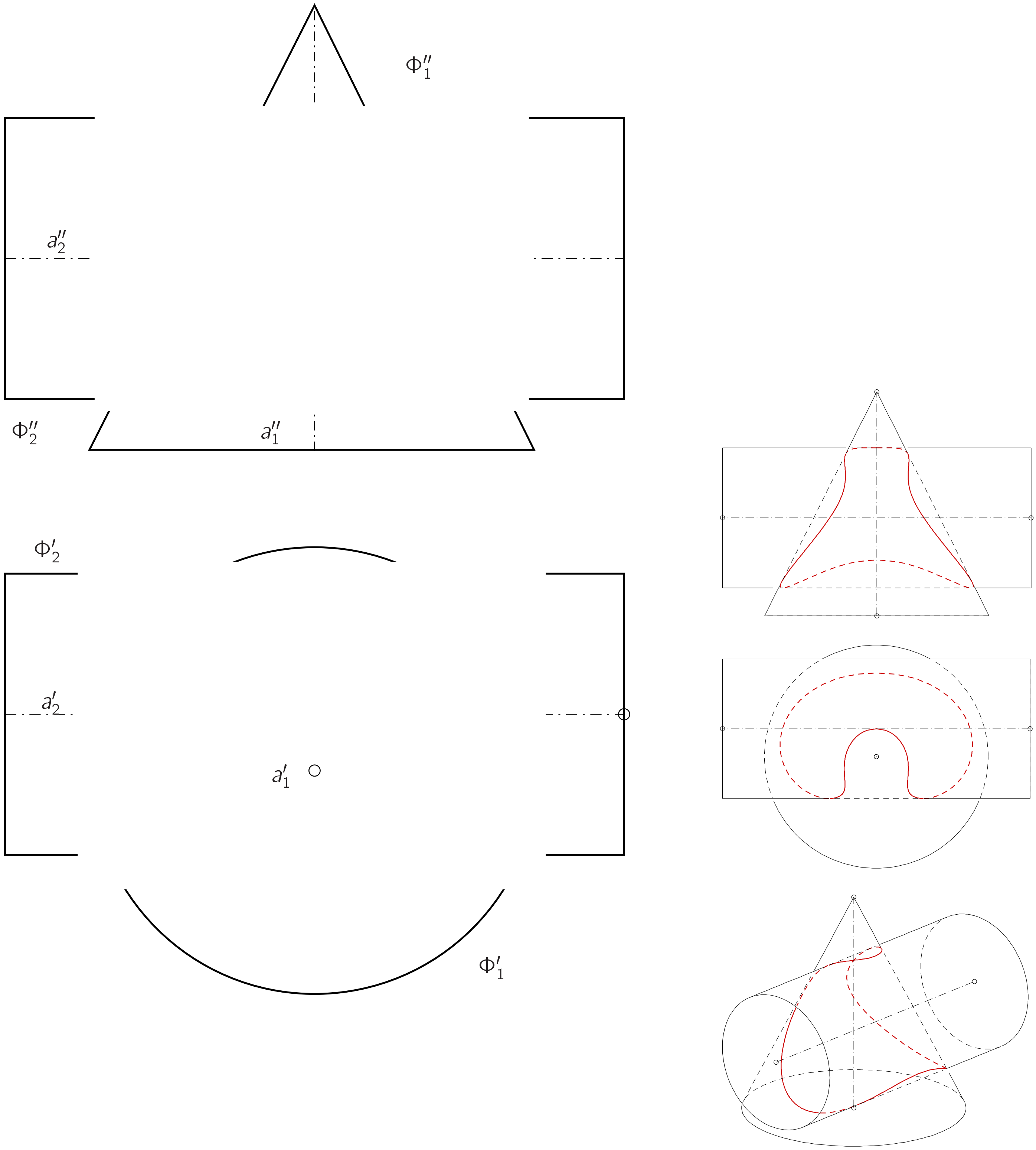



Abbildung 4.32: Schnitt: Kegel–Zylinder (Hilfsebenenverfahren)

### 4.12.2 Beispiel 2: Hilfskugeln

(s. LEO S.155)

Gegeben: Kegel $\Phi_1$ (Achse $a_1$), Zylinder $\Phi_2$ (Achse $a_2$). Die Achsen schneiden sich! (Abb. 4.31).
Gesucht: Durchdringungskurve $k = \Phi_1 \cap \Phi_2$.
Lösungs**idee**: In diesem Beispiel liefern horizontale Schnitte mit dem Zylinder Ellipsen, d.h. nicht einfach zu

zeichnende Kurven. Deshalb benutzen wir eine andere Idee: Wir wählen als Hilfsflächen **Kugeln** mit dem Schnittpunkt $M = a_1 \cap a_2$ der Achsen als Mittelpunkt. Solche Kugeln mit geeigneten Radien schneiden sowohl den Kegel als auch den Zylinder in **Kreisen** als Hilfskurven. Diese Kreise sind alle senkrecht zur Aufrisstafel.

**Durchführung**:

1. Wähle eine Kugel $\Psi$ mit Mittelpunkt $M$, die beide Flächen schneidet.
2. Bestimme im Aufriss die Schnittkreise $k_1, l_1$ der Kugel mit dem Kegel $\Phi_1$ und $k_2, l_2$ der Kugel mit dem Zylinder $\Phi_2$. Wir verwenden hier nur $k_2$.
   $k_1'', l_1'', k_2'', l_2''$ sind Strecken, da alle Kreise zu $\pi_2$ senkrecht sind.
3. $k_1'' \cap k_2''$ und $l_1'' \cap k_2''$ liefern den Aufriss von max. vier Punkten $P, Q, R, S$ der Durchdringungskurve. Es ist $P'' = Q'', R'' = S''$.
4. Zeichne $k_1', l_1'$ und übertrage $P, Q, R, S$ in den Grundriss. $P', Q', R', S'$ liegen auf $k_1', l_1'$.
5. Wiederhole 1.–4. $n$–mal.
6. Verbinde die Punkte in der "richtigen" Reihenfolge mit einer Kurve.

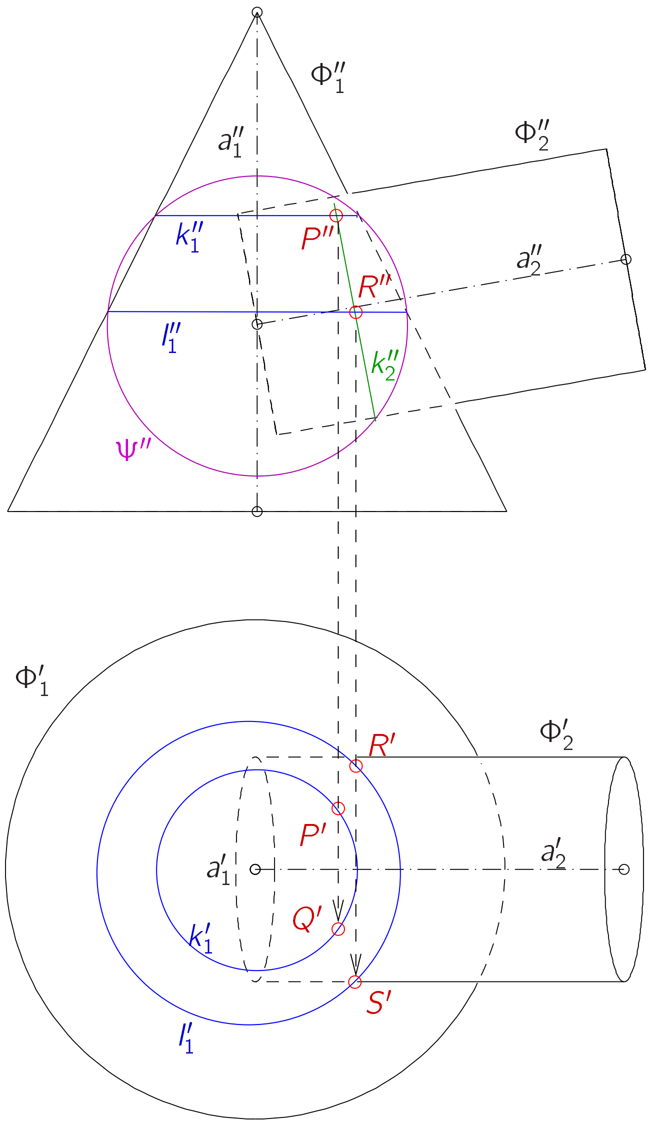



Abbildung 4.33: Schnitt: Kegel–Zylinder (Hilfskugelverfahren)

**Aufgabe 4.14** :
*Gegeben: Kegel und Zylinder in Grund– und Aufriss (Abb. 4.34).*
*Gesucht: Durchdringungskurve in Grund– und Aufriss.*

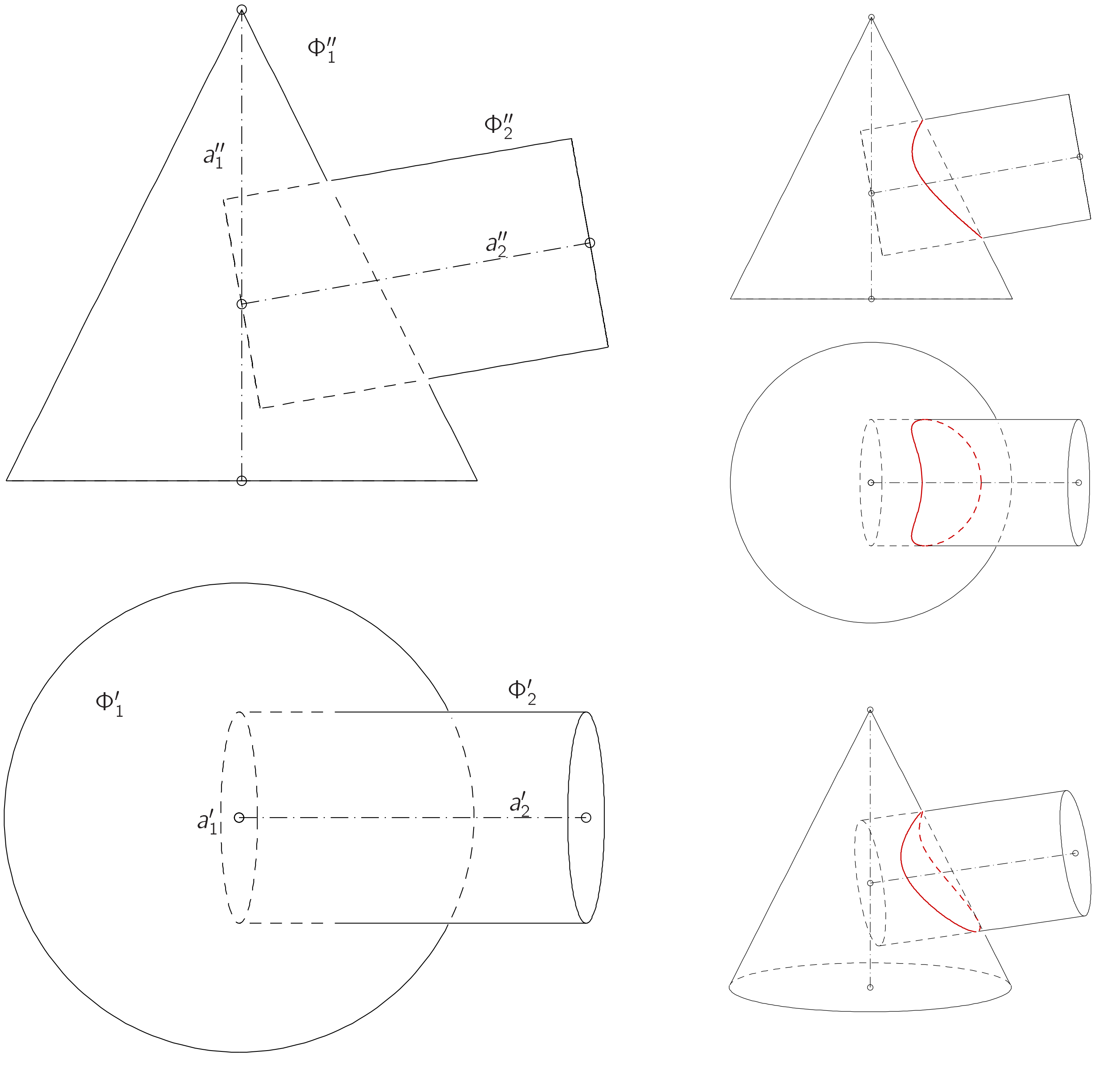



Abbildung 4.34: Schnitt: Kegel–Zylinder (Hilfskugelverf.)

**Bemerkung 1**:
a) Das **Hilfskugelverfahren** ist auf alle Rotationsflächen mit sich **schneidenden Achsen** anwendbar. Hilfskurven sind dann immer Kreise.
b) Die Voraussetzung für das **Hilfsebenenverfahren** ist: Es müssen sich **einfach** zu zeichnende **Hilfskurven** bei Schnitten mit geeigneten Ebenen ergeben. Meistens werden die Hilfsebenen senkrecht zu einer Risstafel gewählt.

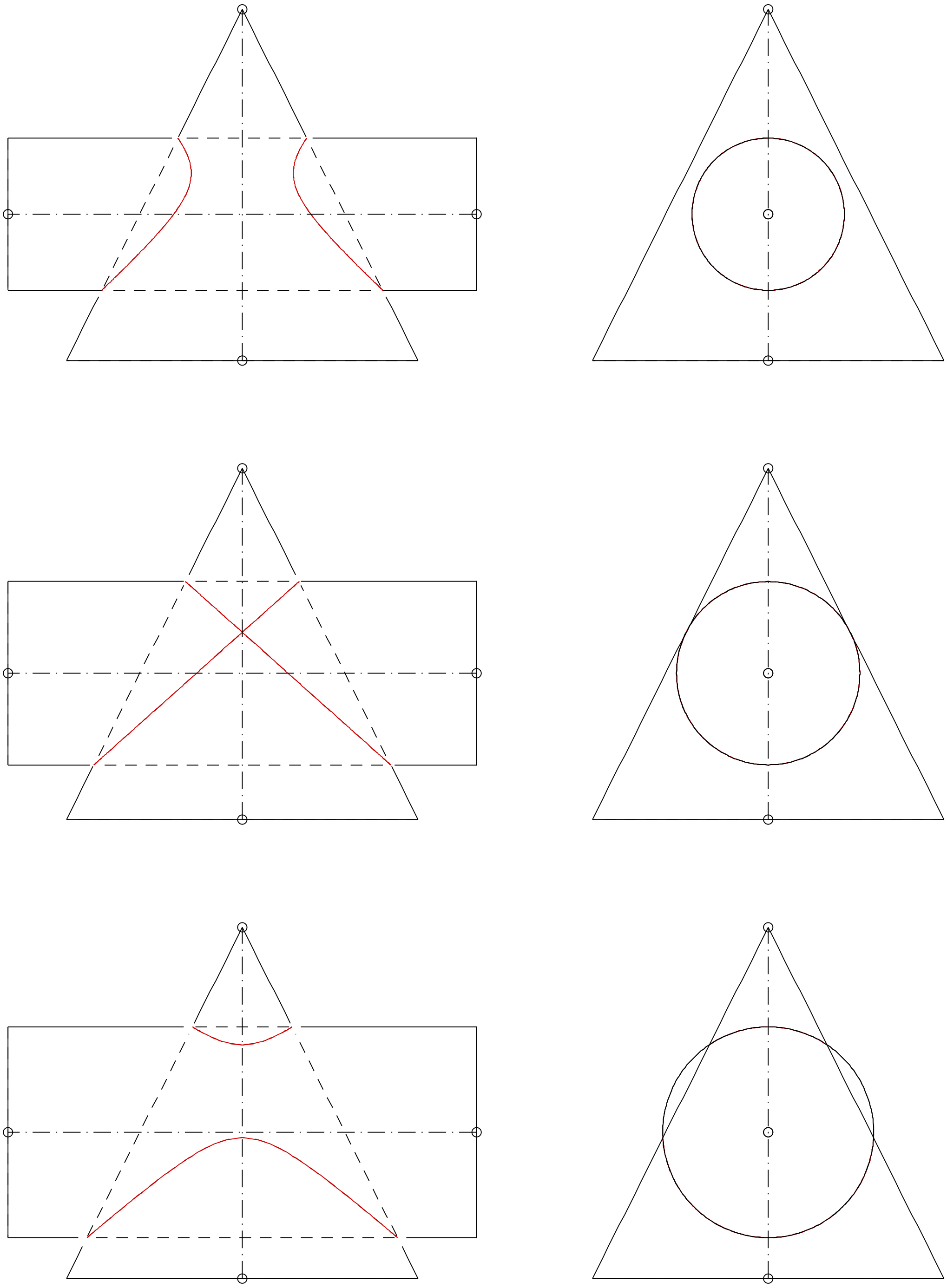


Abbildung 4.35: Schnitt: Kegel–Zylinder (weitere Beispiele)

**Bemerkung 2**:
a) Haben Flächen in einem Punkt $P$ eine gemeinsame **Berührebene**, so hat ihre Durchdringungskurve in $P$ eine **Spitze** (Abb. 4.35, Mitte).
b) Haben zwei sich schneidende **Drehzylinder** und/oder **Drehkegel** eine gemeinsame **Berührkugel**, so zerfällt die Durchdringungskurve in zwei **Ellipsen** (Beispiele sind das Kreuzgewölbe, Abb. 4.36, und der in der Mitte dargestellte Schnitt von Abb. 4.35).

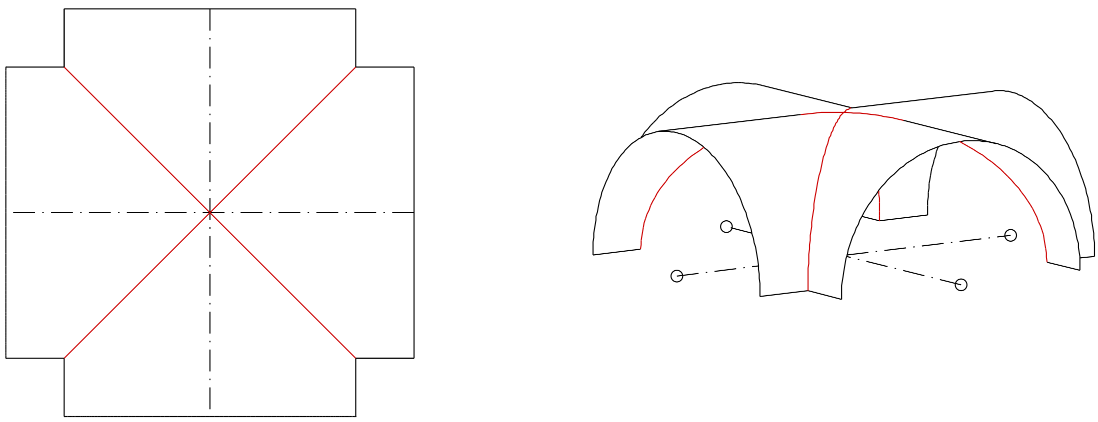


Abbildung 4.36: Kreuzgewölbe (Schnitt zweier Zylinder mit gleichen Radien und sich schneidenden Achsen)

**Aufgabe 4.15** :
*Gegeben: Lichtkegel $K$, Zylinder $Z$, Ebene (Wand) $E$ und Rotationsfläche (Vase) $R$ in Grund– und Aufriss (Abb. 4.38).*
*Gesucht: Durchdringungskurven in Grund– und Aufriss (sind dies genau die Schattengrenzen?).*

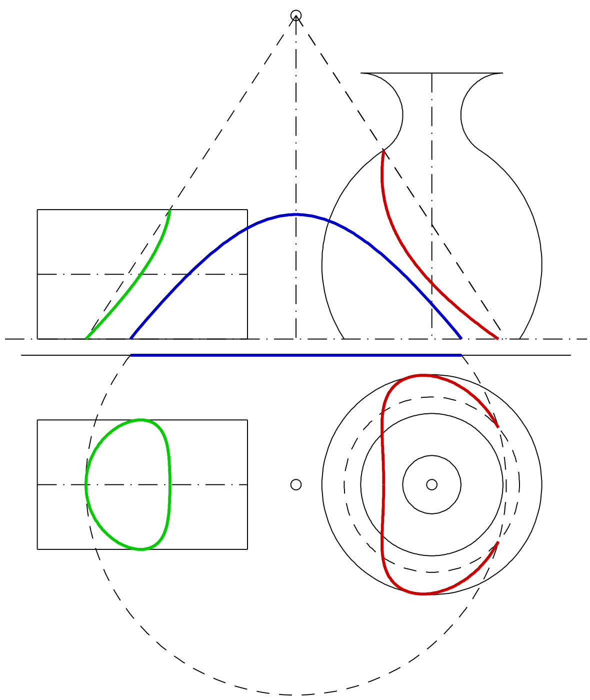


Abbildung 4.37: Durchdringungskurven: Lösung zu Abb. 4.38

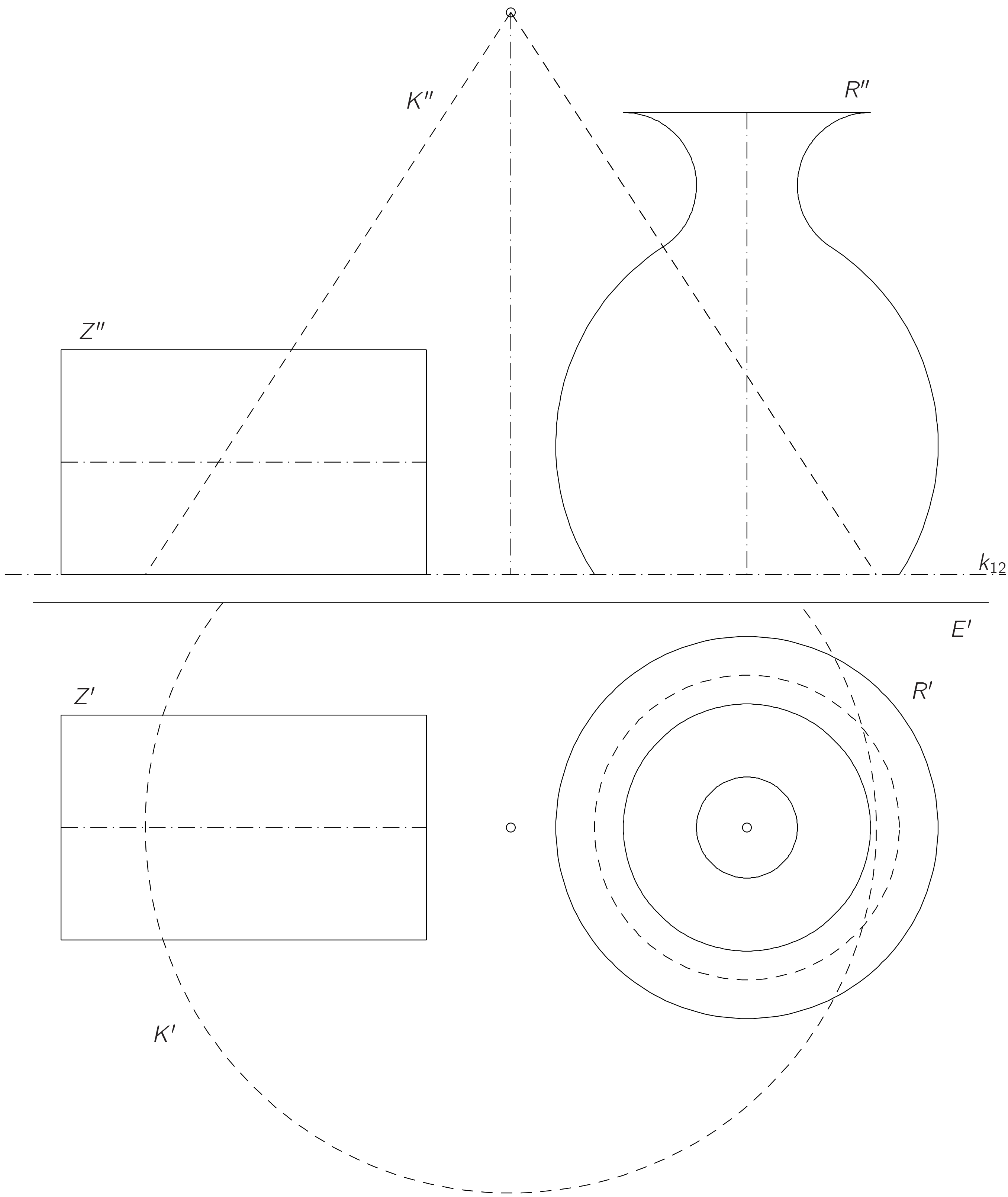



Abbildung 4.38: Durchdringungskurven

# Kapitel 5

# Zentralprojektion und Rekonstruktion

## 5.1 Zentralprojektion (s. LEO S.213)

in Abschnitt 1.1.2 der Einleitung wurden wesentliche Eigenschaften einer Zentralprojektion erwähnt und auf die wichtigsten Unterschiede zur Parallelprojektion hingewiesen. Zur Erinnerung: Räumliche Gegenstände (Punkte, Strecken, Kurven,...) werden von einem Punkt (*Zentrum oder Augpunkt*) aus auf eine Ebene projiziert (s. Abb. 5.1).

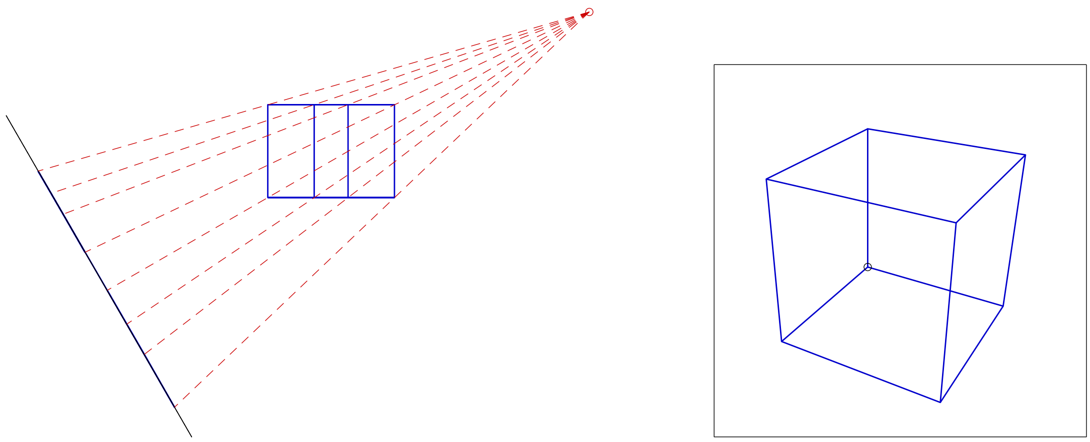


Abbildung 5.1: Quader in Zentralprojektion

Betrachtet man ein so entstandenes Bild mit **ein**em Auge und zwar mit dem Auge im Zentrum, so lässt sich kein Unterschied zum Betrachten des Gegenstandes selbst feststellen. Diese Tatsache ist ein Grund für die große Bedeutung der Zentralprojektion. Auch eine **Photographie** ist eine Zentralprojektion. Eine gute Kenntnis des Prinzips und der Eigenschaften einer Zentralprojektion ist auch für die in der Praxis wichtige Aufgabe der **Rekonstruktion** (s. Abschnitt 5.6) nötig. Dabei versucht man anhand einer Photographie auf die wahren Abmessungen eines Gegenstandes zu schließen.

### 5.1.1 Definitionen zur Zentralprojektion

**Bezeichnungen:**

| | | |
|---|---|---|
| O | : | **Augpunkt** |
| $\pi$ | : | **Bildtafel** |
| H | : | **Hauptpunkt** (Fußpunkt des Lotes vom Augpunkt auf die Bildtafel. |
| | | Bei Original–Photographien ist H der Mittelpunkt des Bildes. |
| d | : | **Distanz** (Abstand Augpunkt – Hauptpunkt) |
| $\pi_1$ | : | **Standebene** (Grundrissebene) |
| s | : | **Standlinie** Schnittgerade der Standebene mit der Bildtafel) |
| h | : | **Horizont** (Schnittgerade der horizontalen Ebene durch O mit der Bildtafel. |
| | : | Bei senkrechter Bildtafel geht h immer durch H.) |
| $\pi_v$ | : | **Verschwindungsebene** (Ebene durch O, die parallel zur Bildtafel ist.) |

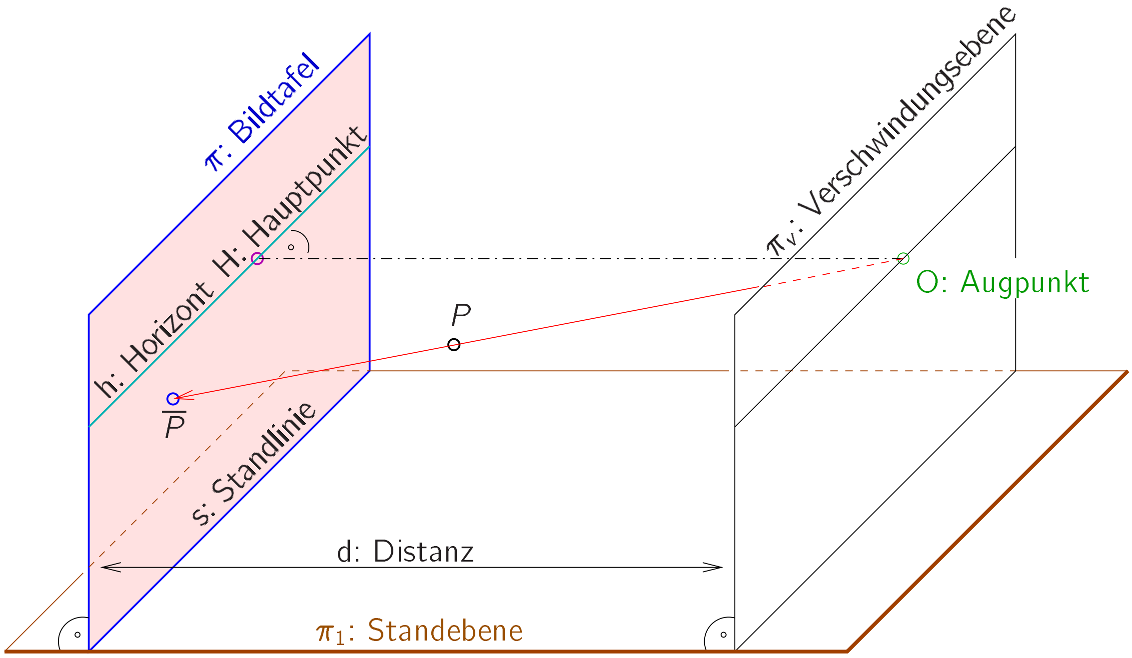



Abbildung 5.2: Definitionen zur Zentralprojektion

Das Bild, das durch Zentralprojektion entsteht, nennt man auch **perspektives Bild**.
Punkte in der Verschwindungsebene haben kein perspektives Bild, da die zugehörigen Projektionsstrahlen die Bildtafel nicht treffen.
Es ist üblich, nur solche Teile von Gegenständen abzubilden, die **vor** der Verschwindungsebene liegen.
Das Auge sieht nur solche Dinge gut, die innerhalb des **Sehkegels** (Kegel mit Spitze in O und Achse O-H, dessen halber Öffnungswinkel $\approx 30°$ ist) liegen.

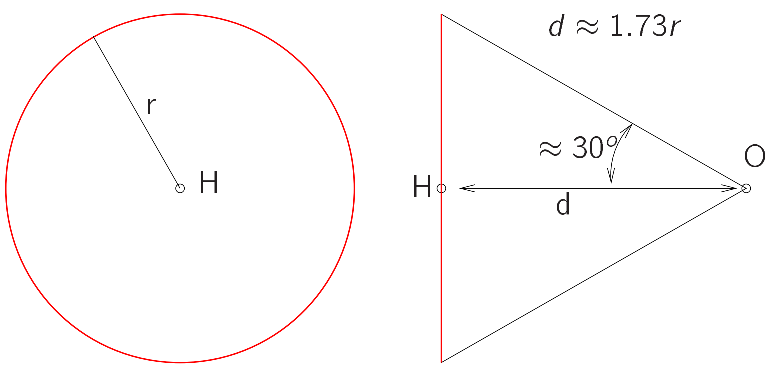



Abbildung 5.3: Sehkreis

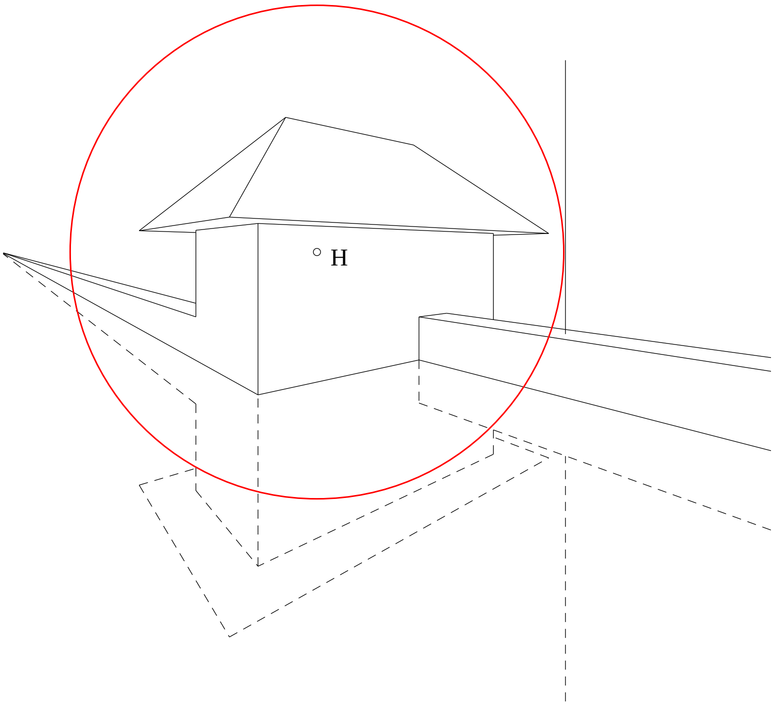



Abbildung 5.4: Zentralprojektion mit Sehkreis: Haus am See

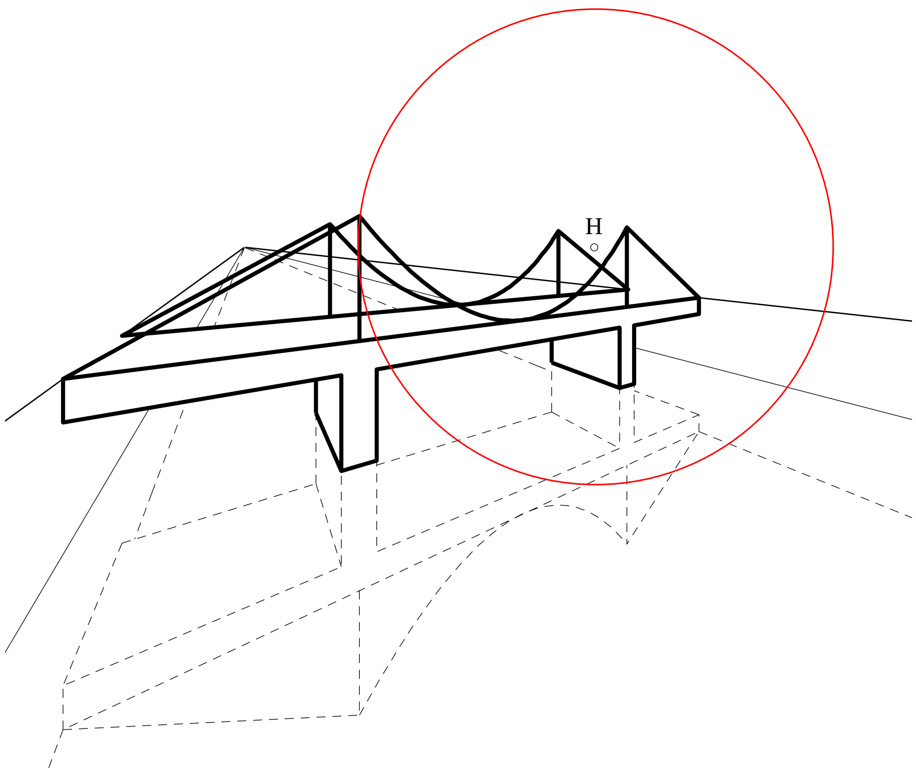



Abbildung 5.5: Zentralprojektion mit Sehkreis: Brücke

### 5.1.2 Spurpunkt, Fluchtpunkt, Spurgerade, Fluchtgerade

Der Durchstoßpunkt $S_g$ einer Gerade $g$ mit der Bildtafel $\pi$ heißt **Spurpunkt** von $g$.
Die Bilder einer Schar **paralleler Geraden** sind i.a. nicht parallel. Sie schneiden sich im **Fluchtpunkt** $F$ **der Geradenschar**. Man erhält $F$ als Spurpunkt derjenigen Gerade $g_0$ der Schar, die durch den Augpunkt $O$ geht.

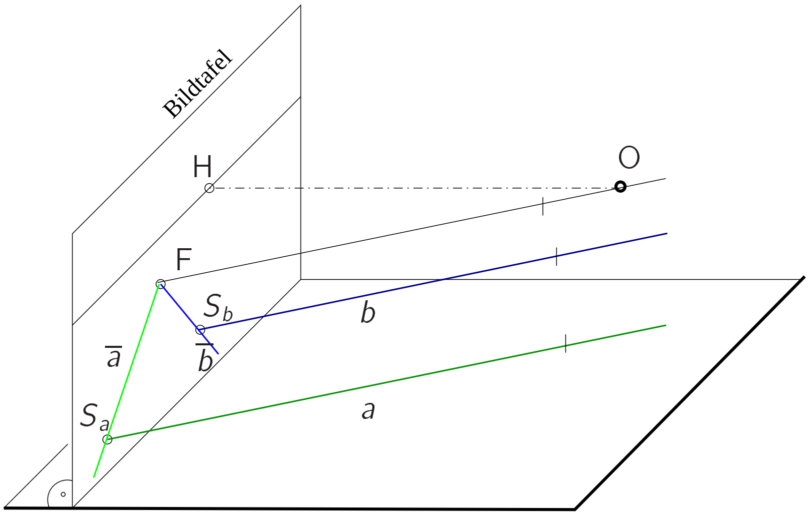



Abbildung 5.6: Flucht– und Spurpunkt paralleler Geraden

Ist $g$ eine Gerade und $F$ der Fluchtpunkt der durch $g$ bestimmten parallelen Geradenschar, so sagt man "$F$ ist der **Fluchtpunkt** der Gerade $g$". Es gilt:

1. Geraden, die senkrecht zur Bildtafel sind, heißen **Tiefenlinien**.
2. Fluchpunkte **horizontaler Geraden** liegen auf dem Horizont $h$.
3. Eine Gerade ist durch ihren Spurpunkt und ihren Fluchtpunkt **bestimmt**, falls diese voneinander verschieden sind.
4. Die Bildgeraden zweier paralleler Geraden, die zur Bildtafel parallel sind, sind parallel.

**Beispiel 5.1** *Abb. 5.7 zeigt Fluchtpunkte paralleler Geraden.*

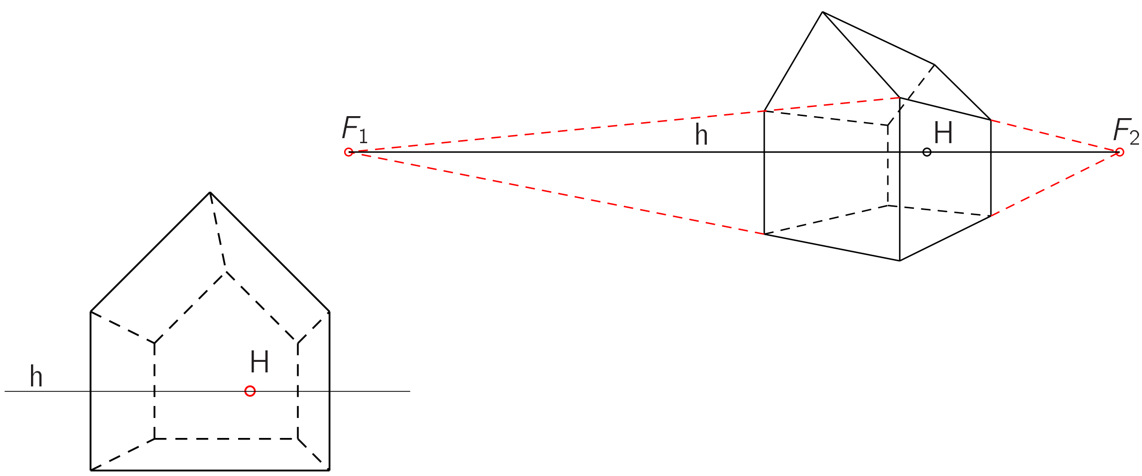



Abbildung 5.7: Fluchtpunkte eines Hauses

Die Schnittgerade einer Ebene $\varepsilon$ mit der Bildtafel $\pi$ heißt **Spurgerade** von $\varepsilon$.
Die Bilder einer Schar **paralleler Ebenen** schneiden sich i.a. in der **Fluchtgerade** (–**linie**) $f$ **der Schar**. Man erhält $f$ als Spurgerade derjenigen Ebene der Schar, die durch $O$ geht (s. Abb. 5.8).

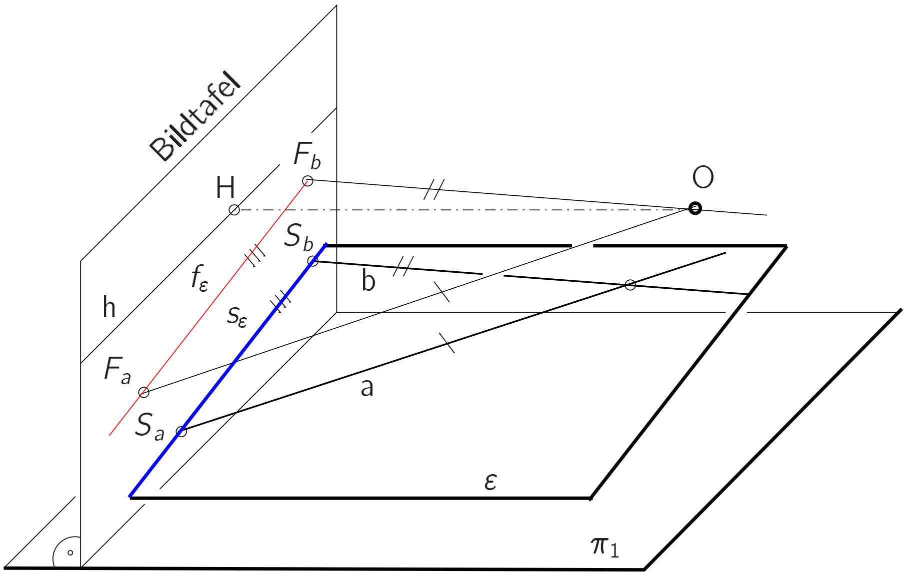



Abbildung 5.8: Flucht– und Spurgeraden einer Ebene

**Aufgabe 5.1** *Bestimme die Fluchtgeraden von Ebenen eines Hauses (Abb. 5.9)*

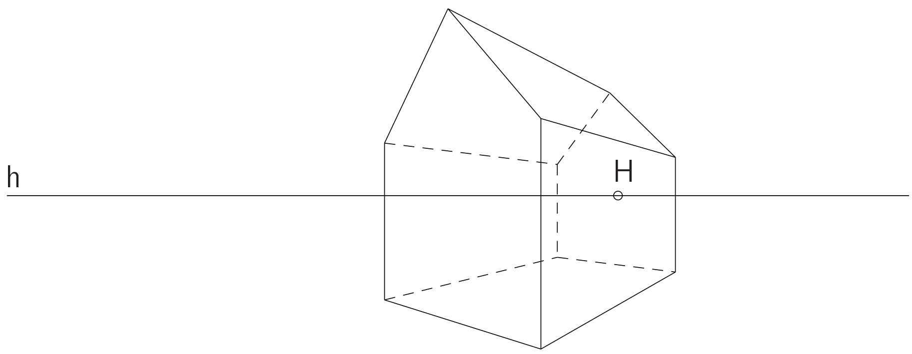



Abbildung 5.9: Fluchtgeraden eines Hauses

### 5.1.3 Konstruktion perspektiver Bilder bei senkrechter Bildtafel

Steht die Bildtafel **senkrecht**, so gilt:

$\boxed{H \text{ liegt auf dem Horizont } h.}$

| | | |
|---|---|---|
| Vorgabe | : | a) Punkte und Geraden in Grund– und Aufriss. |
| | | b) Bildtafel $\pi$ und der Augpunkt $O$ in Grund– und Aufriss. |
| Gesucht | : | Die perspektiven Bilder der Punkte und Geraden. |

**Verfahren**: (s. LEO S.217)

(0) Bestimmung des **Hauptpunktes** $H$ (Lot von $O'$ auf $\pi'$) und des **Horizonts** $h$ (Höhenlinie durch $O$ in $\pi$) in Grund– und Aufriss. "Festmachen" des Bildes auf der Zeichenfläche durch Wahl des Hauptpunktes $H$. Zeichnen des Horizonts $h$ durch $H$.

(1) Abbildung einer **Geraden** g:
Fluchtpunkt $F_g$ und Spurpunkt $S_g$ oder zwei andere Punkte der Bildgeraden $\overline{g}$ in Grund– und Aufriss bestimmen.
Übertragen dieser Punkte in die Zeichenfläche für das perspektive Bild. (Der horizontale Abstand eines Bildpunktes von $H$ wird aus dem Grundriss, der Abstand vom Horizont $h$ aus dem Aufriss entnommen.)
($F_g$ ist der Spurpunkt der zu $g$ parallelen Gerade durch $O$.)

(2) Abbildung eines **Punktes** $P$:

I) **1. Methode** (Durchstoßpunktmethode):
- a) zeichnen des Projektionsstrahls $p$ in Grund– und Aufriss.
- b) Bestimmung des Schnittpunktes $\overline{P} = p \cap \pi$ (Bildpunkt) in Grund– und Aufriss.
- c) zeichnen des Bildpunktes $\overline{P}$ (horizontaler Abstand von $H$ aus Grundriss, Abstand vom Horizont $h$ aus Aufriss).

II) **2. Methode**:
Man bestimmt das Bild $\overline{P}$ als Schnitt zweier "leicht" zu zeichnenden **Hilfsgeraden**. Als Hilfsgeraden kann man z.B.
- a) Tiefenlinien (ihre Bilder gehen durch $H$),
- b) Geraden, deren Fluchtpunkte schon bekannt sind, verwenden.

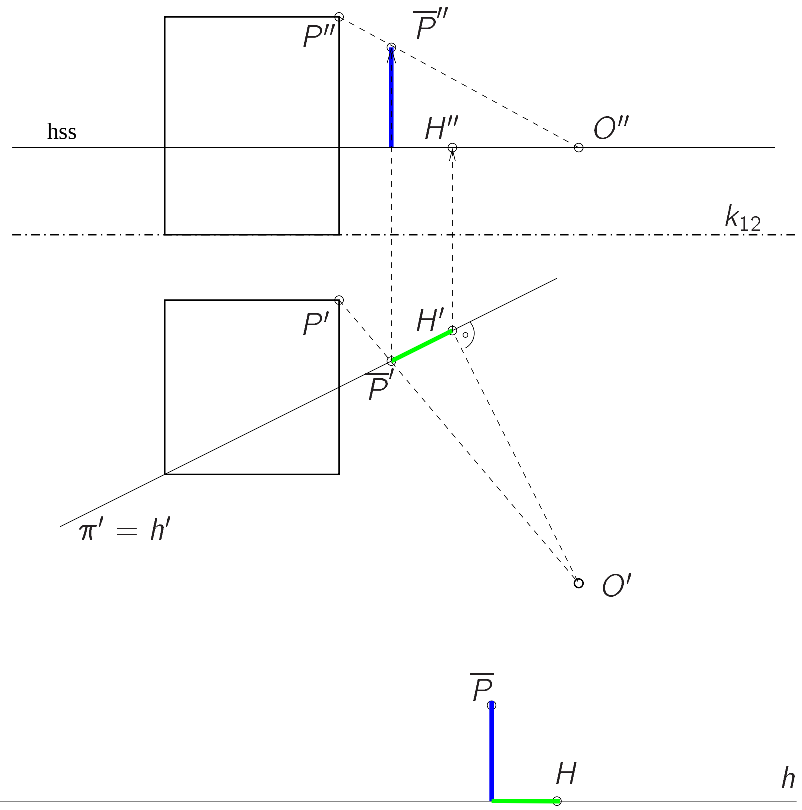



Abbildung 5.10: Zentralprojektion eines Quaders mit der Durchstoßpunktmethode

Um das Übertragen der in Grund– und Aufriss konstruierten Punkte in das perspektive Bild zu erleichtern, wird oft die **Architektenanordnung** gewählt: (s. LEO S.221)
Der **Grundriss** wird so unterhalb (oder oberhalb) von dem perspektiven Bild angeordnet, dass

der Horizont $h$ parallel zu $\pi'$ und $H$ auf der Gerade $\overline{O'H'}$ liegt.

Das perspektive Bild eines Punktes liegt dann auf dem Lot zu $\pi'$ ("Ordner") im Grundriss des Bildpunktes.
Der **Aufriss** wird so neben das perspektive Bild gelegt, dass

$h''$ mit $h$ übereinstimmt.

Die Höhe eines Spurpunktes über dem Horizont $h$ kann dann direkt aus dem Aufriss in das perspektive Bild übertragen werden.

**Aufgabe 5.2** *Zeichne ein perspektives Bild eines Quaders in Architektenanordnung (Abb. 5.11).*

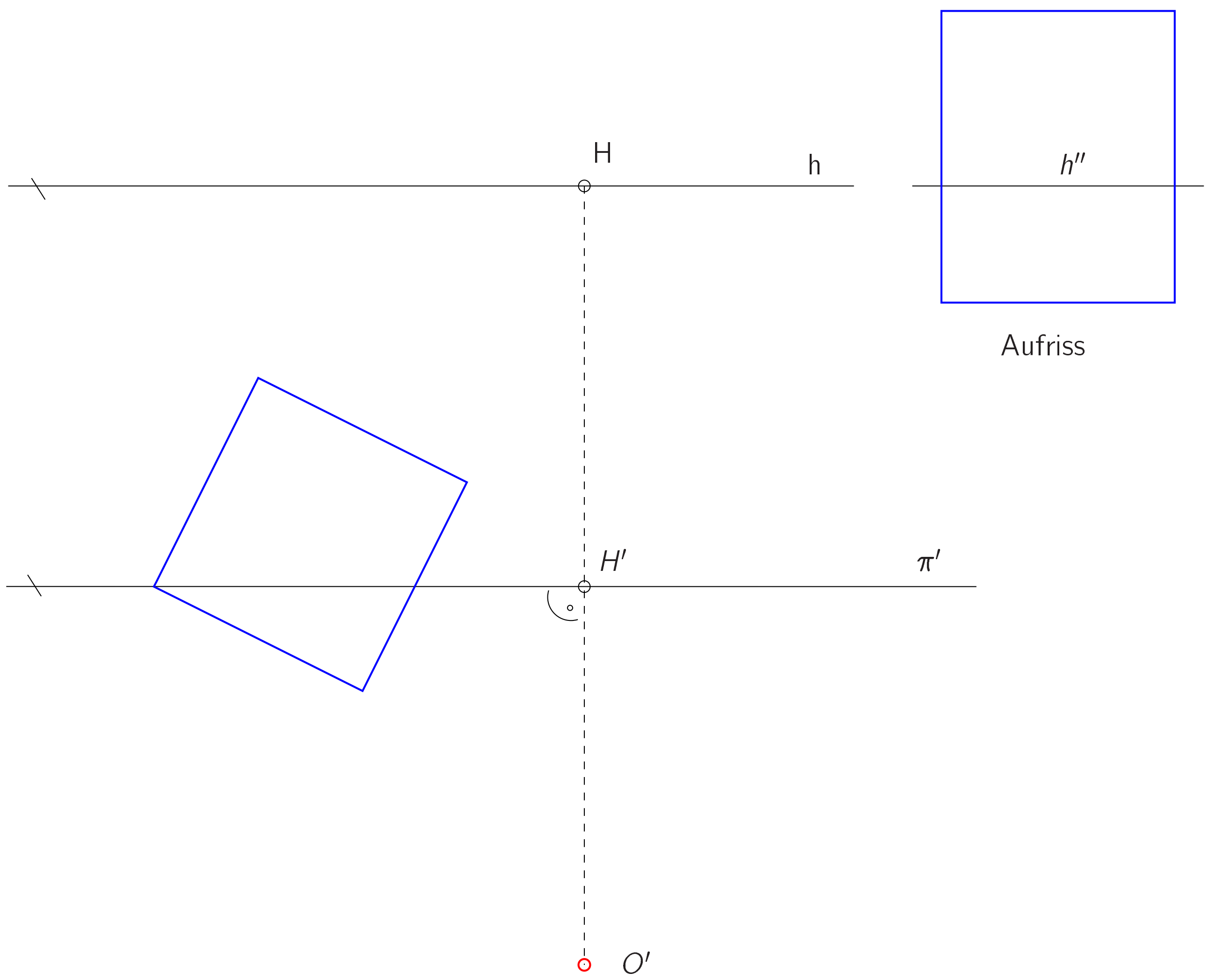



Abbildung 5.11: Zentralprojektion eines Quaders in Architektenanordnung

**Aufgabe 5.3** *Zeichne ein perspektives Bild eines Hauses mit Fahnenstange a in Architektenanordnung (Abb. 5.12). (Verwende* Tiefenlinien *zur Konstruktion der Fahnenstange.)*

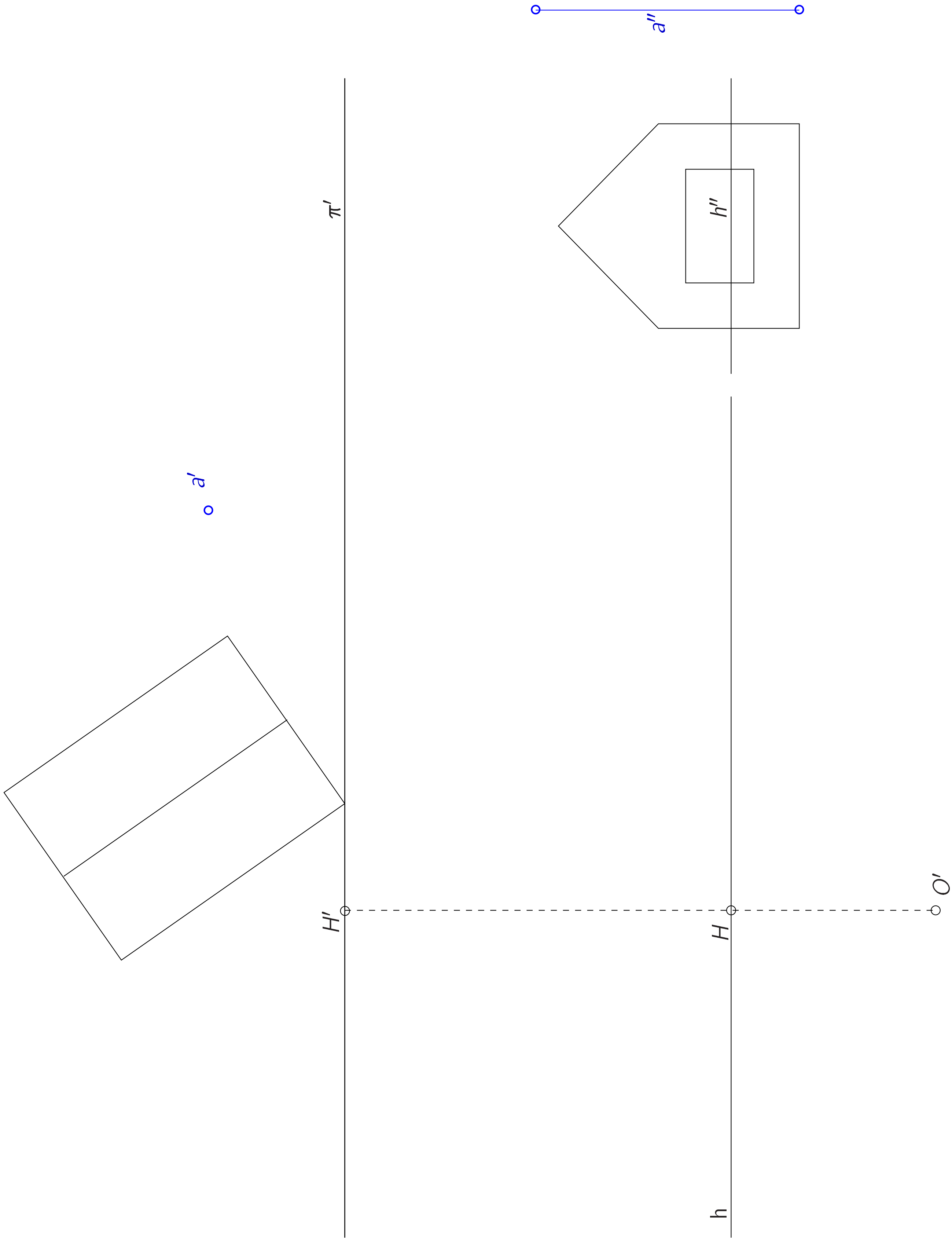



Abbildung 5.12: Zentralprojektion eines Hauses in Architektenanordnung

Die Abbn. 5.13, 5.14 zeigen, wie sich das Bild eines Hauses verändert, wenn man die Lage der Bildtafel oder des Augpunktes verändert.

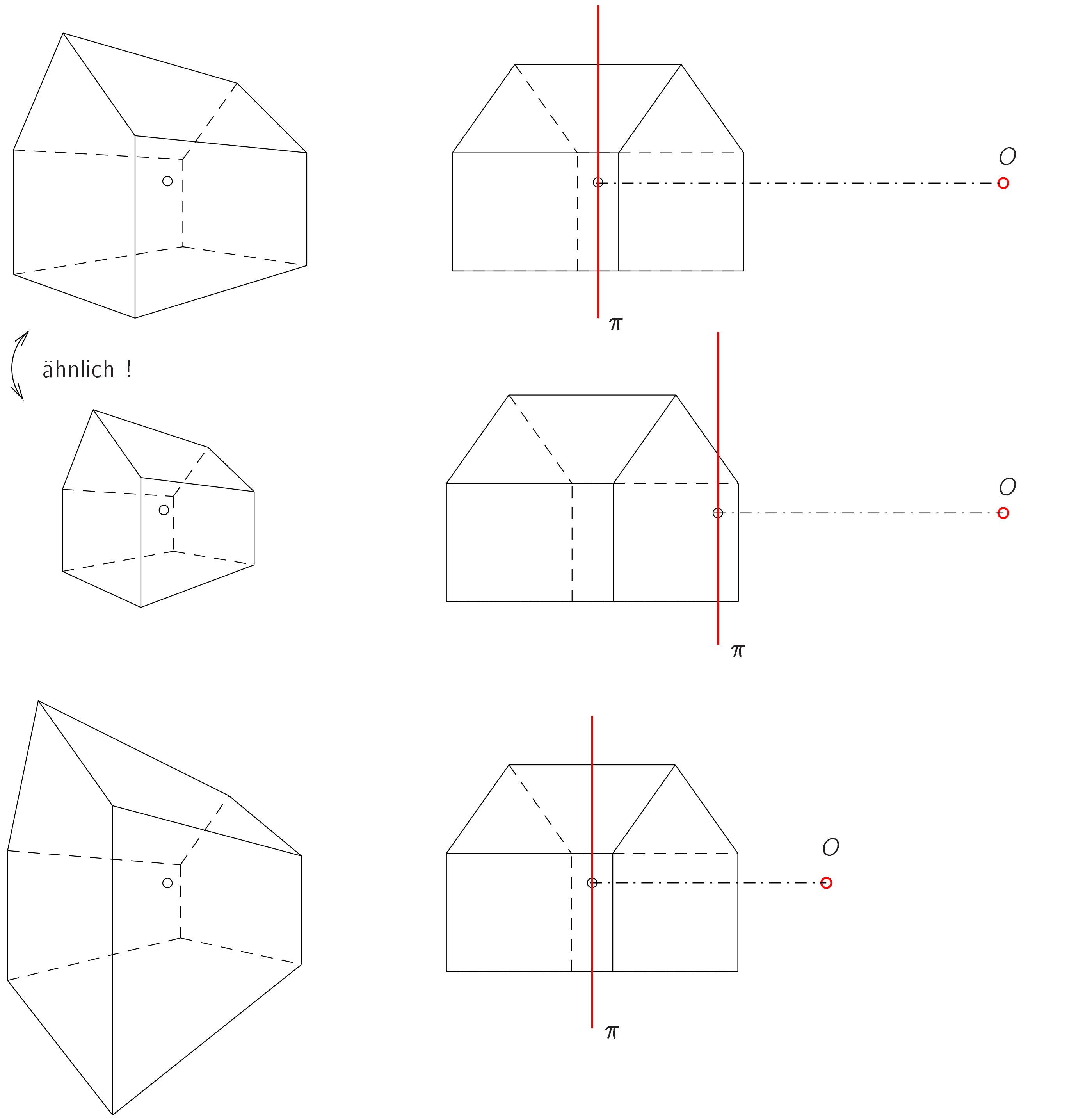



Abbildung 5.13: Wirkung der Wahl von Hauptpunkt und Distanz bei Zentralprojektion

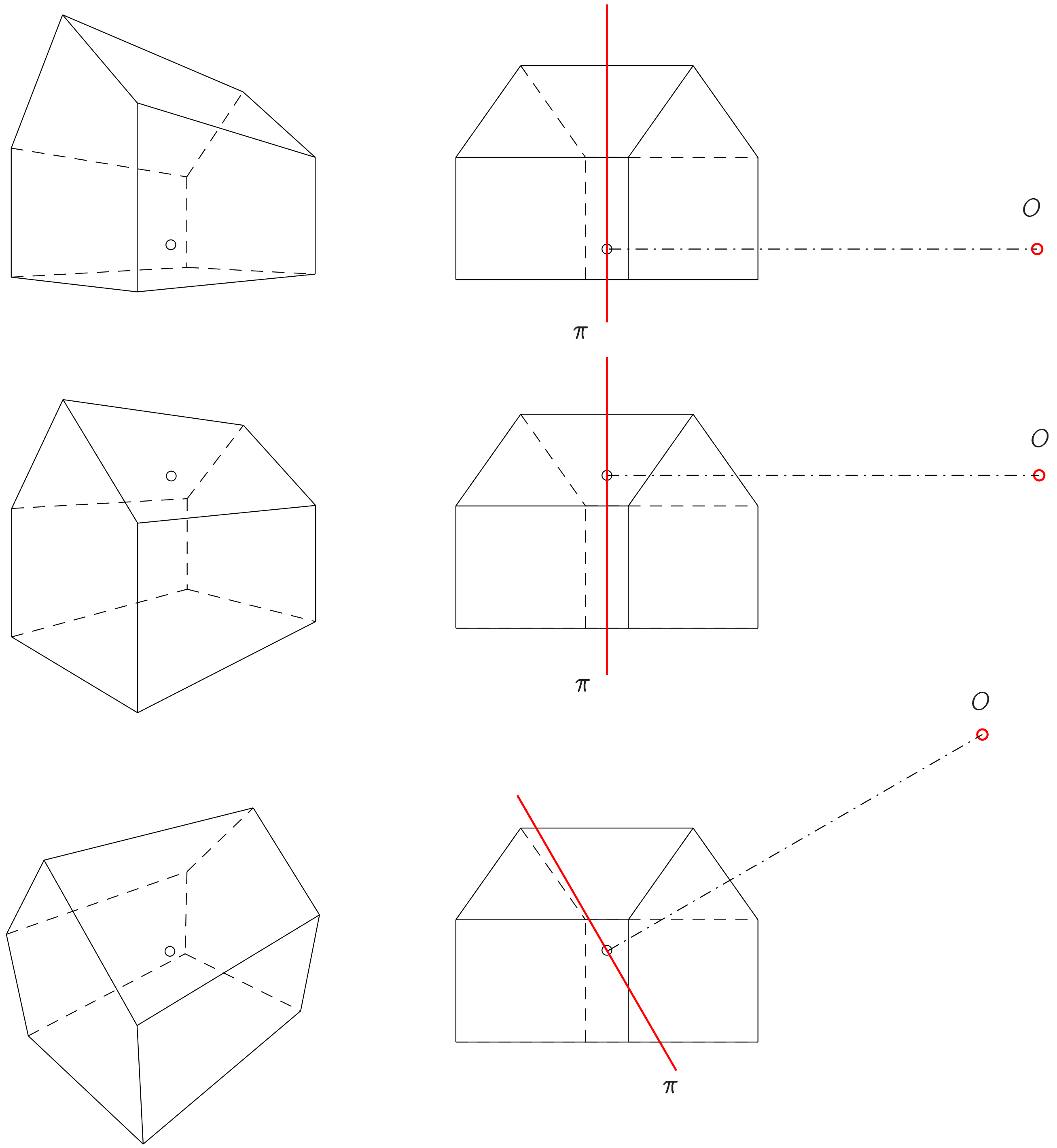



Abbildung 5.14: Wirkung der Wahl von Hauptpunkt und Distanz bei Zentralprojektion

## 5.2 Hilfskonstruktionen

### 5.2.1 Wahrer Mittelpunkt einer Strecke

| Eine Zentralprojektion erhält i.a. nicht das Teilverhältnis einer Strecke. |
|---|

Daher ist das Bild eines Mittelpunktes einer Strecke i.a. **nicht** der Mittelpunkt der Bildstrecke.
**Ausnahmen:** Strecken, die parallel zur Bildtafel sind.

**Konstruktion** des Mittelpunktes **im Bild**:
Gegeben: perspektives Bild $\overline{AB}$ einer Strecke. Gesucht: Bild des Mittelpunktes.
**Idee:** Man wählt eine Ebene $\varepsilon$, die die Strecke enthält und die die Bildtafel in der Spur $s_\varepsilon$ schneidet. Dann projiziert man die Strecke *parallel* aus einer "beliebigen" Richtung (innerhalb der Ebene) auf die Spur $s_\varepsilon$; das Bild sei $\overline{A'B'}$. Da bei Parallelprojektion Mittelpunkt in Mittelpunkt übergeht, bestimmt man den Mittelpunkt vn $\overline{A'B'}$ und projiziert ihn zurück auf die Streck $\overline{AB}$.

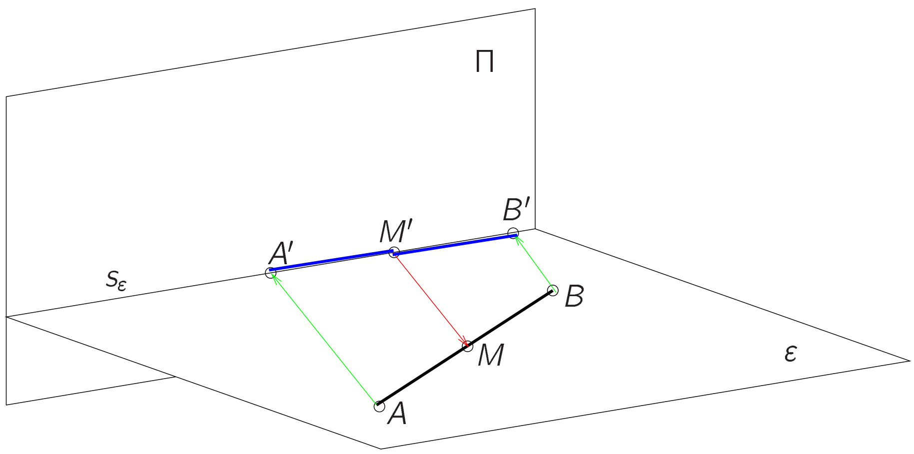



Abbildung 5.15: Konstruktion des Mittelpunktes einer Strecke

**Durchführung**:

1. Wahl der Ebene $\varepsilon$, in der die Strecke liegt. Bestimmung der Spurgerade $s_\varepsilon$ und der Fluchtgerade $f_\varepsilon$. (Im Beispiel (s.u.) ist $\varepsilon$ die Standebene, d.h. $s_\varepsilon$ ist die Standlinie und $f_\varepsilon$ istr der Horizont.
2. Wahl eines geeigneten Fluchtpunktes $F$ auf $f_\varepsilon$.
3. Projektion der Strecke von $F$ aus auf die Spur $s_\varepsilon$ liefert $A'$, $B'$.
4. Bestimmung des Mittelpunktes $M'$ von $A'$, $B'$.
5. Rückprojektion von $M'$ auf die Bildstrecke ergibt den wahren Mittelpunkt $M$.

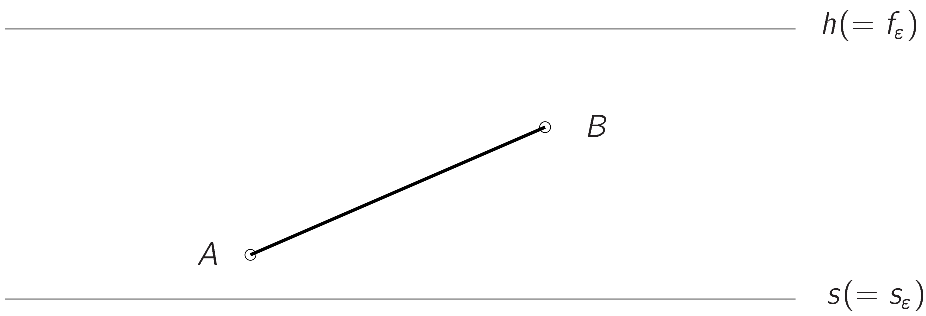



Abbildung 5.16: Konstruktion des Mittelpunktes einer Strecke im persp. Bild

### 5.2.2 Distanzpunkte

(s. FKN S.236)

Will man einen Fußboden mit quadratischen Platten (s. Abb.) mit Hilfe der Sehstrahlen in ein perspektivisches Bild eintragen, so ist dies eine langwierige und z.T. ungenaue Prozedur (schleifende Schnitte ! ).

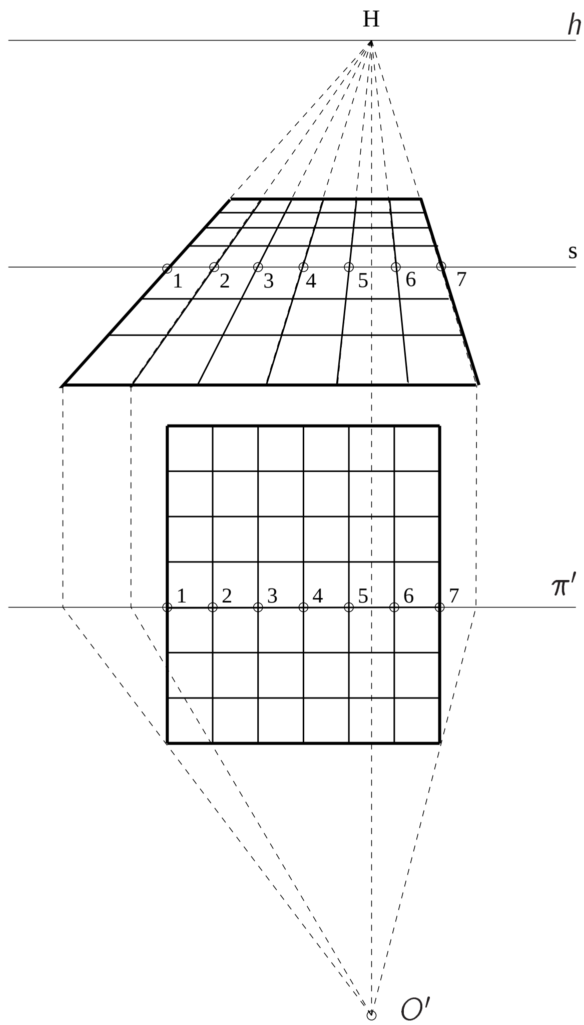



Abbildung 5.17: Konstruktion eines Netzes in der Standebene

Eine wesentliche Erleichterung bietet die Verwendung der Fluchtpunkte $D_1$ und $D_2$ der Quadrat**diagonalen**. $D_1$ und $D_2$ haben vom Hauptpunkt den Abstand $d$ (Distanz) und heißen deswegen **Distanzpunkte**.

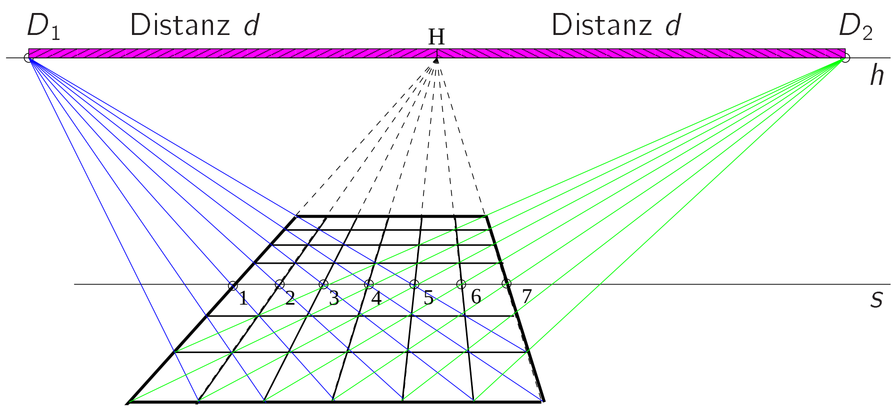



Abbildung 5.18: Konstruktion eines Netzes in der Standebene mit Distanzpunkten

**Durchführung** im Beispiel (Die Standlinie ist eine Plattenfuge.):

1. Bestimmung der Distanzpunkte $D_1$, $D_2$.
2. Zeichnen der Tiefenlinien.
3. Zeichnen der Diagonalen, die die Standlinie in den Punkten $1, \dots, 7$ treffen.
4. Die Diagonalen werden mit den Tiefenlinien geschnitten.
   Die Schnittpunkte ergeben weitere Punkte des Plattennetzes.
5. Parallelen zur Standlinie durch die neuen Punkte liefern weitere Punkte.
6. Falls nötig, werden weitere Diagonalen und Parallelen zur Standlinie gezeichnet, bis alle Punkte des Plattennetzes bestimmt sind.

**Aufgabe 5.4** *Zeiche ein (quadratisches) Netz mit den auf der Standlinie s vorgegebenen Punkten* $1, \dots, 7$.

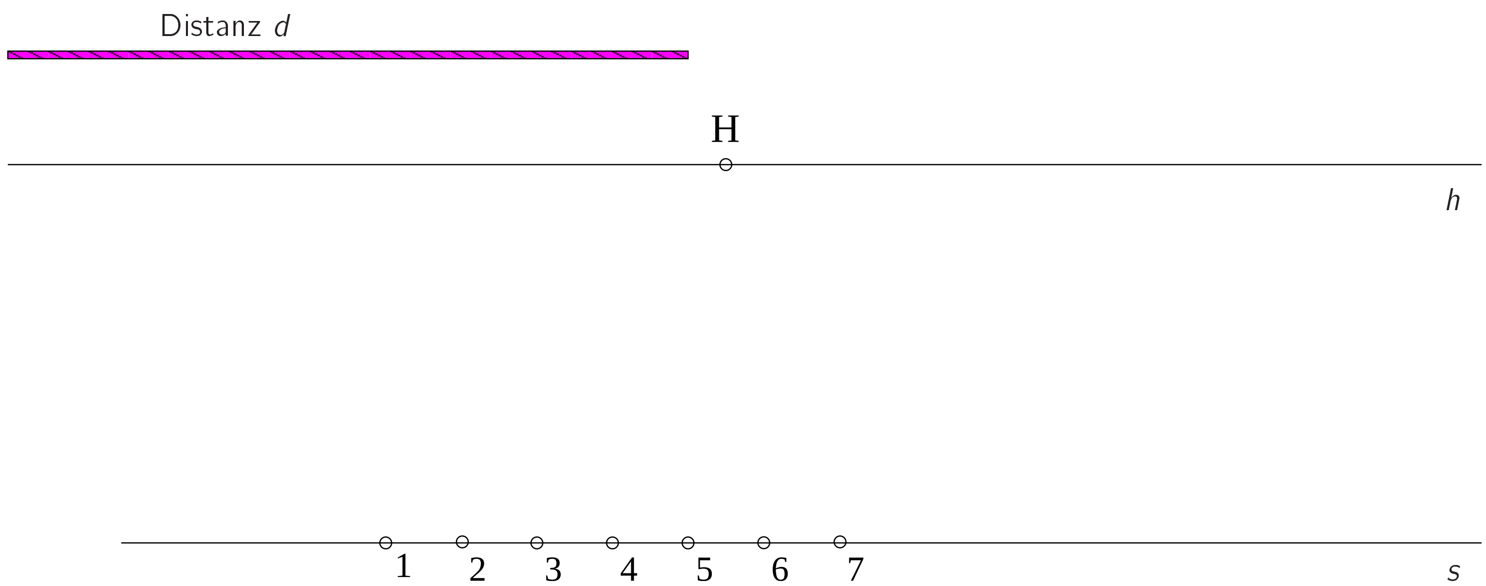
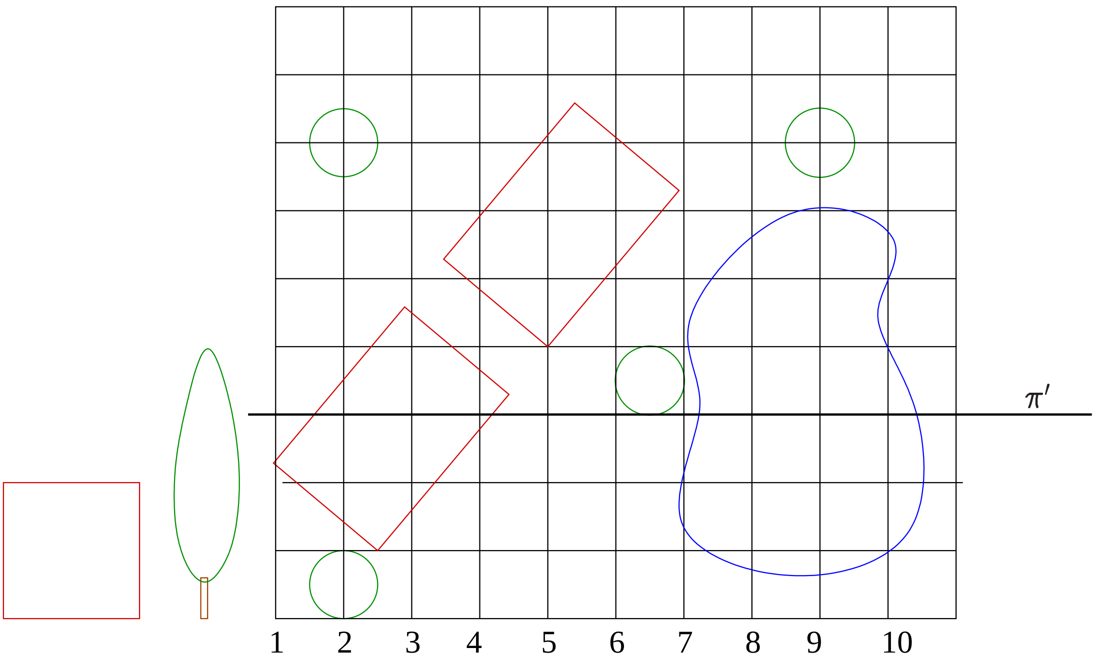



Abbildung 5.19: Konstruktion eines Netzes in der Standebene mit Distanzpunkten: Beispiel

ANWENDUNG:

Will man ein perspektivisches Bild einer „Szene“ ohne besondere Konstruktion erstellen, so zeichnet man mit Hilfe von Distanzpunkten das perspektive Bild eines geeigneten quadratischen **Fußboden**- und **Wandraster**s, über dem dann das perspektive Bild der Szene entsteht. Ein Punkt wird dann genau (falls seine „Tiefe“ und „Höhe“ auf dem Raster liegen) oder ungefähr in das perspektive Bild eingezeichnet.
(Die Distanzpunkte für den **Wand**raster liegen über bzw. unter $H$ !)

**Aufgabe 5.5** *Fertige eine perspektivische Skizze der folgenden Szene an:*



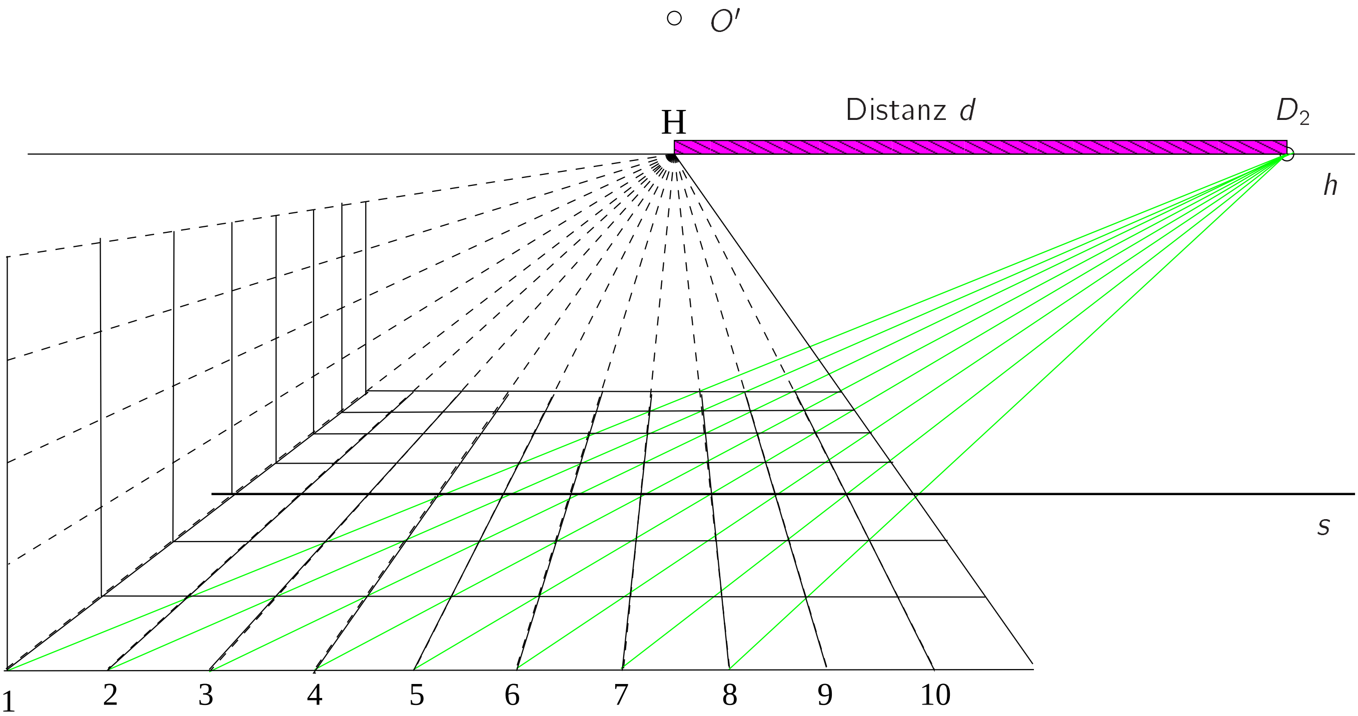




Abbildung 5.20: Skizze einer Szene mit Hilfe eines horizontalen und vertikalen Netzes

### 5.2.3 Fluchtpunkte nicht horizontaler Geraden

(s. FKN S. 231)

Beim Zeichnen des perspektivischen Bildes einer Hausfassade mit gleichmäßiger Unterteilung durch rechteckige Fenster kann man die in 1.4.2 beschriebene Methode *fast* unverändert übernehmen. Falls die Diagonalrichtung einen Neigungswinkel von $45^o$ besitzt, kann man wieder mit Distanzpunkten arbeiten. (Die Distanzpunkte liegen hier allerdings nicht auf dem Horizont.) Im anderen Fall findet man einen Diagonalenfluchtpunkt folgendermaßen:

**Durchführung**:

1. Bestimme den horizontalen Fluchtpunkt $F_h$ der Hauswand.
2. Der gesuchte Fluchtpunkt $F_d$ ist der Spurpunkt der Geraden $d_0$. ($d_0$ geht durch $O$ und hat die Richtung der Fensterdiagonalen.) Man **dreht** $d_0$ um die senkrechte Gerade $f$ durch $F_h$, bis sie **in** der **Bildtafel** liegt. $O$ wird mitgedreht. Jetzt erscheint der Winkel (in der Bildtafel) in wahrer Größe. Antragen von $\alpha$ im gedrehten Augpunkt liefert die zu $d_0$ gedrehte Gerade und der Schnitt dieser Gerade mit $f$ ist der gesuchte Fluchtpunkt $F_d$.

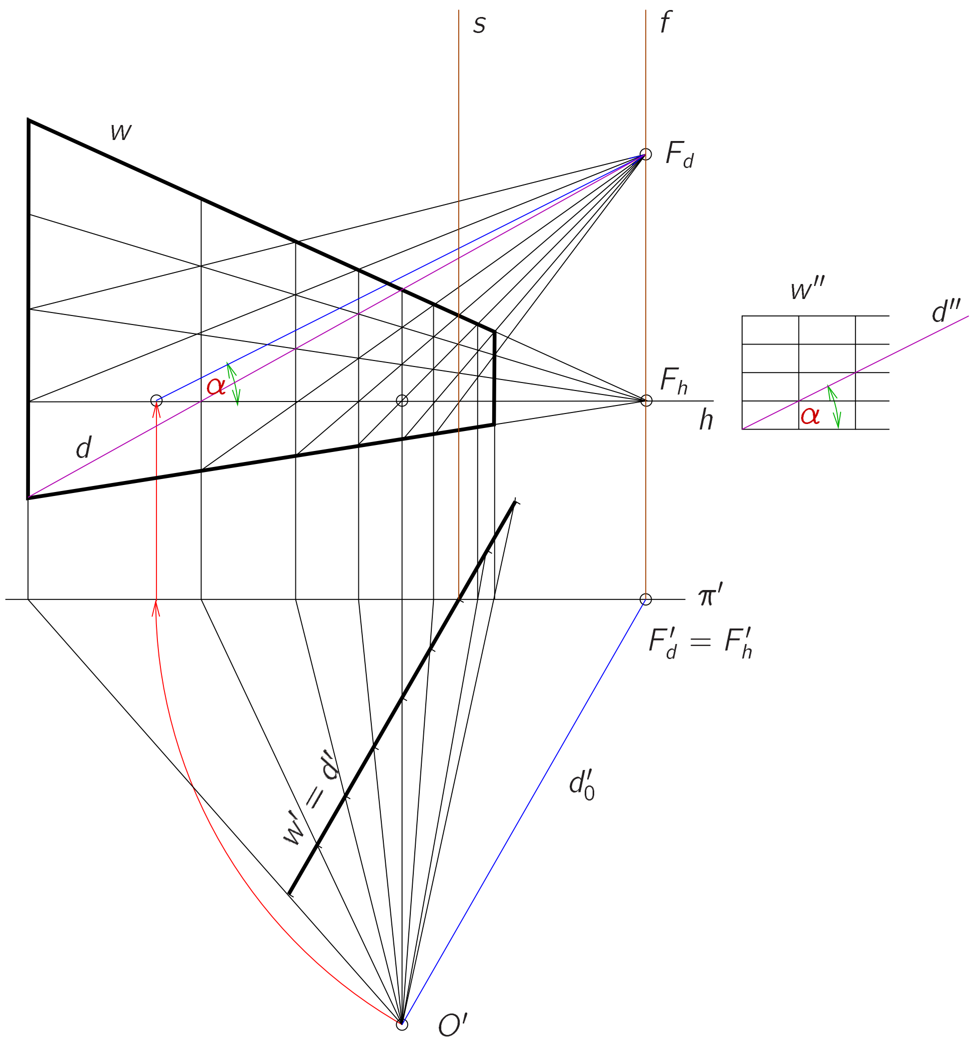



Abbildung 5.21: Fluchtpunkt einer nicht horizontalen Richtung: Diagonalen einer Fensterfront

### 5.2.4 Nicht erreichbare Fluchtpunkte

(s. FKN S. 226)

Falls der Fluchtpunkt $F$ einer Parallelenschar außerhalb der Zeichenfläche liegt und man eine Gerade durch einen Punkt $P$ und $F$ zeichnen muss, kann man sich folgendermaßen behelfen:

Gegeben: Zwei Geraden $a, b$ mit unerreichbarem Schnittpunkt $F$ und ein Punkt $P$.

Gesucht: Die Gerade durch $P$ und $F$.

IDEE: Man stelle sich ein Dreieck $A, B, F$ vor mit $A$ auf $a$, $B$ auf $b$, dessen Höhen sich in $P$ schneiden. Dann ist die Höhe durch $F$ (Lot auf $\overline{AB}$ durch $P$) die gesuchte Gerade.

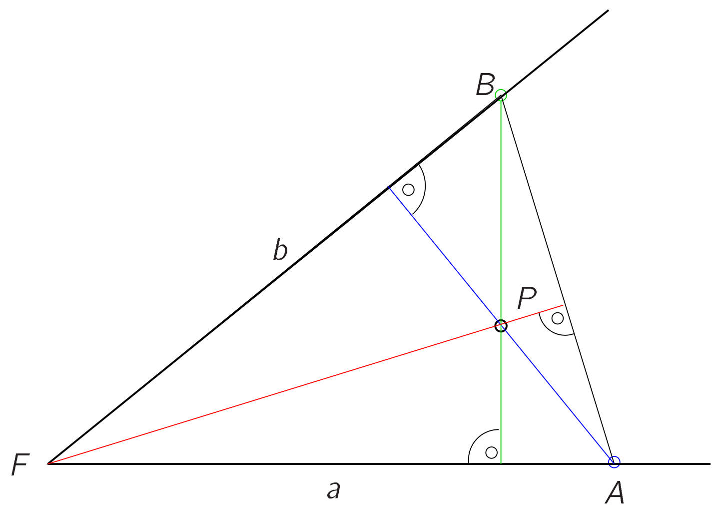



Abbildung 5.22: Gerade durch unerreichbaren Fluchtpunkt

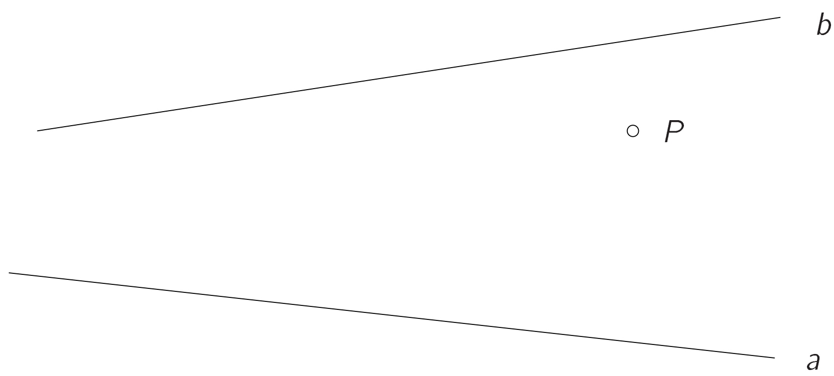



Abbildung 5.23: Gerade durch unerreichbaren Fluchtpunkt (Schnittpunkt von $a$ und $b$)

Ist $F$ der Fluchtpunkt einer **horizontalen** Parallelenschar, so ist die folgende Methode meist vorteilhafter:

Gegeben: Perspektives Bild $\overline{P}$ des Punktes $P$,
Grundriss vom Augpunkt, Bildtafel und einer horizontalen Gerade $g$,
deren Fluchtpunkt $F$ im perspektiven Bild nicht erreichbar ist.
Gesucht: Parallele $a$ zu $g$ durch $P$, d.h. Gerade $\overline{a}$ durch $\overline{P}$ und $F$ (im perspektiven Bild).

IDEE: Man konstruiert (falls möglich) den Mittelpunkt $F_{1/2}$ der Strecke $F, H$ und den Mittelpunkt $\overline{P}_{1/2}$ der Strecke $H$, $\overline{P}$ und wendet den Strahlensatz an.

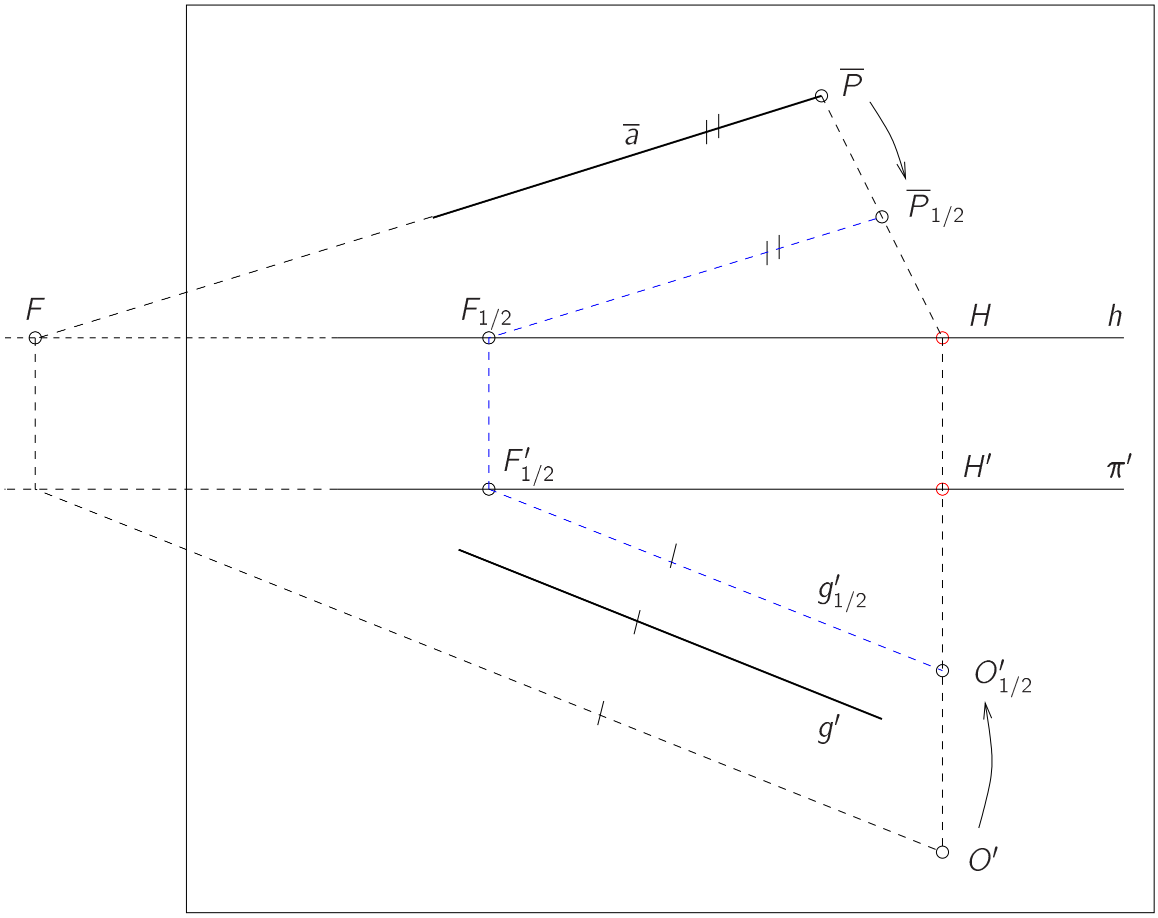



Abbildung 5.24: Gerade durch einen unerreichbaren Fluchtpunkt

**Durchführung**:

1. Im Grundriss:
   Bestimme den Mittelpunkt $O'_{1/2}$ der Strecke $O'$, $H'$.
   Zeichne die Parallele $g'_{1/2}$ zu $g'$ durch $O'_{1/2}$.
   Der Schnittpunkt von $g'_{1/2}$ mit $\pi'$ ist $F'_{1/2}$.
2. Übertragen von $F'_{1/2}$ in das perspektive Bild liefert $F_{1/2}$.
3. Bestimme den Mittelpunkt $\overline{P}_{1/2}$ der Strecke $H$, $\overline{P}$.
4. Die Parallele zur Geraden durch $F_{1/2}$, $\overline{P}_{1/2}$ durch den Punkt $\overline{P}$ ist die gesuchte Gerade. (Strahlensatz!)

**Aufgabe 5.6** *Zeichne das perspektive Bild des in Architektenanordnung gegebenen Hauses.*

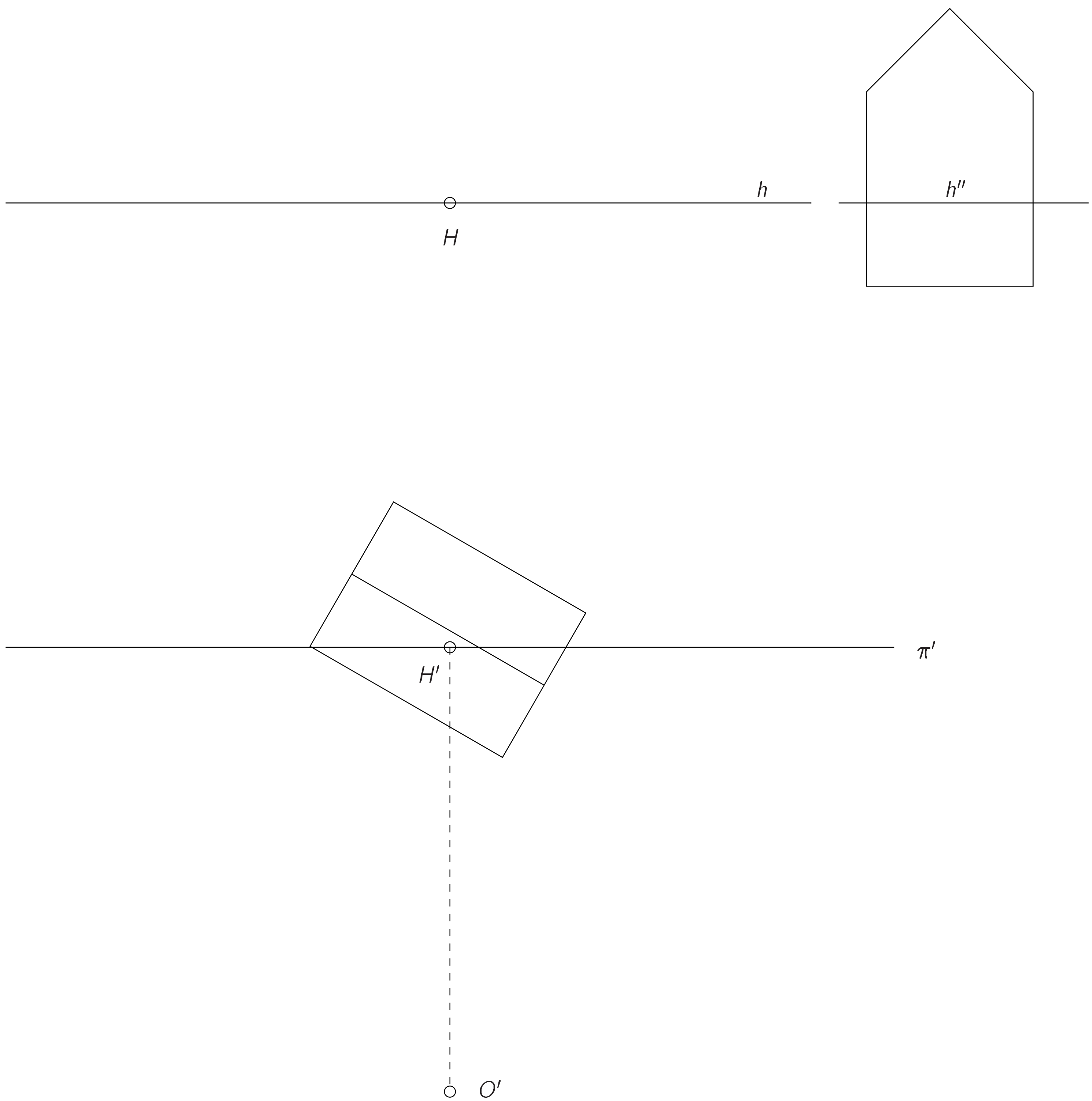



Abbildung 5.25: Haus mit unerreichbarem Fluchtpunkt

## 5.3 Spiegelung an einer Ebene

Ein von einem Objektpunkt $B$ ausgehender Lichtstrahl wird an einer ebenen Spiegelfläche $\varepsilon$ (Wasseroberfläche oder Spiegel) so reflektiert, dass Einfallswinkel $\alpha$ = Ausfallswinkel $\beta$ ist. Für das Auge scheint ein reflektierter Strahl von einem „virtuellen" Objektpunkt $B_S$ zu kommen. $B_S$ kann man sich als den an der Ebene $\varepsilon$ gespiegelten Punkt von $B$ vorstellen.

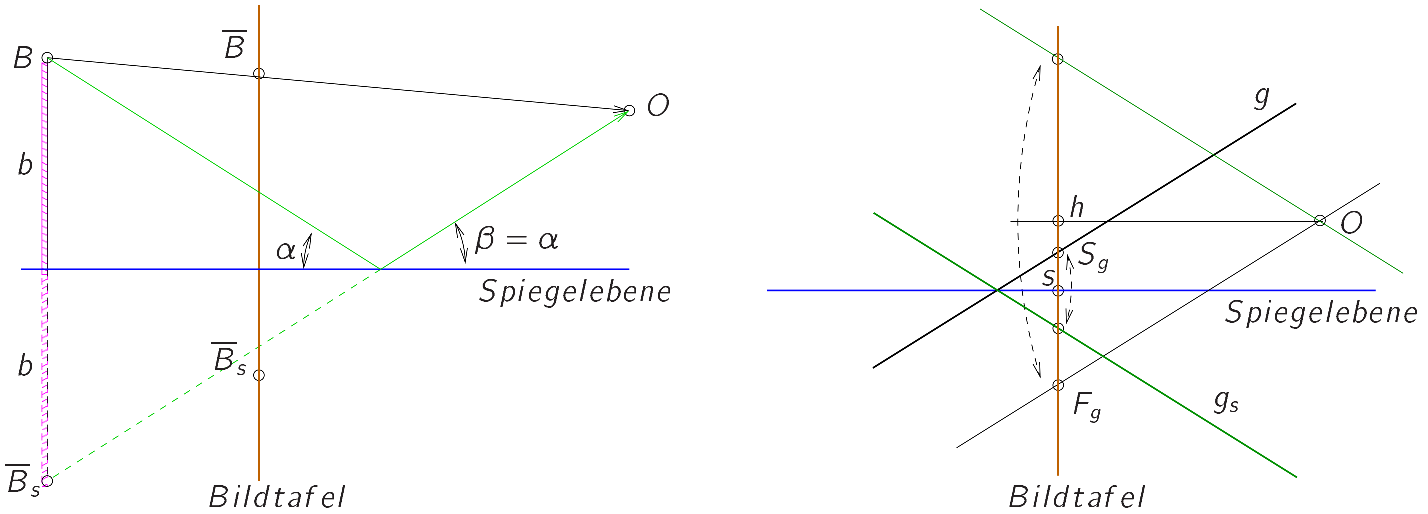



Abbildung 5.26: Spiegelung an einer horizontalen Ebene

**Durchführung**:

Gegeben: Objektpunkt $B$ und Spiegelebene $\varepsilon$.
Gesucht: perspektives Spiegelbild von $B$ (bezüglich $\varepsilon$).

(1) Spiegelung des Objektpunktes $B$ an der Ebene $\varepsilon$ liefert $B_S$.

(2) Konstruktion des perspektiven Bildes von $B_S$.

Falls $\varepsilon$ **horizontal** ist, ergibt sich für die Konstruktion des perspektiven Spiegelbildes einer **Geraden** $g$ (Fluchtpunkt $F_g$, Spurpunkt $S_g$) die folgende **Erleichterung**:

(0) $s_\varepsilon$ sei die Spurgerade der Spiegelebene.

(1) Flucht- bzw. Spurpunkt der gespiegelten Geraden ergibt sich durch Spiegelung von $F_g$ am Horizont $h$ bzw. von $S_g$ an $s_\varepsilon$.

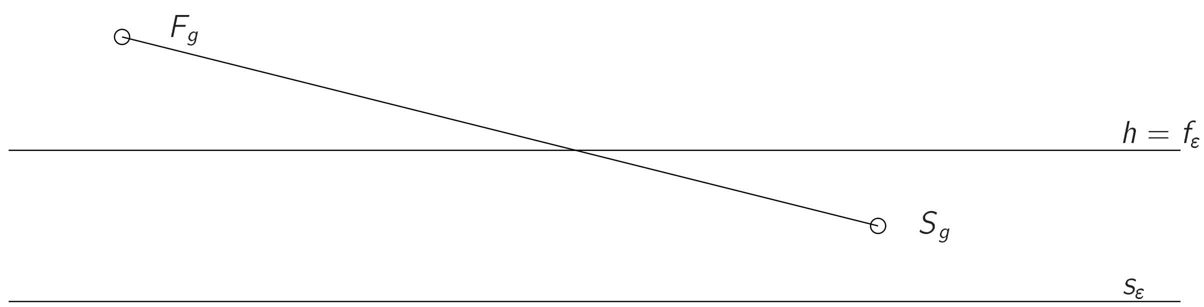



Abbildung 5.27: Spiegelung einer Geraden an der Standebene

**Aufgabe 5.7** *TURM am See. Zeichne das perspektive Bild mit Spiegelung.*

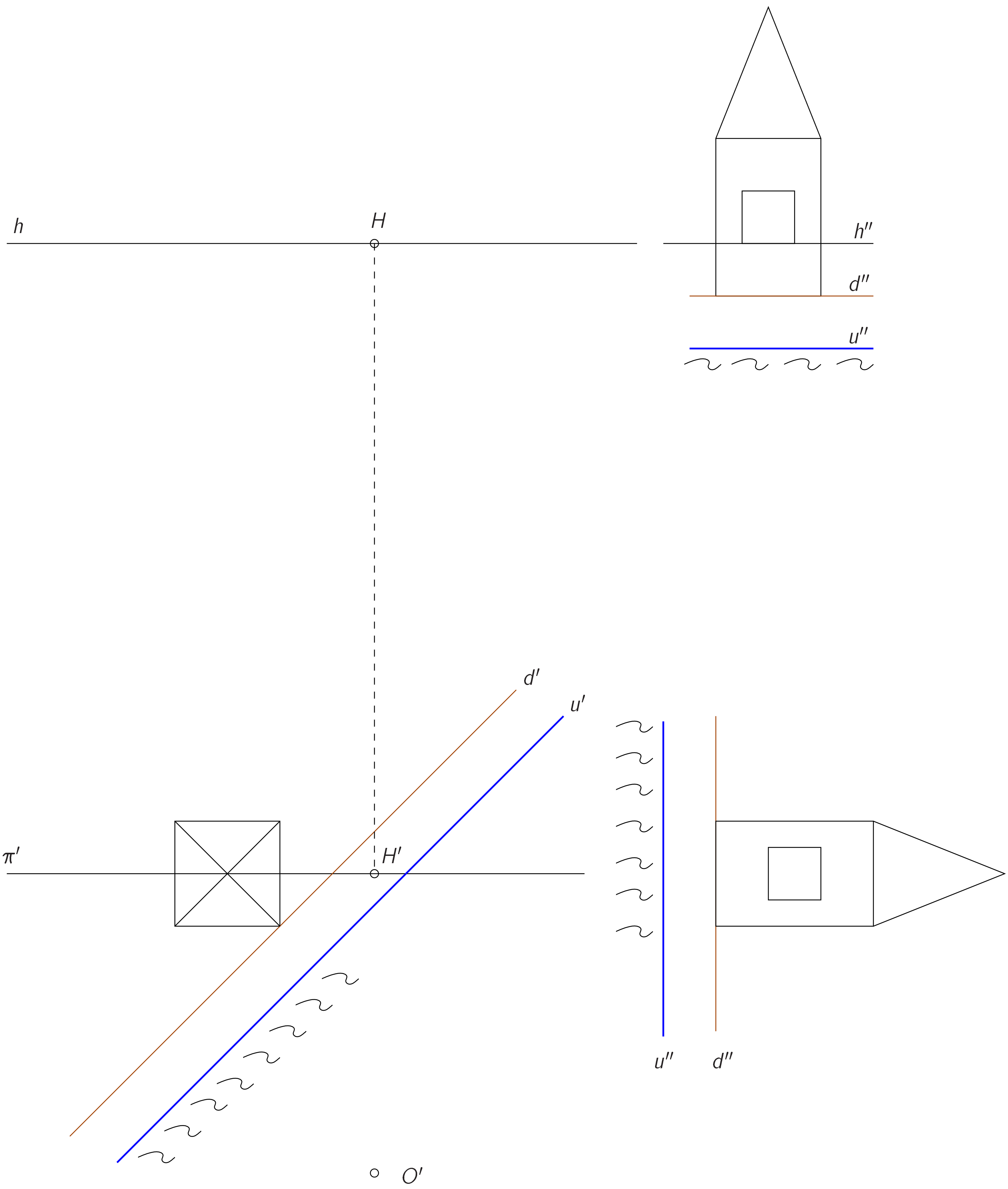



Abbildung 5.28: Spiegelung eines Turms an einer Wasseroberfläche

**Erleichterung** bei **senkrechter** Spiegelfläche (Wandspiegel) und **senkrechten** Geraden:

Hier benutzt man, dass:

1. sich die Diagonalen eines Rechtecks auf der Symmetrieachse (s. Abb.) schneiden,
2. der Mittelpunkt einer senkrechten Strecke auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet wird.

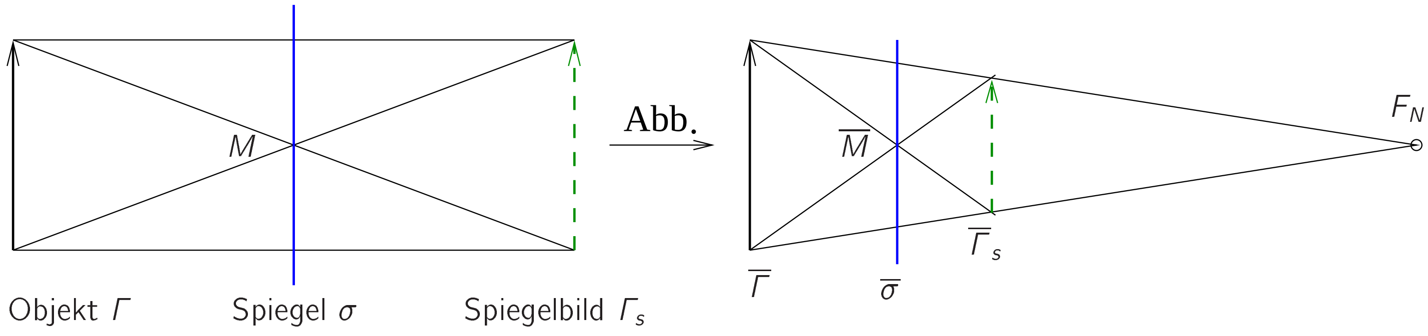



Abbildung 5.29: Spiegelung an einem senkrechten Spiegel

**Aufgabe 5.8** *ZIMMER mit Wandspiegel. Ergänze das Spiegelbild der Tür.*

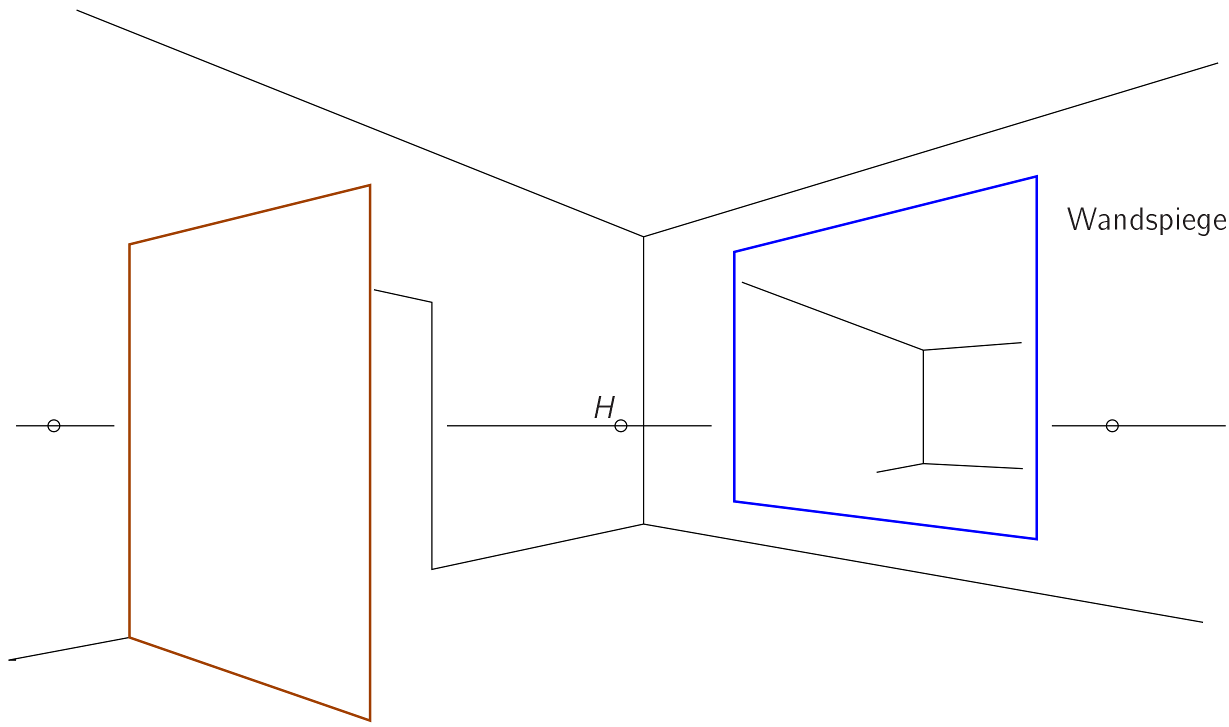



Abbildung 5.30: Spiegelung an einem Wandspiegel

## 5.4 Schattenkonstruktionen

(s. FKN S.251)

Zur Konstruktion des Schattens eines Gegenstandes im perspektiven Bild kann man zwei Methoden verwenden:

a) Den Schatten in Grund- und Aufriss bestimmen und dann in das perspektive Bild übertragen (s. 2.5).

b) Den Schatten **direkt** in dem perspektiven Bild konstruieren.

Die Methode b) ist besonders dann geeignet, wenn der Schatten auf einer **horizontalen** Ebene bestimmt werden soll.

### 5.4.1 Schatten bei Parallelbeleuchtung

Gegeben: Punkt $P$, Lichtrichtung $l$ und **horizontale** Ebene $\varepsilon$.
Gesucht: Schatten von $P$ auf $\varepsilon$.

IDEE: Wir stellen uns $\varepsilon$ als Grundrisstafel vor. Dann ist der Schattenpunkt von $P$ der Schnittpunkt des Lichtstrahls $l_p$ durch $P$ und des Grundrisses von $l_p$.

**Durchführung**:

1. Bestimme den Fluchtpunkt $S$ der Lichtrichtung.
2. Bestimme den Fluchtpunkt $S_F$ der Grundrisse der Lichtstrahlen.
   ($S_F$ liegt senkrecht unter oder über $S$ auf dem Horizont $h$.)
3. Bestimme das perspektive Bild $\overline{P'}$ des Grundrisses $P'$ von $P$.
4. Der Schnittpunkt der Geraden durch $S, \overline{P}$ mit der Geraden durch $S_F, \overline{P'}$ ist der gesuchte Schatten von $P$ im perspektiven Bild.

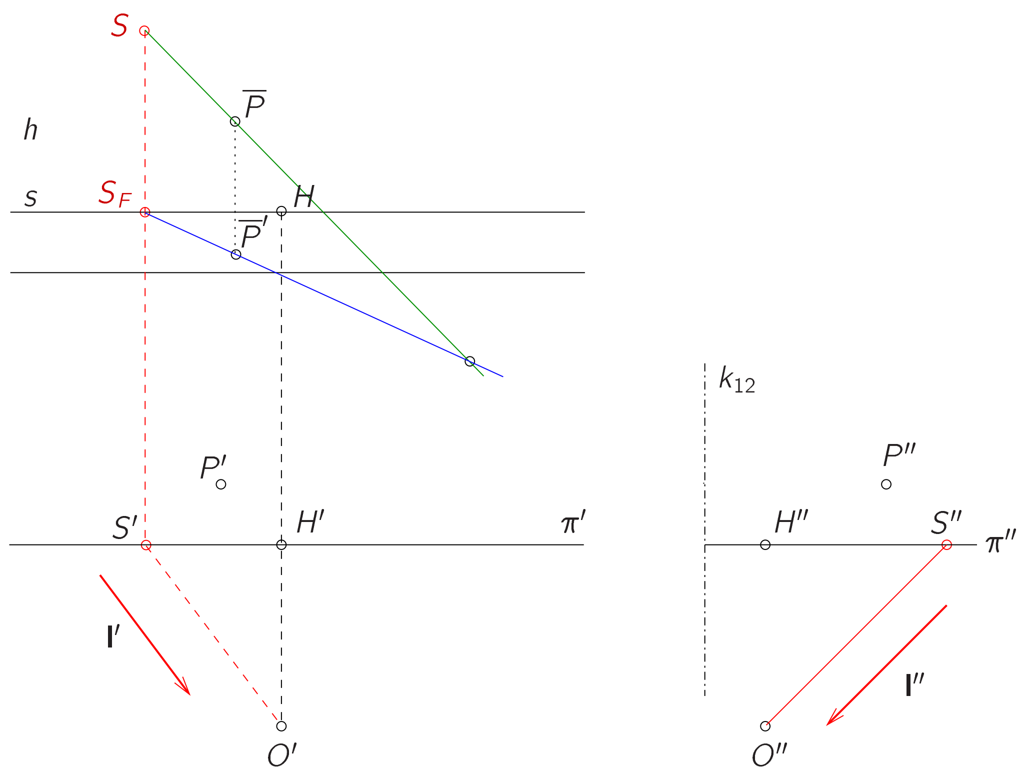



Abbildung 5.31: Schatten eines Punktes bei parallelem Licht

**Aufgabe 5.9** *Konstruiere den Schatten eines HAUSes auf der Standebene. Die Lichtrichtung ist durch den Pfeil l gegeben.*

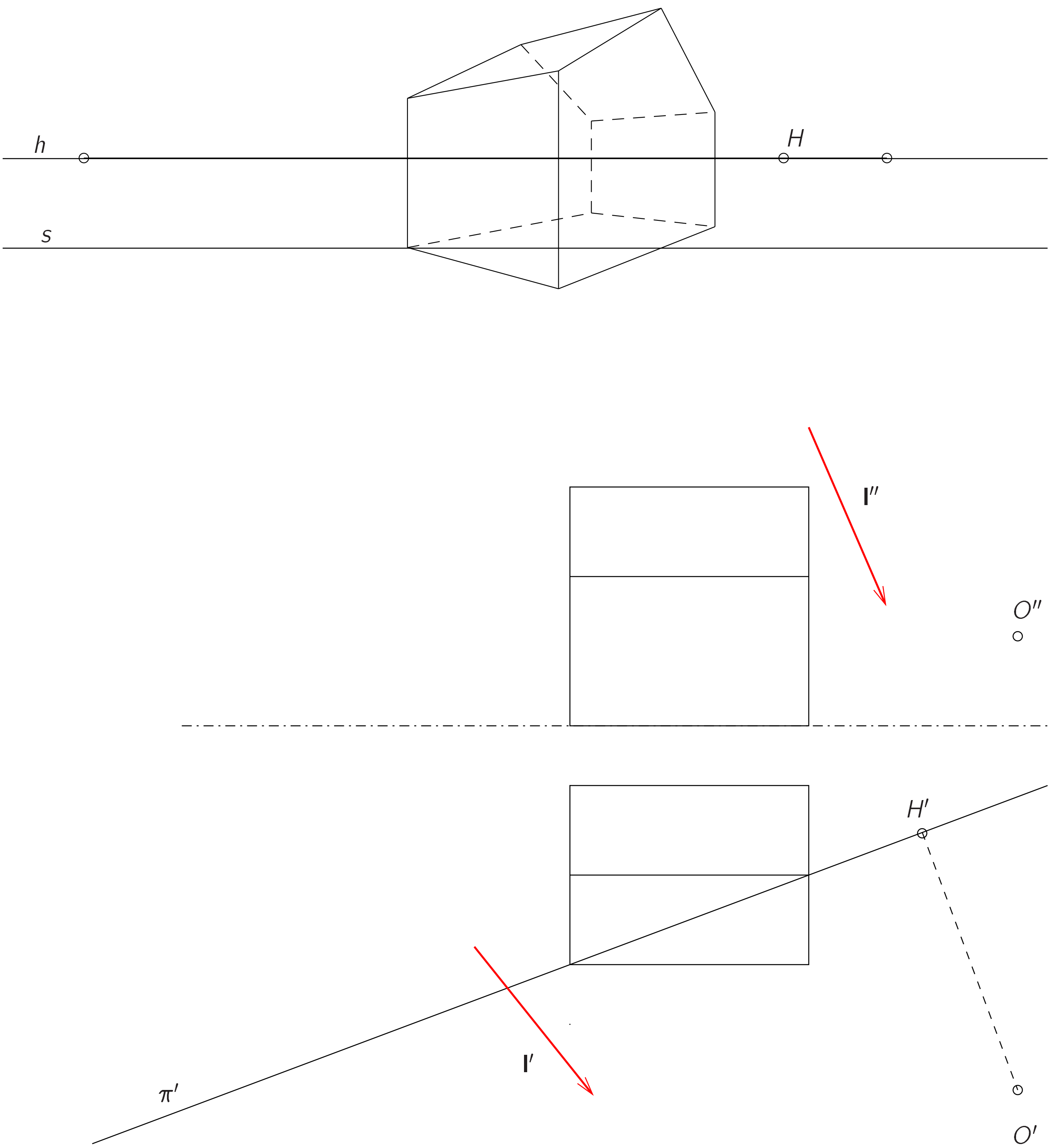



Abbildung 5.32: Schatten eines Hauses bei parallelem Licht

### 5.4.2 Schatten bei Zentralbeleuchtung

Gegeben: Punkt $P$, Lampe (punktförmige Lichtquelle) im Punkt $L$,
**horizontale** Ebene $\varepsilon$.
Gesucht: Schatten von $P$ auf $\varepsilon$.

IDEE: wie bei Parallelbeleuchtung:

**Durchführung**:

1. Bestimme das perspektive Bild $\overline{L}$ der Lichtquelle $L$.
2. Bestimme das perspektive Bild $\overline{L'}$ des Grundrisses $L'$.
   ($\varepsilon$ ist die Grundrisstafel !)
3. Bestimme das perspektive Bild $\overline{P'}$ des Grundrisses $P'$.
4. Der Schnittpunkt der Geraden durch $\overline{L}$, $\overline{P}$ mit der Geraden durch $\overline{L'}$, $\overline{P'}$ ist der gesuchte Schatten $\overline{P}_S$ von $P$ im perspektiven Bild.

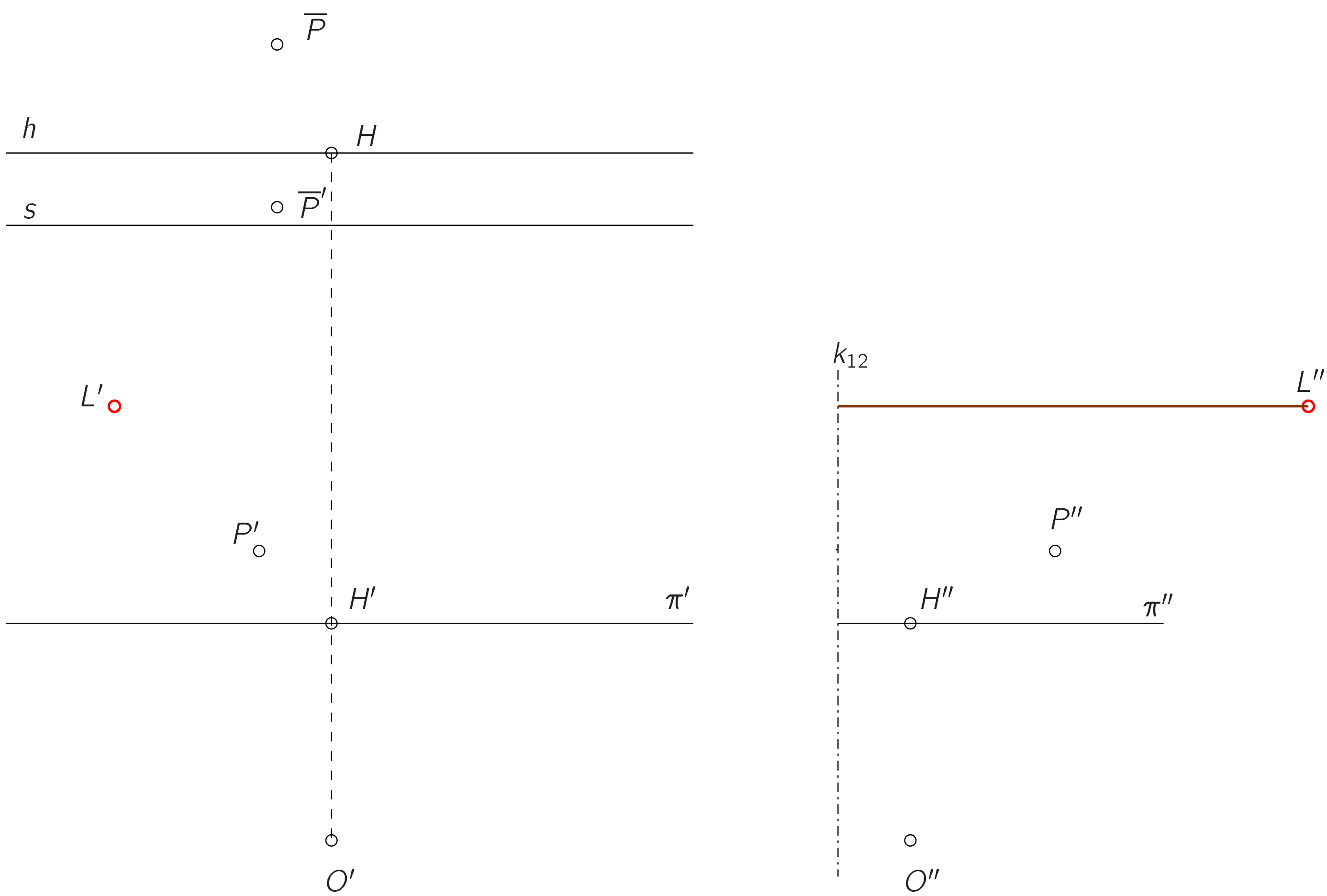



Abbildung 5.33: Schatten eines Punktes bei zentralem Licht

**Aufgabe 5.10** *Konstruiere den Schatten eines HAUSes auf der Standebene. Die Lichtquelle ist durch den Punkt L gegeben.*

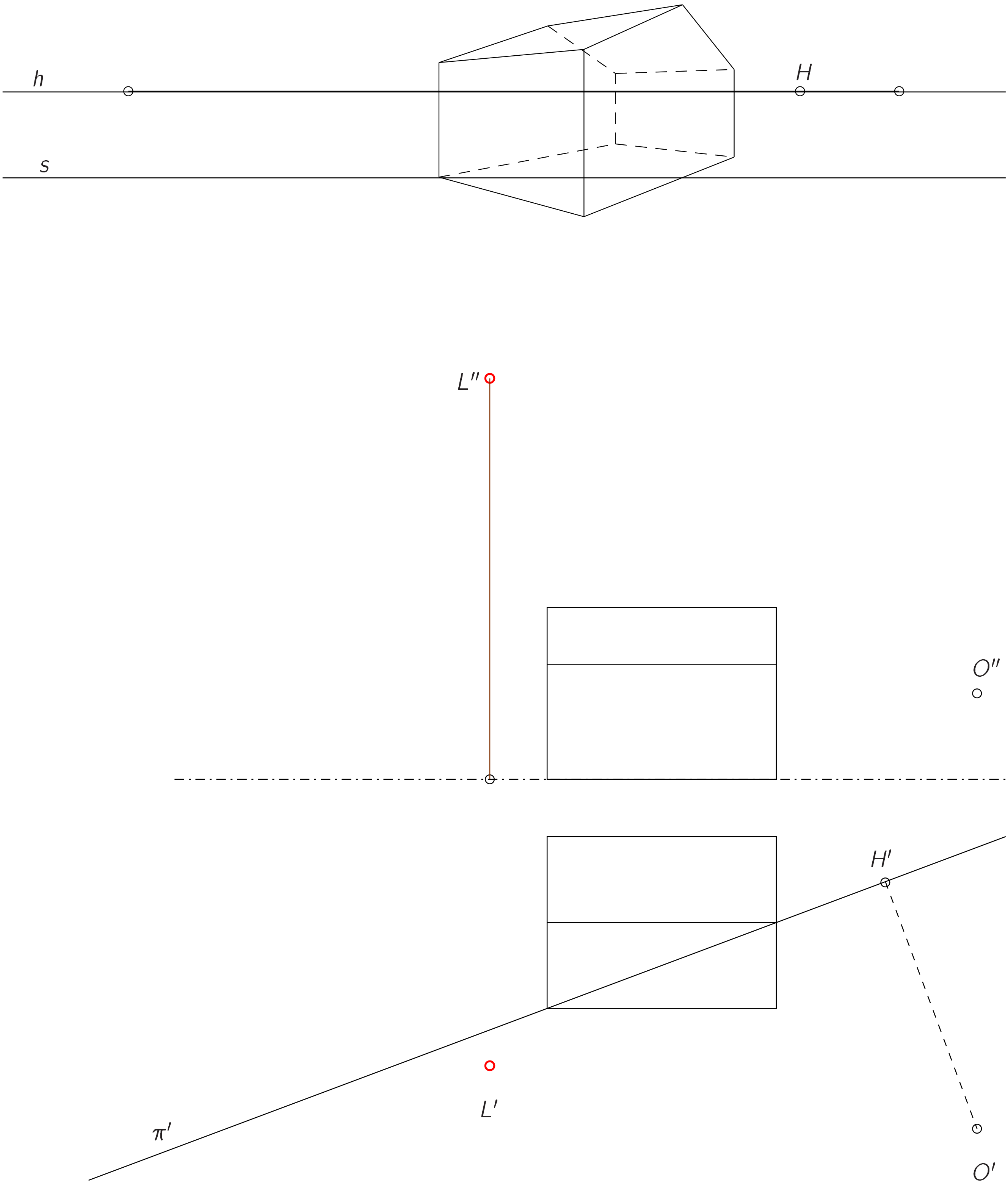



Abbildung 5.34: Schatten eines Hauses bei zentralem Licht

**Aufgabe 5.11** *Konstruiere den Schatten eines HAUSes und einer Reklametafel (Rechteck) auf Haus und Standebene bei parallelem Licht (gegeben durch $S$ und $S_F$).*
*(Bei der Konstruktion des* **Schlagschattens** *der Reklametafel auf Hauswand/Dach schneide man die senkrechte Ebene durch $P, P'$ und Lichtrichtung mit Hauswand/Dach.)*

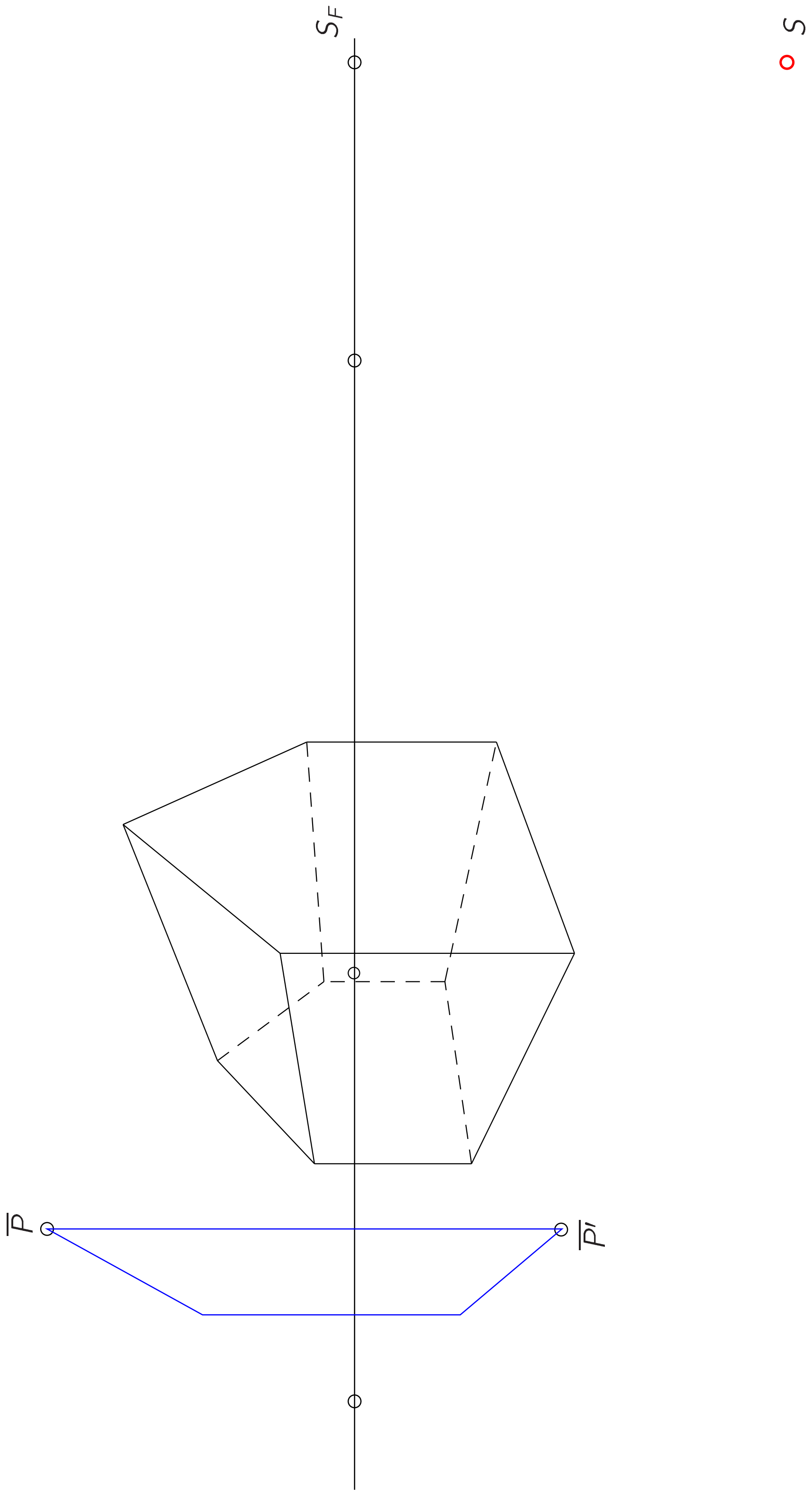



Abbildung 5.35: Schatten eines Hauses und einer Reklametafel bei parallelem Licht

**Aufgabe 5.12** *Konstruiere den Schatten eines HAUSes und einer Reklametafel (Rechteck) auf Haus und Standebene bei zentralem Licht (gegeben durch $\overline{L}$ und $\overline{L'}$).*
*(Bei der Konstruktion des* **Schlagschattens** *der Reklametafel auf Hauswand/Dach schneide man die senkrechte Ebene durch $\overline{P}$, $\overline{P'}$, $\overline{L}$ mit Hauswand/Dach.)*

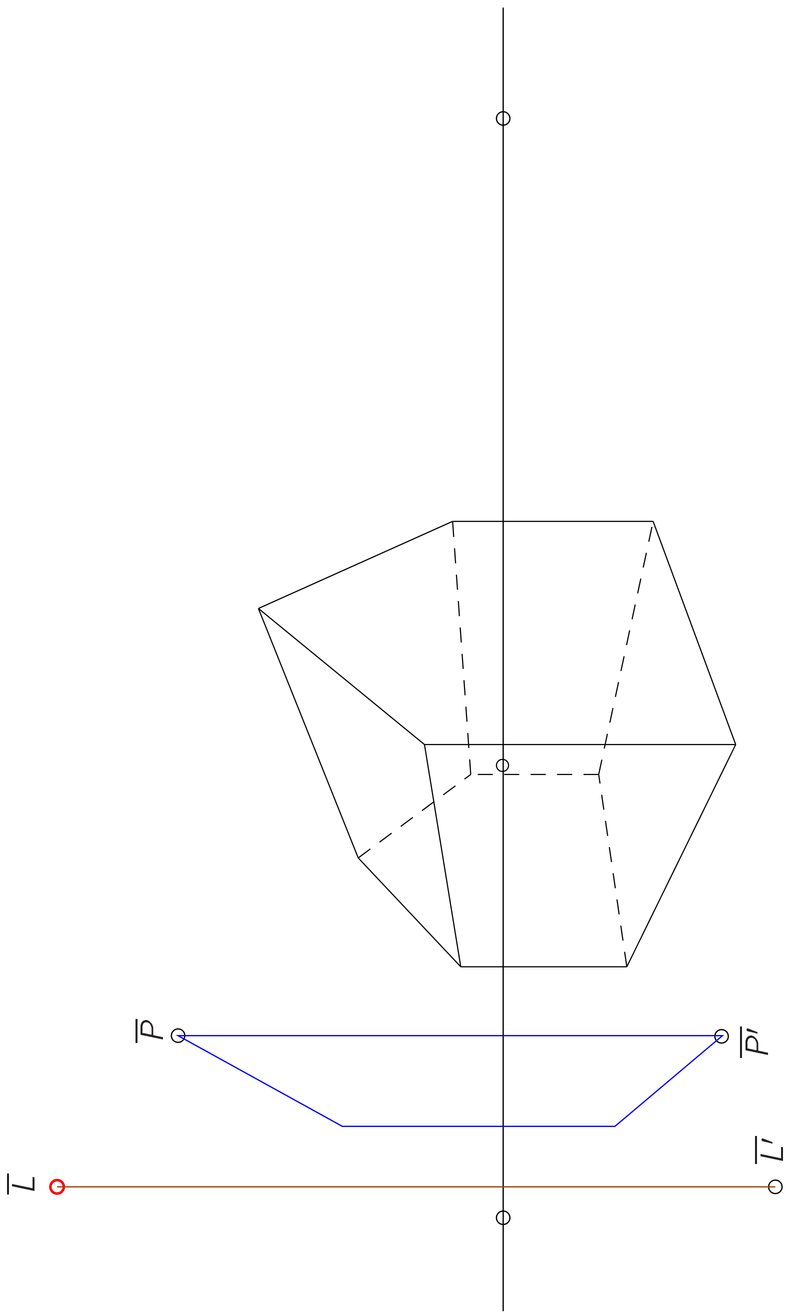



Abbildung 5.36: Schatten eines Hauses und einer Reklametafel bei zentralem Licht

**Aufgabe 5.13** *Konstruiere den Schatten einer Lagerhalle mit Laderampe und einem Schuppen bei parallelem Licht. Die Lichtrichtung ist durch die Punkte $S$ und $S_F$ gegeben.*

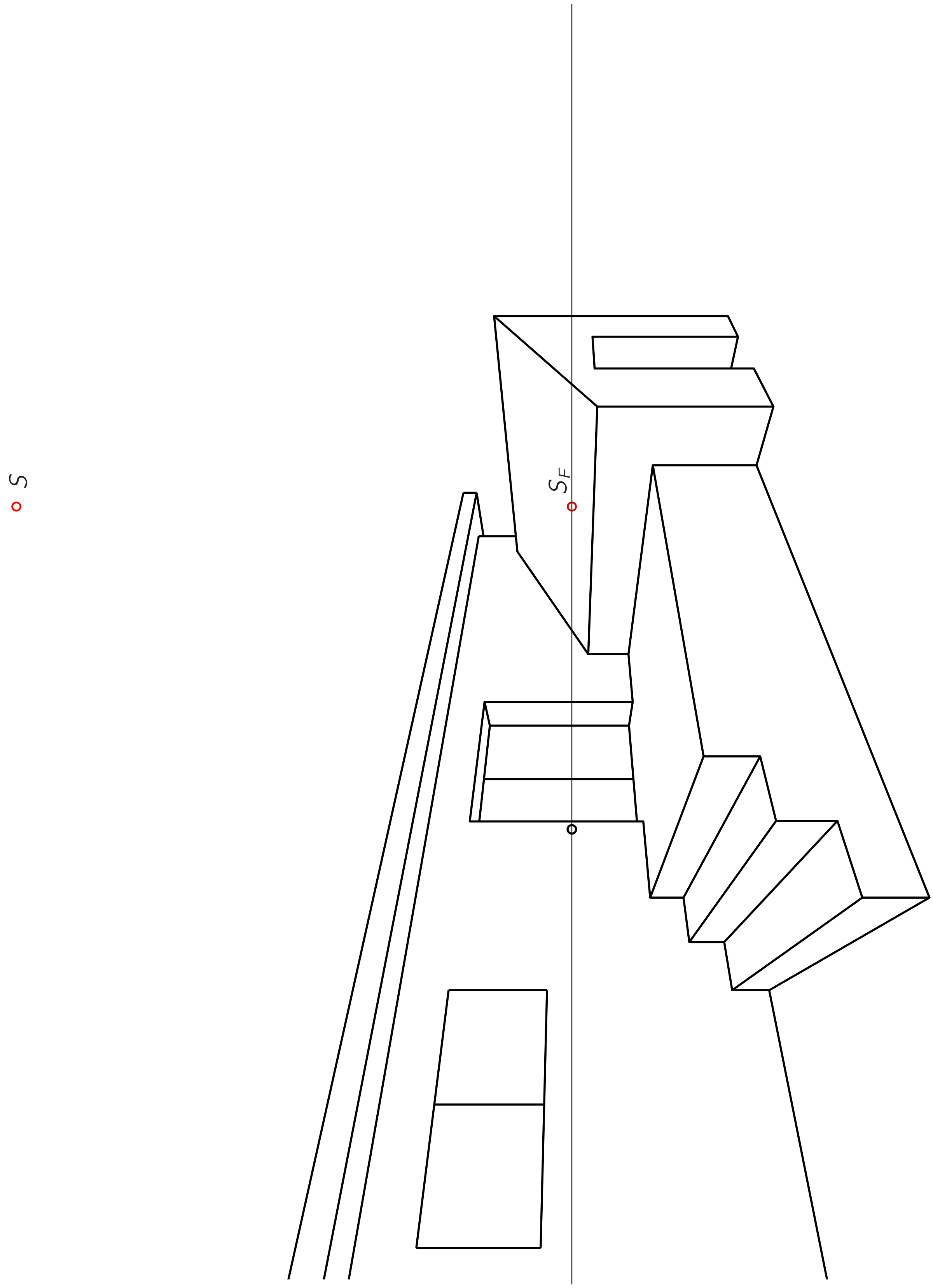



Abbildung 5.37: Schatten einer Lagerhalle mit Schuppen und Laderampe bei parallelem Licht

## 5.5 Perspektive bei geneigter Bildtafel

Bei der Projektion auf eine geneigte Bildtafel liegt der Fluchtpunkt der Vertikalen im „Endlichen“, d.h. die Bilder senkrechter Geraden sind jetzt nicht mehr parallel (wie es bei senkrechter Bildtafel der Fall war).
Die Grund**idee** zur Konstruktion eines perspektiven Bildes bei geneigter Bildtafel ist die gleiche wie im Fall einer senkrechten Bildtafel. Man konstruiert das Bild mit Hilfe von Grund- und Aufriss und den Fluchtpunkten.

Gegeben: a) QUADER in Grund- und Aufriss
b) Augpunkt $O$ in Grund- und Aufriss
c) Bildtafel durch die Standlinie $s$ (Schnitt mit der Grundrisstafel) und den Horizont $h$ in Grund- und Aufriss.
Gesucht: das perspektive Bild des Quaders.

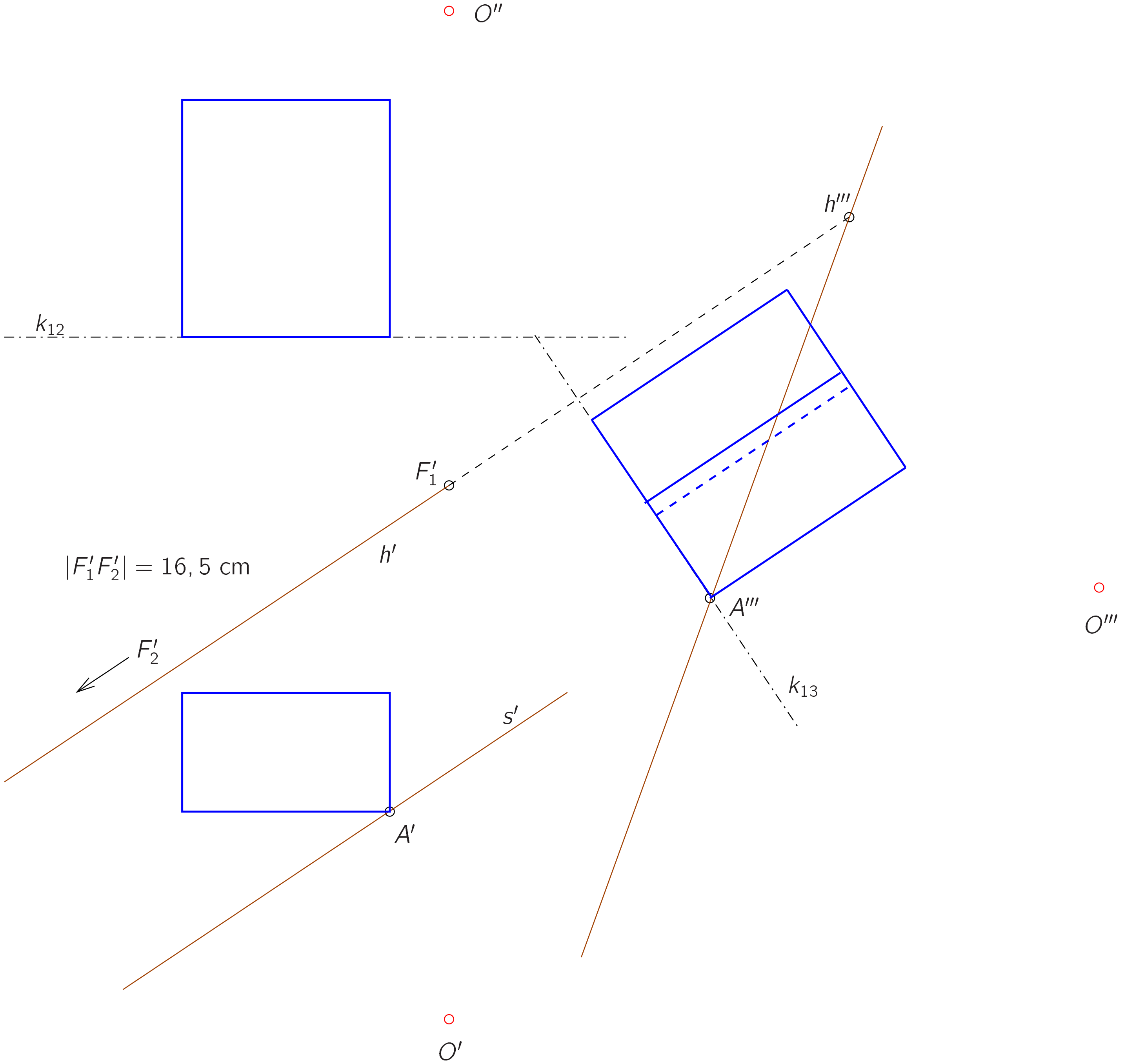



Abbildung 5.38: Zentralprojektion bei geneigter Bildtafel

**Durchführung**:

1. Zeichne einen neuen **Seitenriss**, in dem die Bildtafel $\pi$ (der Zentralprojektion) projizierend ist. Die Bildtafel erscheint dann als Gerade.
2. Bestimme den Hauptpunkt $H$ und die drei wesentlichen **Fluchtpunkte** $F_1$, $F_2$, $F_3$ in den Risstafeln $\pi_1$, $\pi_3$.
3. Übertrage das **Fluchtpunktdreieck** auf die Zeichenfläche, auf der das perspektive Bild entstehen soll. (Die Gerade $\overline{F_1F_2}$ ist der Horizont $h$. Der Abstand von $F_3$ zu $h$ ergibt sich aus dem Seitenriss, den „seitlichen“ Abstand von $F_3$ zu $F_1$ (oder $F_2$) erhält man aus dem Grundriss.)
4. Der **Hauptpunkt** ist der Schnittpunkt der Höhen im Fluchtpunktdreieck.
5. Übertragen eines Punktes, z.B. Punkt $A$.
   (Abstand vom Horizont aus $\pi_3$, Abstand von $\overline{HF}_3$ aus $\pi_1$.)
6. “**Fluchten**” von $A$ auf $F_1, F_2, F_3$.
7. Zeichnen der Bilder der **vertikalen Kanten** mit Hilfe der Fluchtpunkte und der Durchstoßpunkte $K_1, K_2, K_3, K_4$ der Kanten mit der horizontalen Ebene durch den Augpunkt (und Horizont). Die Bilder von $K_1, K_2, K_3, K_4$ liegen auf dem Horizont $h$ !
8. Mit Hilfe des Spurpunktes einer Deckelgeraden findet man die restlichen Punkte.

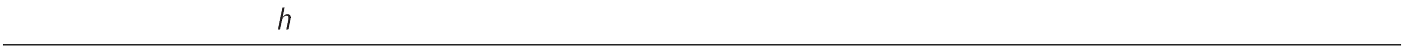



Abbildung 5.39: Zentralprojektion bei geneigter Bildtafel: Forts.

Auch bei geneigter Bildtafel bringt **Architektenanordnung** wesentliche Erleichterungen:
Die Konstruktion erfolgt mit einer Bildebene in zwei Stellungen:

(1) geneigte Stellung der Bildebene, in welcher das Bild entsteht;

(2) senkrechte Stellung, in welche die Bildebene anschliessend gedreht wird.

Die Drehachse ist der Horizont.
Alle Projektionen **im Grundriss** gelten nur für die **Horizonthöhe**

**Konstruktion** eines Bildpunktes:

(1) Die Grundrissprojektion wird auf den Horizont gelotet und von dort die Fluchtlinie nach $F_3$ gezeichnet. Diese Fluchtlinie ist das Bild der Senkrechten, auf welcher der Punkt liegen muss.

(2) Im Seitenriss wird durch Projektion auf die geneigte Bildebene und anschließende Drehung die Höhe bestimmt.

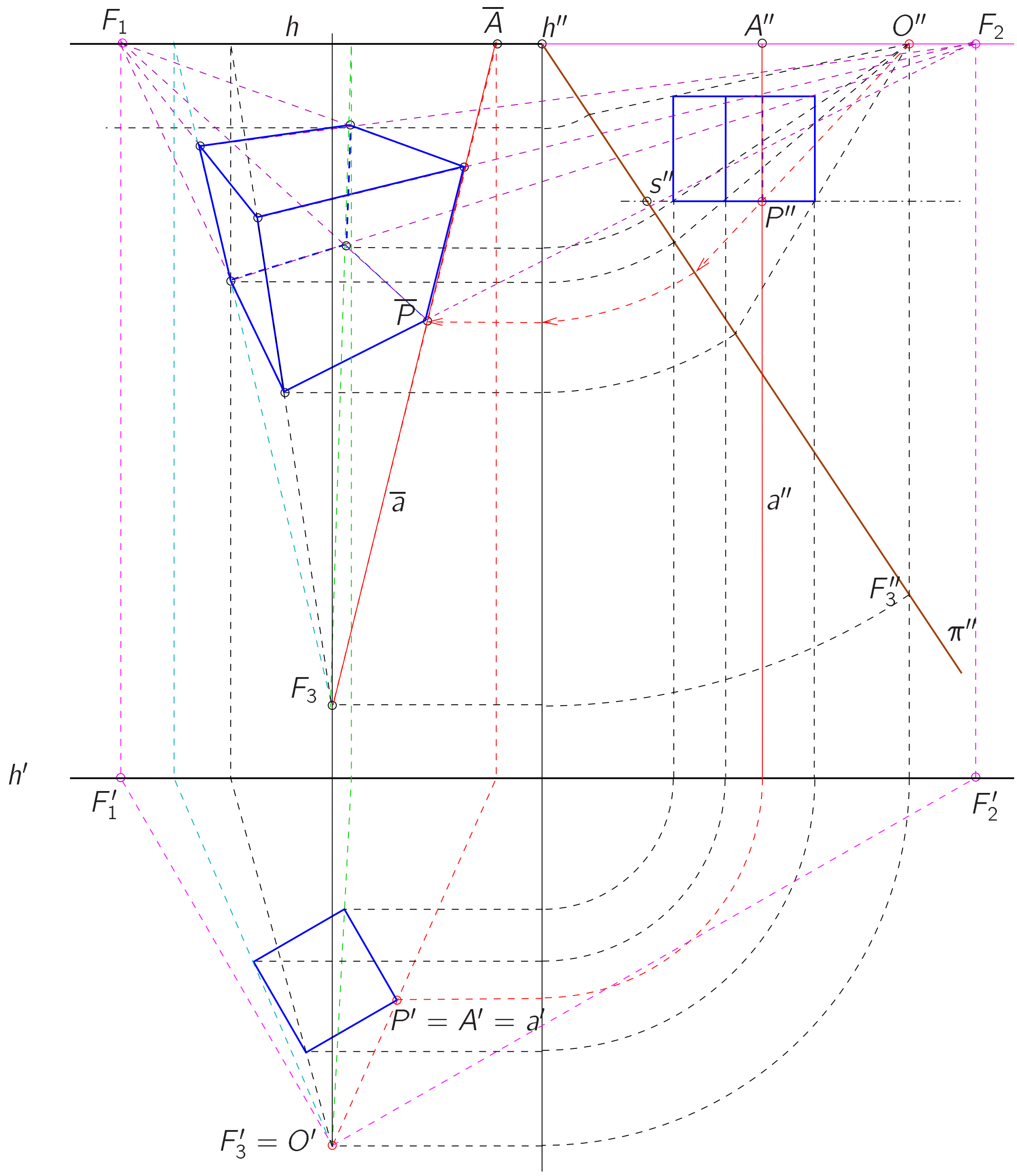



Abbildung 5.40: Zentralprojektion eines Quaders bei geneigter Bildtafel: Lösung

**Aufgabe 5.14** *Zeichne den Quader in Architektenanordnung (geneigte Bildtafel)*

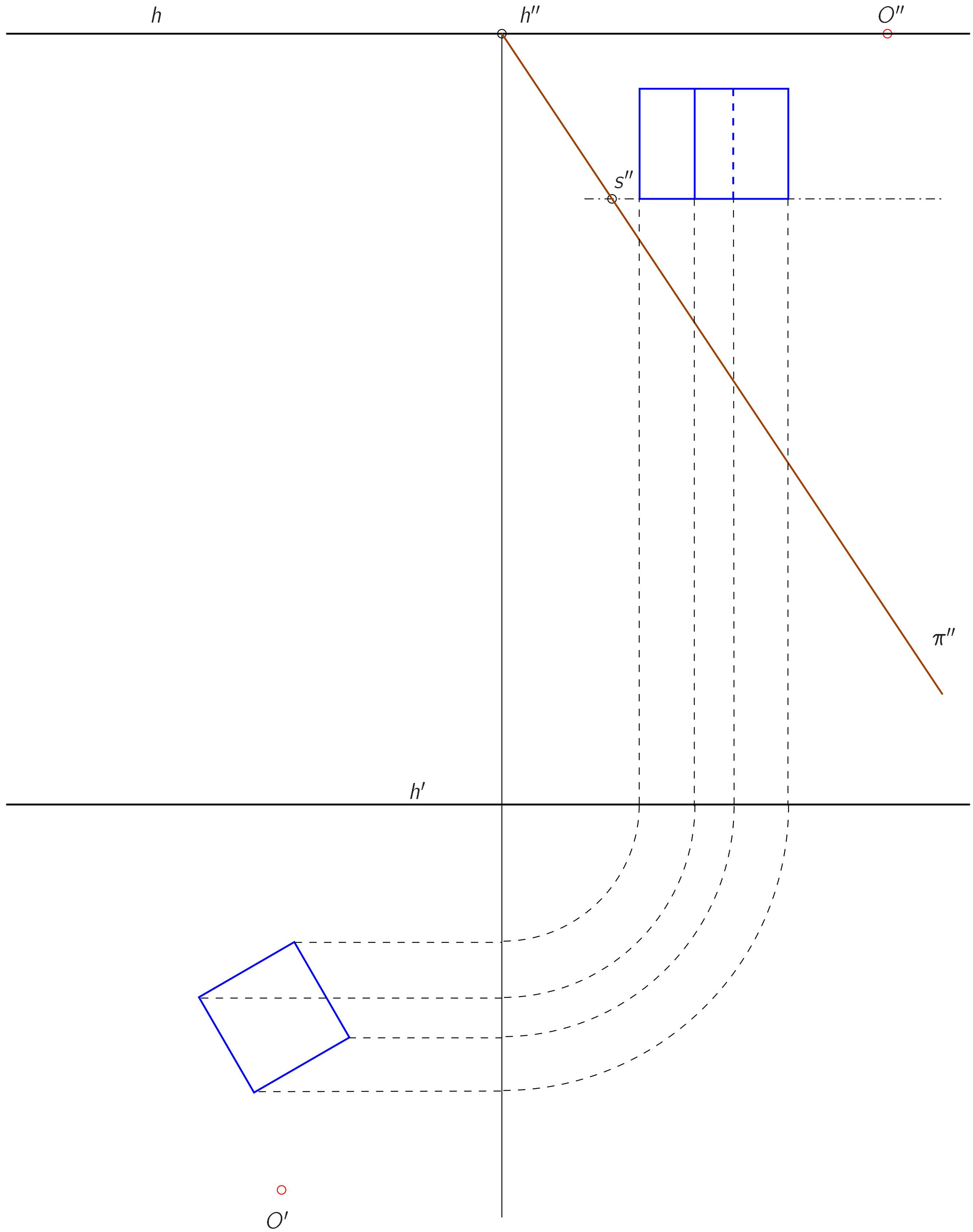



Abbildung 5.41: Zentralprojektion bei geneigter Bildtafel: Architekten-Anordnung

**Aufgabe 5.15** *Zeichne den Turm in Architektenanordnung (geneigte Bildtafel)*

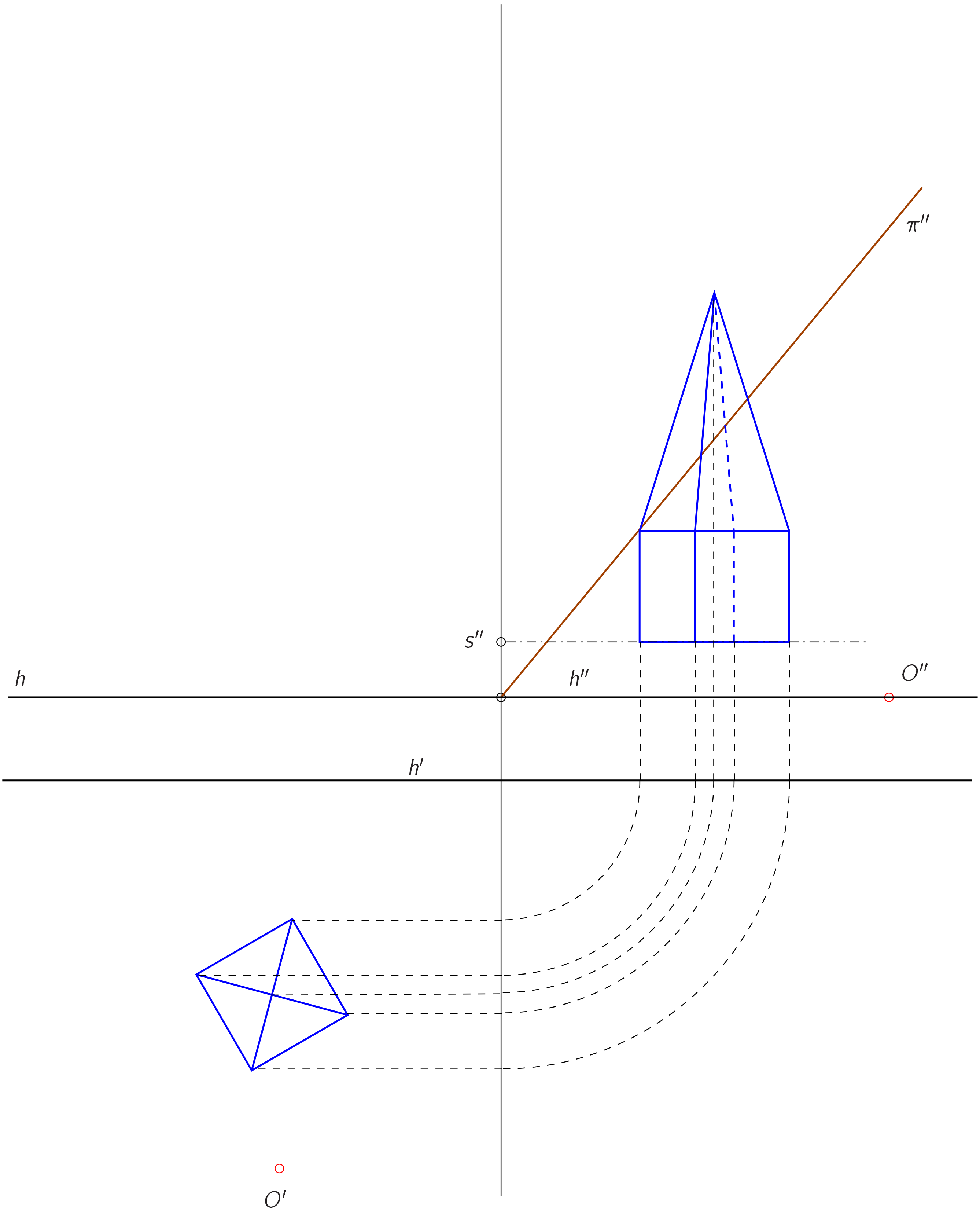



Abbildung 5.42: Zentralprojektion bei geneigter Bildtafel: Turm

## 5.6 Rekonstruktionen

(s. LEO S. 225,242)

Bisher sind wir von einem in Grund– und Aufriss gegebenen Objekt ausgegangen und haben dazu das perspektive Bild konstruiert. Nun soll die umgekehrte Aufgabe behandelt werden: Es ist ein perspektives Bild (z. B. eine Photographie) gegeben und es sollen **wahre Abmessungen** von Figuren des perspektiven Bildes bestimmt werden. Diese Aufgabe ist nur mit Hilfe weiterer Informationen möglich. Wir wollen hier zunächst relativ starke Voraussetzungen machen und später Rekonstruktionen aus Photographien behandeln.

### 5.6.1 Rekonstruktion bei Standardanordnung und senkrechter Bildtafel

In diesem Abschnitt machen wir stets die folgenden

**Annahmen**:
Es sei ein perspektives Bild mit senkrechter Bildtafel gegeben und
**Horizont** $h$, **Hauptpunkt** $H$, **Standlinie** $s$ und **Distanz** $d$ sind bekannt.
Zum **Beispiel**:
Gegeben: perspektives Bild eines Hauses (Abb. 5.43).
Gesucht: die wahren Abmessungen. (s. Aufgabe 5.18)

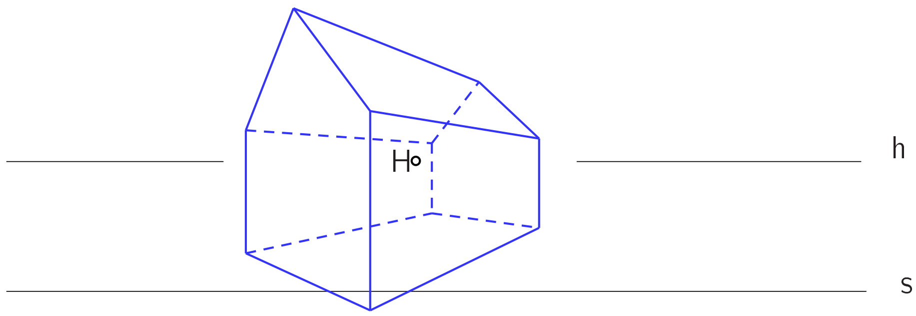



Abbildung 5.43: Beispiel zu *wahre Abmessungen* eines Hauses

#### 5.6.1.1 Wahre Länge einer Strecke

(s. LEO S. 226)

Gegeben: das Bild einer Strecke $\overline{AB}$ auf einer Geraden $g$.
Gesucht: die wahre Länge der Strecke.

Bei der Zweitafelprojektion haben wir die Strecke, deren wahre Länge bestimmt werden soll, parallel zu einer der Risstafeln gedreht und konnten dann die wahre Länge in der anderen Risstafel ablesen. Bei Zentralprojektion genügt das Paralleledrehen zur Bildtafel nicht, da bei der *Zentral*-Projektion die Länge verändert wird, es sei denn die gedrehte Strecke liegt schon in der Bildtafel.

**Idee** für den Fall, dass die **Strecke in der Standebene** (Grundrissebene) liegt:
Man denkt sich die Strecke $AB$ um den Spurpunkt $S_g$ (der Geraden $g$ durch $A, B$) mit senkrechter Drehachse in die Bildtafel auf die Standlinie $s$ gedreht (s. Abb. 5.44). Da eine Drehung im perspektiven Bild nur schwer darstellbar ist, denkt man sich eine Parallelprojektion aus, die dasselbe bewirkt. Den zugehörigen Fluchtpunkt nennt man **Messpunkt** $M_g$. Er ist für alle zu $AB$ parallelen Strecken gleich. Im Falle einer horizontalen Strecke, wie hier angenommen, liegt $M_g$ auf dem Horizont und wird gemäß Abb. 5.44 bestimmt.

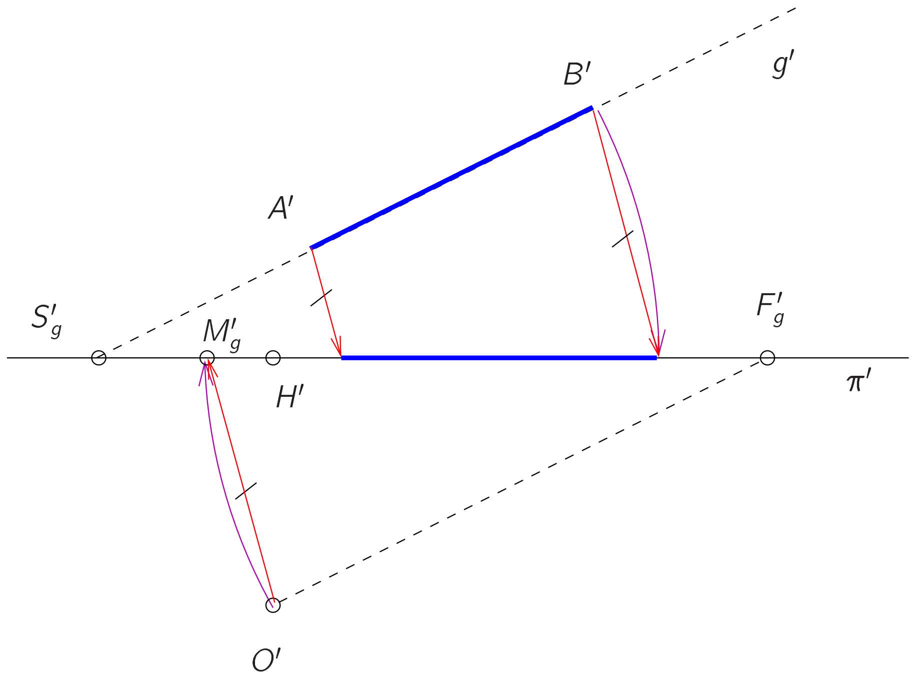



Abbildung 5.44: Bestimmung der wahren Länge einer horizontalen Strecke

Da wir aber den Grundriss nicht als bekannt voraussetzen, müssen wir den Messpunkt im perspektiven Bild bestimmen.

**Durchführung** für den Fall einer **horizontalen** Strecke in der **Standebene**:

1. Zeichne den Fluchtpunkt $F_g$ der Geraden $g$.
2. Zeichne über oder unter dem Hauptpunkt im Abstand $d$ (Distanz) $O'$ und drehe $O'$ um $F_g$ auf den Horizont $h$. Dadurch erhält man den **Messpunkt** $M_g$.
3. Die Projektion der Strecke $\overline{AB}$ von $M_g$ aus auf die Standlinie liefert die wahre Länge der Strecke.

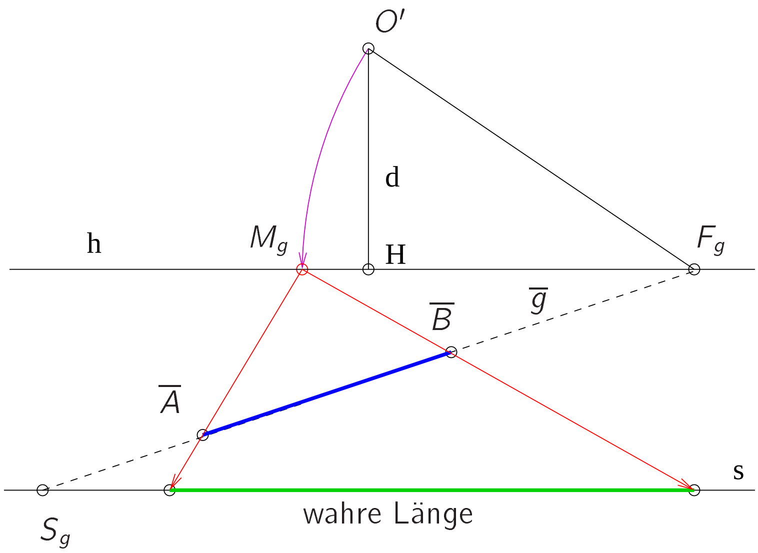



Abbildung 5.45: Bestimmung der wahren Länge einer Strecke

**Aufgabe 5.16** *Bestimme die wahre Länge der in Abb. 5.46 gegebenen Strecke, die in der Standebene liegt. Die Distanz sei $d = 4cm$.*

Distanz $d = 4$cm

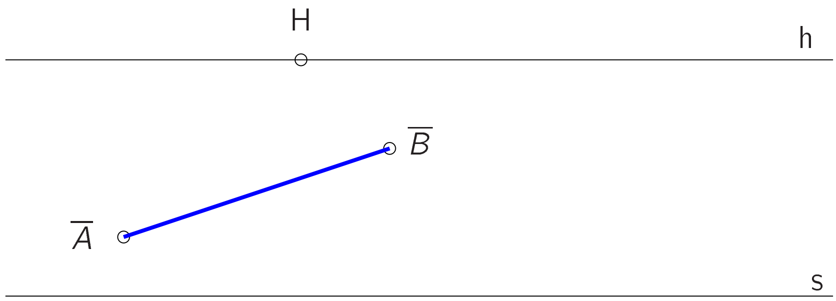



Abbildung 5.46: Bestimmung einer wahren horizontalen Länge

**Bemerkung:** Falls die Standlinie zu nahe am Horizont liegt (s. Fig 6.22) , besteht die Gefahr von *schleifenden Schnitten*. In diesem Fall sollte man die Länge einer zu $\overline{AB}$ parallelen Strecke (im Raum) unter oder über der gegebenen Strecke bestimmen. Bei einem Haus verwendet man oft den **Kellergrundriss** oder einen Riss in Traufkantenhöhe.

Falls die Strecke $\overline{AB}$ **parallel zur Bildtafel** liegt, kann man den Messpunkt $M_g$ **beliebig** auf dem Horizont $h$ wählen. Es muss nur von der Ebene $\varepsilon$ durch $A, B$, deren Fluchtgerade $f_\varepsilon$ den Messpunkt $M_g$ enthält, auch die Spurgerade $s_\varepsilon$ bekannt oder konstruierbar sein. Dann projiziert man die Strecke $\overline{AB}$ von $M_g$ aus auf $s_\varepsilon$.

**Aufgabe 5.17** *Bestimme die wahre Länge der in Abb. 5.47 gegebenen Strecken, die parallel zur Bildtafel $\pi$ sind. $A, B, C$ liegen in der Standebene.*

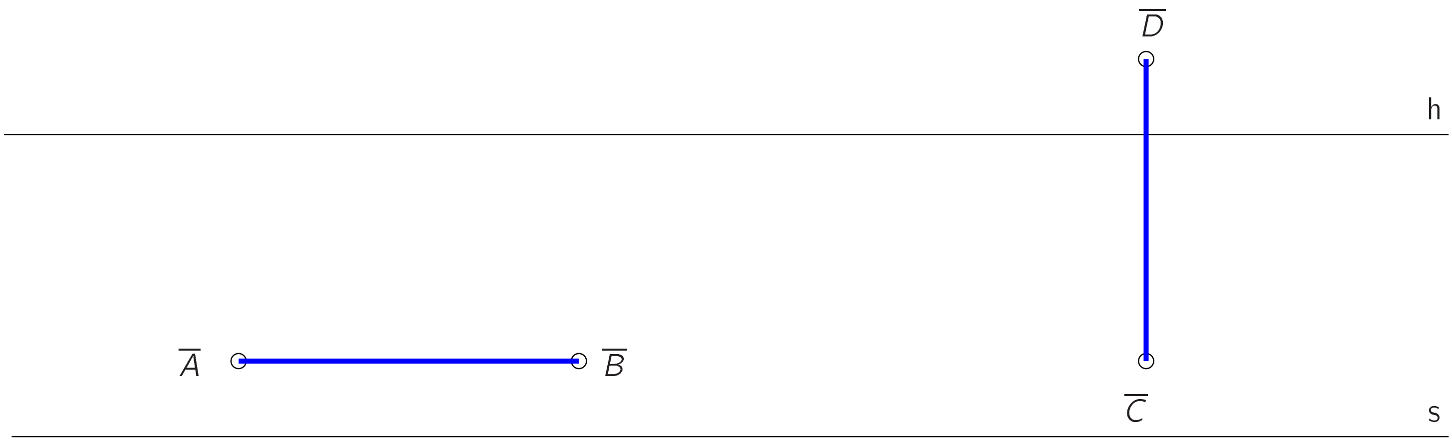



Abbildung 5.47: Bestimmung einer wahren horizontalen/senkrechten Länge: $A, B, C$ liegen in der Standebene

**Aufgabe 5.18** *Bestimme die wahren Abmessungen des in Abb. 5.48 gegebenen Hauses. (Die Distanz ergibt sich aus den horizontalen Fluchtpunkten mit Hilfe eines Thaleskreises.)*

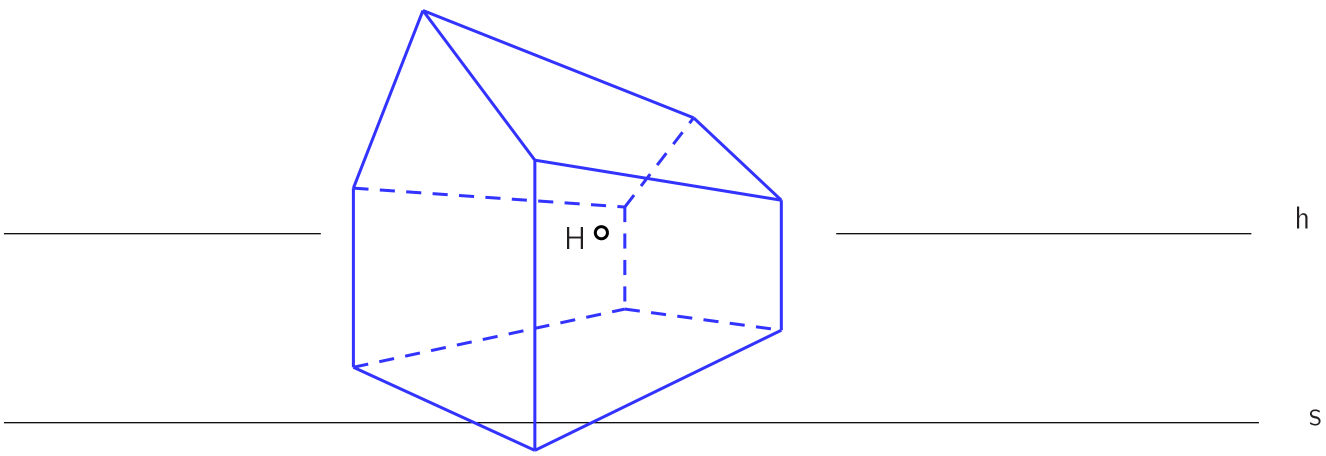



Abbildung 5.48: Bestimmung der wahren Abmessungen eines Hauses

Mit Hilfe des Messpunktes $M_g$ einer Geraden $g$ lässt sich auch auf $g$ eine **wahre Länge antragen**.

**Aufgabe 5.19** *Ergänze in dem perspektiven Bild eines Hauses eine Tür links von dem Punkt A. Breite der Tür: 2cm, Höhe: 3cm. Füge senkrecht zu dem vorhandenen Haus rechts hinten einen Anbau mit derselben Traufhöhe, der Firsthöhe 6.5cm, Breite 6cm, Länge 4cm hinzu.*

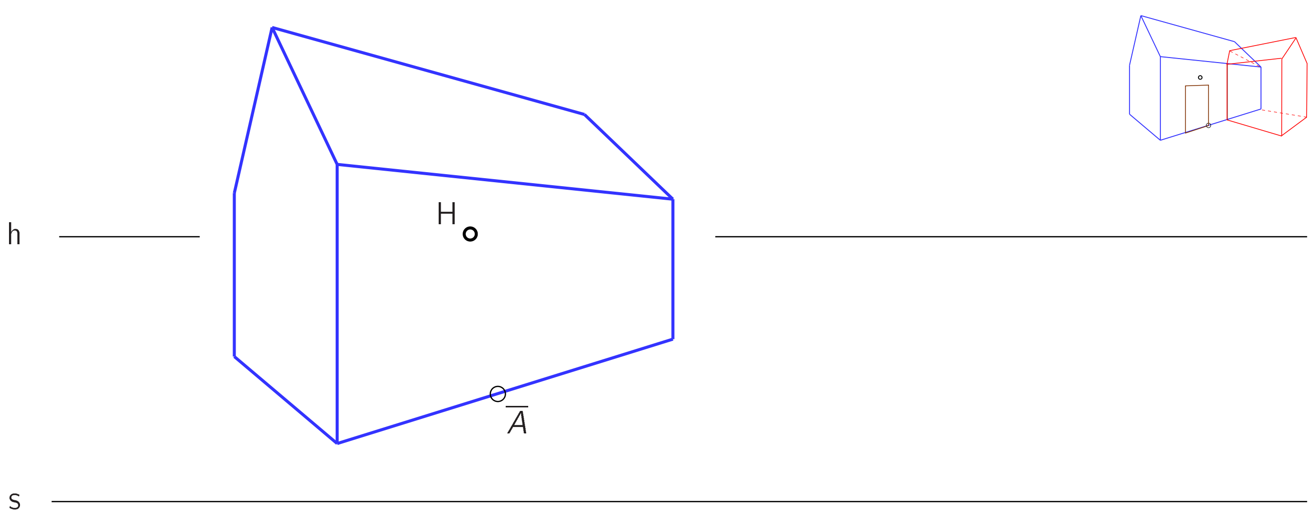



Abbildung 5.49: Antragen wahrer Längen: Tür und Anbau

### 5.6.2 Bestimmung der äußeren Orientierung

Unter der **äußeren Orientierung** einer Zentralprojektion versteht man die Lage des Augpunktes und der Bildtafel relativ zu dem Objekt, das abgebildet wird.

Um die äußere Orientierung bei bekannter Standardanordnung zu bestimmen, kehrt man die in Abschnitt 5.1.3 beschriebene Methode "Architektenanordnung" um.

**Durchführung**:

1. Zeichne unter– oder oberhalb des perspektiven Bildes eine Parallele $\pi'$ zum Horizont $h$. $\pi'$ ist der Grundriss der **Bildtafel** (Architektenanordnung !).
2. Übertrage den **Hauptpunkt** $H$ und alle notwendigen **Fluchtpunkte** in den Grundriss. Der Grundriss $O'$ des **Augpunkt**es liegt auf dem Lot zu $\pi'$ in $H'$ im Abstand $d$ , der **Distanz**.
3. **Rekonstruktion** einer **Gerade**, die in der Standebene liegt:
   Bestimme (falls nicht schon in 2. geschehen) die Grundrisse $F_g'$, $S_g'$ des Flucht– bzw. Spurpunktes der Geraden $g$. $g'$ ist dann eine Parallele zu $O'F_g'$ durch $S_g'$.
4. **Rekonstruktion** eines **Punktes** $P$, der in der Standebene liegt:
   Zeichne $\overline{P}'$ mit Hilfe des Lotes von $\overline{P}$ auf $\pi'$ und den Grundriss des Projektionsstrahls (Gerade $O'\overline{P}'$).
   Mit Hilfe des Grundrisses einer weiteren Gerade durch $P$ (z.B. Tiefenlinien oder Hauskanten,...) erhält man schließlich $P'$.
5. Ein Punkt, der nicht in der Standebene liegt, lässt sich analog rekonstruieren, falls sein Grundriss im perspektiven Bild bekannt oder konstruierbar ist. Die Höhe eines solchen Punktes erhält man über deren "wahre Länge" (s. Anfang dieses Abschnitts).

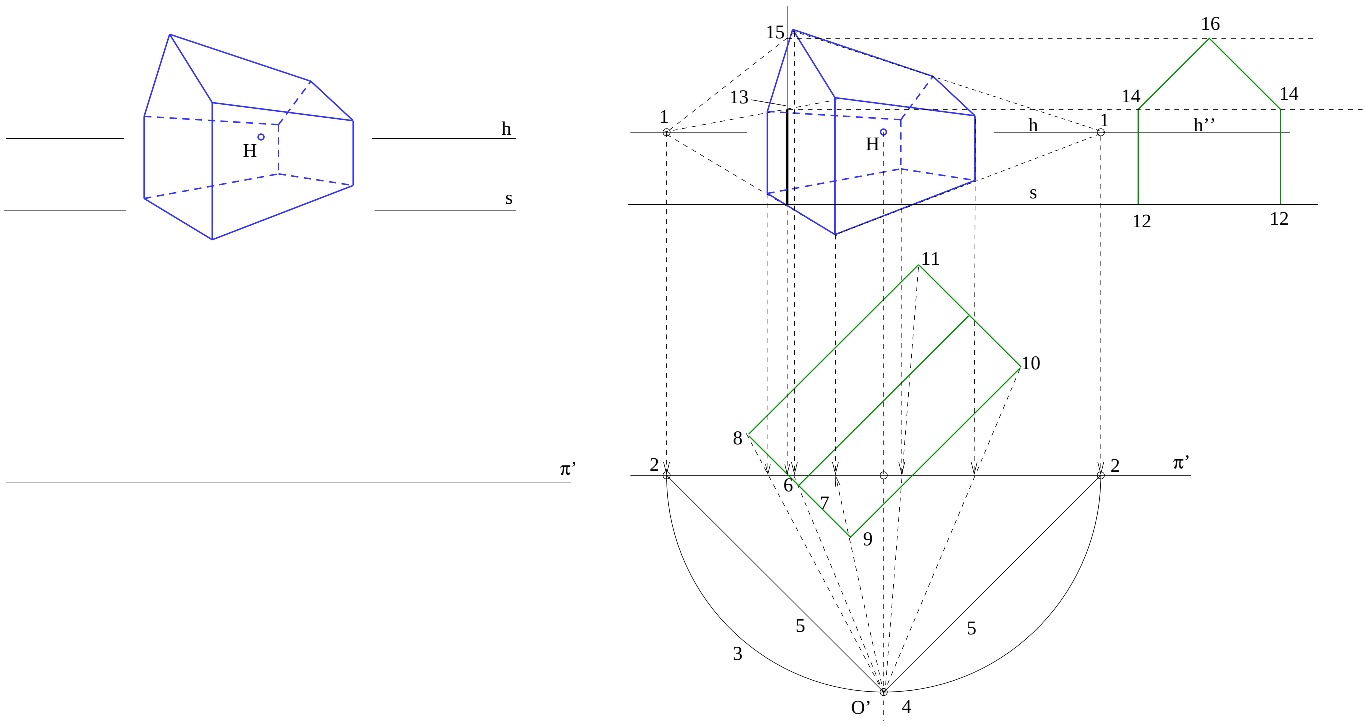



Abbildung 5.50: Rekonstruktion von Grund– und Aufriss eines Hauses: Lösungsschritte 1–16

**Aufgabe 5.20** *Rekonstruiere Grund- und Aufriss eines Hauses.*

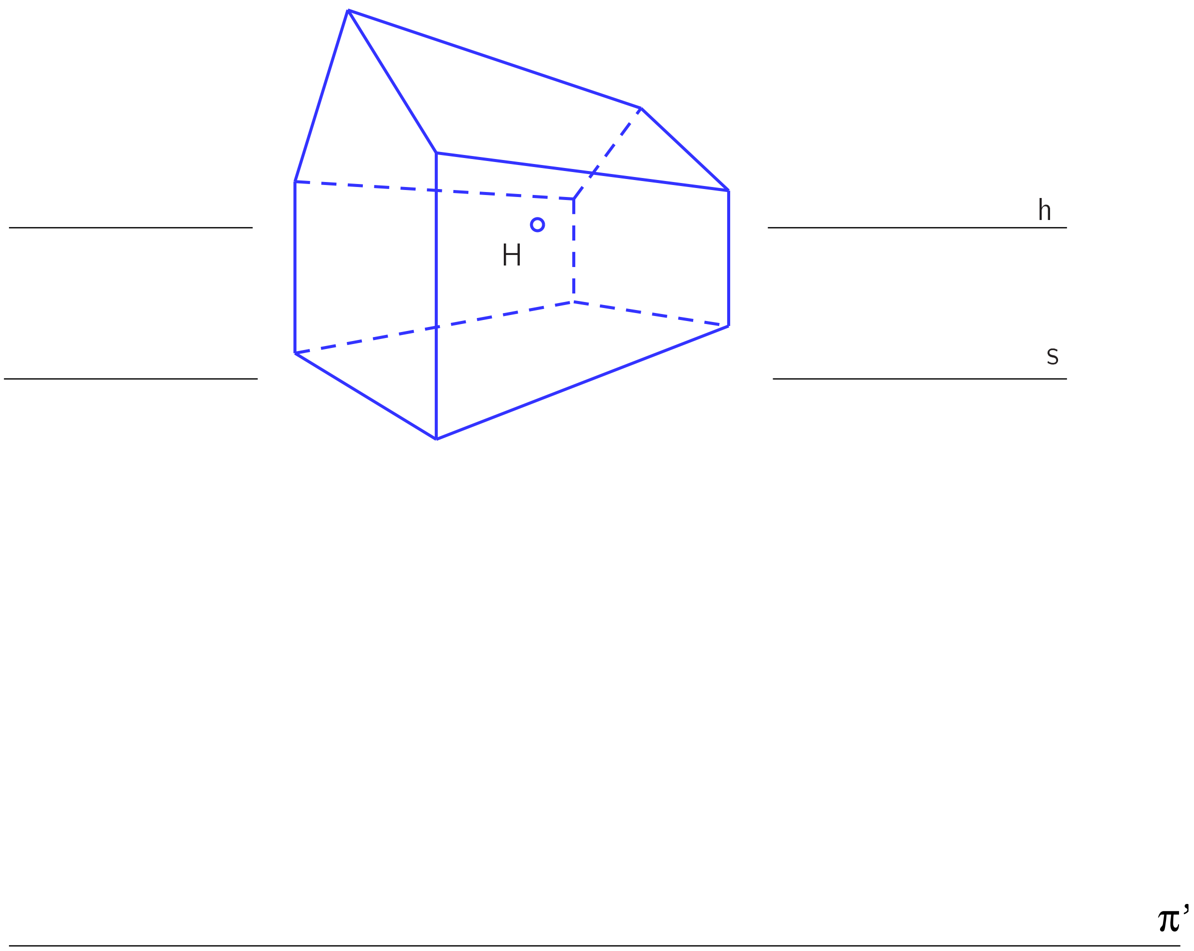



Abbildung 5.51: Rekonstruktion von Grund– und Aufriss eines Hauses

### 5.6.3 Rekonstruktion aus Photographien

Um aus einer Photographie ein Objekt rekonstruieren zu können, benötigt man weitere Informationen. Z.B.: wahre Längen, wahre Winkel (insbesondere *rechte* Winkel). Damit wir die uns bekannten Methoden für den Fall "Standardanordnung bei senkrechter Bildtafel" verwenden können, wollen wir solche Informationen voraussetzen, die uns erlauben, die Standardanordnung zu erkennen.

Möglichkeiten zur **Bestimmung der Standardanordnung aus einem Photo**:

a) Die **Bildtafel** steht **senkrecht**, wenn vertikale Geraden im Bild parallel sind.

b) Lage des **Hauptpunktes**:

   b1) Liegt eine *vollständige* Photographie (kein Ausschnitt !) vor, so ist der Hauptpunkt der Mittelpunkt der Photographie (Schnittpunkt der Diagonalen).

   b2) Ist das Bild eines *vertikalen Rechtecks* (z.B. Hausfront oder Fenster) wieder ein Rechteck, so sind die Bilder der zu diesem Rechteck senkrechten Geraden Tiefenlinien und ihr Schnittpunkt ist der Hauptpunkt.

c) Der **Horizont** ist die Gerade durch die Fluchtpunkte zweier *horizontaler Geraden* oder das Lot zu dem Bild einer *Vertikalen* durch einen "*horizontalen*" Fluchtpunkt.

d) Bestimmung der **Distanz**:

   d1) Sind *Hauptpunkt* und die Fluchtpunkte $F_1, F_2$ zweier *horizontaler*, zueinander *senkrechter* Geraden (z.B. Hauskanten) bekannt, so lässt sich die Distanz mit Hilfe des THALES-Kreises über $F_1, F_2$ bestimmen (s. Aufgabe 5.21).

   d2) Sind der *Hauptpunkt* und von einer *horizontalen* Gerade $g$ der *Fluchtpunkt* $F_g$ und der *Winkel* $\alpha_g$, den $g$ mit der Bildtafel einschließt, bekannt, so lässt sich im Grundriss mit Hilfe von $H'$, $F_g'$ und $\alpha_g$ der Augpunkt $O'$ und damit die Distanz $d$ bestimmen (s. Aufgabe 5.22).

e) Die **Standlinie** lässt sich meistens aus der Kenntnis einer *wahren Länge* bestimmen (s. 5.52) . Falls eine wahre Länge nicht bekannt ist, kann man die Standlinie "geeignet" wählen. Man erhält dann die Rekonstruktion allerdings nur bis auf *Ähnlichkeit*.

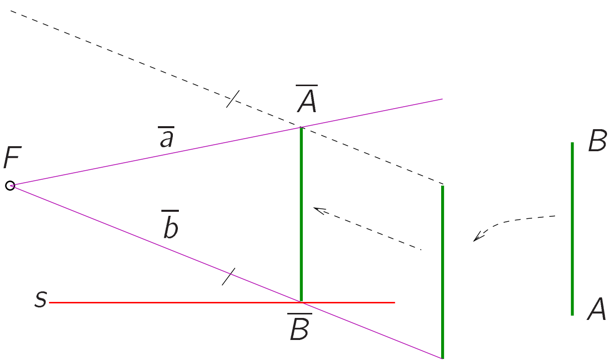



Abbildung 5.52: Rekonstruktion der Standlinie bei bekannter senkrechter Strecke (s. Abb. 5.53)

**Aufgabe 5.21** :
*Gegeben: Die "vollständige Photographie" eines Hauses und die wahre Höhe der Tür (Abb. 5.53).*
*Gesucht: Die wahren Abmessungen (Länge, Breite, Traufhöhe, Firsthöhe).*
*Hinweis: Verwende b1), c), d1), e).*

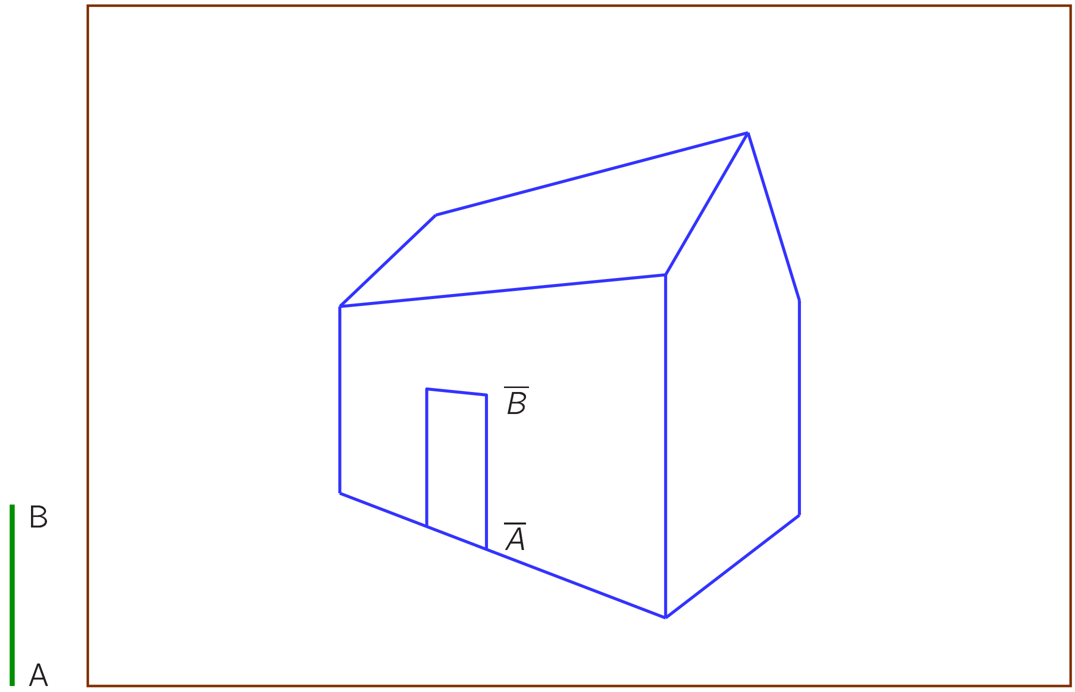



Abbildung 5.53: Rekonstruktion von Grund– und Aufriss eines Hauses aus einer Photographie

**Aufgabe 5.22** :

*Gegeben: Das perspektive Bild eines Hauses und die wahre Gestalt des rechteckigen Vorgartens (Abb. 5.54).*
*Gesucht: Die wahren Abmessungen des Hauses. Rekonstruiere Grund– und Aufriss.*
*Hinweis: Verwende b2), c), Fluchtpunkt $F_d$ der Vorgartendiagonalen und die wahre Gestalt des Vorgartens.*

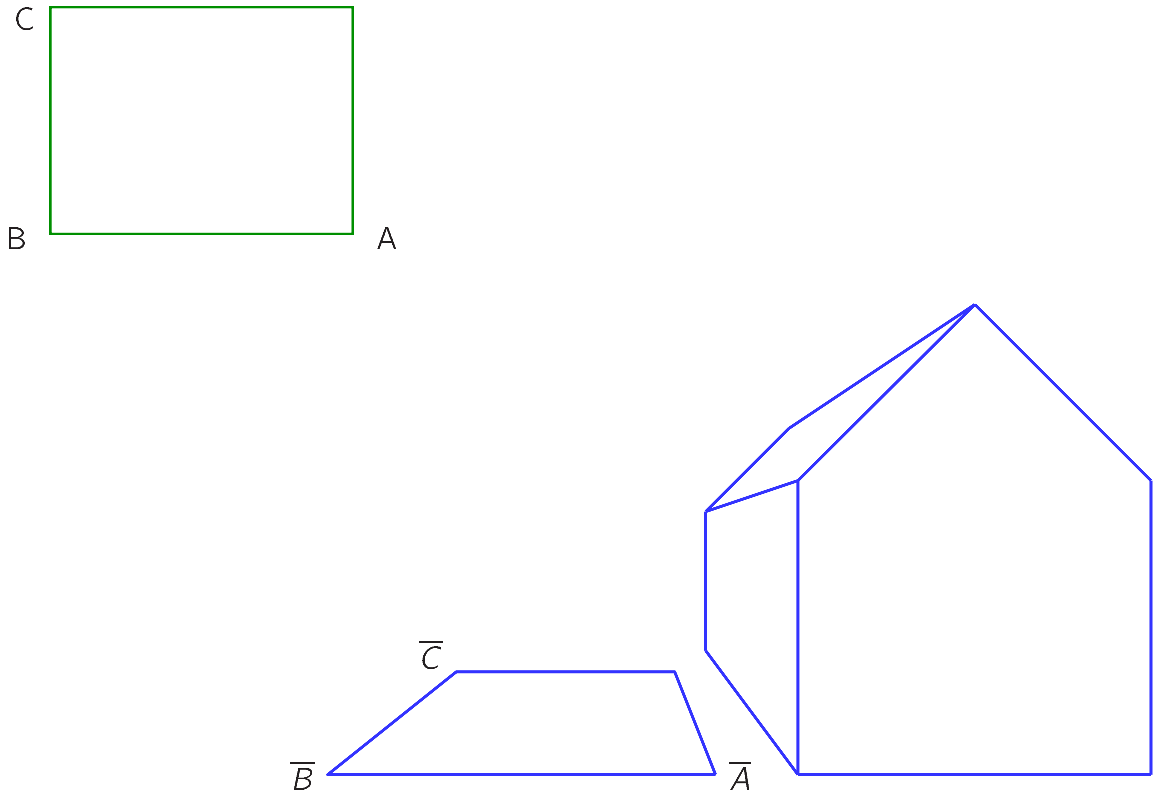



Abbildung 5.54: Wahre Abmessungen eines Hauses bei bekanntem Vorgarten

In dem folgenden Beispiel liefern die horizontalen Hauskanten zwei Fluchtpunkte $F_1$, $F_2$, die zwei zueinander senkrechten Richtungen entsprechen. Der Grundriss $O'$ des **Augpunktes** liegt dann auf dem THALES-Kreis über der Strecke $F_1'F_2'$. Die Diagonale des Vorgartens liefert einen weiteren Fluchtpunkt $F_3$ auf dem Horizont. Da der Winkel $\alpha$, den die Diagonale mit der zu $F_2$ gehörenden Richtung einschließt, bekannt ist, muss $O'$ auf dem Thaleskreis so bestimmt werden, dass der Winkel zwischen $O'F_2'$ und $O'F_3'$ gleich $\alpha$ ist.

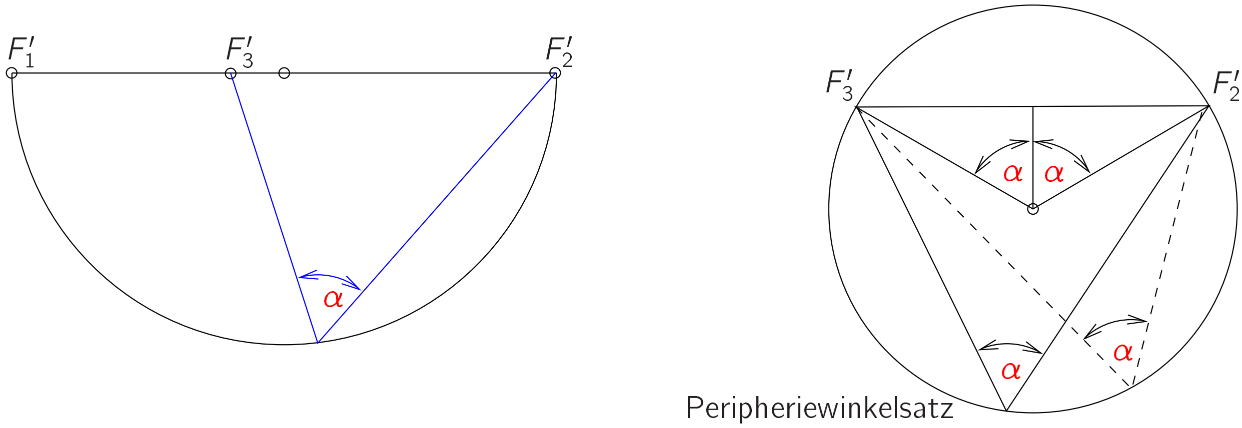



Abbildung 5.55: Rekonstruktion bei 3 horizontalen Fluchtpunkten

**Idee:** Man konstruiere einen Kreis durch $F_2'$, $F_3'$, dessen Mittelpunkt $M$ auf der Mittelsenkrechten zu $F_2'$, $F_3'$ liegt und für den der „Zentriwinkel" zwischen $F_2'M$ und $MF_3'$ gleich $2\alpha$ ist. Wegen der Gültigkeit des „Peripherie-winkel-Satzes" ist dann $O'$ der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Thales-Kreis über $F_1'$, $F_2'$.

**Durchführung**:

1. Errichte die **Mittelsenkrechte** zu $F_2'$, $F_3'$.
2. Trage in $F_2'$ den **Winkel** $\alpha$ nach „unten rechts" an.
3. Errichte in $F_2'$ das **Lot** auf den „neuen" Schenkel.
   Der Schnittpunkt dieses Lotes mit der Mittelsenkrechten liefert den **Mittelpunkt** $M$ des Kreises $k$ durch $F_2'$, $F_3'$.
4. der Schnittpunkt des Kreises $k$ mit dem THALES-Kreis ist $O'$.

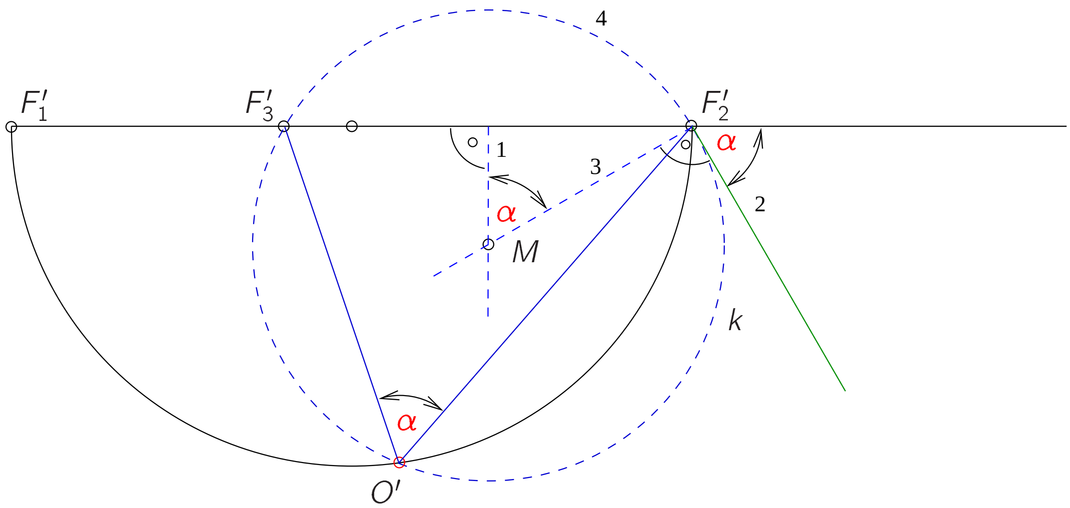



Abbildung 5.56: Rekonstruktion bei 3 horizontalen Fluchtpunkten

**Aufgabe 5.23** :
*Gegeben:Das perspektive Bild eines Hauses mit Vorgarten und die wahre Gestalt des Vorgartens.*
*Gesucht: Horizont, Hauptpunkt, Distanz, Standlinie und die wahren Abmessungen des Hauses.*
*Hinweis: Verwende c), b3), d1), e).*

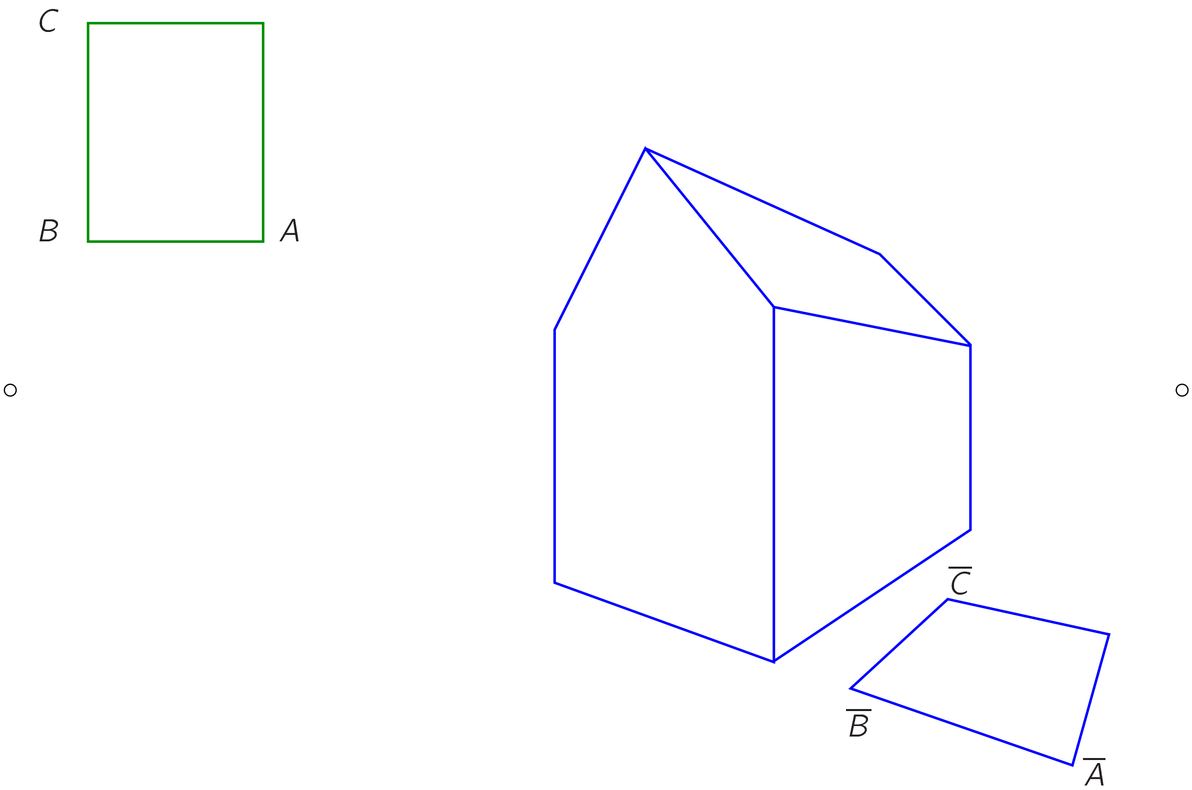



Abbildung 5.57: Rekonstruktion bei 3 horizontalen Fluchtpunkten: Beispiel

Wir betrachten nun den Fall, dass zwei Fluchtpunkte $F_1$, $F_2$ zu zwei zueinander orthogonalen horizontalen Richtungen (wie im vorigen Fall) und ein Fluchtpunkt $F_d$ einer **nicht horizontalen** Richtung bekannt sind. $F_d$ soll der Fluchtpunkt der Diagonalen eines **vertikalen** Rechtecks, dessen wahre Gestalt bekannt ist, sein. Damit sind der Steigungswinkel $\alpha$ der Rechteckdiagonalen und der Fluchtpunkt $F_d$ bekannt. Der Augpunkt muss wieder im (Hilfs-)Grundriss auf dem Thaleskreis über $F_1$, $F_2$ liegen. Führen wir das Antragen eines Steigungswinkels aus Fig. 5.21 rückwärts aus, so finden wir einen weiteren Kreis (im Grundriss) auf dem $O'$ liegen muss (s. Fig. 5.58)

**Durchführung**: (s. LEO S. 246)

1. Bestimme die horizontalen Fluchtpunkte $F_1, F_2$ und zeichne $F_1', F_2'$ mit dem zugehörigen **Thaleskreis** $k$ in einen Grundriss.
2. Zeichne die **Fluchtgerade** $f$ der senkrechten Ebene, die das vertikale Rechteck enthält. Der Schittpunkt mit der Diagonalen ist der **Fluchtpunkt** $F_d$.
3. Trage in $F_d$ den (wahren) **Winkel** $\alpha$ an und schneide den neuen Schenkel mit dem Horizont $h$. Der Schittpunkt sei $M$ ($M$ ist dann auch der **Messpunkt** der horizontalen Richtung des vertikalen Rechtecks).
4. Schneide (im Grundriss) den Kreis mit dem Mittelpunkt $f'$ (Im Beispiel unten ist dies $F_2'$) durch $M'$ mit dem Thaleskreis $k$. Der Schnittpunkt ist der Grundriss $O'$ des **Augpunkt**s.
5. Das Lot von $O'$ auf $\pi'$ ist der Grundriss $H'$ des **Hauptpunkt**s.. Zeichne $H$ auf $h$.
6. Mit Hilfe des Messpunktes $M$ bestimmt man in "üblicher Weise" die Standlinie $s$.

**Aufgabe 5.24** :
*Gegeben: Das perspektive Bild eines Hauses und die wahre Gestalt einer Hauswand (Abb. 5.58).*
*Gesucht: Die wahren Abmessungen des Hauses.*
*Hinweis: Konstruiere zunächst den Hauptpunkt und die Standlinie mit Hilfe des Fluchtpunktes der Diagonalen und der wahren Länge des vertikalen Rechtecks.*

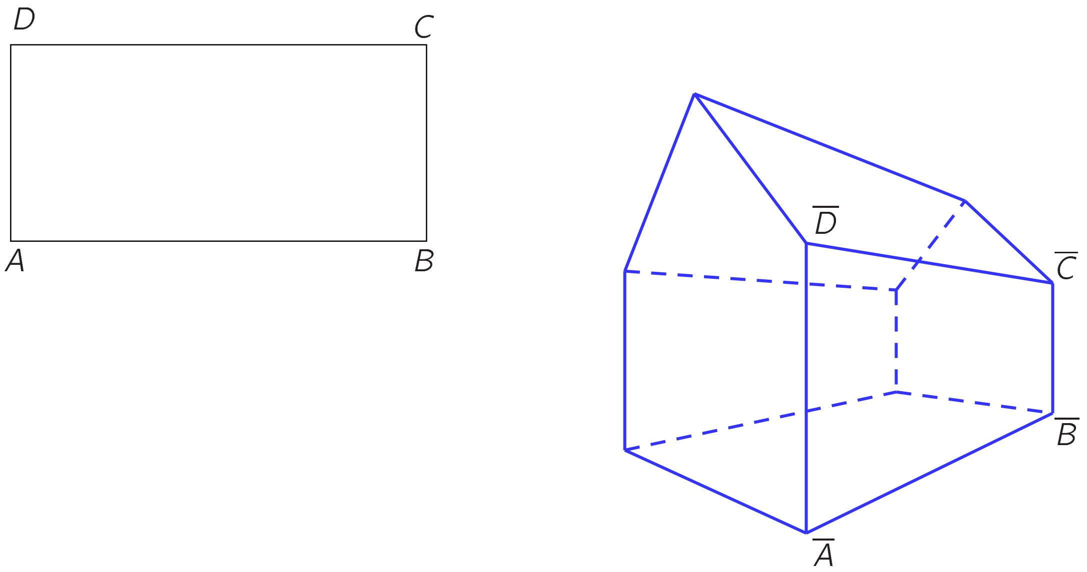



Abbildung 5.58: Rekonstruktion bei einem nicht horizontalen Fluchtpunkt

## 5.7 Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel

Für die Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel gehen wir von den folgenden, in der Praxis leicht erfüllbaren **Voraussetzungen** aus:

a) Das **Fluchtpunktdreieck** eines **orthogonalen** Koordinatensystems ist bekannt.

b) Der **Spurpunkt** einer Koordinatenachse ist bekannt.

Falls Voraussetzung b) nicht erfüllt ist, kann man einen Spurpunkt frei wählen. Die Rekonstruktion des Objektes ergibt sich dann bis auf Ähnlichkeit.
Da Spurgerade und Fluchtgerade einer Ebene parallel sind, lässt sich mit Hilfe von b) das für die Rekonstruktion wichtige **Spurpunktdreieck** bestimmen.
Die folgende Abbildung zeigt für eine konkrete Situation Flucht- und Spurpunktdreieck. (Falls der Nullpunkt des Koordnatensystems auf derselben Seite liegt wie der Augpunkt, steht auch das Spurpunktdreieck „auf dem Kopf".)

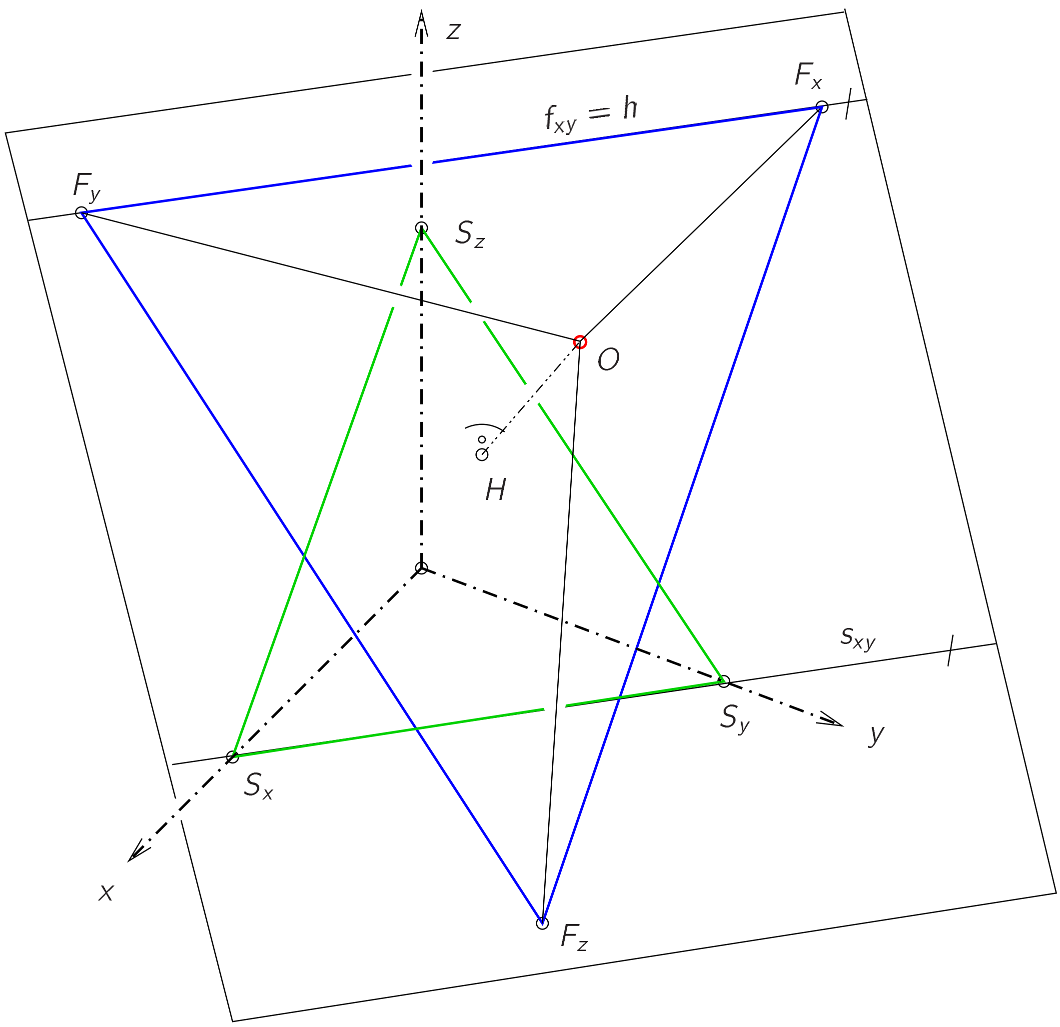



Abbildung 5.59: Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel: Spur– und Fluchtpunktdreieck

Man überlegt sich, dass gilt:

| |
|---|
| Der **Hauptpunkt** ist der Schnittpunkt der Höhen im **Fluchtpunkt**dreieck. |

Die **Distanz** ergibt sich durch eine „geeignete“ Umklappung des Augpunktes in der Bildtafel.

**Durchführung** im perspektiven Bild:

1. „Thaleskreis“ über einer Höhe des **Flucht**punktdreiecks.
2. Das Lot in $H$ auf diese Höhe liefert den Punkt $\tilde{O}$ auf dem Thaleskreis.
   Der Abstand dieser beiden Punkte ist die Distanz

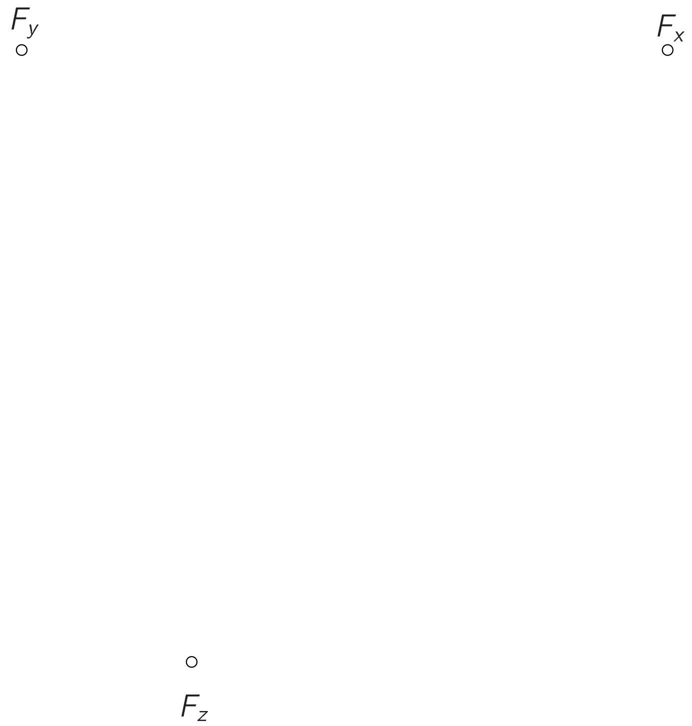



Abbildung 5.60: Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel: Hauptpunkt und Distanz

### 5.7.1 Bestimmung der wahren Länge einer Strecke in Achsenrichtung

Die Bestimmung der wahren Länge einer Strecke erfolgt auch hier mit Hilfe eines „Messpunktes“ (s. Abschnitt 5.6.1). Der hierfür notwendige „umgeklappte Augpunkt“ liegt auf dem Thaleskreis über den entsprechenden Achsenfluchtpunkten.

**Durchführung** für eine Strecke $AB$ auf der $x$-Achse:

1. Konstruiere das Fluchtpunktdreieck $F_xF_yF_z$, den Hauptpunkt $H$ und die Spur $s_{xy}$ der $x-y$-Ebene. Die Gerade $f_{xy}$ durch $F_x$, $F_y$ ist die Fluchtgerade der $x-y$-Ebene, in der die Strecke $AB$ liegt.
2. Lote den Hauptpunkt $H$ senkrecht zu $f_{xy}$ auf den Thaleskreis über $F_x$, $F_y$. Der so erhaltene Punkt sei $O_{xy}$.
3. Drehe $O_{xy}$ um $F_x$ auf $f_{xy}$. Der neue Punkt ist der **Messpunkt** $M_x$.
4. die **wahre Länge** der Strecke $AB$ ergibt sich durch Projektion der (perspektiven) Bildstrecke $\overline{A}\,\overline{B}$ von $M_x$ aus auf die Spur $s_{xy}$ (s. Abschn. 5.6.1.1).

**Beachte:** Es muss auf die Spur derjenigen Ebene, die die Strecke enthält, projiziert werden. Liegt die Strecke in einer zur x-y-Ebene parallelen Ebene, so ist eine andere (zu $s_{xy}$ parallele) Spur zu verwenden.

**Aufgabe 5.25** :
*Gegeben: Perspektives Bild eines Quaders und der Spurpunkt der x-Achse.*
*Gesucht: Wahre Abmessungen des Quaders.*
*Ergänze den Quader durch ein pyramidenförmiges Dach der Höhe 2cm.*

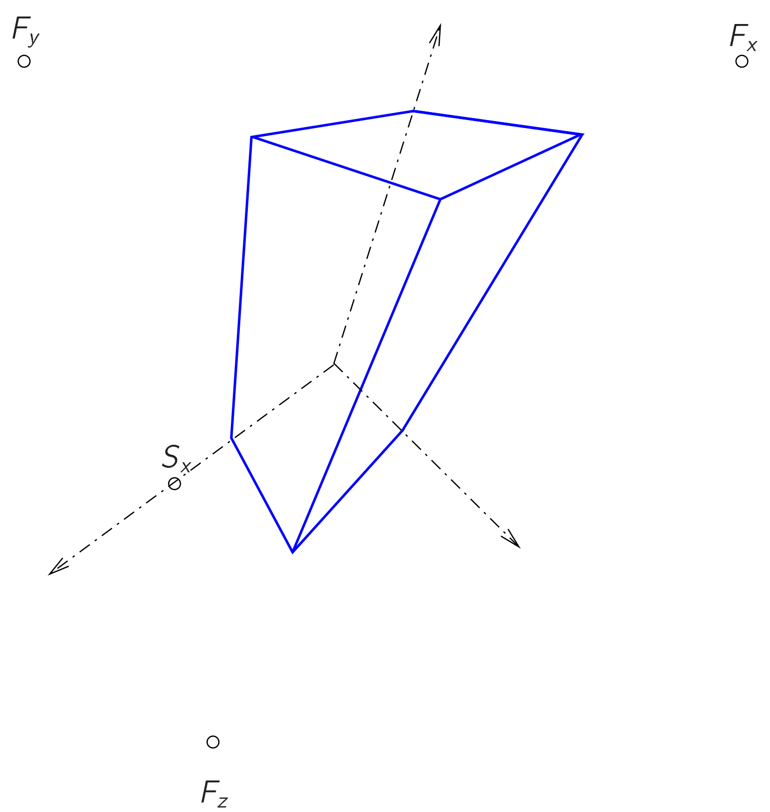



Abbildung 5.61: Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel: Wahre Abmessungen eines Quaders

Um Grund- und Aufriss und die äußere Orientierung bei geneigter Bildtafel zu bestimmen, kehrt man die in Abschnitt 5.5 beschriebene Methode "Architektenanordnung bei geneigter Bildtafel" um.

**Durchführung**: Schritte 1-25

1 Zeichne zum Horizont $h$ eine Parallele $h'$ unterhalb des perspektiven Bildes. (Hier entsteht der Grundriss.) Übertrage die **Fluchtpunkte** $F_x, F_y$ in den Grundriss. Rekonstruiere im Grundriss $O'$.

2,3 Zeichne die Höhen des Fluchtpunktdreiecks durch $F_y$ und $F_z$. Ihr Schnittpunkt ist der **Hauptpunkt** $H$. Zeichne über der Höhe $h_z$ durch $F_z$ und $V$ den Thaleskreis $k_z$.

4,5 Der Schnitt des Lotes in $H$ auf $h_z$ mit dem Kreis $k_z$ ist der umgeklappte Augpunkt $\tilde{O}$. Der Winkel $\alpha = \angle F_z V \tilde{O}$ ist der **Neigungswinkel der Bildtafel** gegen die Horizontale.

6 Zeichne die geneigte Bildtafel, den Augpunkt $O''$ und $F_z''$ in den Seitenriss (der Architektenanordnung).

7-13 Rekonstruiere die Standlinie $s$, die Standebene (x-y-Ebene) und den Koordinatenursprung im Seitenriss und übertrage die Standlinie und den Kordinatenursprung in den Grundriss.

14,15 Rekonstruiere die Koordinatenachsen.

16-25 Rekonstruiere den Boden des Quaders und dann die restlichen Punkte.

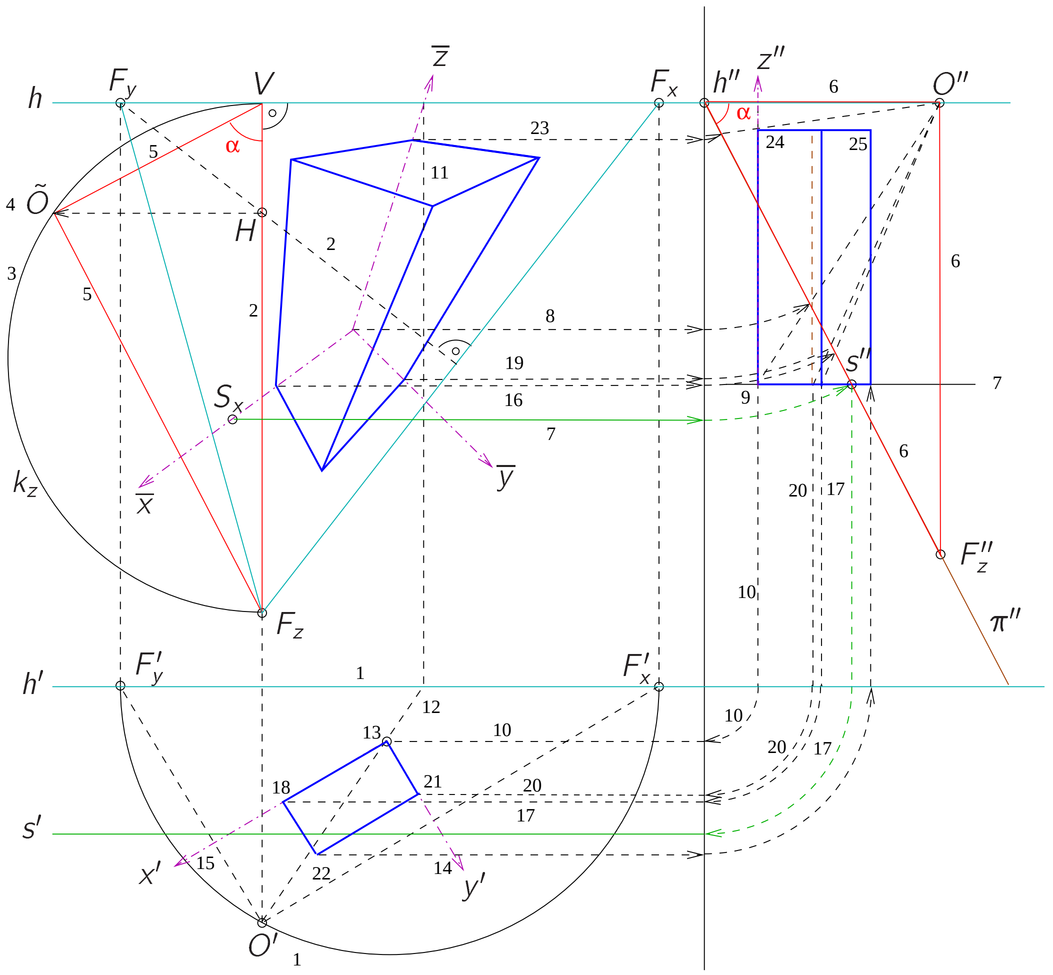



Abbildung 5.62: Zu Fig. 5.63 Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel: Grund-, Aufriss eines Quaders

**Aufgabe 5.26** :
*Gegeben: Perspektives Bild eines Quaders und der Spurpunkt der x-Achse.*
*Gesucht: Grund- und Aufriss des Quaders und des Augpunktes (äußere Orientierung).*
*Ergänze den Quader durch ein pyramidenförmiges Dach der Höhe 2cm.*

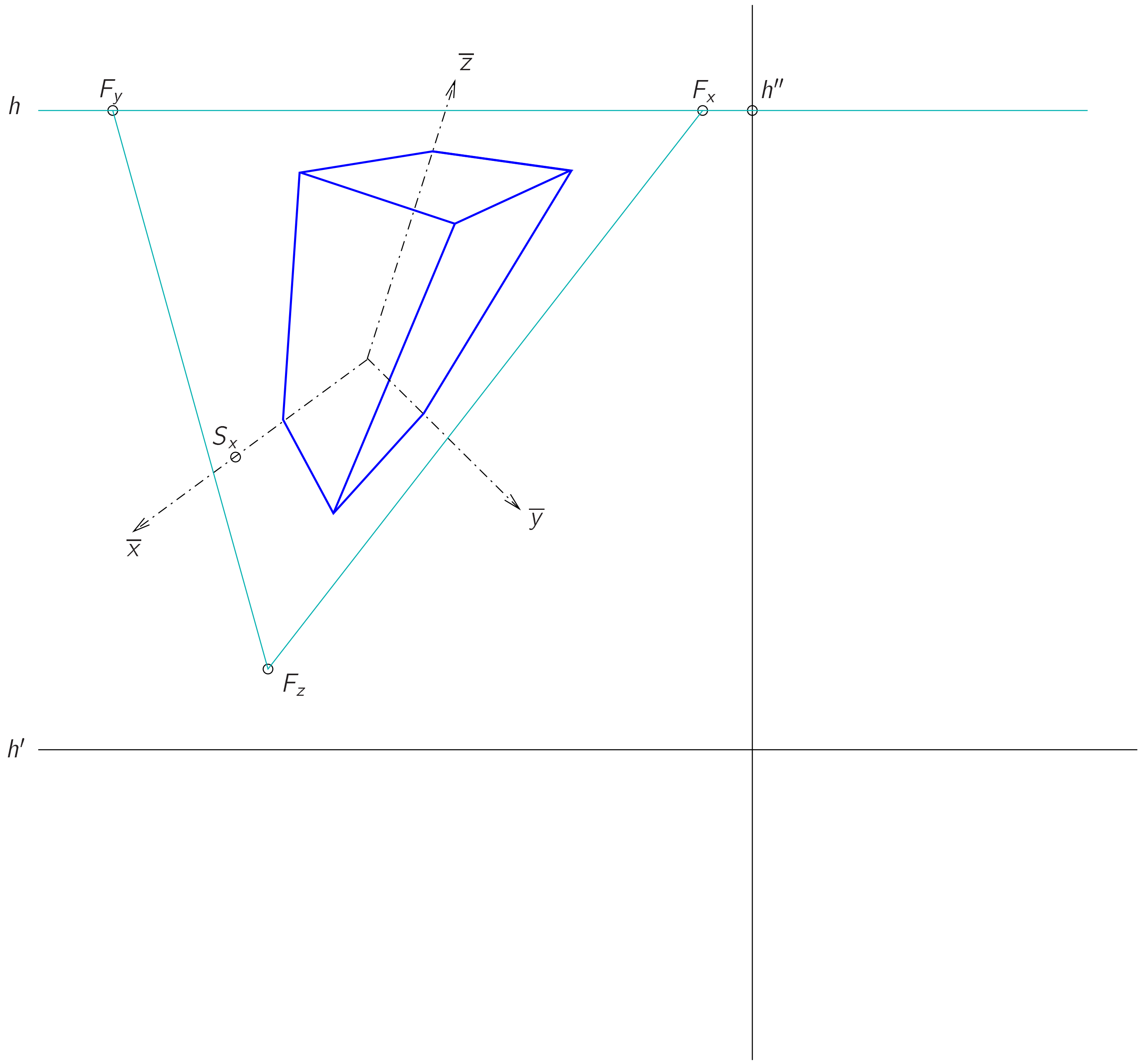



Abbildung 5.63: Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel: Grund- und Aufriss eines Quaders

### 5.7.2 Entzerrung mit Hilfe des Doppelverhältnisses

Bei einer Parallelprojektion ist das „Teilverhältnis“ eine Invariante (Strahlensatz!). Bei Zentralprojektion gilt dies i.a. nicht mehr. Die für eine Zentralprojektion typische Invariante ist das **Doppelverhältnis**.

Doppelverhältnis $DV(A,B,C,D) := \frac{|AC|}{|AD|} : \frac{|BC|}{|BD|}$ Es gilt: $DV(A,B,C,D) = DV(A',B',C',D')$

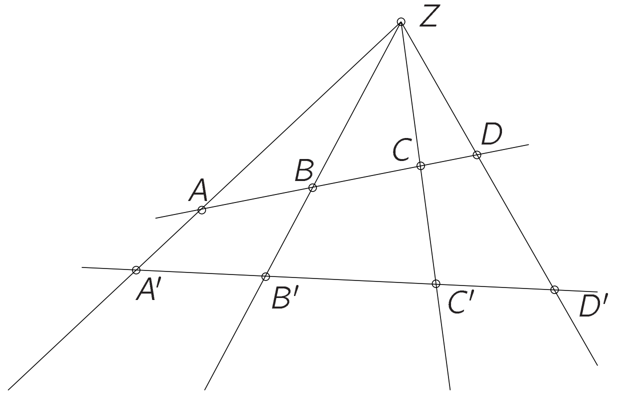



Abbildung 5.64: Invarianz des Doppelverhältnisses bei Zentralprojektion

**Anwendung:**

Gegeben: Die perspektiven Bilder $a', b'.c', d'$ von 4 Geraden eines **ebenen** Büschels und die Urbilder $a, b, c$.

Gesucht: Das Urbild $d$ der Geraden $d'$.

**Durchführung**:

1. Markiere auf einem Papierstreifen (Gerade) die Punkte $A \in a'$, $B \in b'$, $C \in c'$ und $D \in d'$.
2. Lege den Streifen so auf die Urbilder, dass $A \in a$, $B \in b$ und $C \in c$ ist. Dann geht die gesuchte Gerade $d$ durch das Büschelzentrum und $D$.

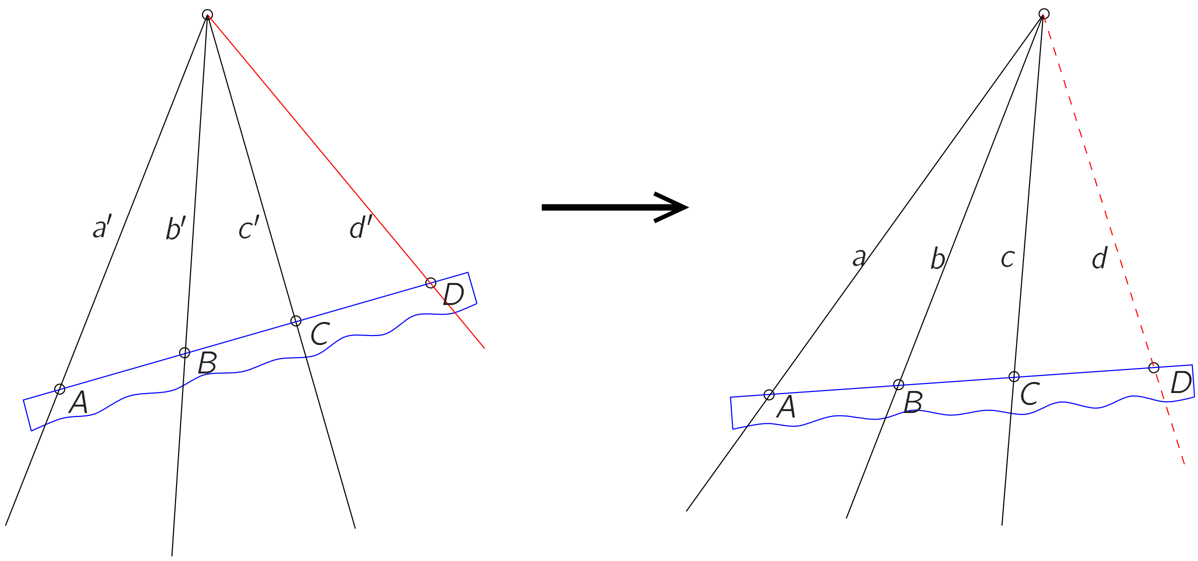



Abbildung 5.65: Entzerrung mit Hilfe des Doppelverhältnises

Zur Rekonstruktion eines **Punkt**es $X$ verwendet man zwei Büschel und überträgt die Büschelgeraden durch $X$ mit der obigen Methode in das Urbild.

Gegeben: Bild und Urbild eines Vierecks $A, B, C, D$ und das Bild $X'$ eines Punktes $X$.
Gesucht: Das Urbild $X$.

**Durchführung**:

1. Wähle zwei Punkte des Vierecks als „Büschelzentren", z.B. $A$ und $D$.
2. Zeichne die Büschelgeraden $x_1'$, $x_2'$ durch $X'$.
3. Übertrage $x_1'$ und $x_2'$ mit einem Papierstreifen in das Urbild.
   Der Schnitt der Urbilder $x_1$, $x_2$ ist das Urbild $X$.

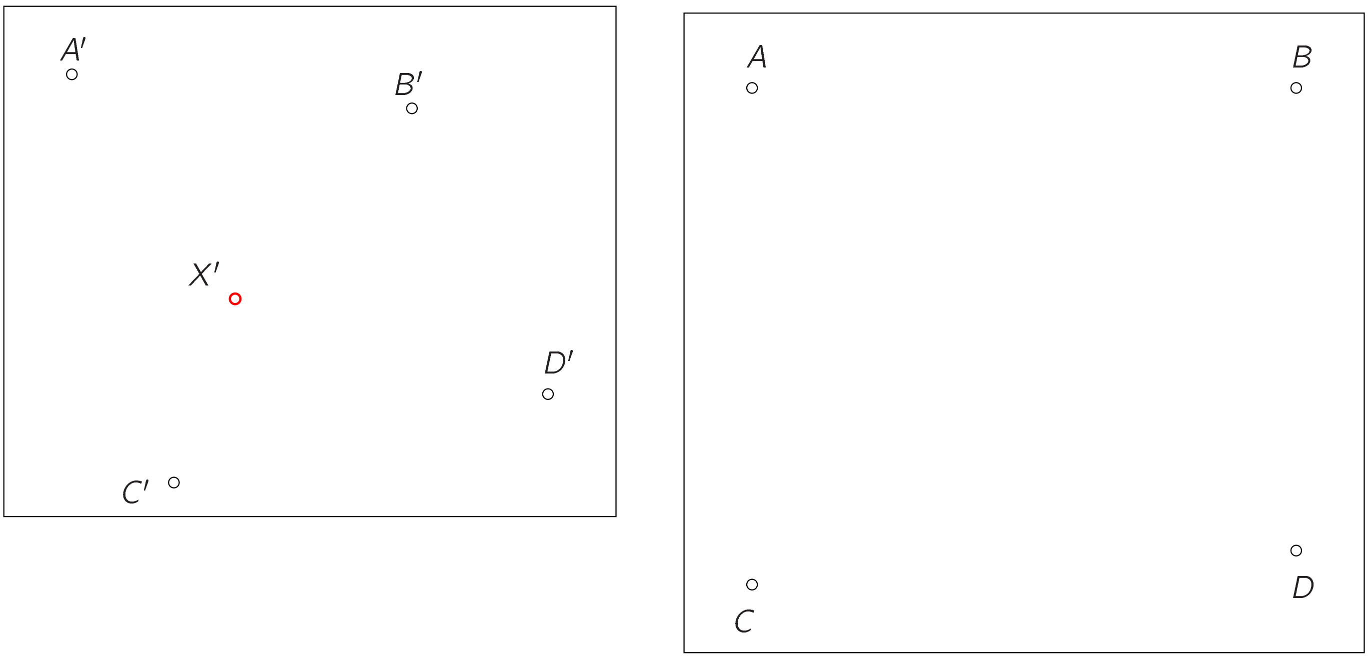



Abbildung 5.66: Rekonstruktion eines Punktes mit Hilfe des Doppelverhältnises

Bei komplizierteren ebenen Figuren (viele Punkte, Kurven) ist die punktweise Konstruktion zu mühsam. Man überzieht dann das Bild (Photo) und das Urbild (Original, Karte) mit sich entsprechenden Netzen (**Möbiusnetz**). Dieses Netz wird, ausgehend von 4 Punkten, deren Urbilder bekannt sind, durch immer neues Hinzufügen von einander in Bild und Karte entsprechenden Geraden so lange verdichtet, bis sich schließlich der Bildinhalt nach Augenmaß in das Urbild übertragen lässt.

**Aufgabe 5.27** *:*
*Gegeben: Unvollständiges Original und Zentralprojektion einer ebenen Figur.*
*Gesucht: Mund und Nase von Max (im Original).*

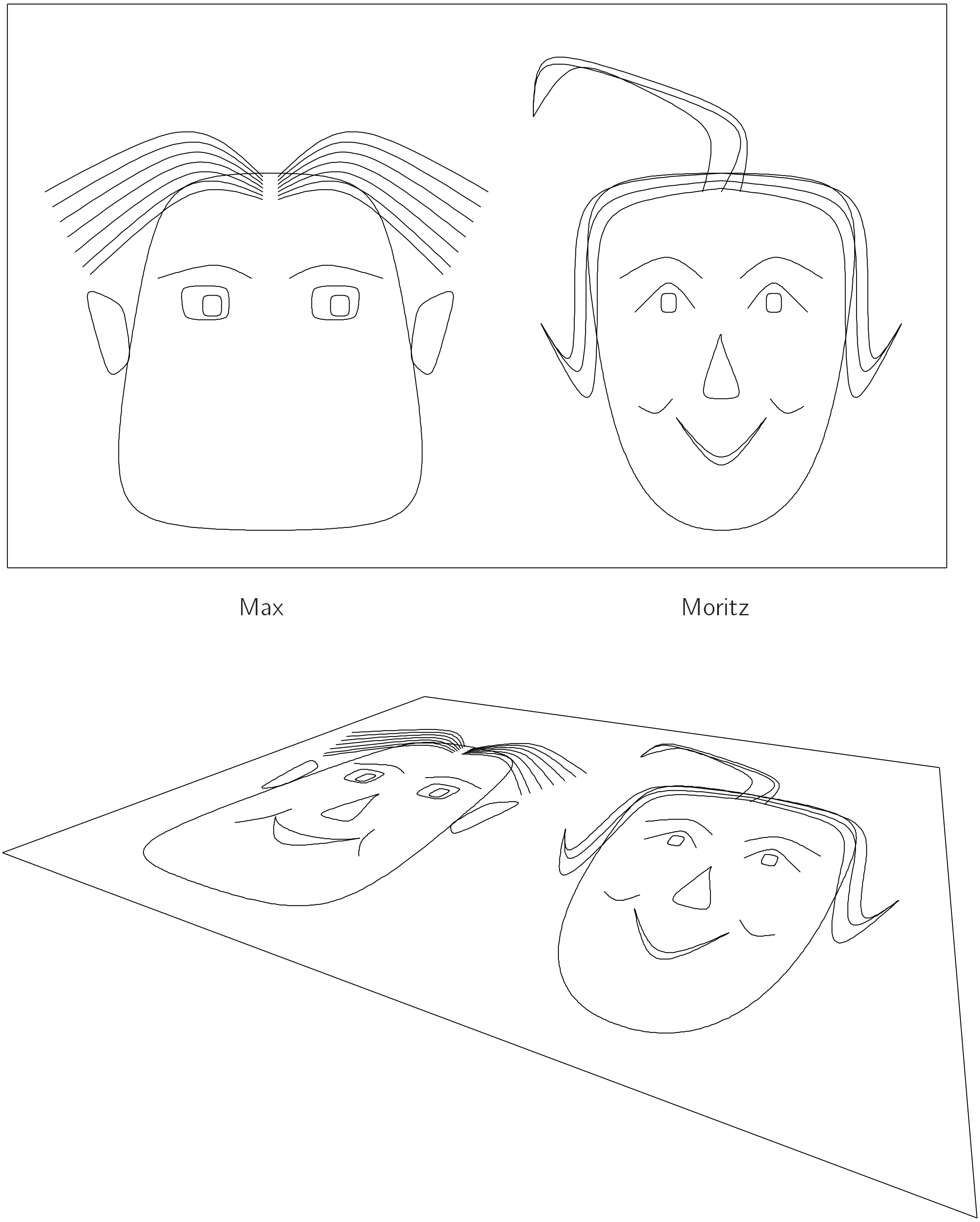



Abbildung 5.67: Rekonstruktion von Punkten mit Hilfe des Doppelverhältnises

## 5.8 Abbildung von Kurven

Das perspektive Bild einer **allgemeinen Kurve** kann man durch die Bilder hinreichend vieler **Punkte** und/oder **Tangenten** näherungsweise bestimmen. (s. Aufgabe 5.28)

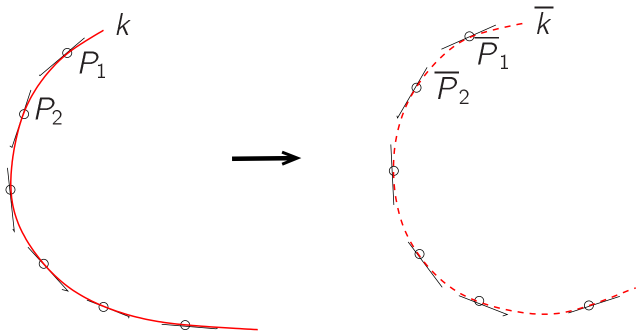



Abbildung 5.68: Zentralprojektion einer Kurve: Approximation durch Punkte und Tangenten

Mit diesem Verfahren lassen sich auch die Bilder von **Ellipsen, Hyperbeln** und **Parabeln** ermitteln.

Für die sehr häufig vorkommenden **Kreise** sind „direkte“ Konstruktionen mit Hilfe **konjugierter Halbmesser** meist einfacher. Wie das folgende Bild zeigt, treten Kreise meistens in horizontalen oder vertikalen Ebenen auf. Deshalb werden wir uns hier auf diese Fälle beschränken.

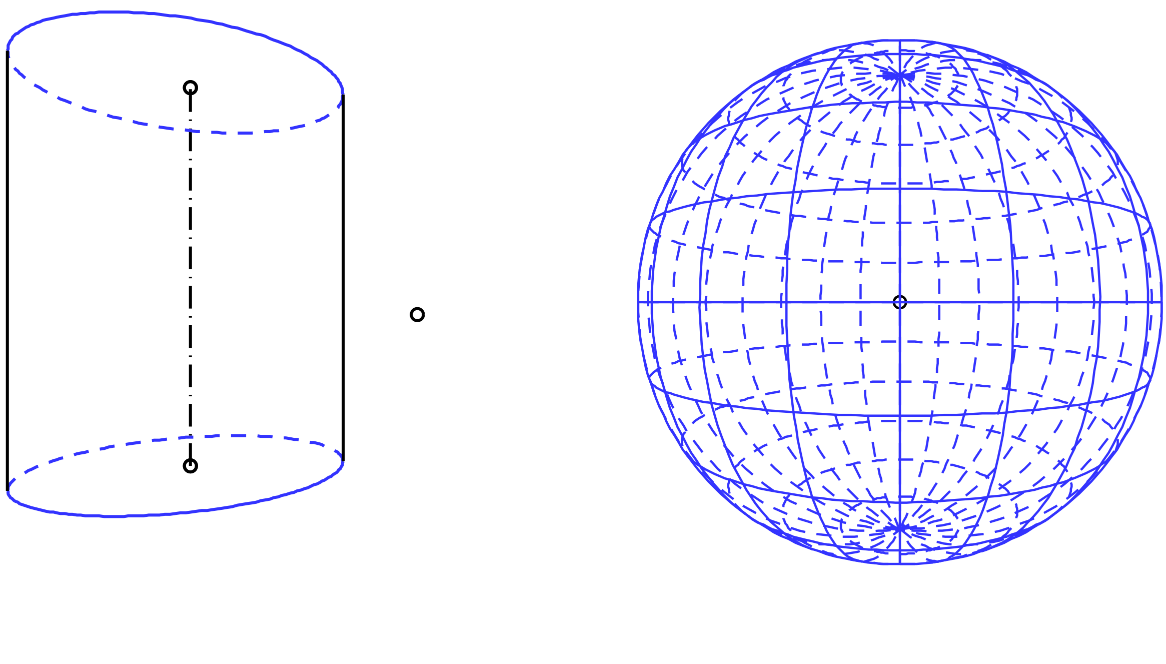


Abbildung 5.69: Zentralprojektionen von Kreisen

**Aufgabe 5.28** *Zeichne die Projektion einer Kurve k in der Standebene (Fig. 5.70) .*

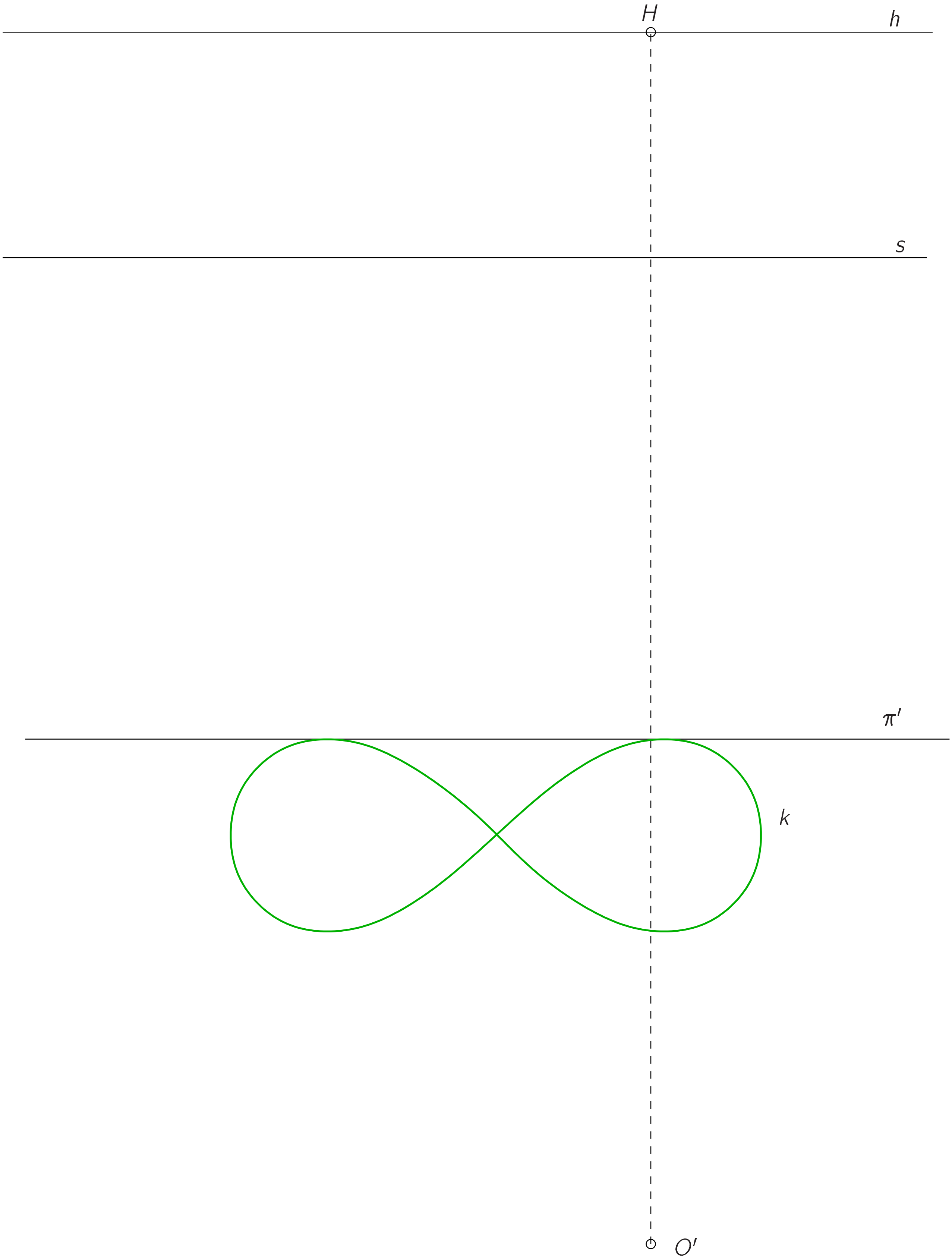



Abbildung 5.70: Zentralprojektion einer Kurve: Beispiel

## 5.9 Abbildung von Kreisen

Bei der Abbildung von Kreisen unterscheiden wir die folgenden 5 Fälle:
Es sei $k$ ein Kreis.

1. Die Kreisebene $\varepsilon$ geht **durch** den **Augpunkt** $O$: Das Bild $\overline{k}$ ist eine *Strecke*.
2. Die Kreisebene $\varepsilon$ ist **parallel** zur **Bildtafel** $\pi$: Das Bild $\overline{k}$ ist ein *Kreis*. (Der vom Kreis $k$ und dem Augpunkt $O$ erzeugte (i.a.) schiefe Kreiskegel wird wegen $\varepsilon || \pi$ von $\pi$ in einem Kreis geschnitten.)

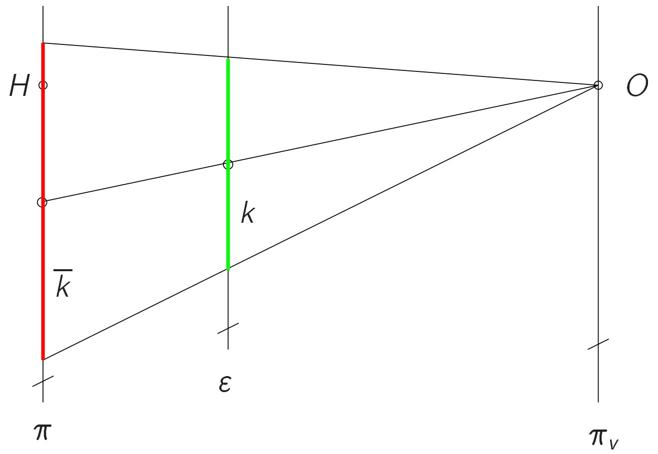



Abbildung 5.71: Zentralprojekrion eines Kreises parallel zur Bildtafel

3. Der Kreis $k$ **trifft** die **Verschwindungsebene** $\pi_v$ **nicht**:
   Das Bild $\overline{k}$ ist eine *Ellipse*.

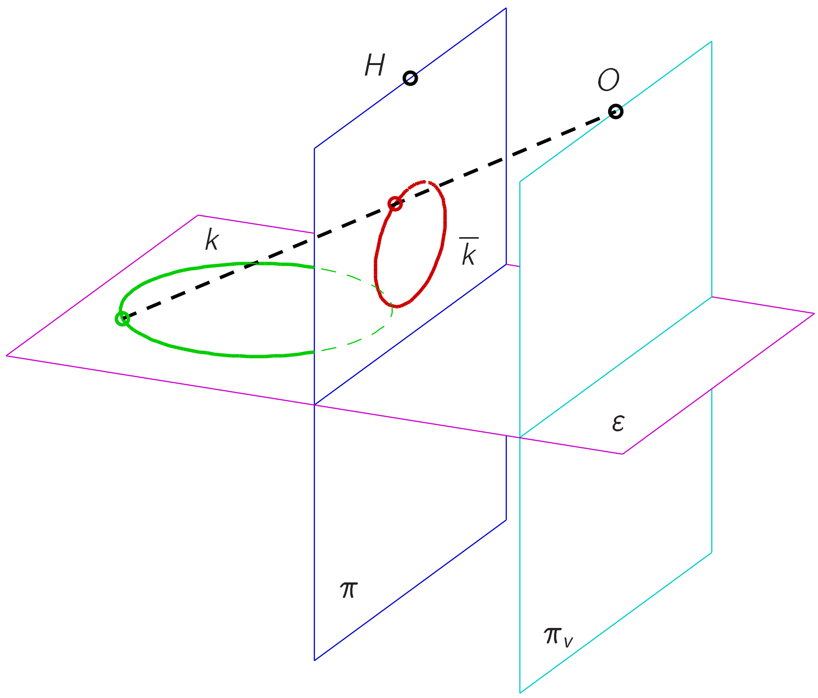



Abbildung 5.72: Zentralprojekrion eines Kreises in der Standebene: Bild ist Ellipse

4. Der Kreis $k$ **berührt** die **Verschwindungsebene** $\pi_v$ im Punkt $V$: Das Bild $\overline{k}$ ist eine *Parabel*.
(Der Projektionskegel des Kreises wird von $\pi$ parallel zu einer Mantellinie geschnitten.
Das Urbild der Achse der Bildparabel geht durch $V$.)

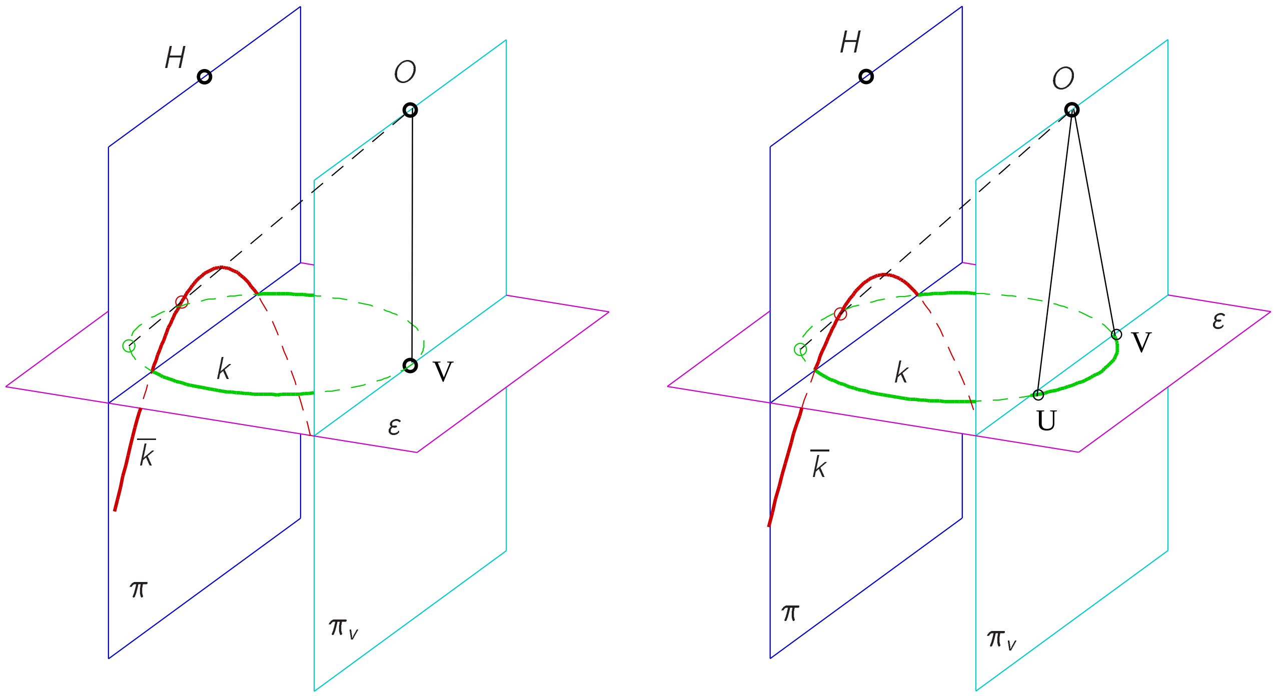



Abbildung 5.73: Zentralprojekrion eines Kreises in der Standebene: Hyperbel/Parabel

5. Der Kreis $k$ **schneidet** die **Verschwindungsebene** $\pi_v$ in **zwei** Punkten $U$, $V$:
Das Bild $\overline{k}$ ist ein Ast einer *Hyperbel*.
(Die Asymptoten der Hyperbel sind die Bilder der Kreistangenten in $U, V$. Der Mittelpunkt der Hyperbel ist das Bild des Tangentenschnittpunktes.)

Im Folgenden setzen wir immer eine **senkrechte Bildtafel** voraus.

<u>Zum Fall 3.:</u> „k **trifft** die **Verschwindungsebene** $\pi_v$ **nicht**“ (Das Bild $\overline{k}$ ist eine *Ellipse*.):
Wir können das Bild $\overline{k}$ des Kreises $k$ zeichnen, wenn wir zwei **konjugierte Durchmesser** von $\overline{k}$ kennen.

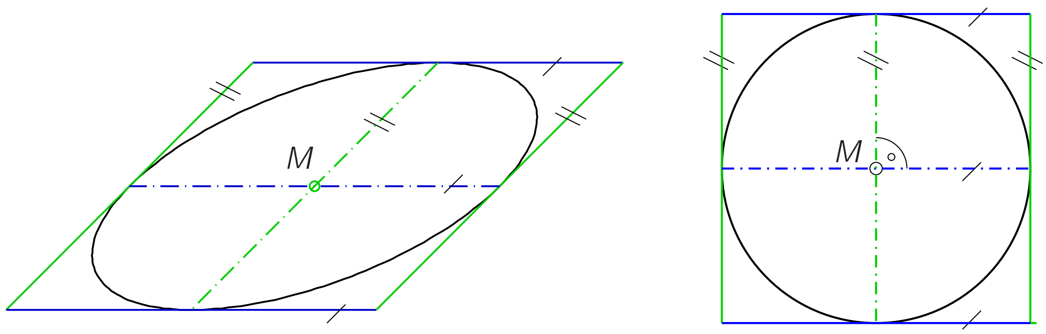



Abbildung 5.74: Konjugierte Durchmesser einer Ellipse

Zur Erinnerung: Zwei Sehnen einer Ellipse sind *konjugierte Durchmesser*, wenn die Tangenten in den Endpunkten der einen Sehne parallel zur anderen Sehne (oder umgekehrt) sind. Der Schnittpunkt zweier konjugierter Durchmesser ist der Mittelpunkt der Ellipse (s. Fig. 5.74).

Um zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse $\overline{k}$ zu erhalten, müssen wir ein Tangentenviereck an $k$ so bestimmen, dass sein Bild ein Parallelogramm wird. Hierzu verwenden wir die folgende Tatsache.

Die Bilder zweier Geraden, die sich auf der Verschwindungsebene $\pi_v$ schneiden, sind parallel:

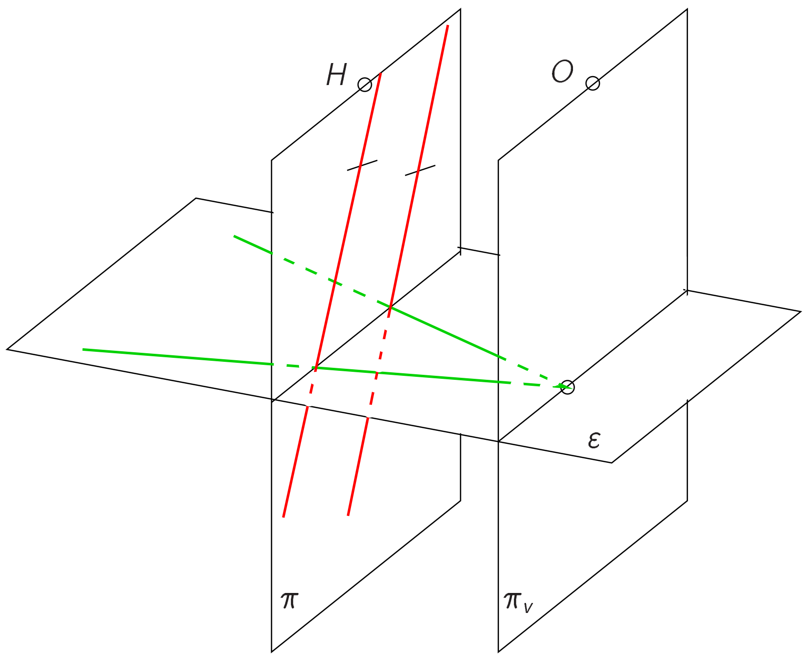



Abbildung 5.75: Urbilder paralleler Geraden in der Standebene

Wir müssen also ein Tangentenviereck $P_1$, $P_2$, $Q_1$, $Q_2$ so wählen, dass die Tangenten in $P_1$, $P_2$ und die Gerade $Q_1Q_2$ sich auf der Verschwindungsebene schneiden. Das analoge gilt dann auch für die Tangenten in $Q_1$, $Q_2$ ....

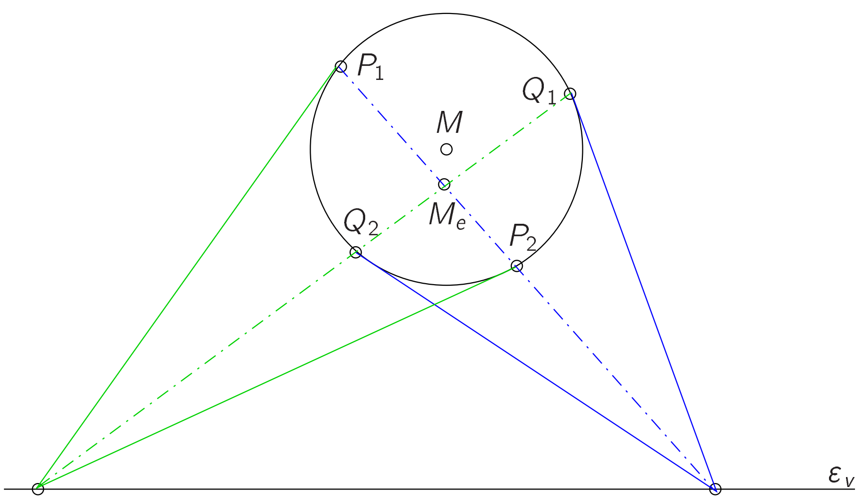



Abbildung 5.76: Projektion eines Kreises als Ellipse: Urbilder konjugierter Durchmesser

Um uns die Arbeit zu erleichtern, werden wir immer $P_1$, $P_2$ **so wählen**, dass sie auf dem Lot $l$ vom Kreismittelpunkt $M$ auf die Verschwindungsgerade $\varepsilon_v$ ($= \varepsilon \cap \pi_v$) liegen. Dann sind die Tangenten in $P_1$, $P_2$ parallel zur Bildtafel (und zu $\varepsilon_v$) und ihre perspektiven Bilder sind parallel zur Spur $s_\varepsilon$ (und Fluchtgerade $f_\varepsilon$). Die Tangenten in $Q_1$, $Q_2$ müssen durch den Lotfußpunkt $L = l \cap \varepsilon_v$ gehen.

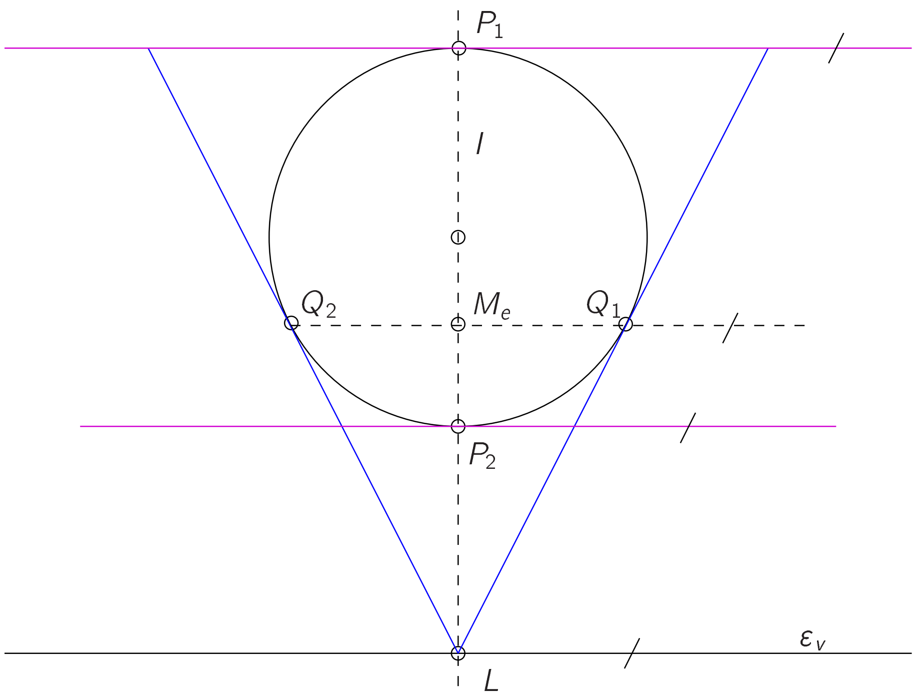



Abbildung 5.77: Projektion eines Kreises als Ellipse

**Durchführung** für den Fall „Kreis in der Standebene" (Fig. 5.78):

1. Zeichne in den Grundriss die Verschwindungsgerade $\varepsilon_v$.
   ($\varepsilon'_v$ geht durch $O'$ und ist parallel zur Spur $s_\varepsilon$.)
2. Fälle das Lot $l$ vom Kreismittelpunkt $M$ auf $\varepsilon_v$. Lotfußpunkt ist $L$. $l \cap k$ liefert die Punkte $P_1$, $P_2$.
   (Die Tangenten in $P_1$, $P_2$ sind parallel zu $\varepsilon_v$.)
3. Zeichne die Tangenten durch $L$ an den Kreis $k$.
   Die Berührpunkte sind $Q_1$, $Q_2$.
4. Der Schnittpunkt der Sehnen $P_1P_2$ und $Q_1Q_2$ ist $M_e$.
   ($M_e$ ist das Urbild des Mittelpunktes der Bildellipse.)
5. Bilde $M_e$, $P_1$ und $Q_1$ ab.
   ($\overline{M}_e$ ist der Mittelpunkt der Bildellipse und $\overline{P}_1$, $\overline{Q}_1$ zwei konjugierte Punkte.)
6. Bestimme mit Hilfe der **Rytz**-Konstruktion die Scheitel der Bildellipse.
7. Zeichne die Ellipse mit Hilfe der **Scheitelkrümmungskreise**.

**Aufgabe 5.29** :
*Gegeben: Kreis $k$ in Grundrisstafel (= Standebene), Augpunkt und Bildtafel in Grund- und Aufriss. Gesucht: Perspektives Bild $\overline{k}$ des Kreises $k$. (Fig. 5.78).*

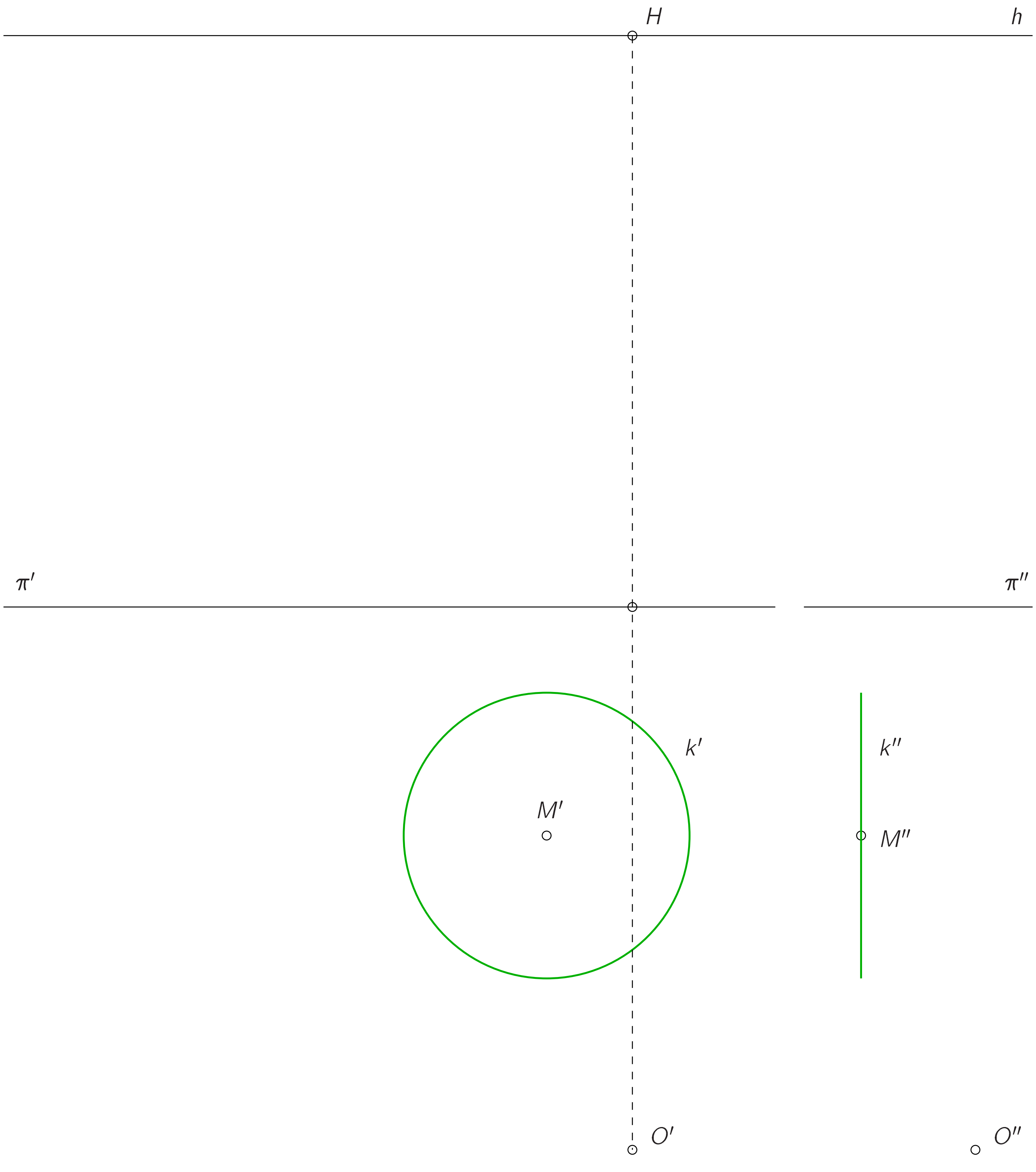



Abbildung 5.78: Projektion eines Kreises in der Standebene als Ellipse

**Aufgabe 5.30** :

*Zeichne die Projektion eines Kreises (Ziffernblatt einer Uhr) in der Standebene. Der Kreis berührt die Verschwindungsebene (Fig. 5.79).*
*Hinweis: Bilde genügend viele Punkte mit ihren Tangenten ab.*

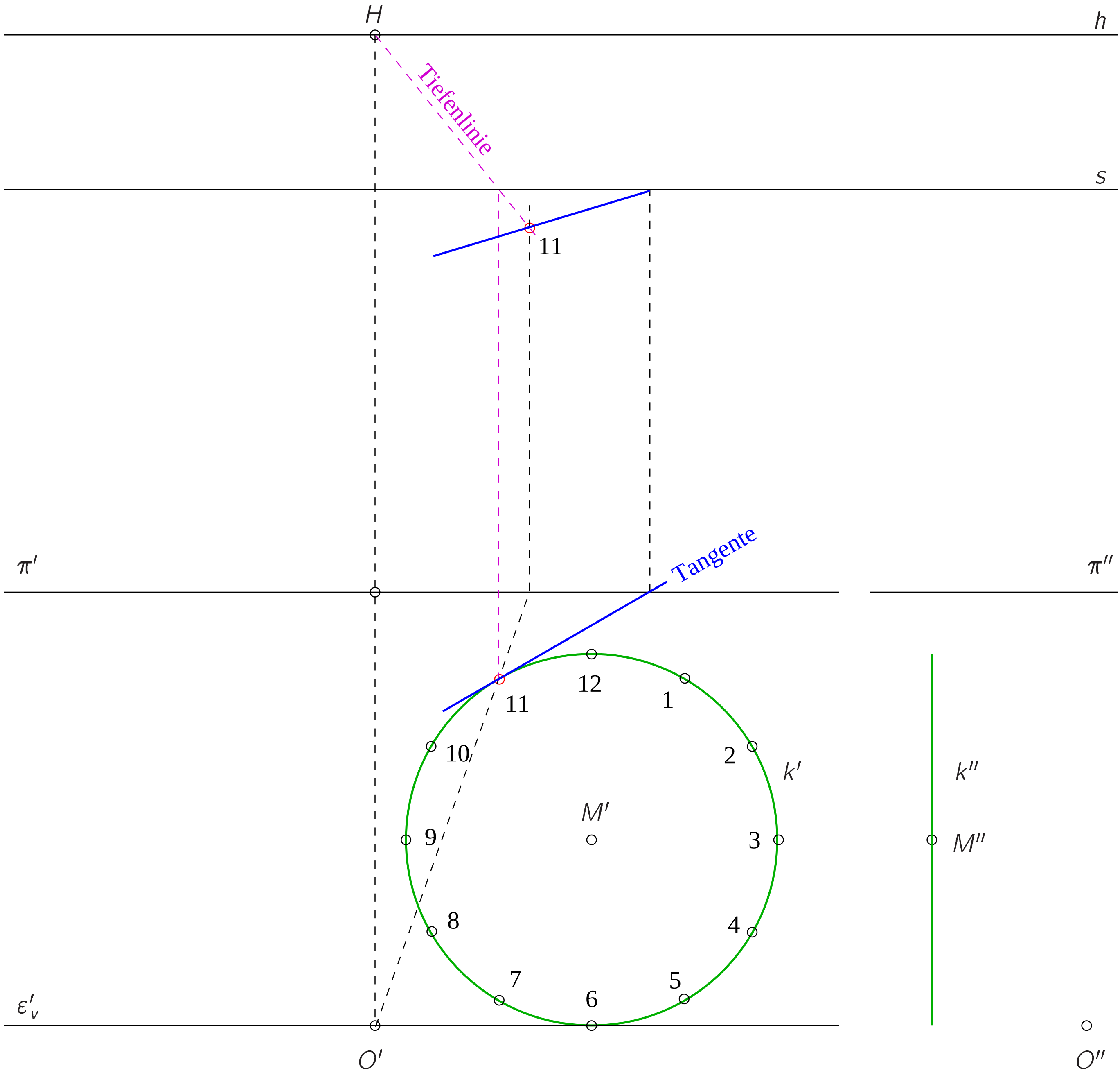



Abbildung 5.79: Projektion eines Kreises in der Standebene als Parabel

In der folgenden Aufgabe steht der Kreis senkrecht auf der Standebene. Um hier die vor Aufgabe 5.29 beschriebenen Schritte (1) - (4) durchführen zu können, dreht man den Kreis zunächst um seinen horizontalen Durchmesser, bis er parallel zur Standebene liegt.

**Aufgabe 5.31** *Zeichne die Projektion eines Kreises der* **senkrecht** *auf der Standebene steht.*

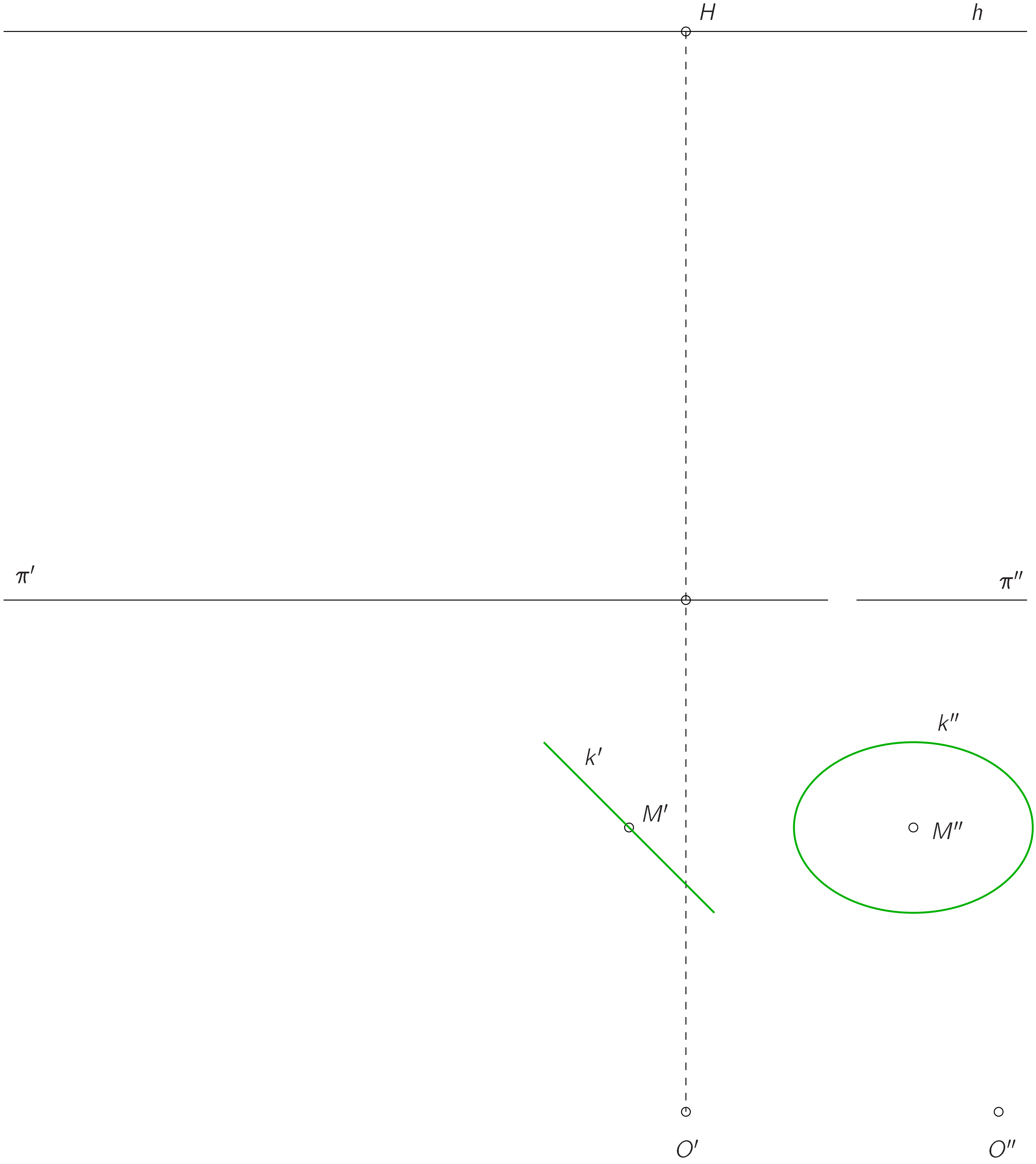



Abbildung 5.80: Projektion eines Kreises senkrecht zur Standebene als Ellipse

## 5.10 Abbildung von Flächen

Das perspektive Bild einer Fläche lässt sich im Prinzip genauso konstruieren wie der Schatten einer Fläche bei Zentralbeleuchtung. Zur Konstruktion der Flächenumrisse verwendet man berührende Geraden oder Ebenen durch den Augpunkt $O$. Diese aufwendige Konstruktionsmethode lässt sich in konkreten Fällen oft durch einfachere Verfahren ersetzen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Umrisse von Zylindern und Kegeln bestehen aus den Bildern vorgegebener Kreise und Tangenten an die Bildellipsen:

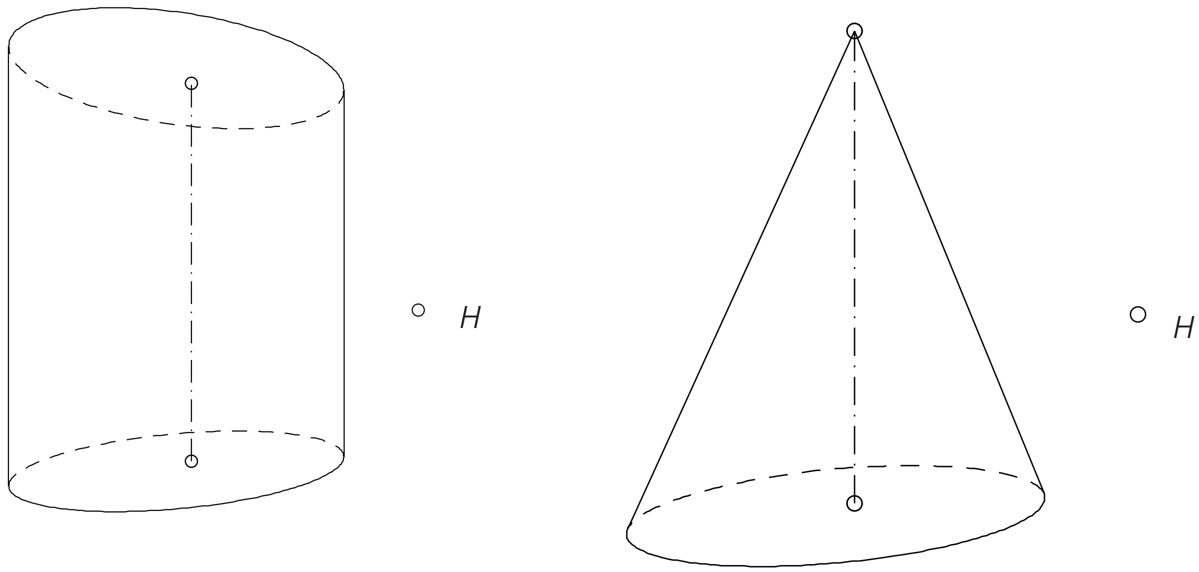



Abbildung 5.81: Zentralprojektion von Zylinder und Kegel

Der Umriss einer **Kugel** ist ein Kreis und die Zentralprojektion einer Kugel ist die Zentralprojektion dieses Umrisskreises.

Das Bild des Umrisses einer Kugel kann also eine Ellipse bzw. Parabel bzw. Hyperbel sein, je nachdem, ob der wahre Umrisskreis die Verschwindungsebene in $O$ bzw. 1 bzw. 2 Punkten schneidet.

Wir wollen uns hier auf den Fall „**Kugel vor der Verschwindungsebene**“ beschränken. Der Umriss ist dann eine **Ellipse**.
Die Bildellipse des Umrisses kann man durch Abbildung des Umrisskreises erhalten. Einfacher ist aber eine „direkte“ Methode. Hierbei verwendet man die folgenden Eigenschaften eines Kegels (s. Graf-Barner, S.291):

a) Schneidet eine Ebene einen Kegel in einer Ellipse, so sind die Brennpunkte die Berührpunkte der **DANDELINschen Kugeln**.

b) Schneidet man einen Kegel mit einer Schar paralleler Ebenen, so dass Ellipsen entstehen, dann liegen entsprechende **Brennpunkte** der Ellipsenschar auf einer **Geraden** durch die Kegelspitze

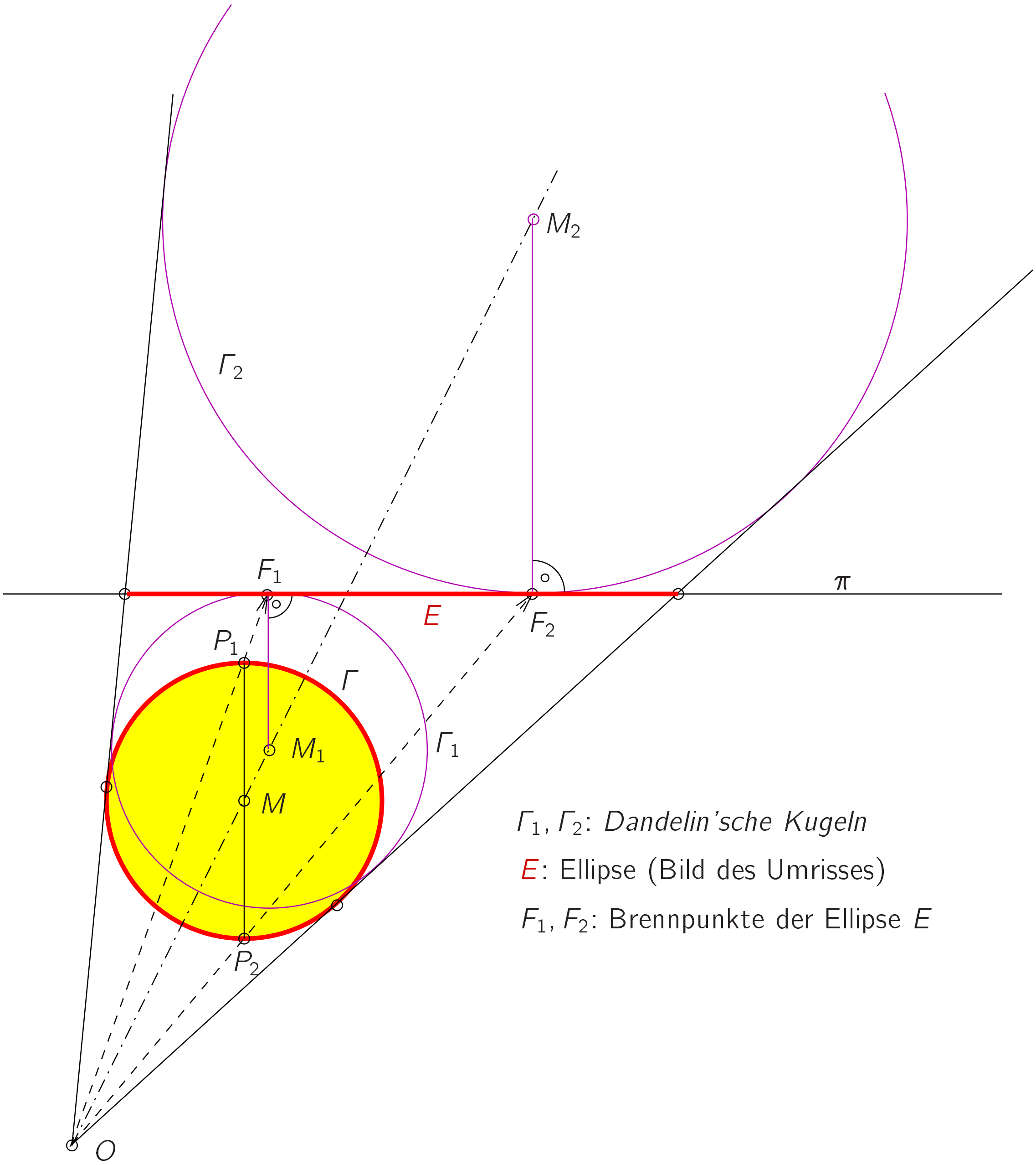



Abbildung 5.82: Projektion des Umrisses einer Kugel als Ellipse: Dandelin'sche Kugeln

**Idee:** Liegt der Kugelmittelpunkt auf der Geraden $OH$, so ist das Bild des Umrisses ein Kreis. Im anderen Fall sind die Kugelpunkte, die auf dem zur Bildtafel senkrechten Durchmesser liegen, die Urbilder der Brennpunkte $F_1$, $F_2$ der Umrissellipse (wegen a), b) !). Der Mittelpunkt $M_e$ von $F_1$, $F_2$ ist der Mittelpunkt der Ellipse. Der kleine Scheitelkreis ist das Bild des Kreises (auf der Kugel), dessen Mittelpunkt das Urbild von $M_e$ ist und der parallel zur Bildtafel liegt.

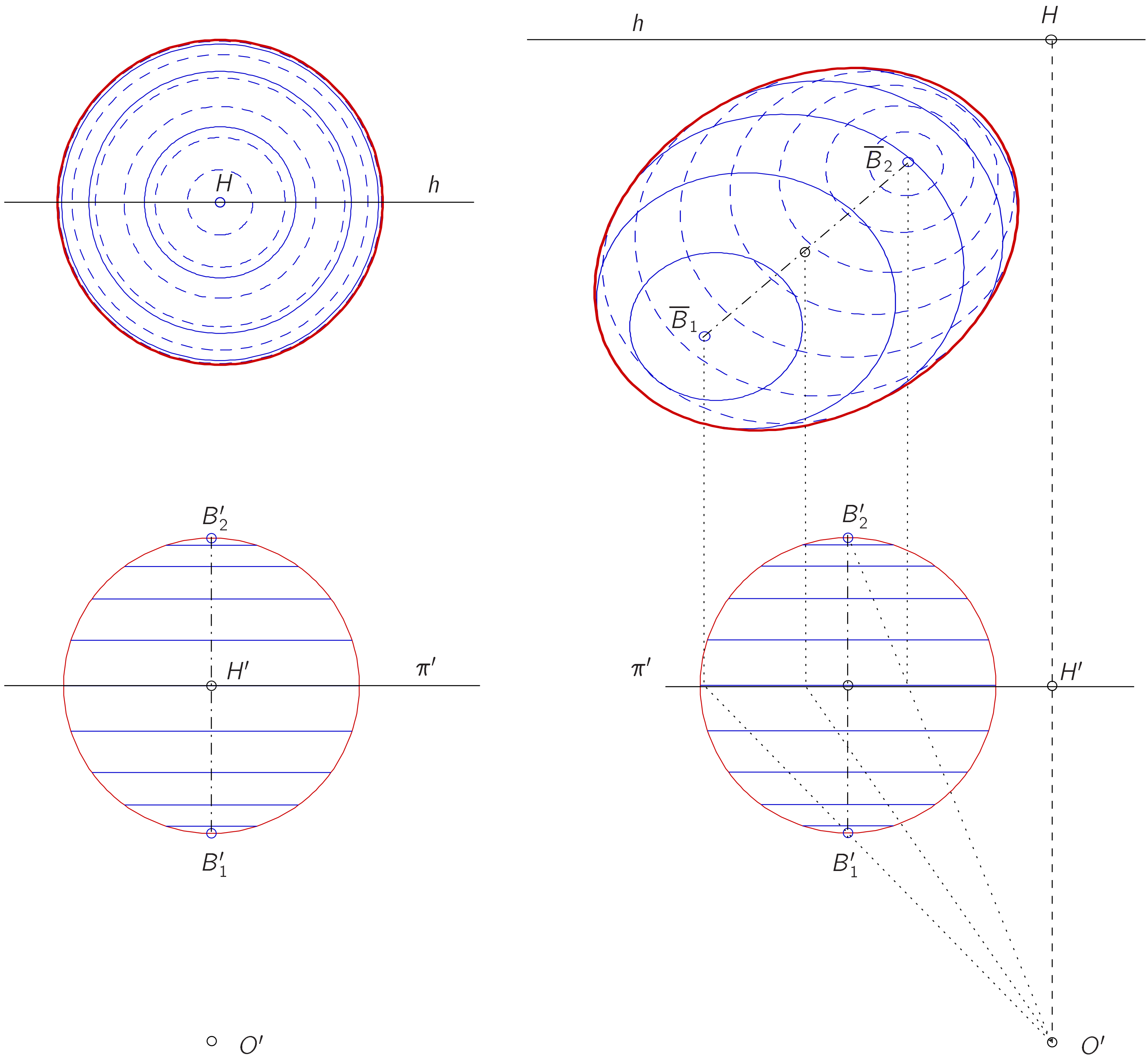



Abbildung 5.83: Projektion des Umrisses einer Kugel als Ellipse: Beispiel

**Durchführung**, falls der Umriss eine Ellipse ist:

1. Bestimmung der Punkte $B_1$, $B_2$ auf dem zur Bildtafel senkrechten Durchmesser $d_0$.
   Die Bilder von $B_1$, $B_2$ sind die **Brennpunkte** $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$ der Umrissellipse.
2. Der Mittelpunkt $\overline{M}_e$ der Strecke $\overline{B}_1\overline{B}_2$ ist der **Mittelpunkt** der Ellipse.
   Bestimmung des Urbildes $M_e$ von $\overline{M}_e$ (auf $d_0$).
3. Das Bild $k_1$ des Kreises (auf der Kugel) mit Mittelpunkt $M_e$, der parallel zur Bildtafel liegt, ist der **kleine Scheitelkreis**.
4. Aus der Länge der kleinen Halbachse $b$ und der Brennweite $e$ lässt sich mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks die **große Halbachse** $a$ bestimmen ($a^2 = e^2 + b^2$!).

**Aufgabe 5.32** *Bestimme das perspektive Bild des Umrisses der in Grund- und Aufriss gegebenen Kugel.*

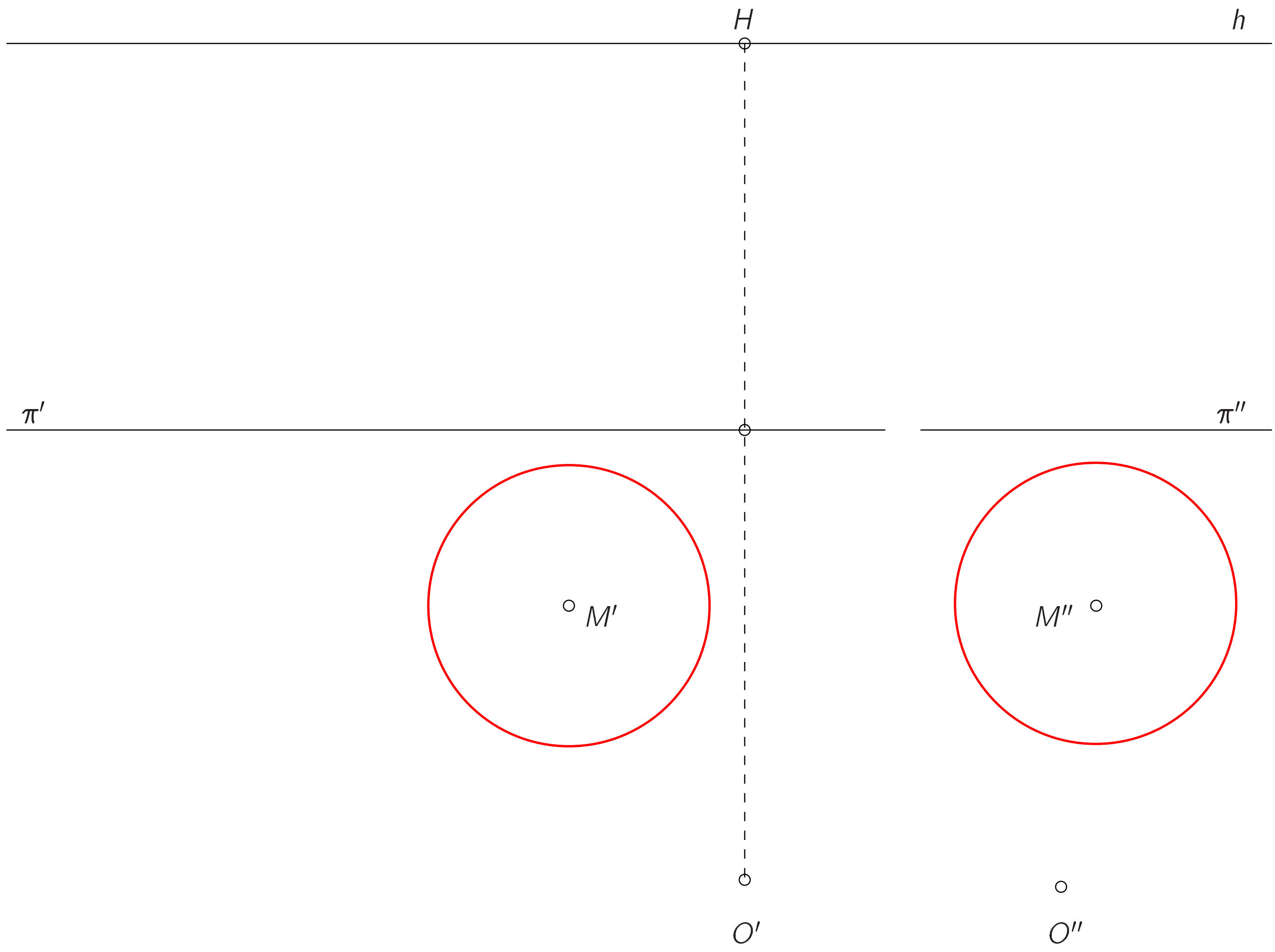



Abbildung 5.84: Projektion des Umrisses einer Kugel als Ellipse

**Aufgabe 5.33** :
*Gegeben: Grundriss zweier Türme (Zylinder mit Kugelteil), der Aufriss eines Turmes und Grund- und Aufriss der Bildtafel und des Augpunktes.*
*Gesucht: Das perspektive Bild .*

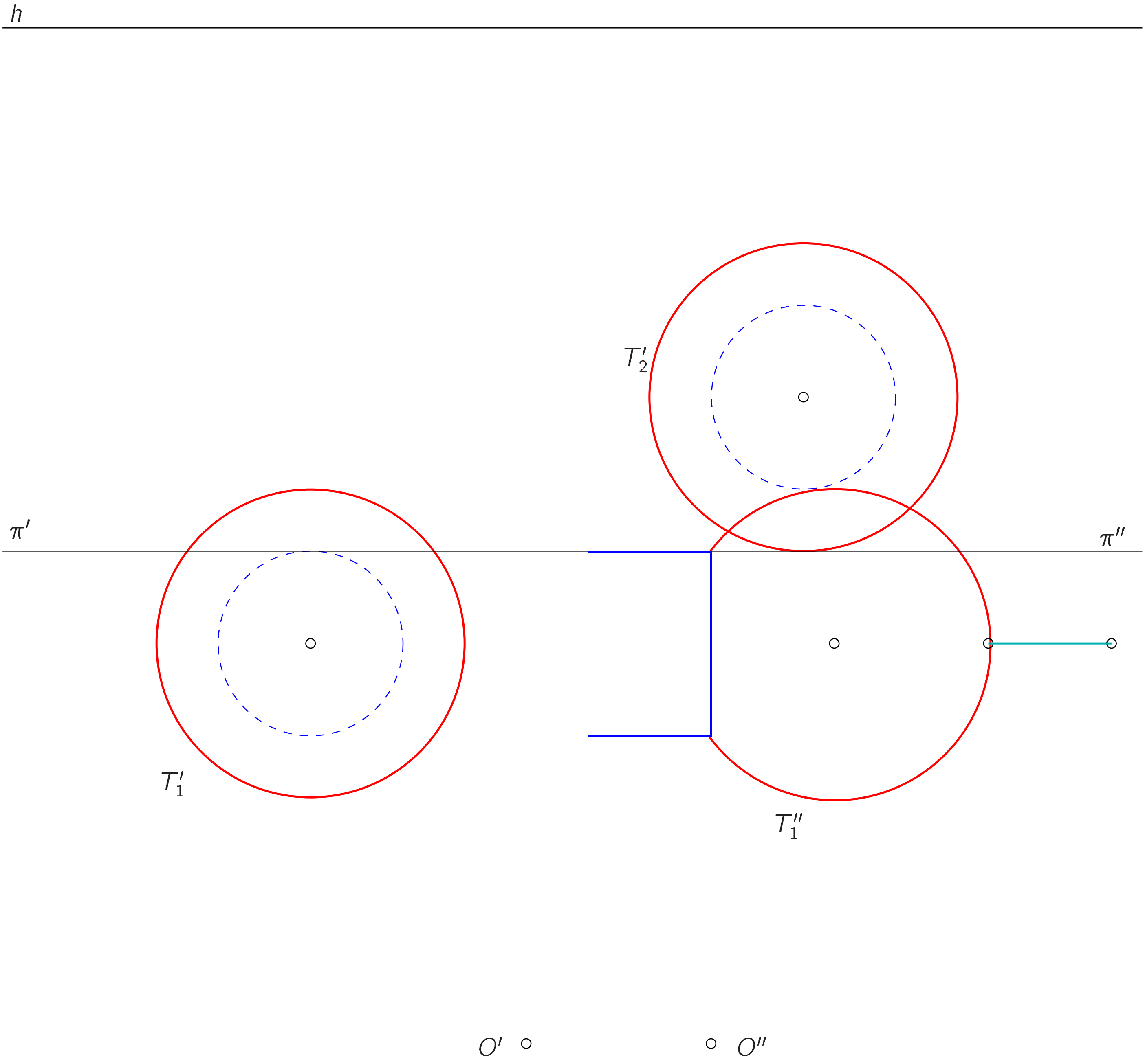



Abbildung 5.85: Projektion zweier Türme

**Beispiel 5.2** *Abb. 5.86 zeigt Zentralprojektionen einer Kugel. Im oberen Bild fällt der Hauptpunkt mit dem Bild des Kugelmittelpunktes zusammen. Da der Umriss der Kugel in diesem Fall ein zur Bildtafel paralleler Kreis ist, ist das Bild des Umrisses auch ein Kreis. Im unteren Bild ist dies nicht der Fall. Der Umrisskreis ist nicht parallel zur Bildtafel und sein Bild damit kein Kreis, sondern eine Ellipse. Da die Verschwindungsebene in beiden Fällen nicht die Kugel schneidet, sind die Bilder aller Kreise Ellipsen oder Strecken.*

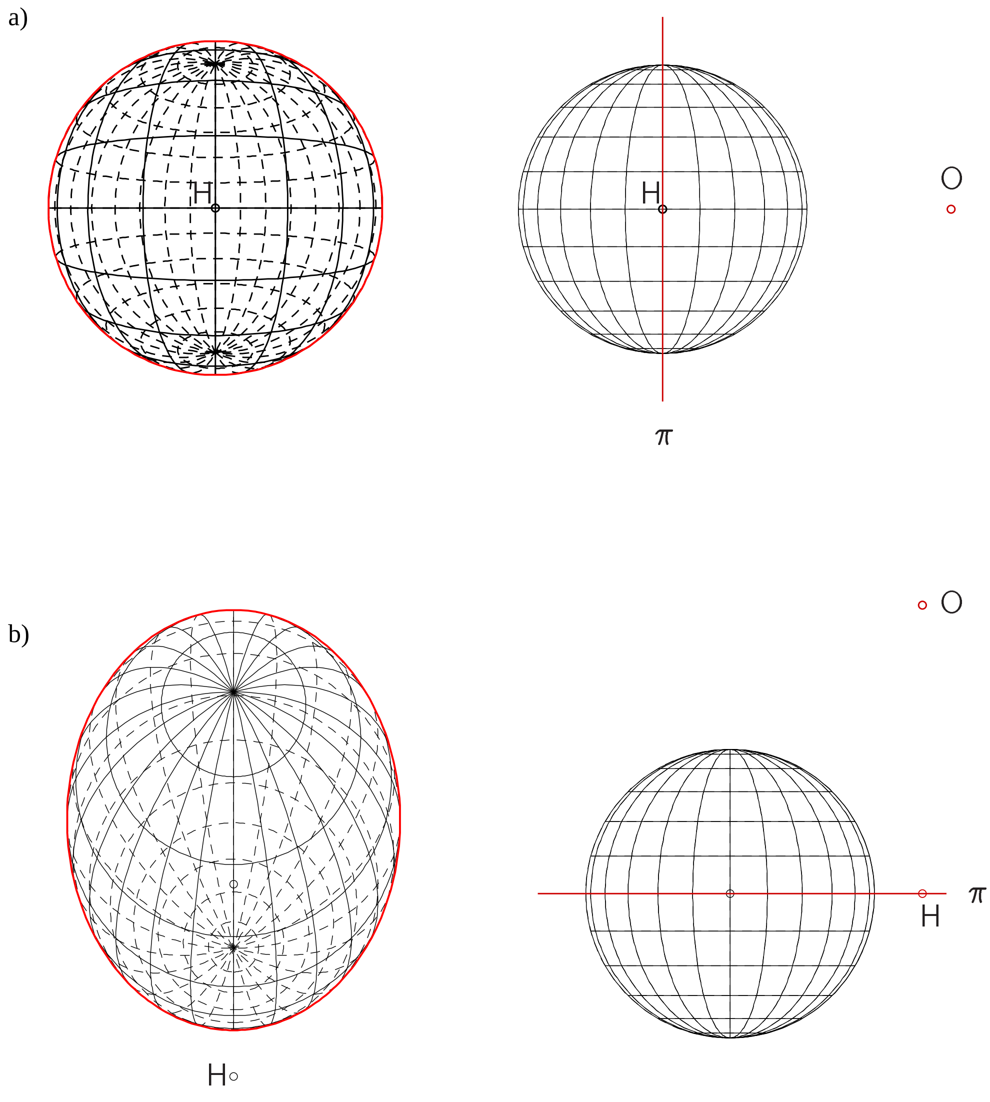



Abbildung 5.86: Zentralprojektion einer Kugel: Zentrum außerhalb der Kugel a) horizontale b) vertikale Sicht

Prinzipiell gilt:
Das perspektive Bild eines Kreises kann a) eine Ellipse b) eine Parabel c) eine Hyperbel oder eine Strecke sein (siehe Abb. 5.87).

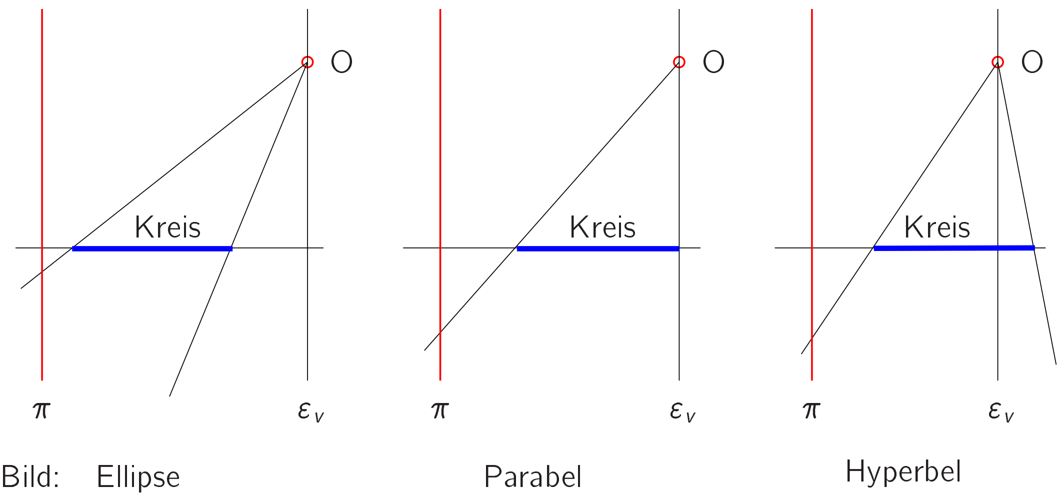



Abbildung 5.87: Zentralprojektion eines horizontalen Kreises, der die Verschwindungsebene a) meidet b) berührt c) schneidet

**Beispiel 5.3** *Das Beispiel in Abb. 5.88 zeigt ein perspektives Bild einer Kugel mit dem Augpunkt* **in** *der Kugel. Bei der Projektion von Längen– und Breitenkreisen können alle drei Fälle (Ellipse, Parabel, Hyperbel) auftreten.*

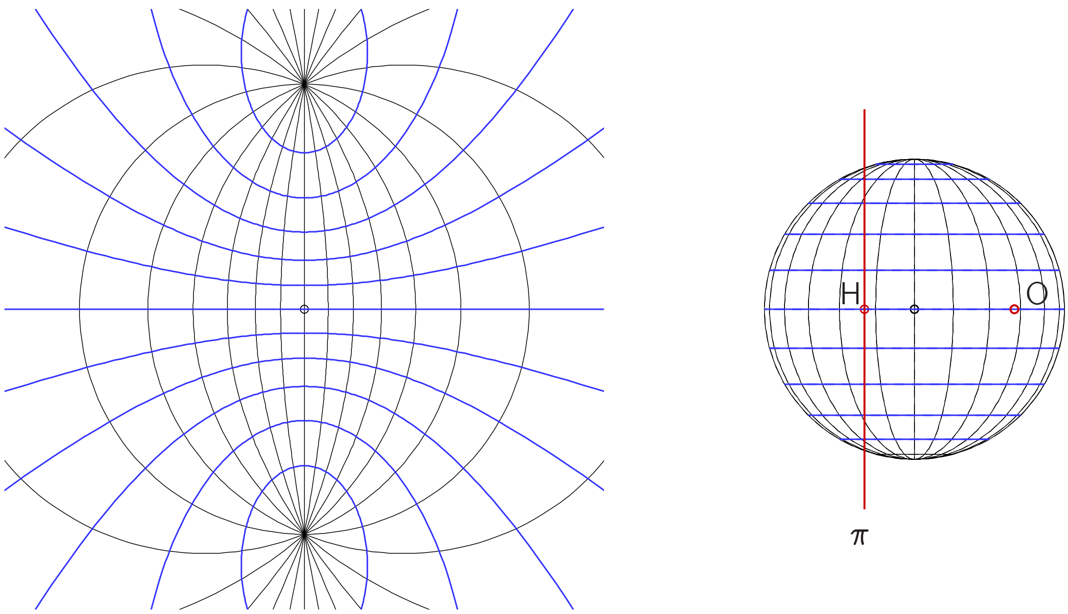



Abbildung 5.88: Zentralprojektion einer Kugel: Augpunkt **in** der Kugel

## 5.11 Zum Schluss: Aufgaben

**Aufgabe 5.34** :
*Gegeben: Das perspektive Bild eines Quaders, Hauptpunkt und Distanz und der Mittelpunkt M der Kugel, die den Quader in der Mitte des Deckelquadrats berührt.*
*Gesucht: Der Umriss der Kugel (im perspektiven Bild).*
*Hinweis: Da keine wahren Längen angetragen werden müssen, kann man annehmen, dass M in der Bildtafel liegt. Zeichne einen Grundriss für die Kugel (vgl. Fig. 5.84).*

$d = 6cm$

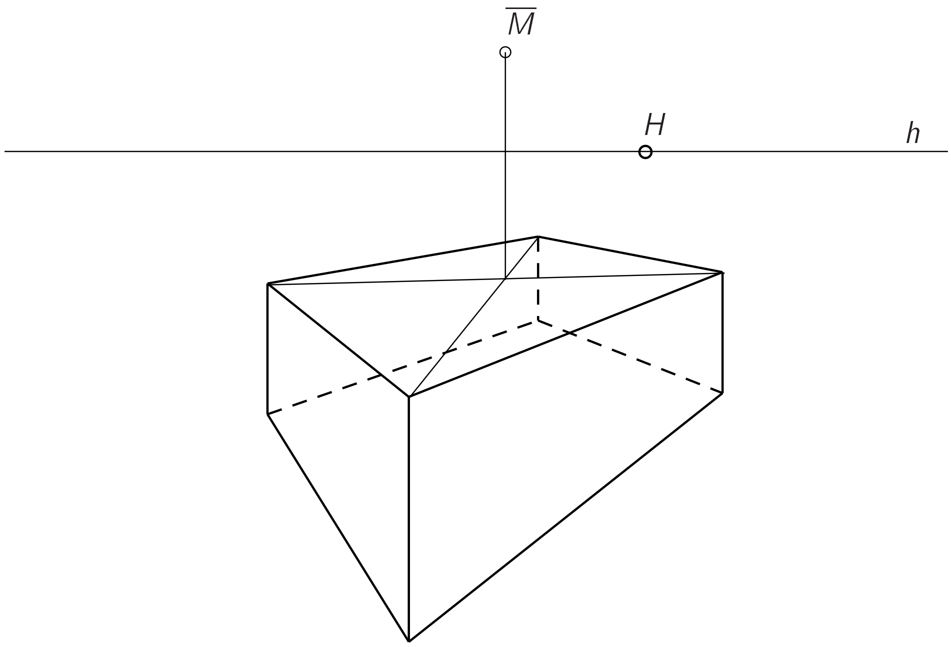



Abbildung 5.89: Konstruktion eines Kugelumrisses im perspektiven Bild

**Aufgabe 5.35** :
**Gegeben:** *Grund- und Aufriss einer Kapelle (Quader mit aufgesetzter Halbkugel) mit Portal (Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis) und Blitzableiter (Strecke), sowie das perspektive Bild des Quaders in Architektenanordnung.*
**Gesucht:** *Vervollständigung des perspektiven Bildes (Konstruktion der Halbkugel, des Portals und Blitzableiters). Zeichnen Sie nur sichtbare Kanten/Strecken.*

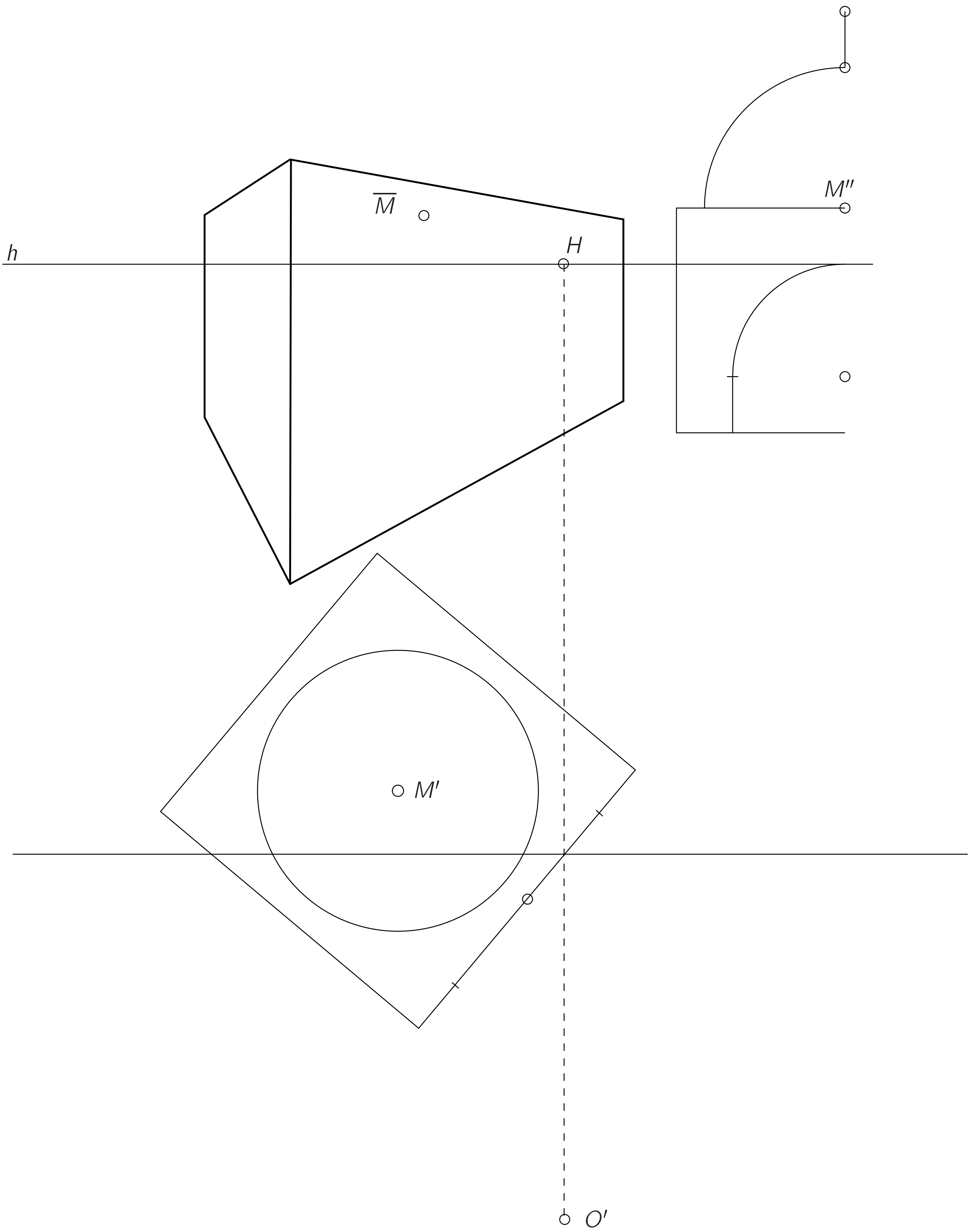



Abbildung 5.90: Projektion von Quader, Kugel und Kreis

**Aufgabe 5.36** :

*Gegeben: Grund-, Aufriss und perspektives Bild eines Turmes mit angrenzender Mauer. In der Mauer soll ein Torbogen nach Vorgabe in Grund- und Aufriss installiert werden.*

*Gesucht: Torbogen (zwei Ellipsen) im perspektiven Bild.*

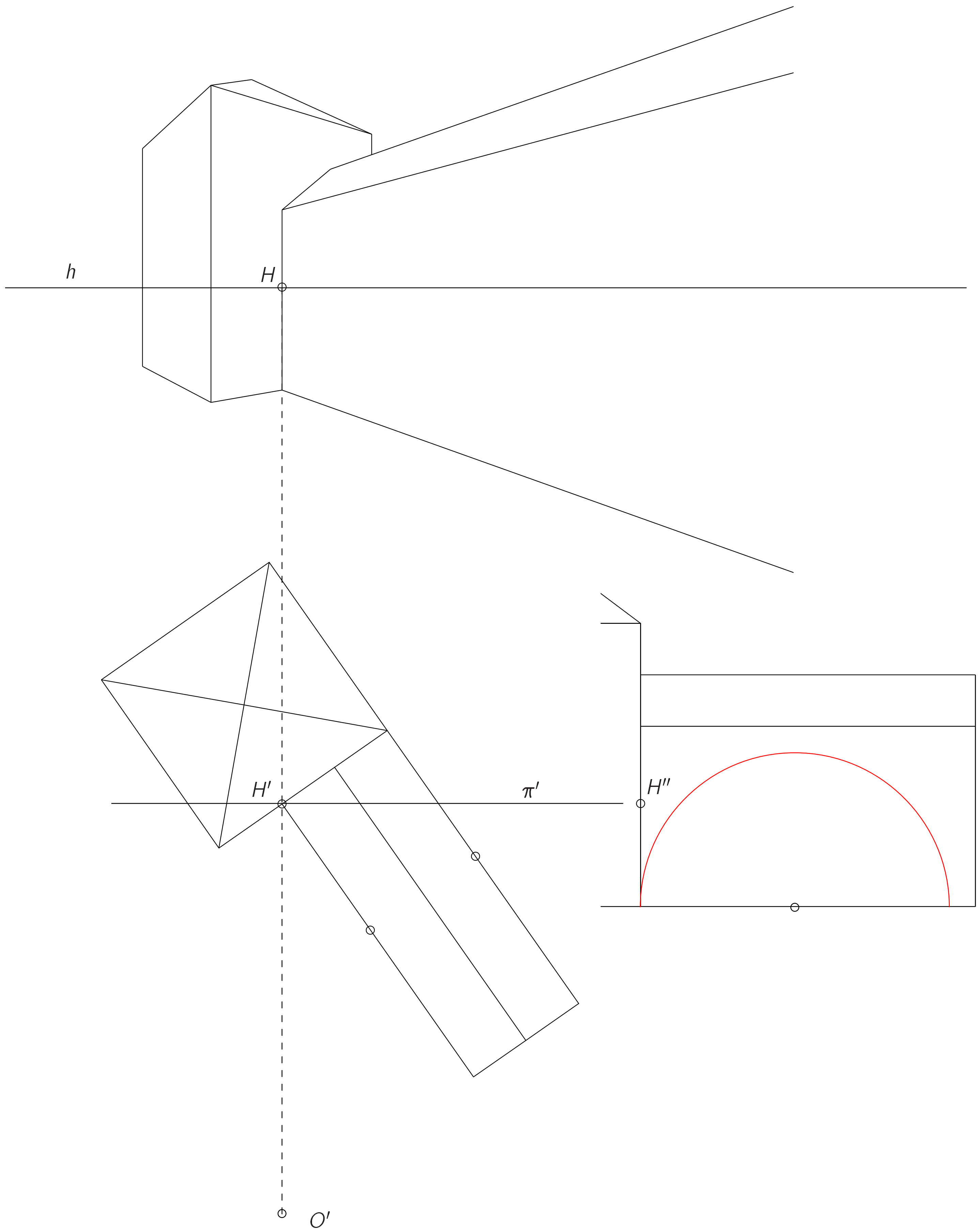



Abbildung 5.91: Projektion eines Torbogens (stehende Kreise)

**Aufgabe 5.37** :
*Gegeben: Das perspektive Bild eines Torbogens und die Sonnenpunkte $S$ und $S_F$.*
*Gesucht: Der zugehörige Schatten des Torbogens.*
*Hinweis: Konstruiere den Schatten einiger Punkte (der Ellipse(n)).*

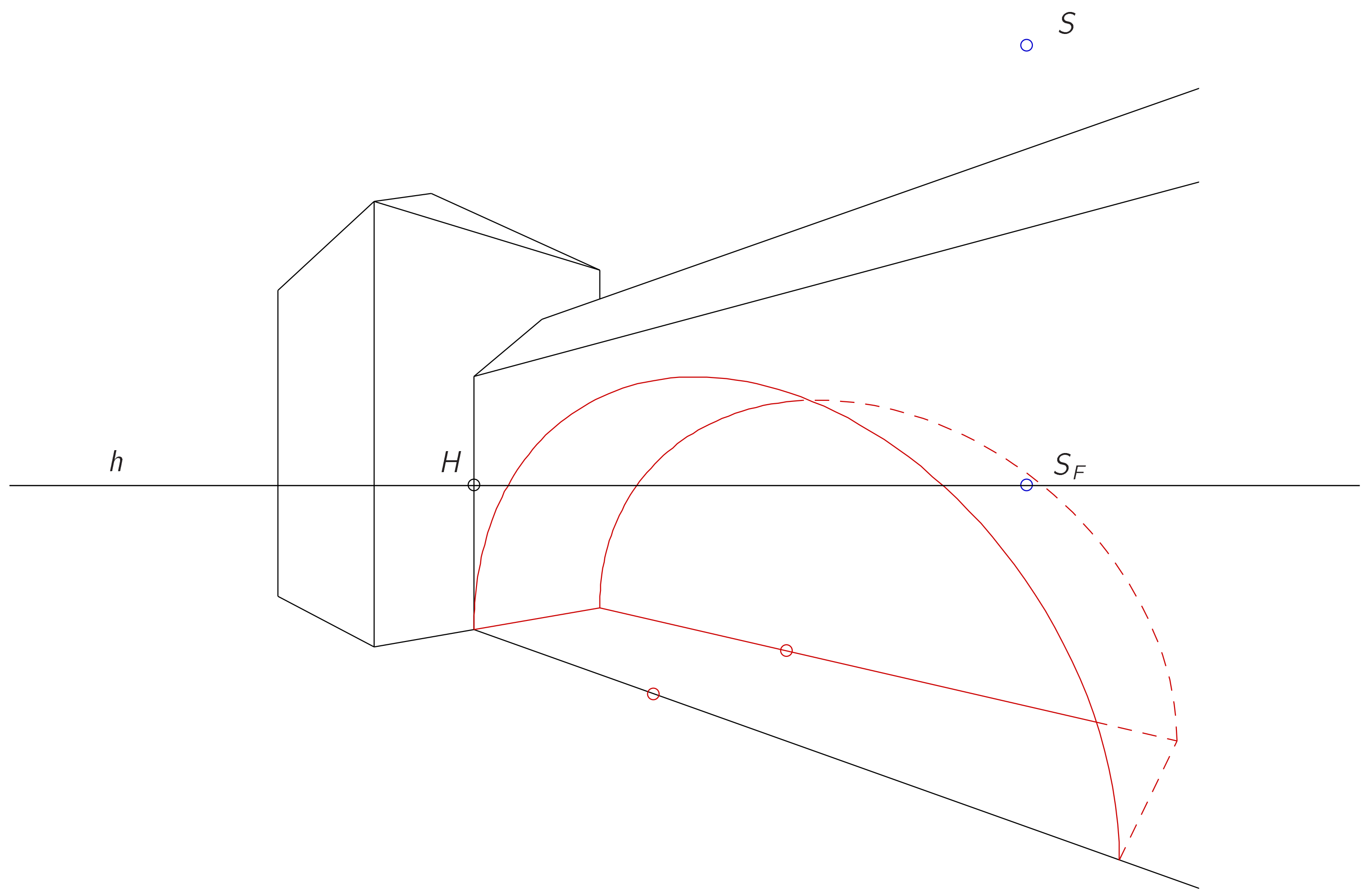



Abbildung 5.92: Schatten eines Torbogens bei gegebenem Sonnenlicht

**Aufgabe 5.38** :
*Gegeben: Perspektives Bild eines Hauses und eines Turmes. Die Traufhöhe des Hauses ist 2.5cm.*
*Gesucht: Wahre Abmessungen der Gebäude.*
*Frage: Wie könnte man den Hauptpunkt rekonstruieren, wenn er nicht gegeben wäre ?*

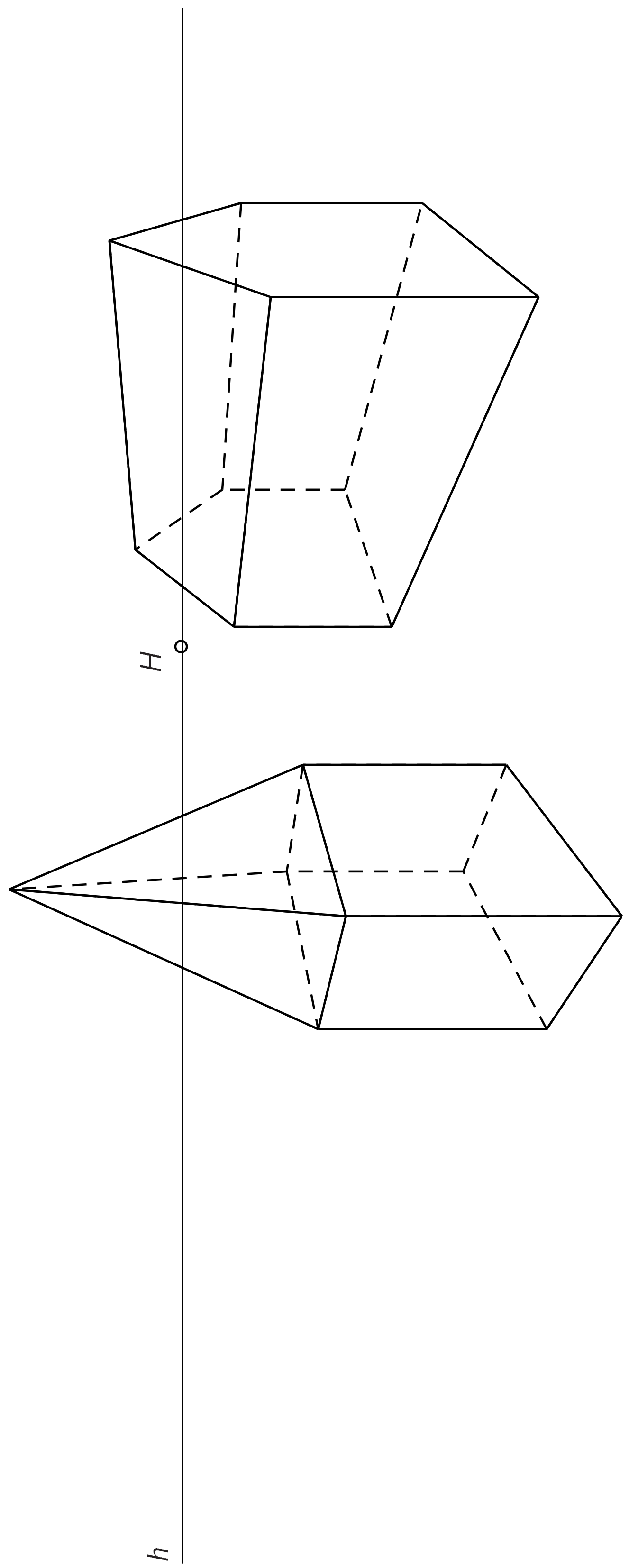



Abbildung 5.93: Rekonstruktion von Grund– und Aufriss

**Aufgabe 5.39** :
*Gegeben: Perspektives Bild eines Hauses und eines Turmes.*
*Gesucht: Schlag– und Eigenschatten der Gebäude.*

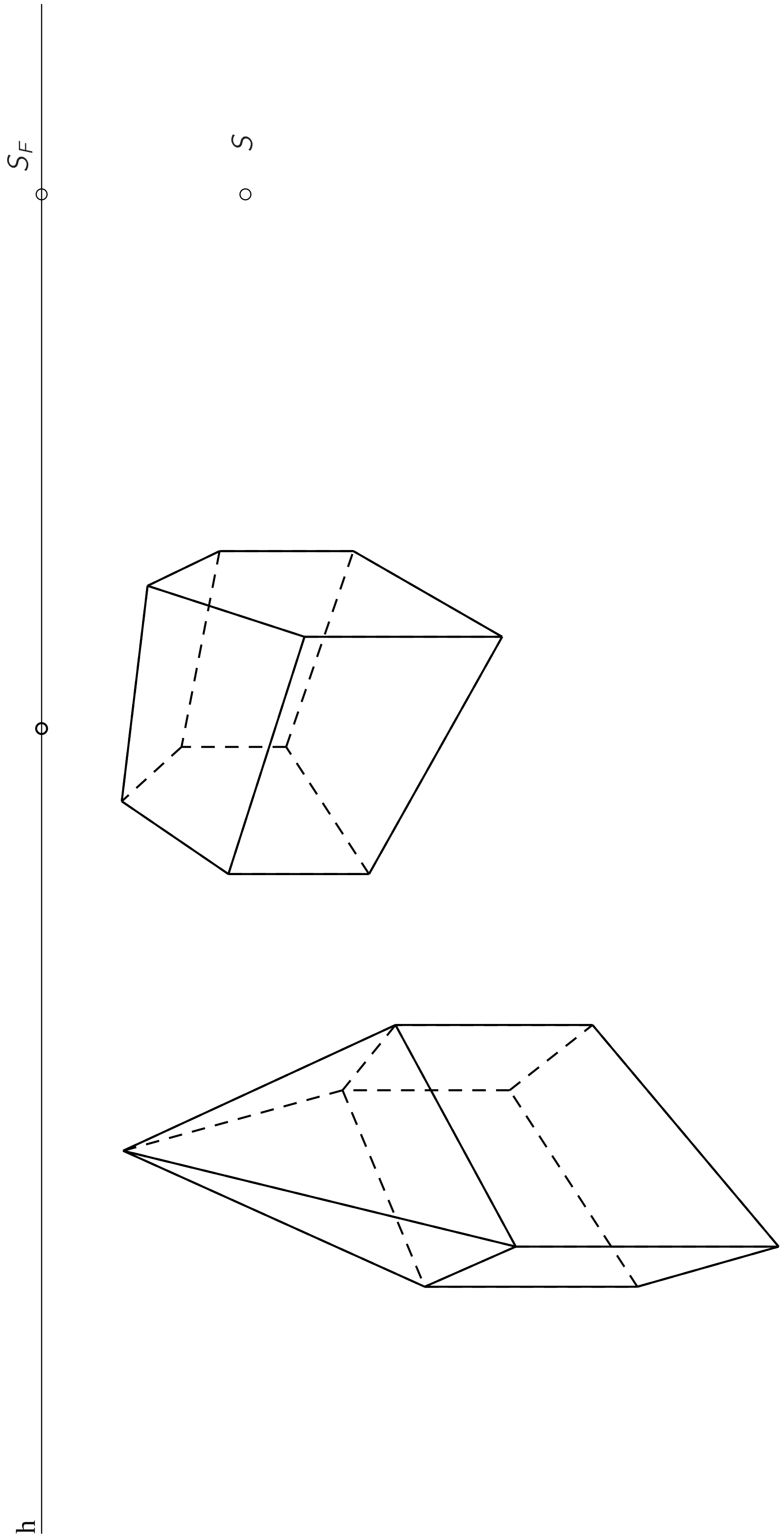



Abbildung 5.94: Schatten bei vorgegebenem Sonnenpunkt $S$

**Aufgabe 5.40** :
**Gegeben**: *Grund- und Aufriss einer Brücke über einer Eisenbahnlinie, sowie die Bildtafel eines perspektiven Bildes im Grundriss und der Augpunkt in Grund- und Aufriss.*
**Gesucht**: *Das zugehörige perspektive Bild. Nehmen Sie dabei an, dass die Geleise und Kanten der Böschungen geradlinig bis ins "Unendliche" verlaufen. Zeichnen Sie mindestens 13 Schwellen (vereinfacht als Strecken dargestellt).*
**Hinweis**: *Da die Bildtafel die Vorderfront der Brücke enthält, entsteht eine sog.* Frontalperspektive *und Sie können den gegebenen Aufriss im perspektiven Bild verwenden (Architektenanordnung !, $O'' = H$).*

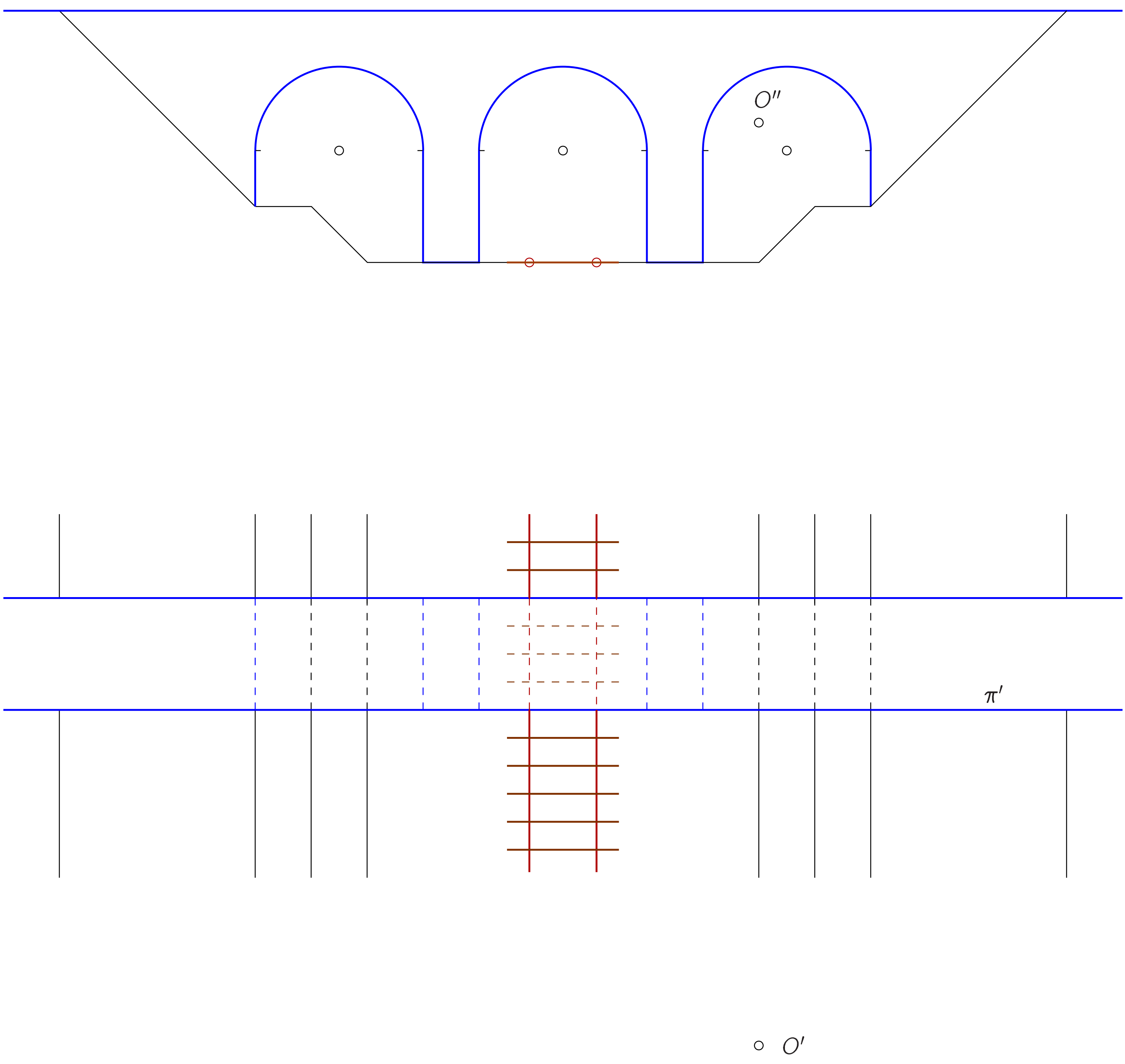



Abbildung 5.95: Frontalprojektion einer Bruecke

# Kapitel 6

# Lösungen

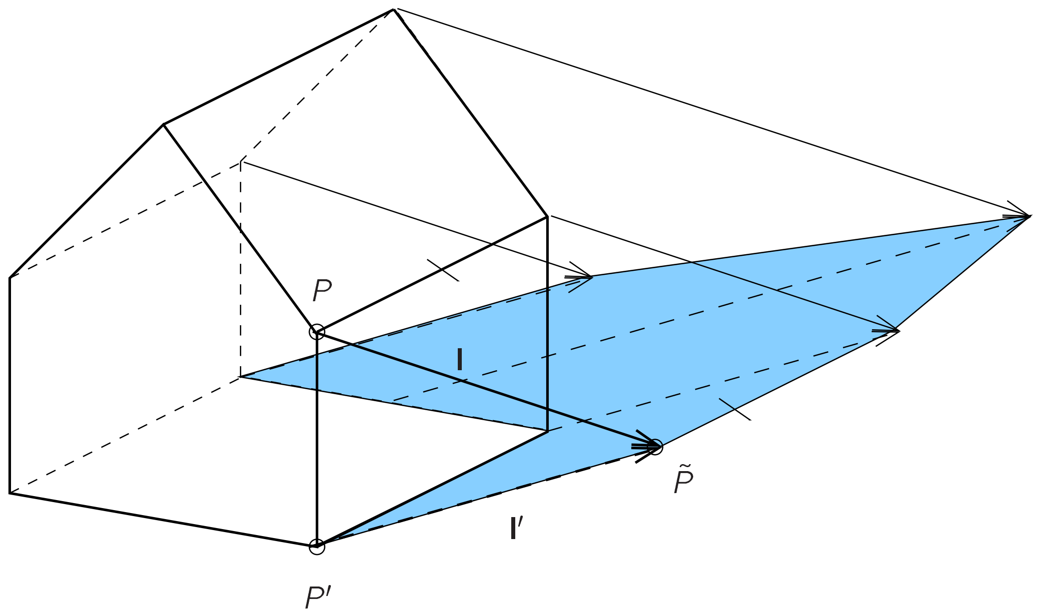



Abbildung 6.1: Zu Abb. 2.11: Schatten eines Hauses bei parallelem Licht

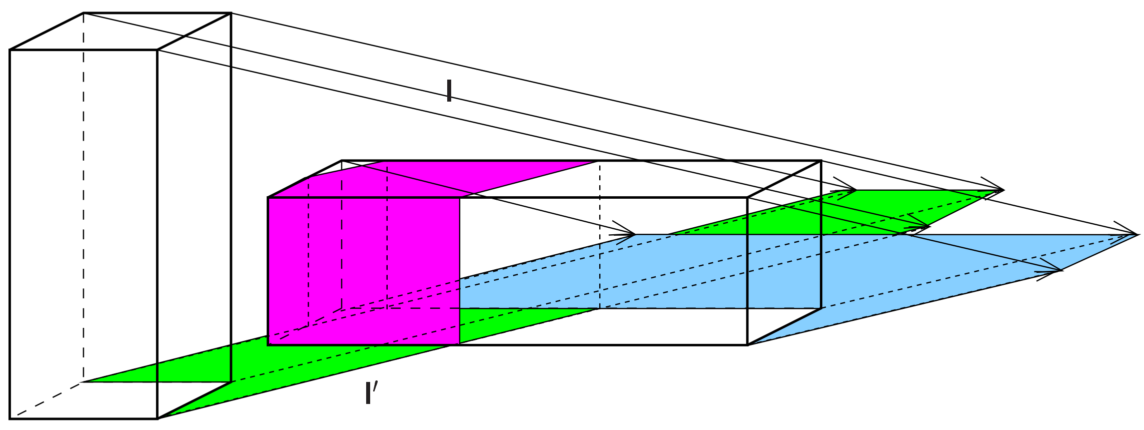



Abbildung 6.2: Zu 2.12: Schatten zweier Quader bei parallelem Licht

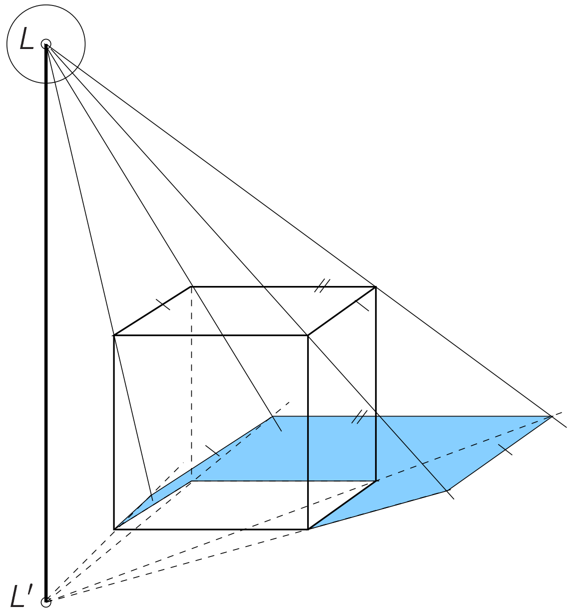



Abbildung 6.3: Zu Abb. 2.13: Schatten eines Quaders bei zentralem Licht

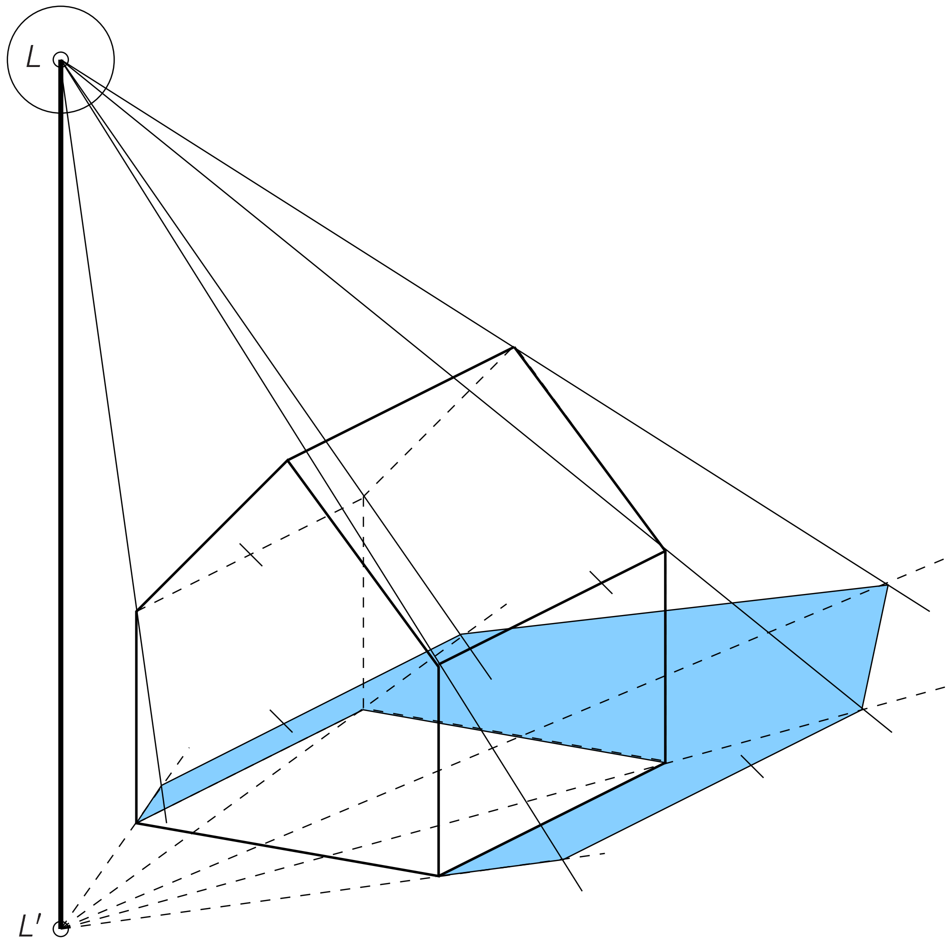



Abbildung 6.4: Zu Abb. 2.14: Schatten eines Hauses bei zentralem Licht

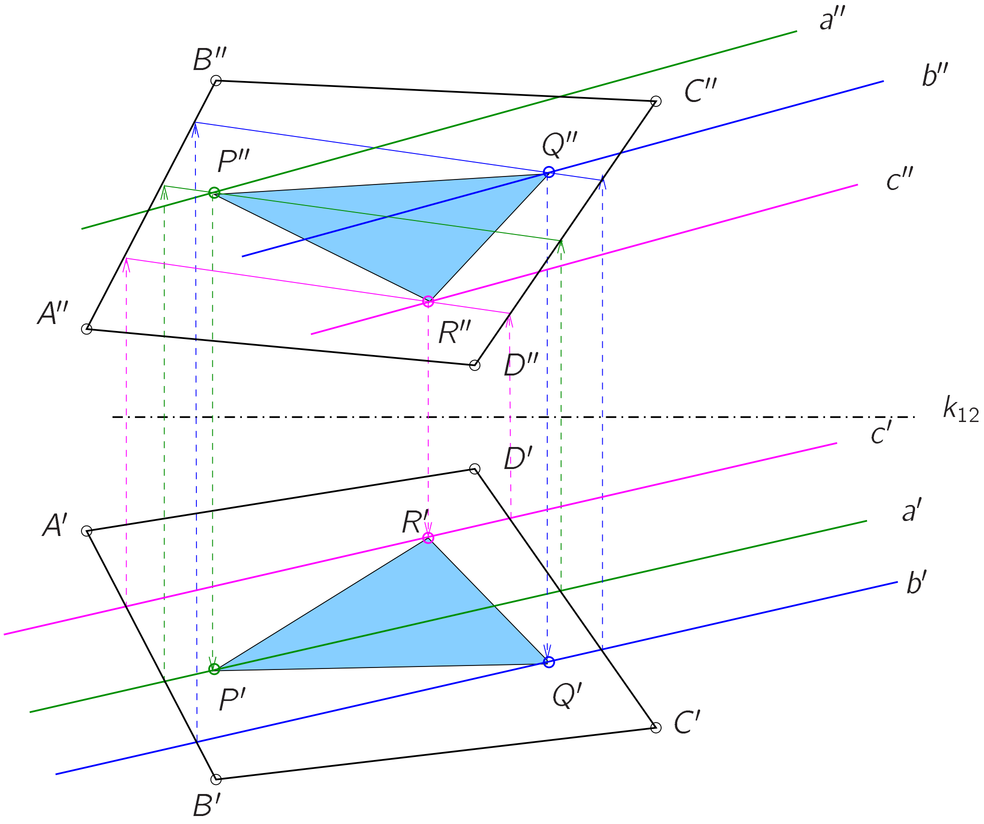



Abbildung 6.5: Zu Abb.3.24: Schnitt Balken–Ebene

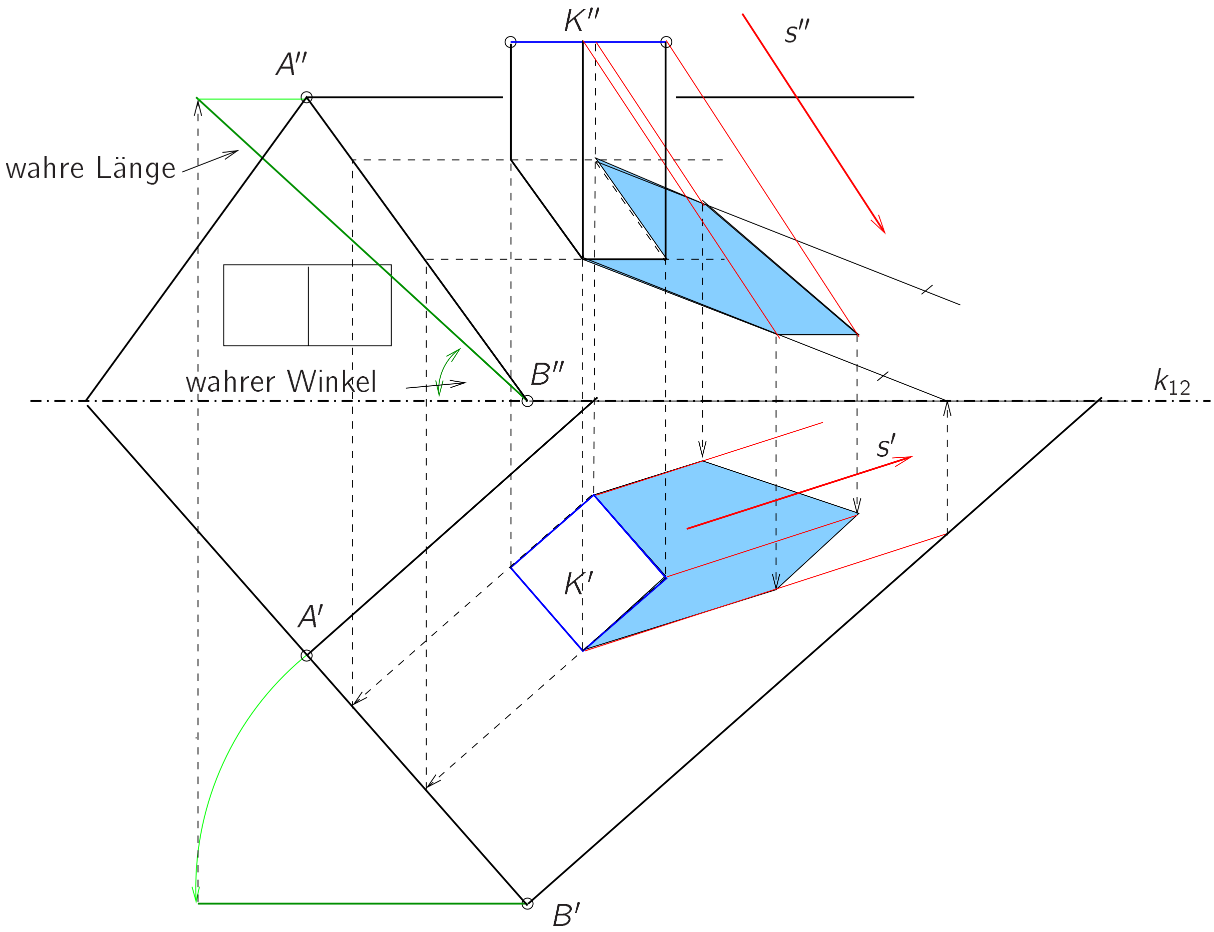



Abbildung 6.6: Zu Abb. 3.28: Schatten eines Kamins

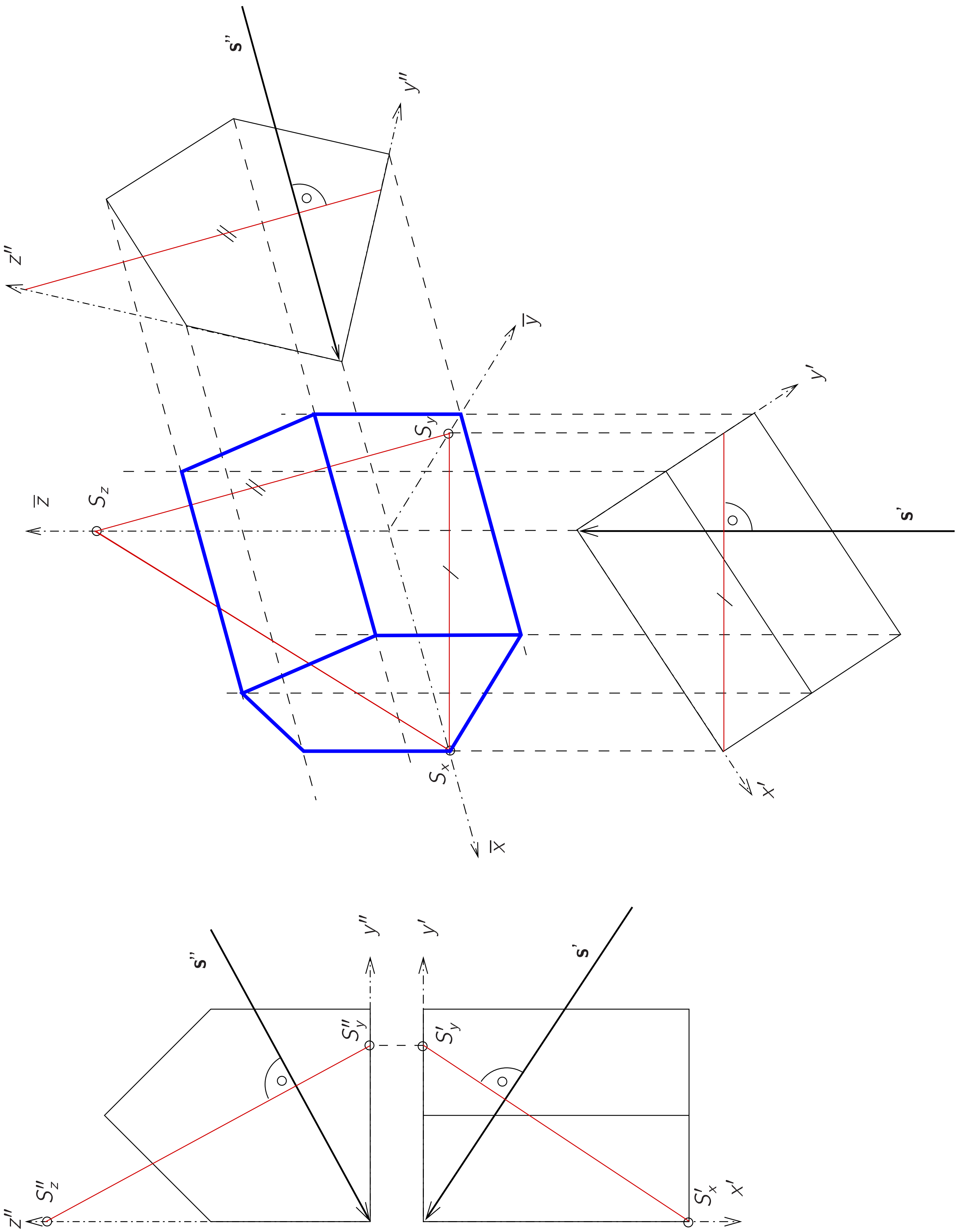



Abbildung 6.7: Zu Abb. 3.36 Haus in senkr. Axonometrie mit vorg. Projektionsrichtung

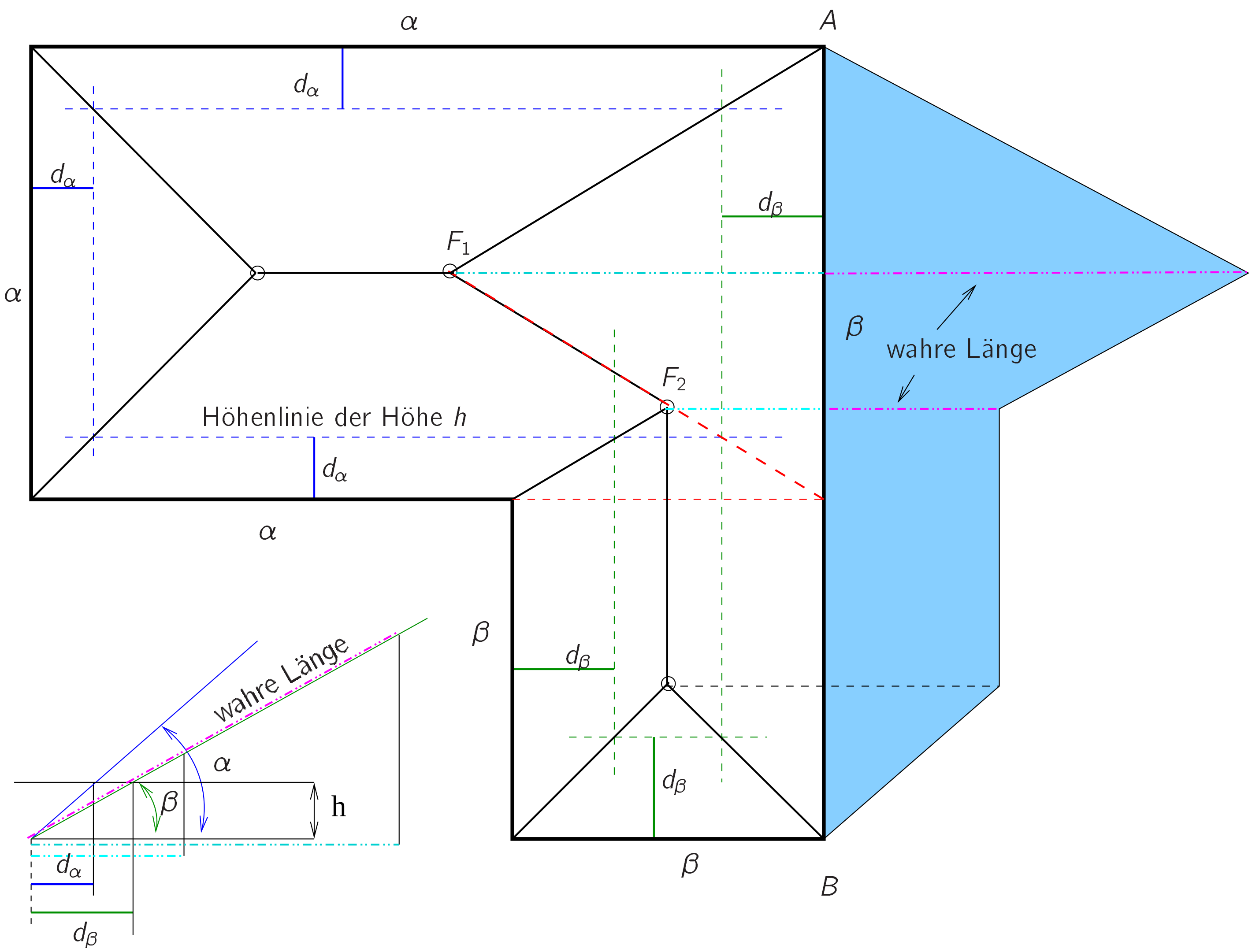



Abbildung 6.8: Zu Abb. 3.39: Grad– und Kehllinien zu Aufgabe 1

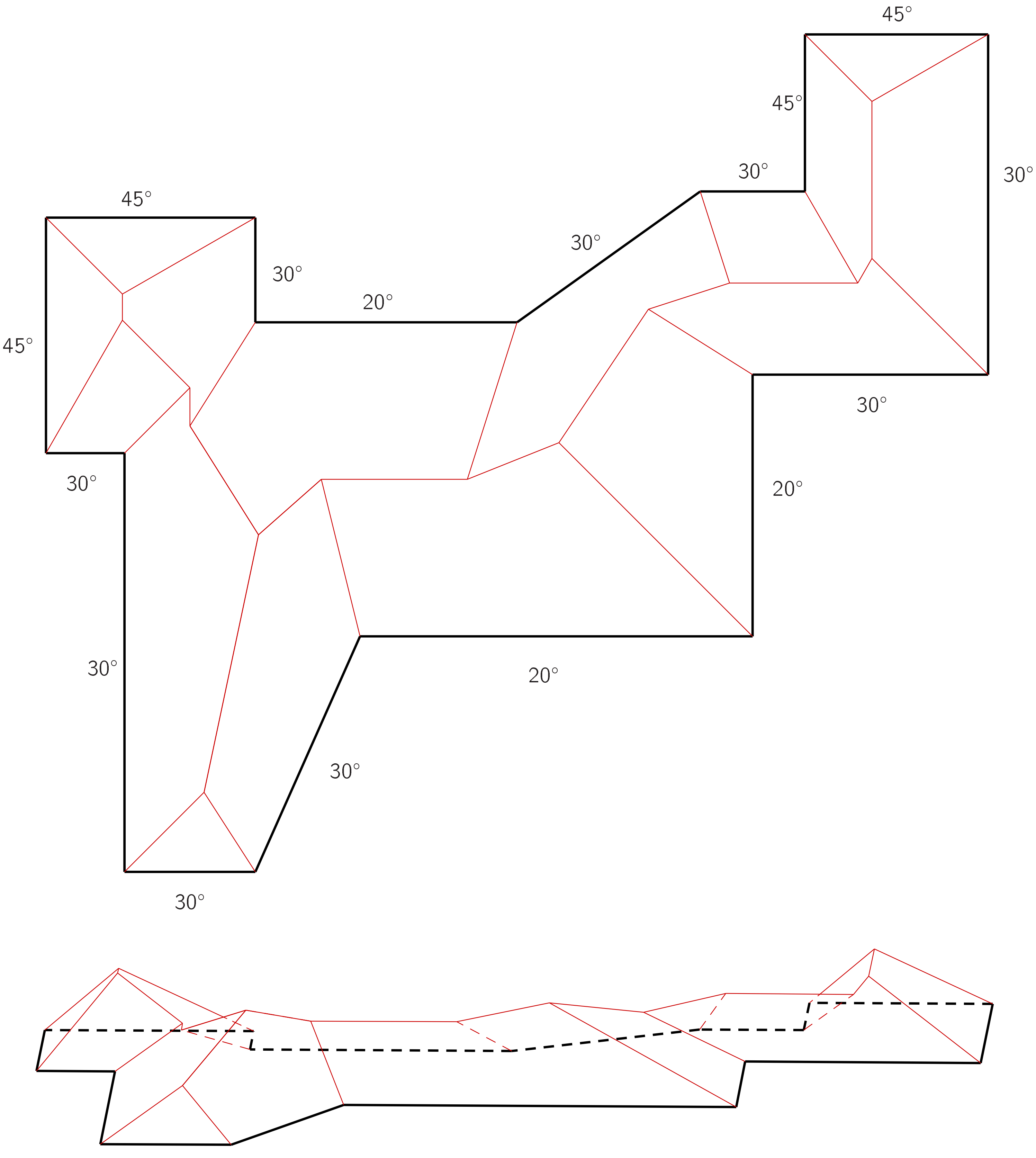



Abbildung 6.9: Zu Abb. 3.41: Lösung von Aufgabe 2 zur Dachausmittelung

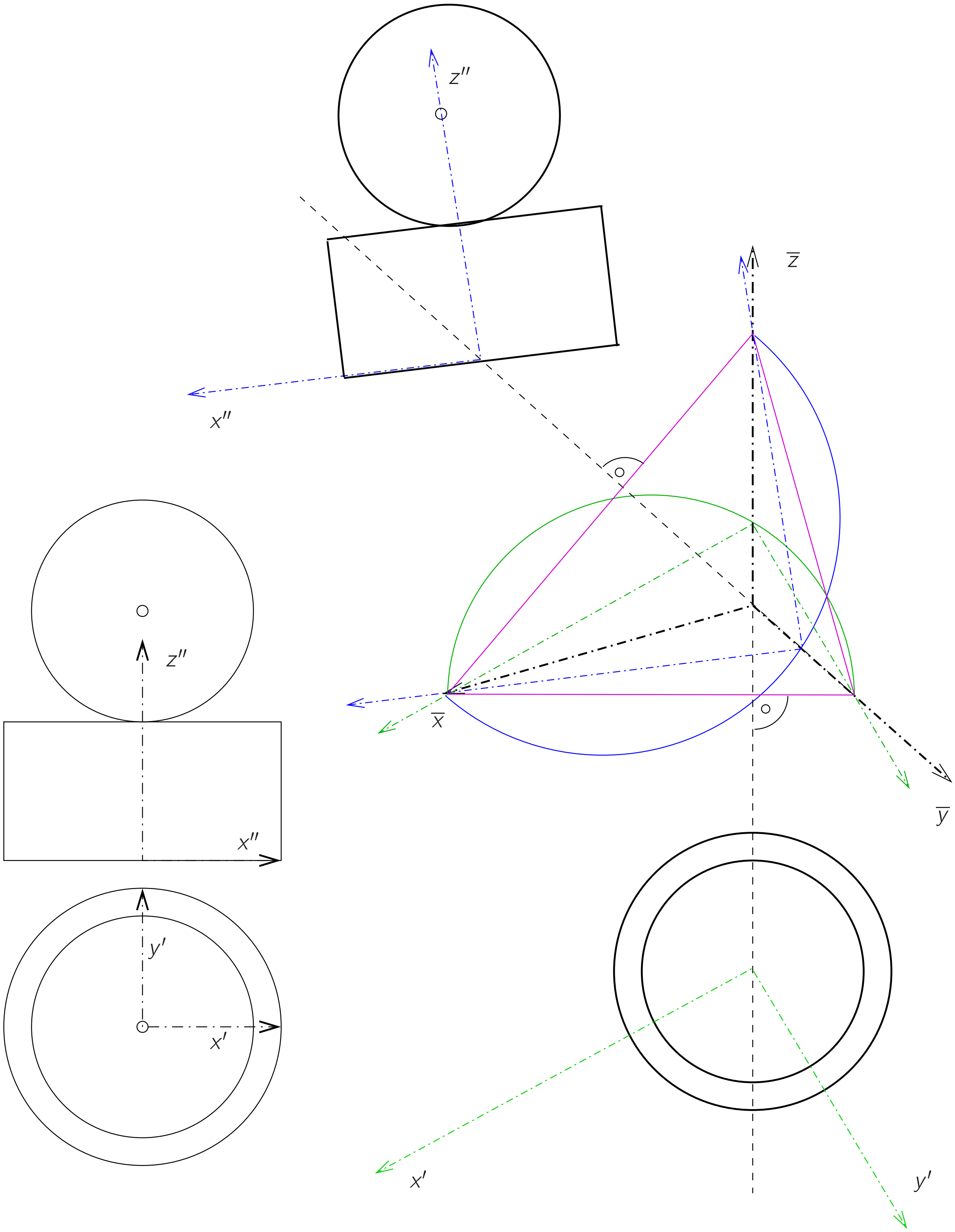



Abbildung 6.10: Zu Abb. 4.11: Zylinder mit Kugel in senkrechter Axonometrie

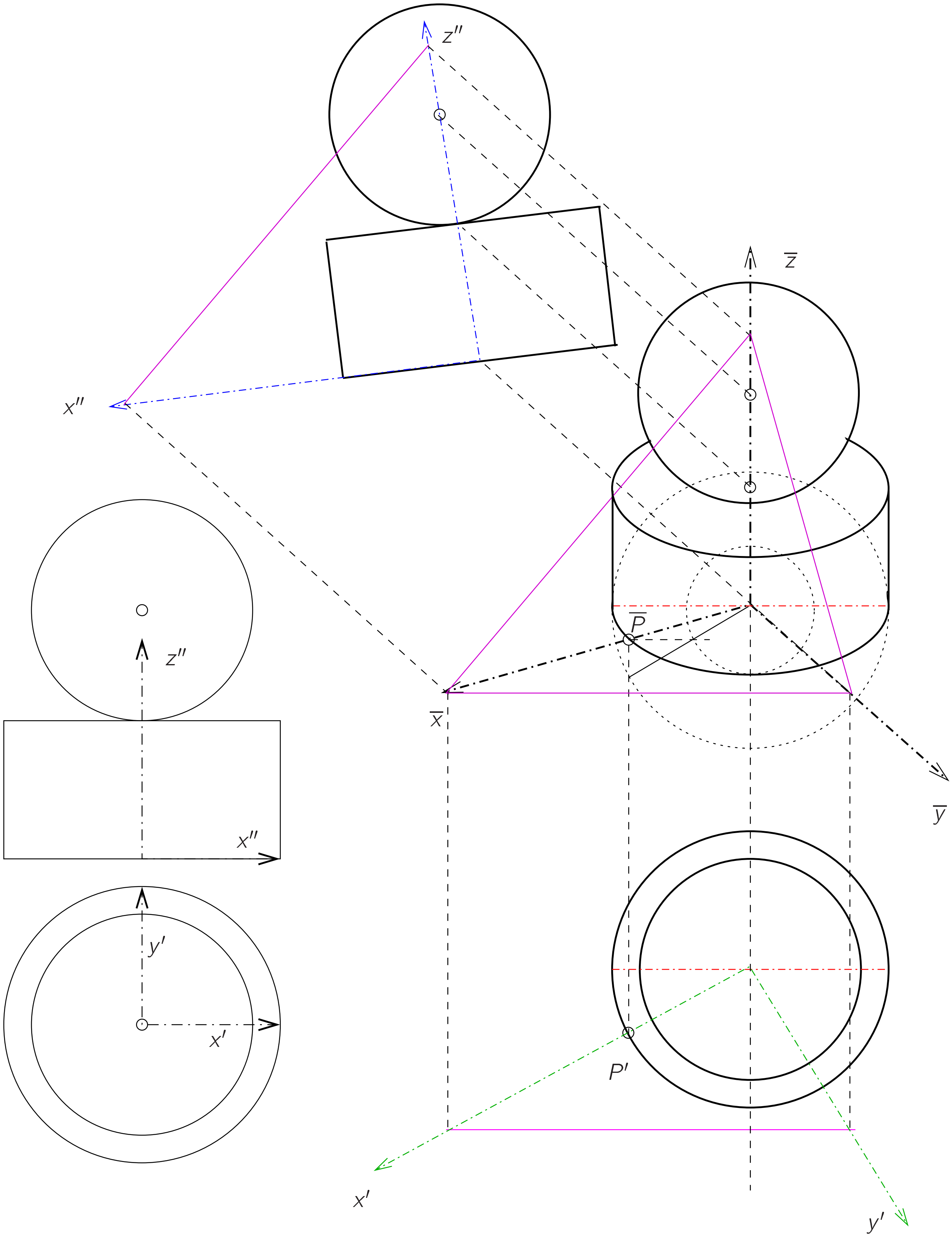



Abbildung 6.11: Zu Abb. 4.11: Zylinder mit Kugel in senkrechter Axonometrie

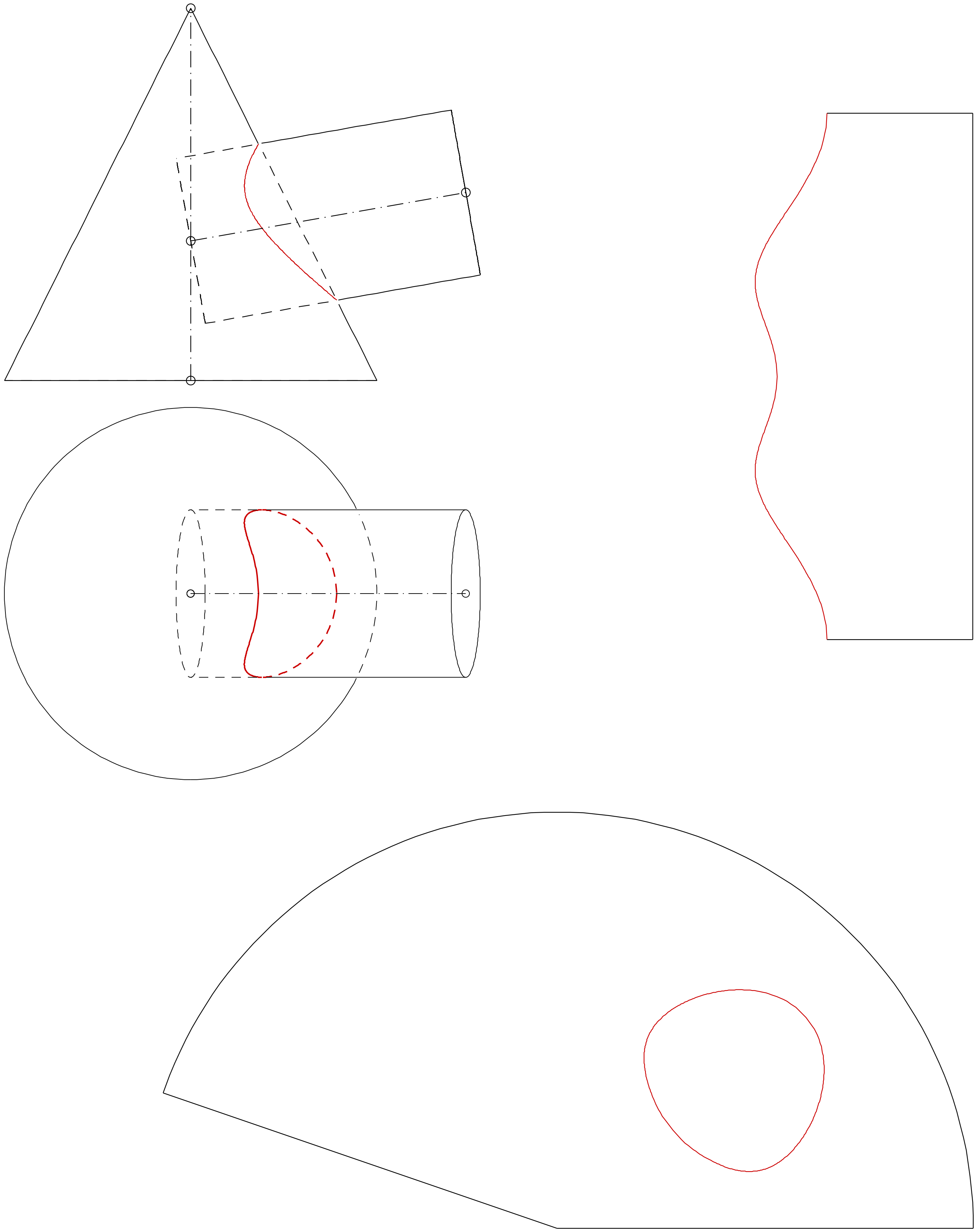


Abbildung 6.12: Zu Aufgabe 4.6: Abwicklungen

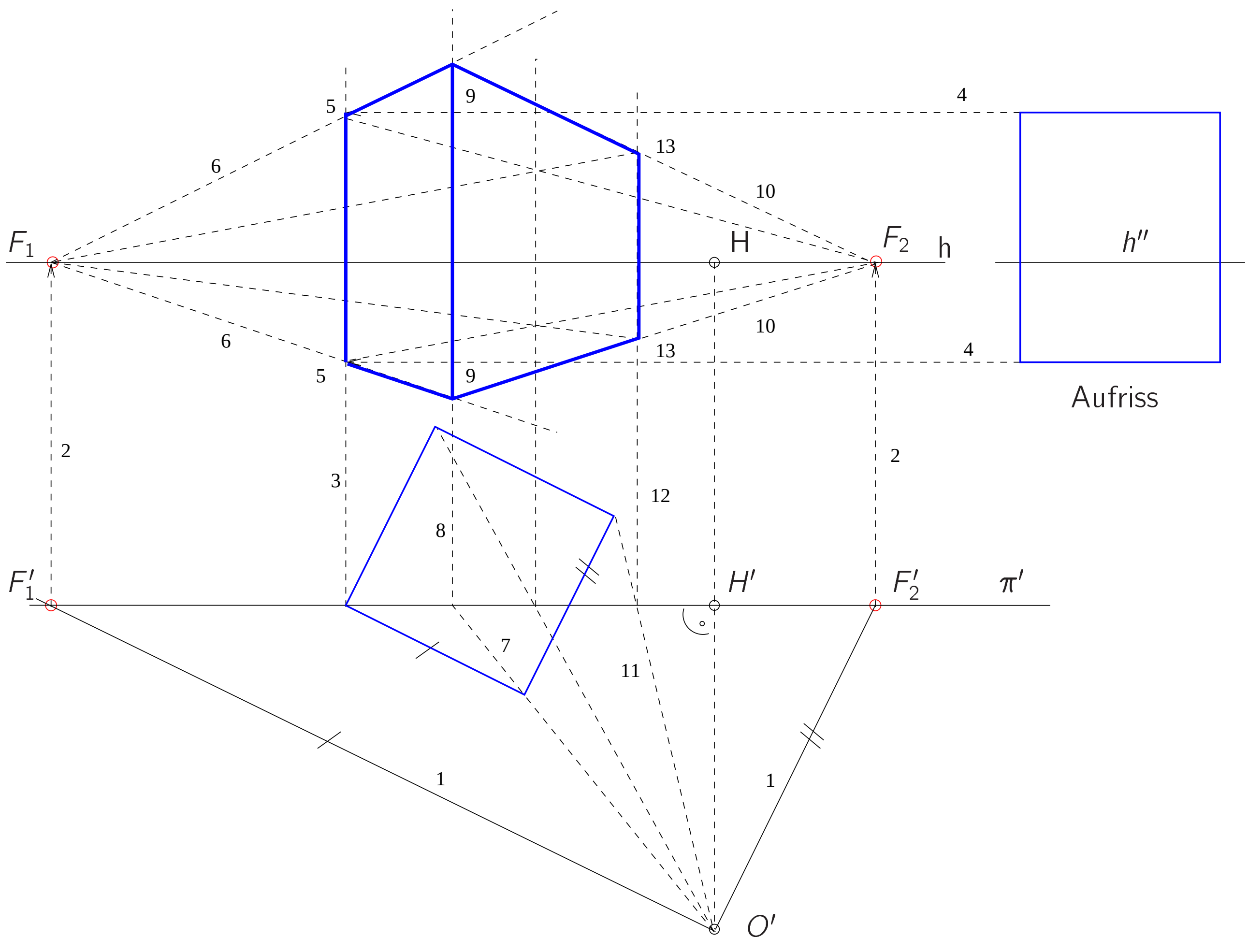



Abbildung 6.13: Zu Abb. 5.11: Zentralprojektion eines Quaders in Architektenanordnung

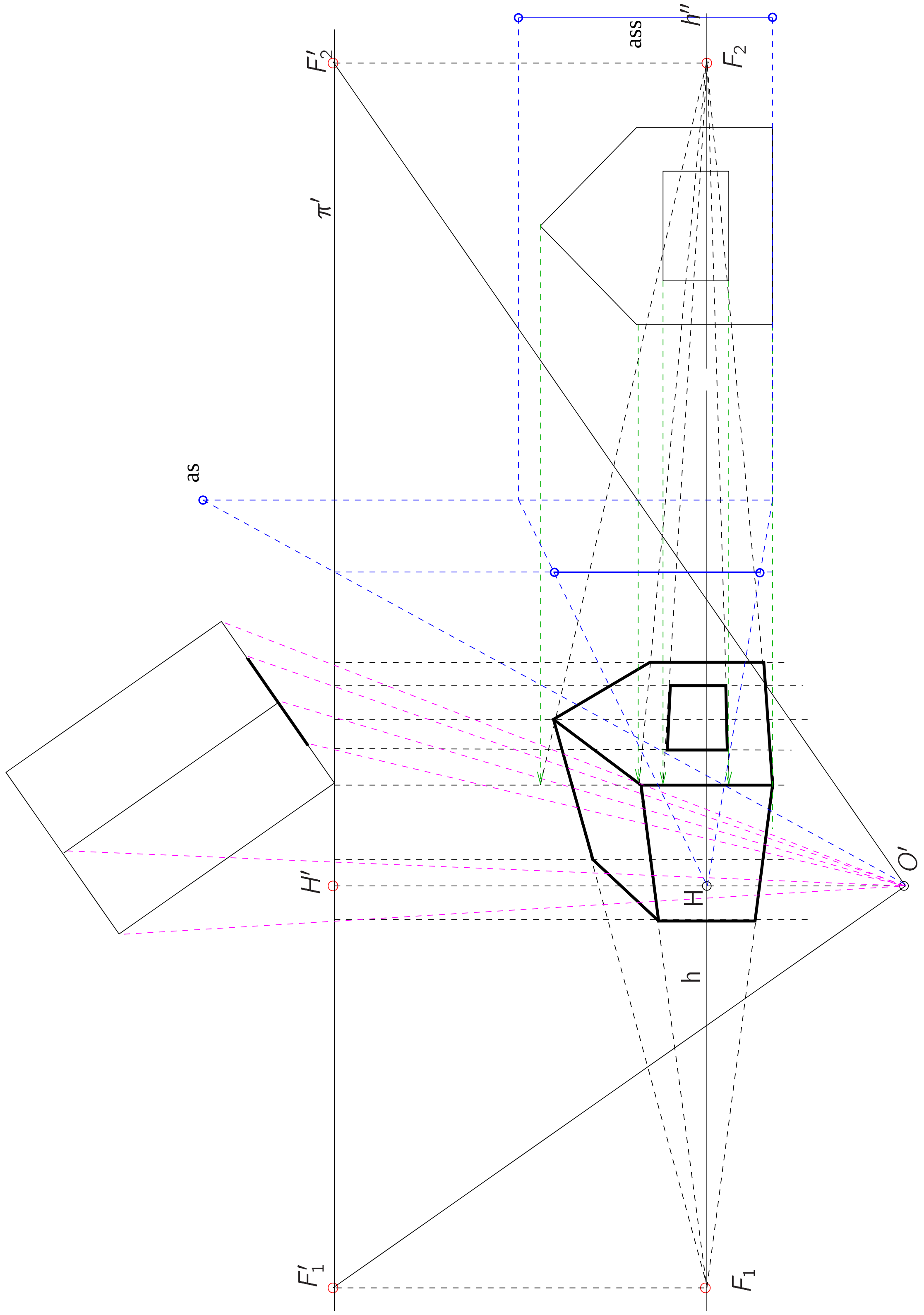



Abbildung 6.14: Zu Abb. 5.12: Zentralprojektion eines Hauses in Architektenanordnung

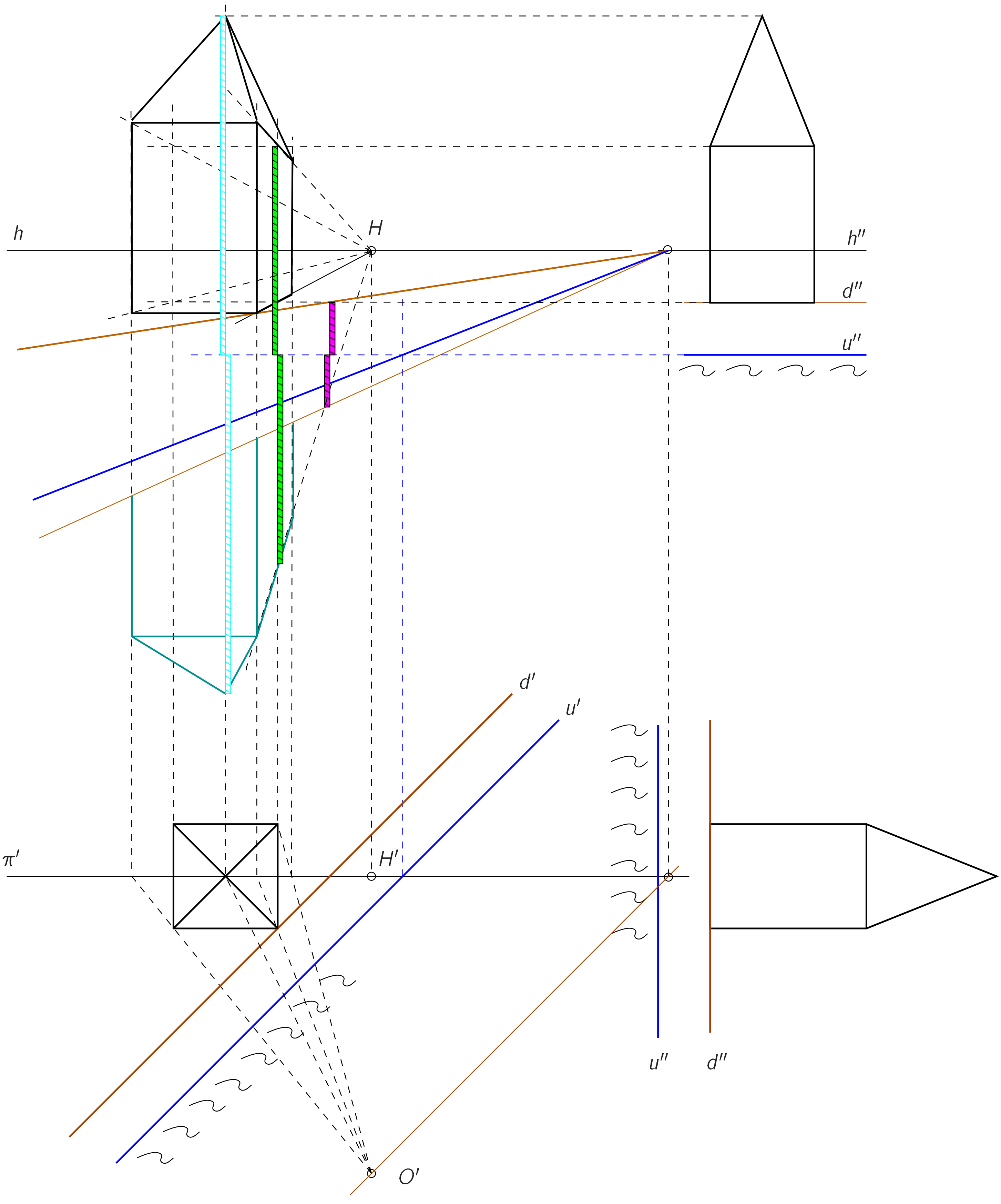



Abbildung 6.15: Zu Abb. 5.28: Spiegelung eines Quaders an einer Wasseroberfläche: Lösung

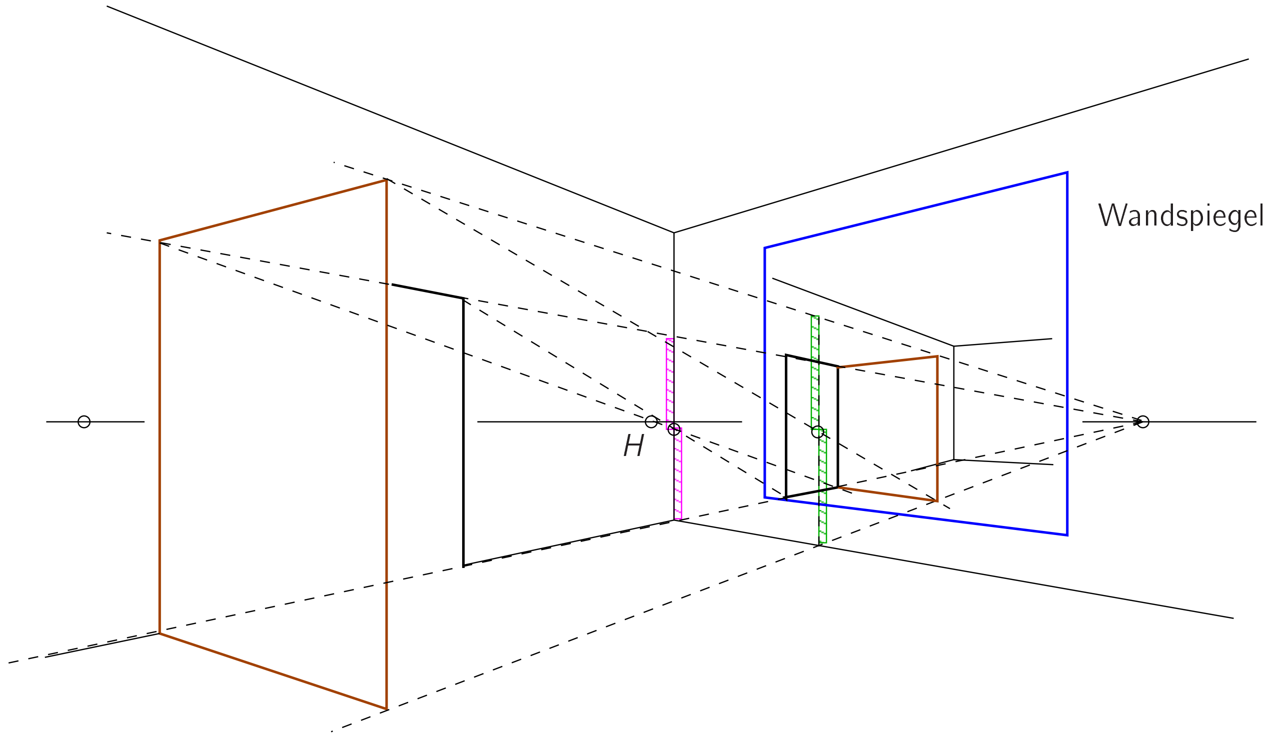



Abbildung 6.16: Zu Abb. 5.30: Spiegelung an einem Wandspiegel

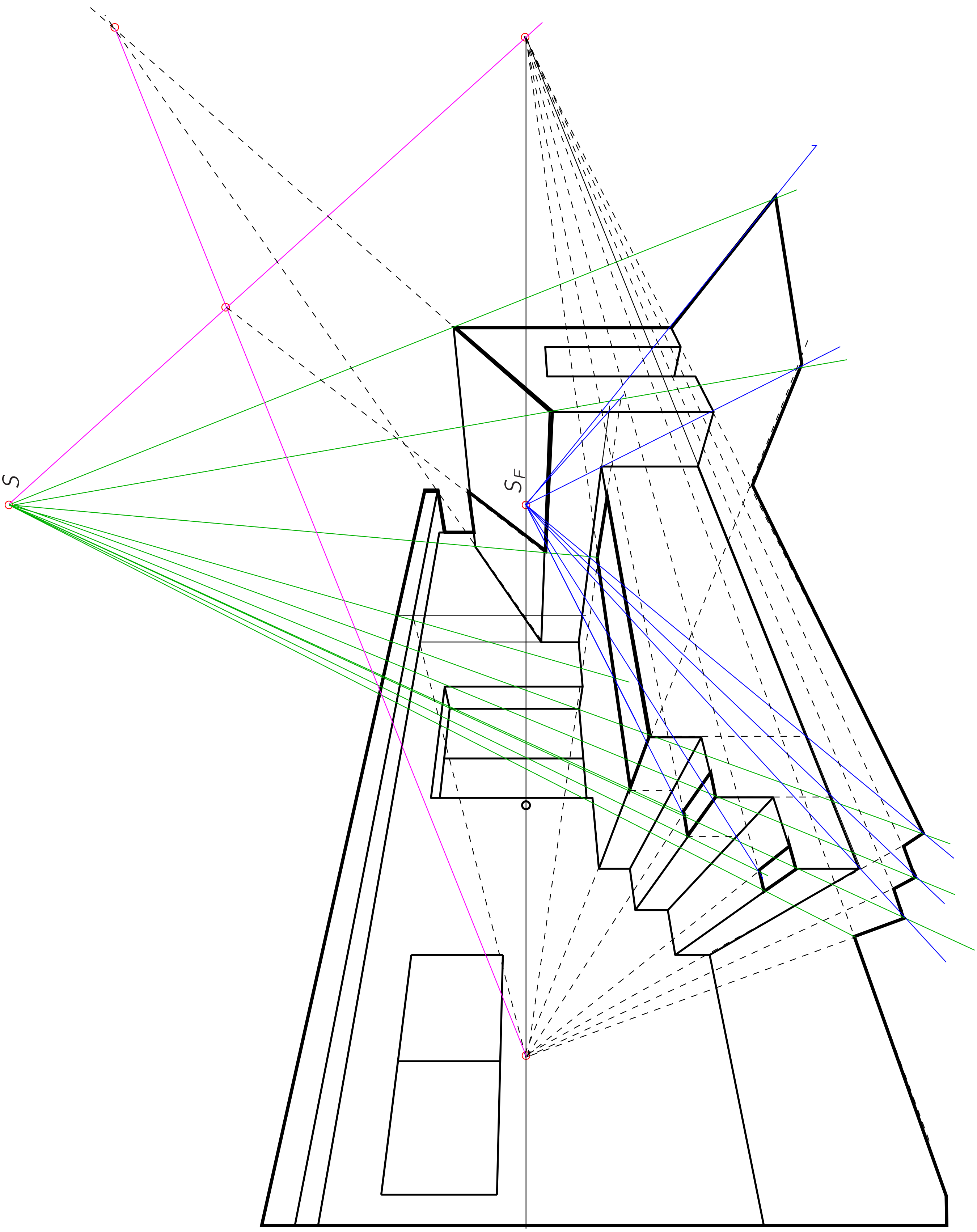



Abbildung 6.17: Zu Abb. 5.37 Schatten einer Lagerhalle mit Schuppen und Laderampe bei parallelem Licht

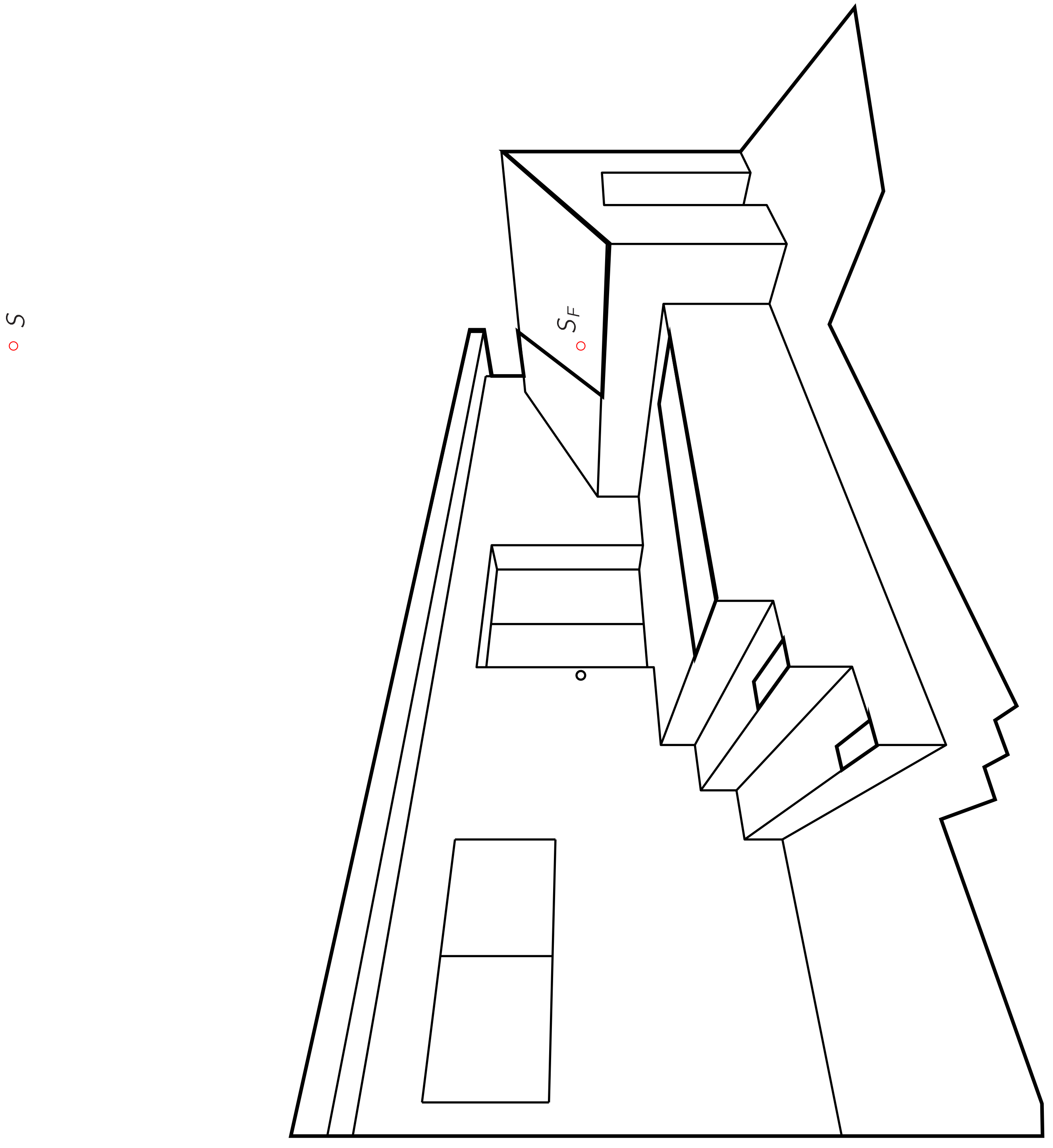



Abbildung 6.18: Zu Abb. 5.37 Schatten einer Lagerhalle mit Schuppen und Laderampe bei parallelem Licht (Forts.)

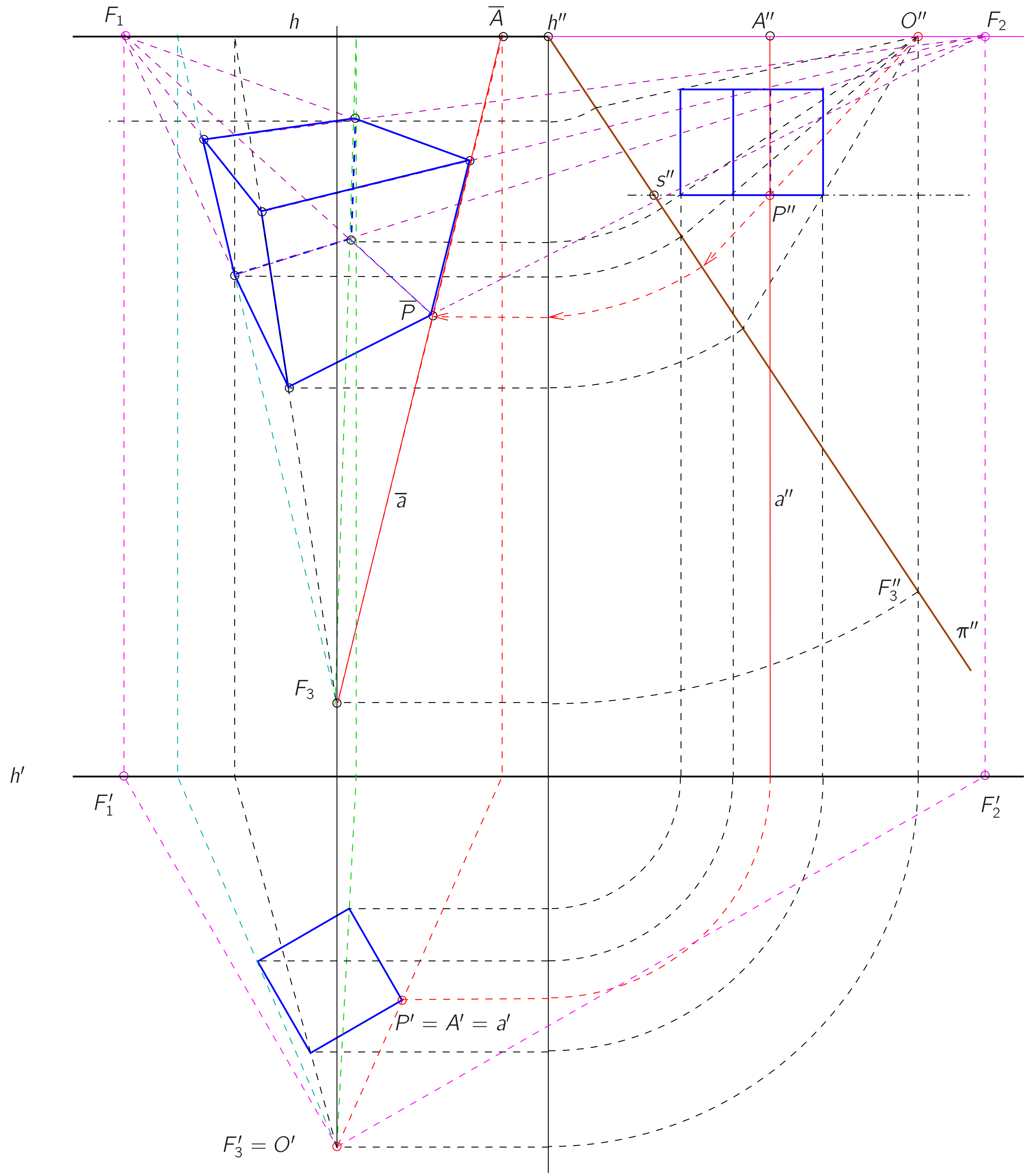



Abbildung 6.19: Zu Abb. 5.41 Zentralprojektion eines Quaders bei geneigter Bildtafel: Lösung

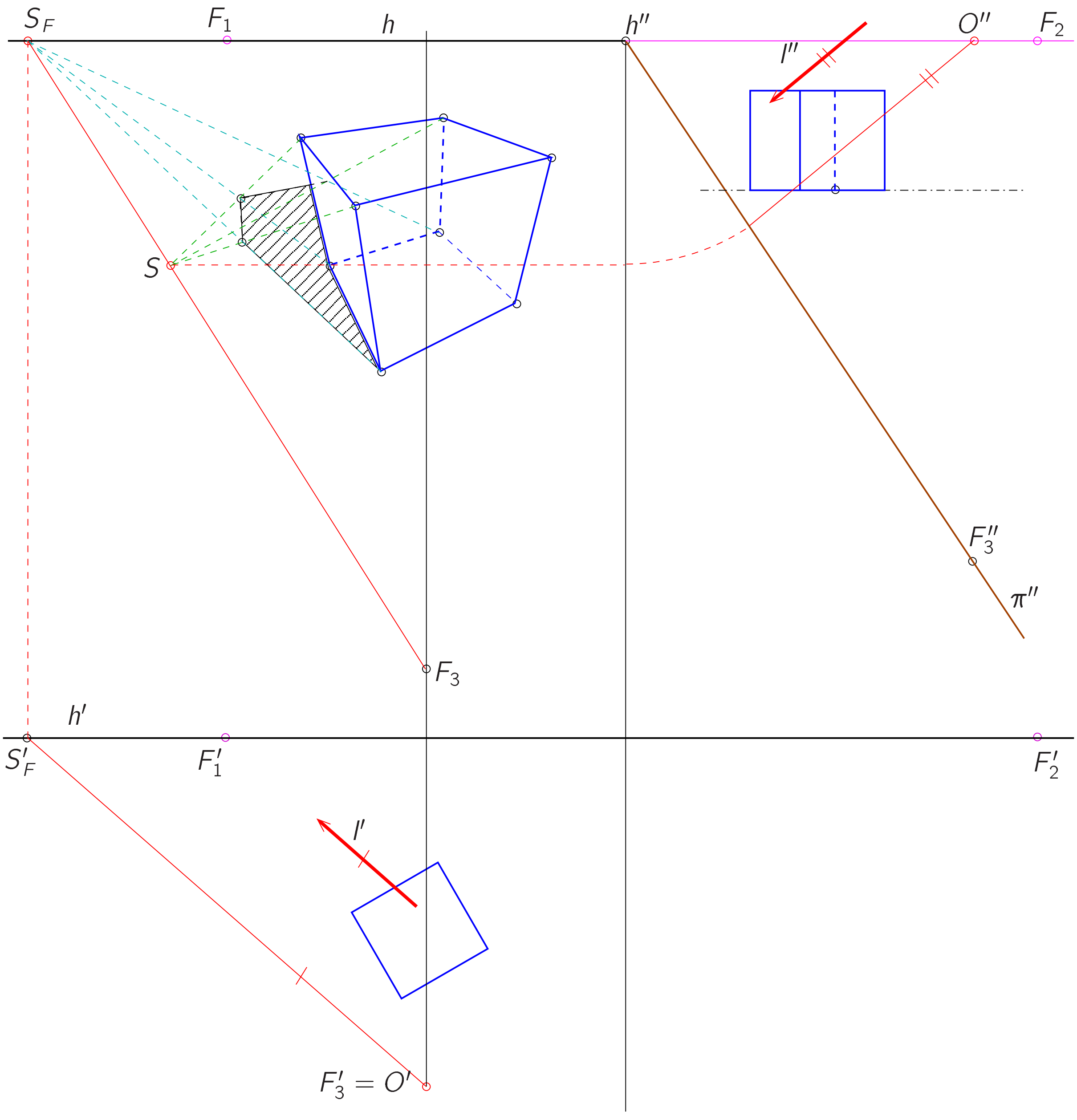



Abbildung 6.20: Schatten bei geneigter Bildtafel

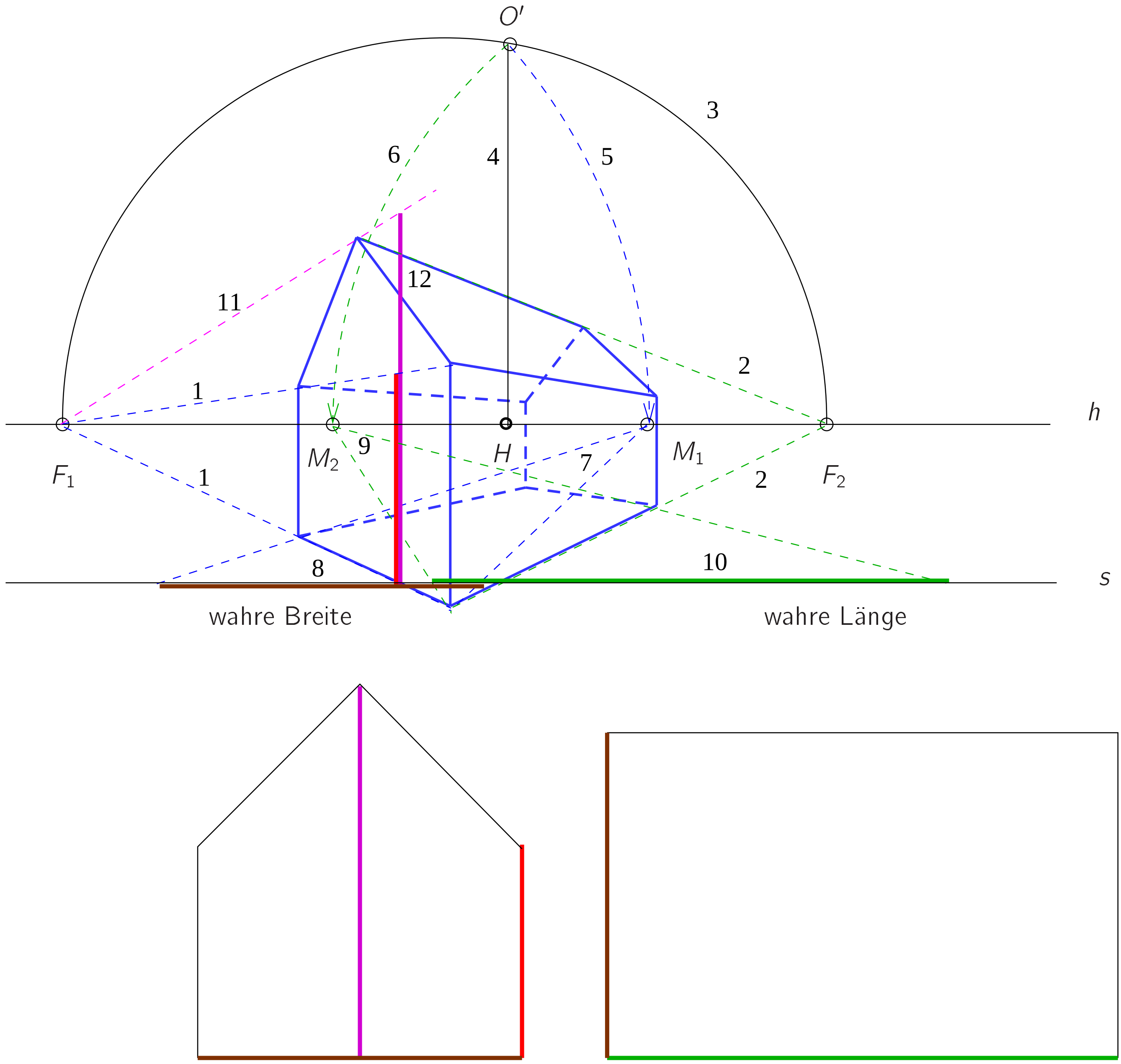



Abbildung 6.21: Zu Abb. 5.48: Bestimmung der wahren Abmessungen eines Hauses

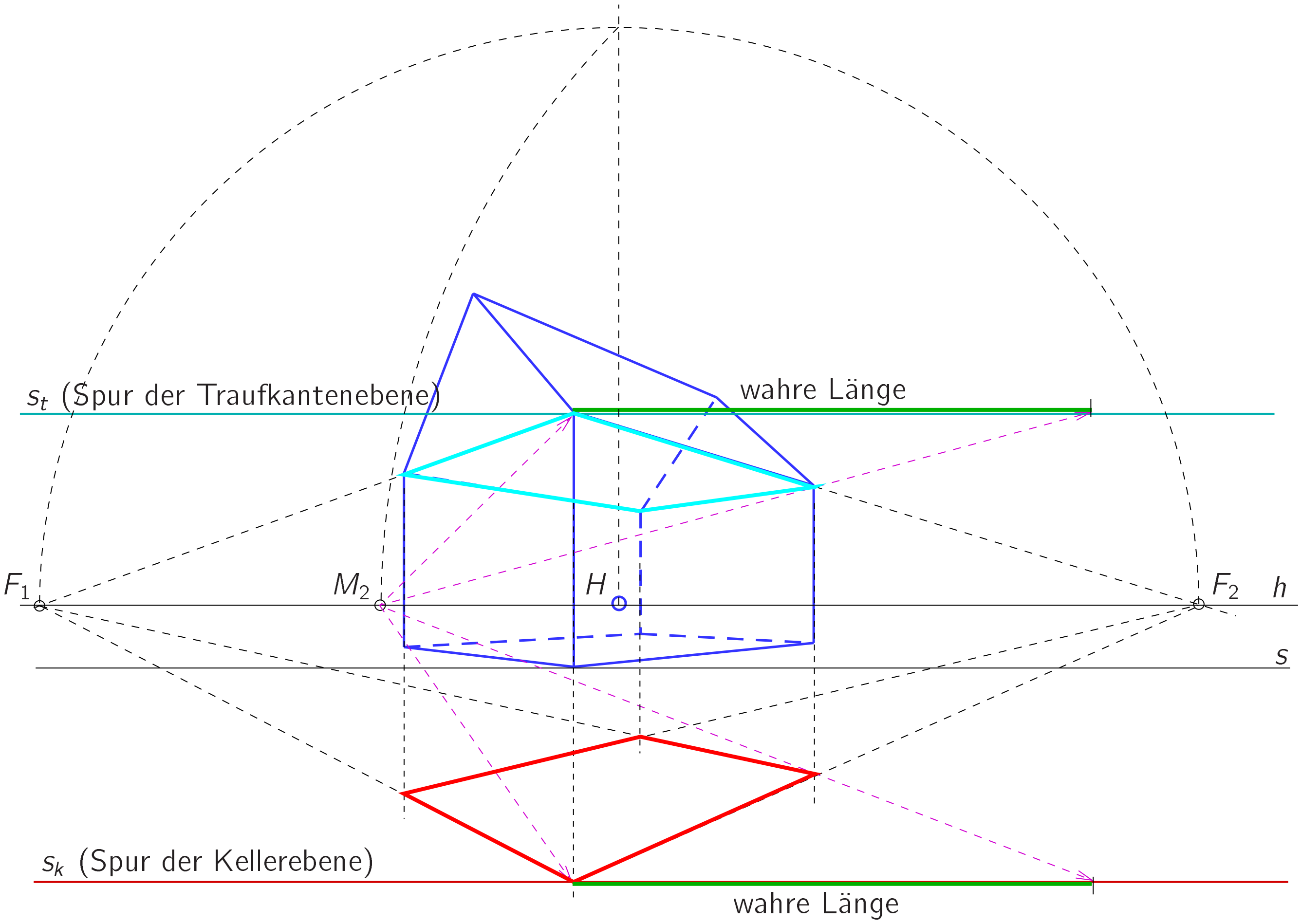
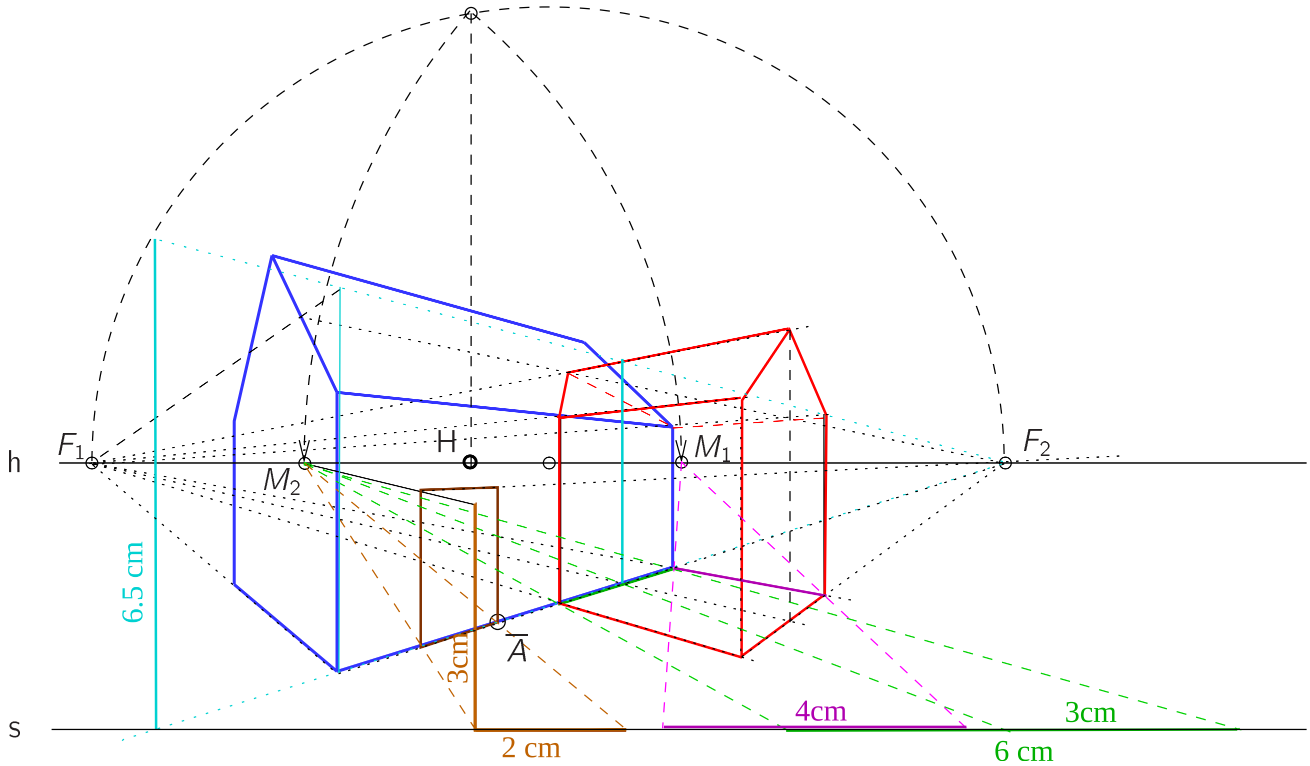



Abbildung 6.22: Wahre Länge eines Hauses mit dem Keller-/Traufkantengrundriss



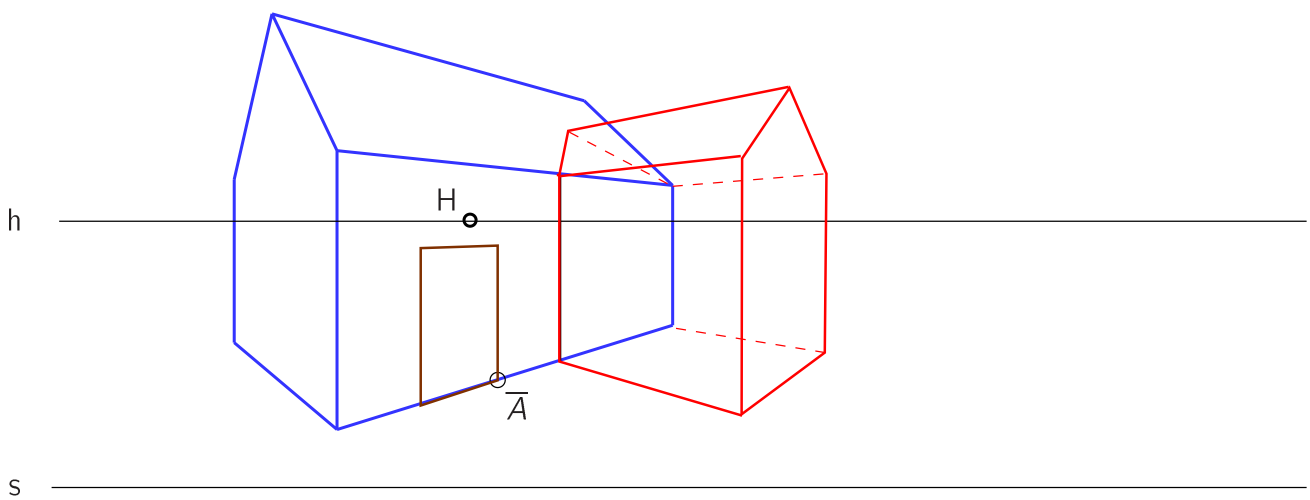




Abbildung 6.23: Zu Abb. 5.49 Antragen wahrer Längen: Tür und Anbau

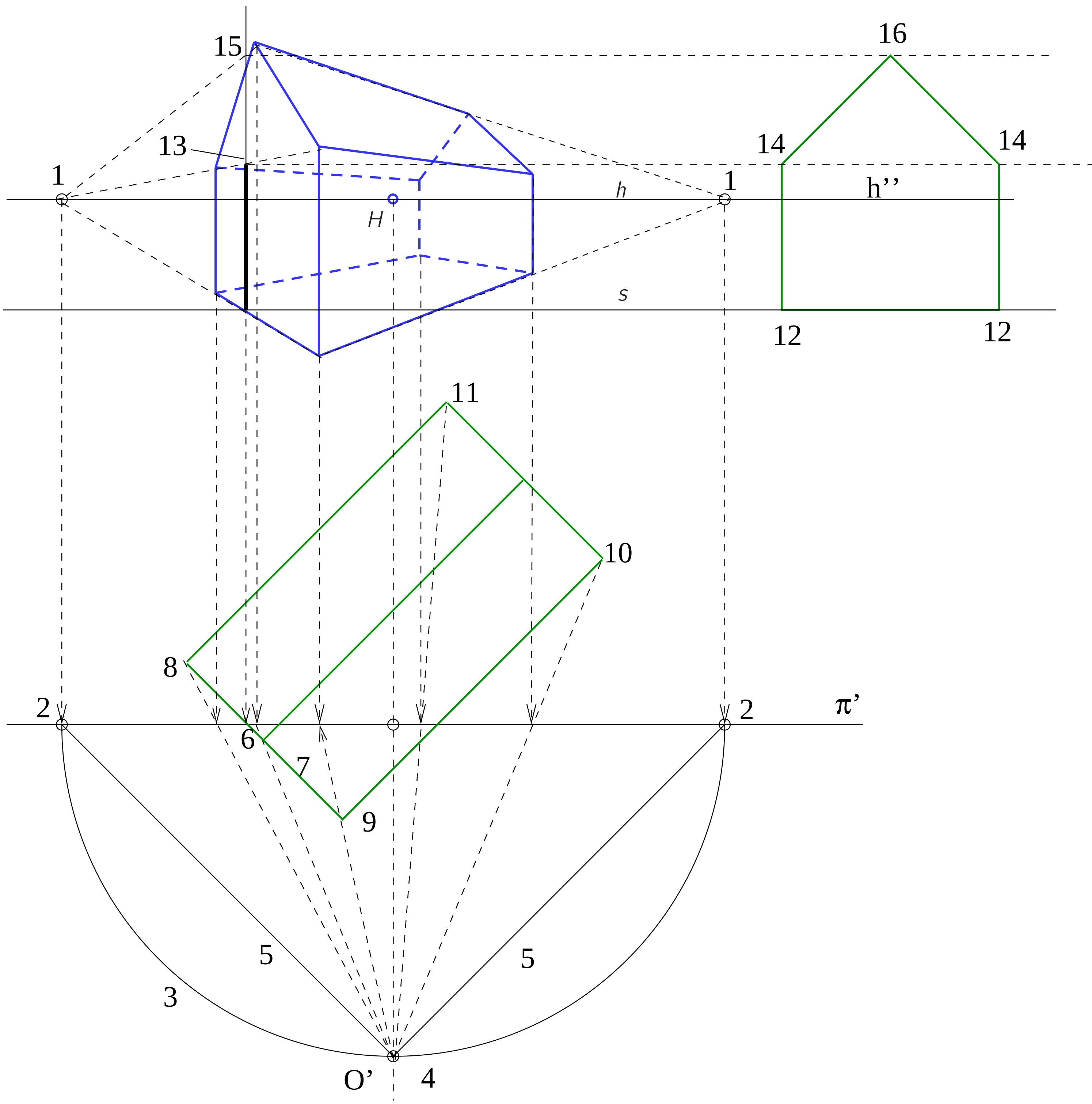



Abbildung 6.24: Zu Abb. 5.51 Rekonstruktion von Grund– und Aufriss eines Hauses

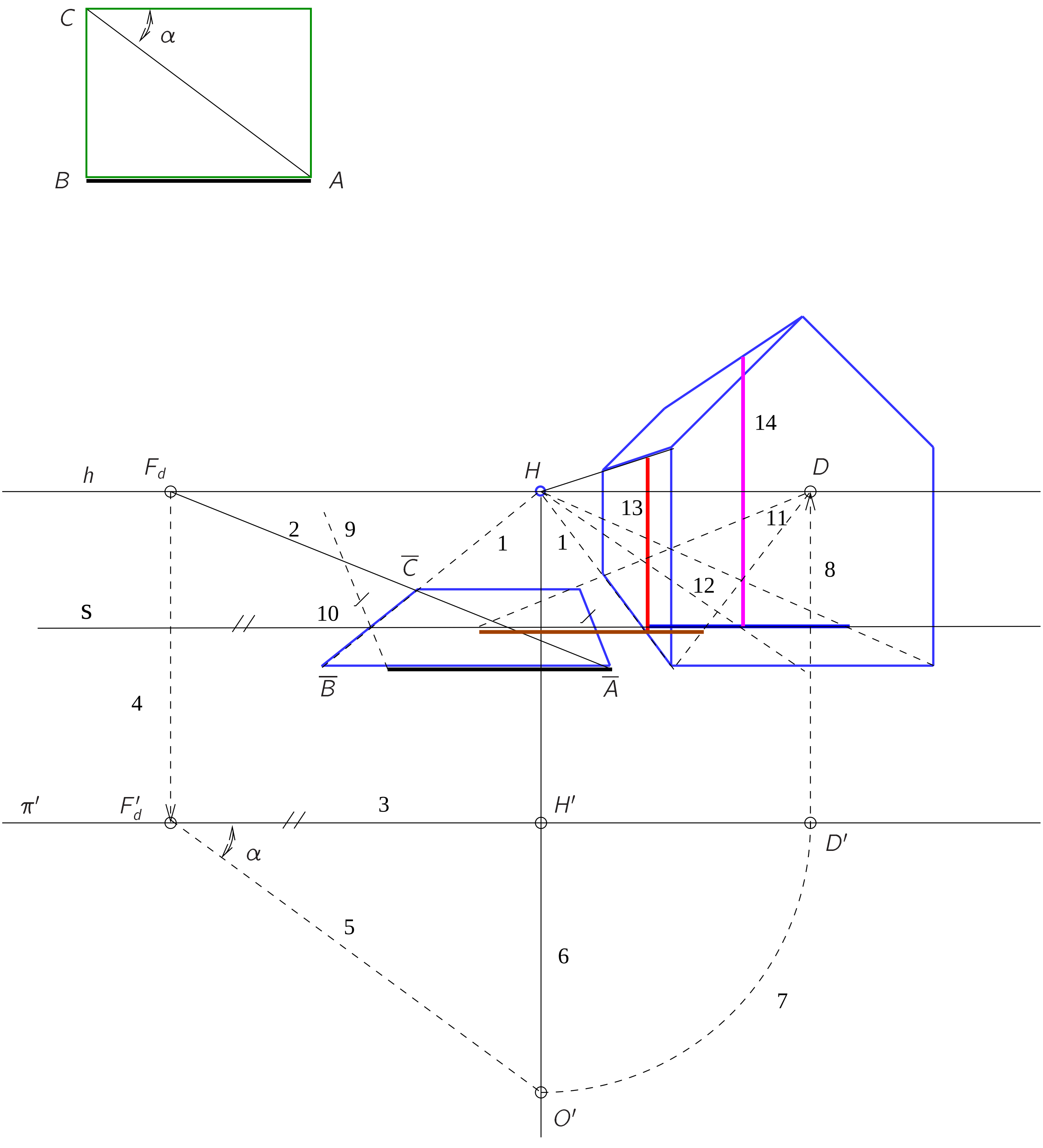



Abbildung 6.25: Zu Abb. 5.54: Wahre Abmessungen eines Hauses bei bekanntem Vorgarten

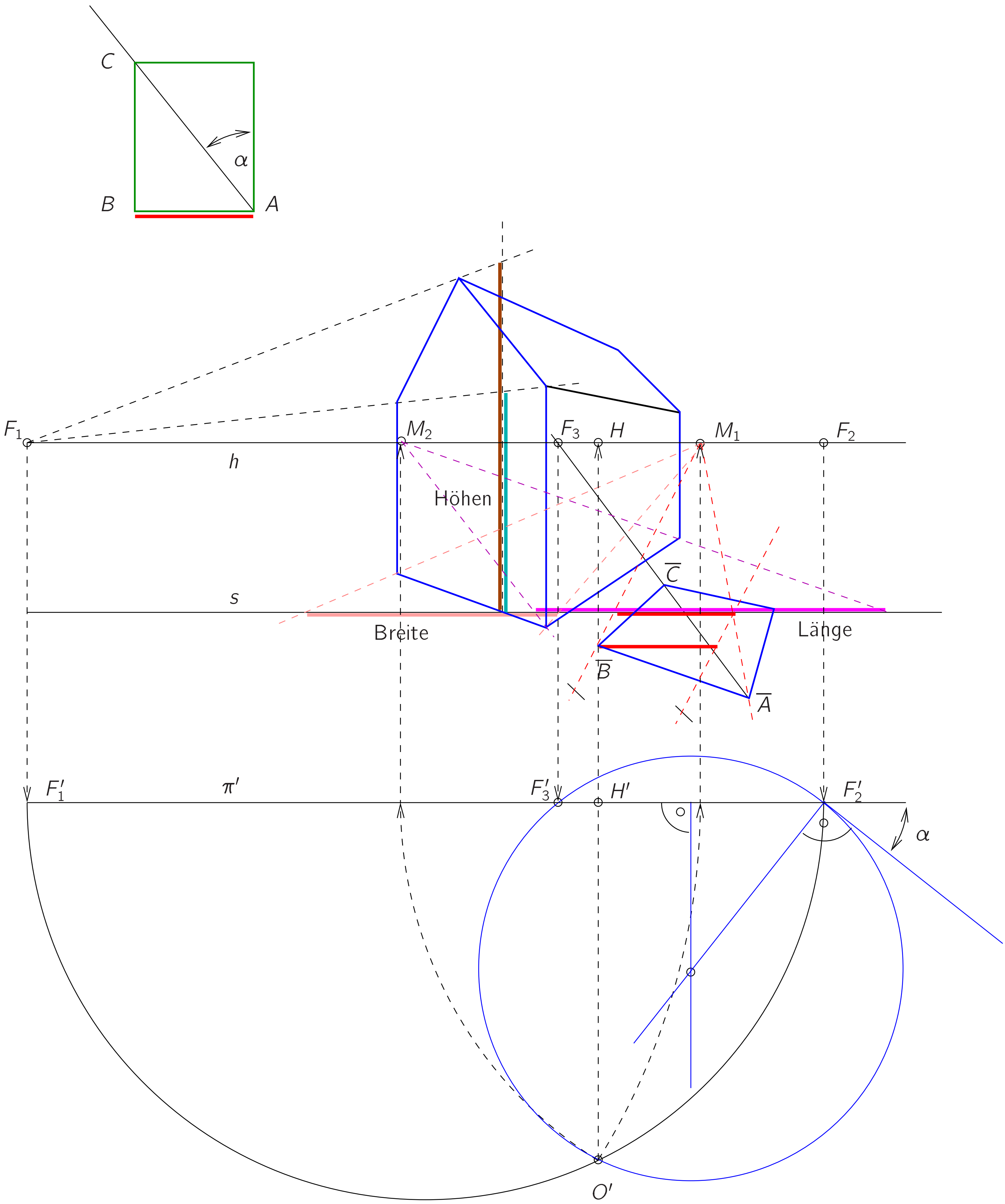



Abbildung 6.26: Zu Abb. 5.57 Rekonstruktion bei 3 horizontalen Fluchtpunkten: Beispiel

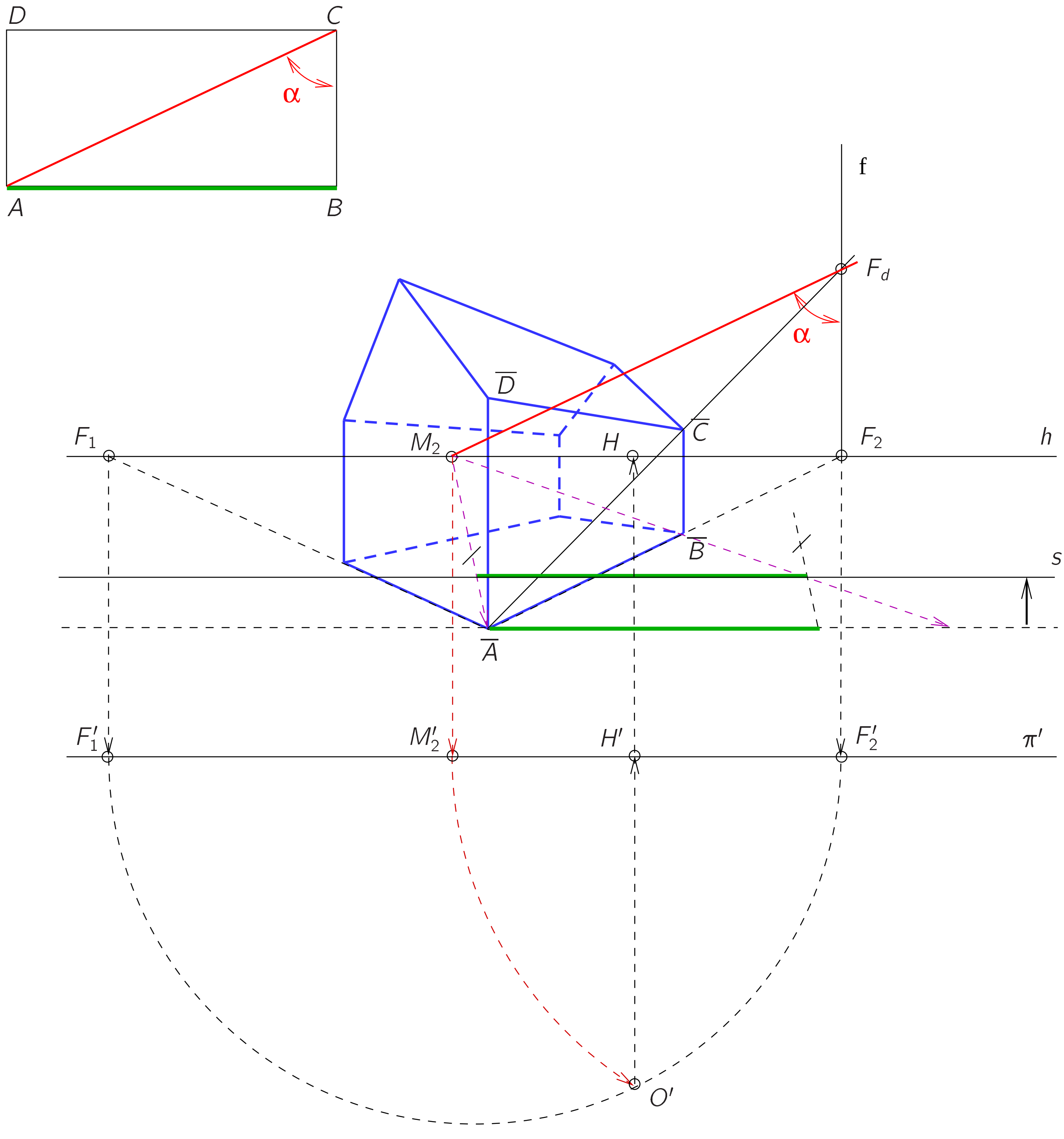



Abbildung 6.27: Zu Abb. 5.58 Rekonstruktion bei einem nicht horizontalen Fluchtpunkt

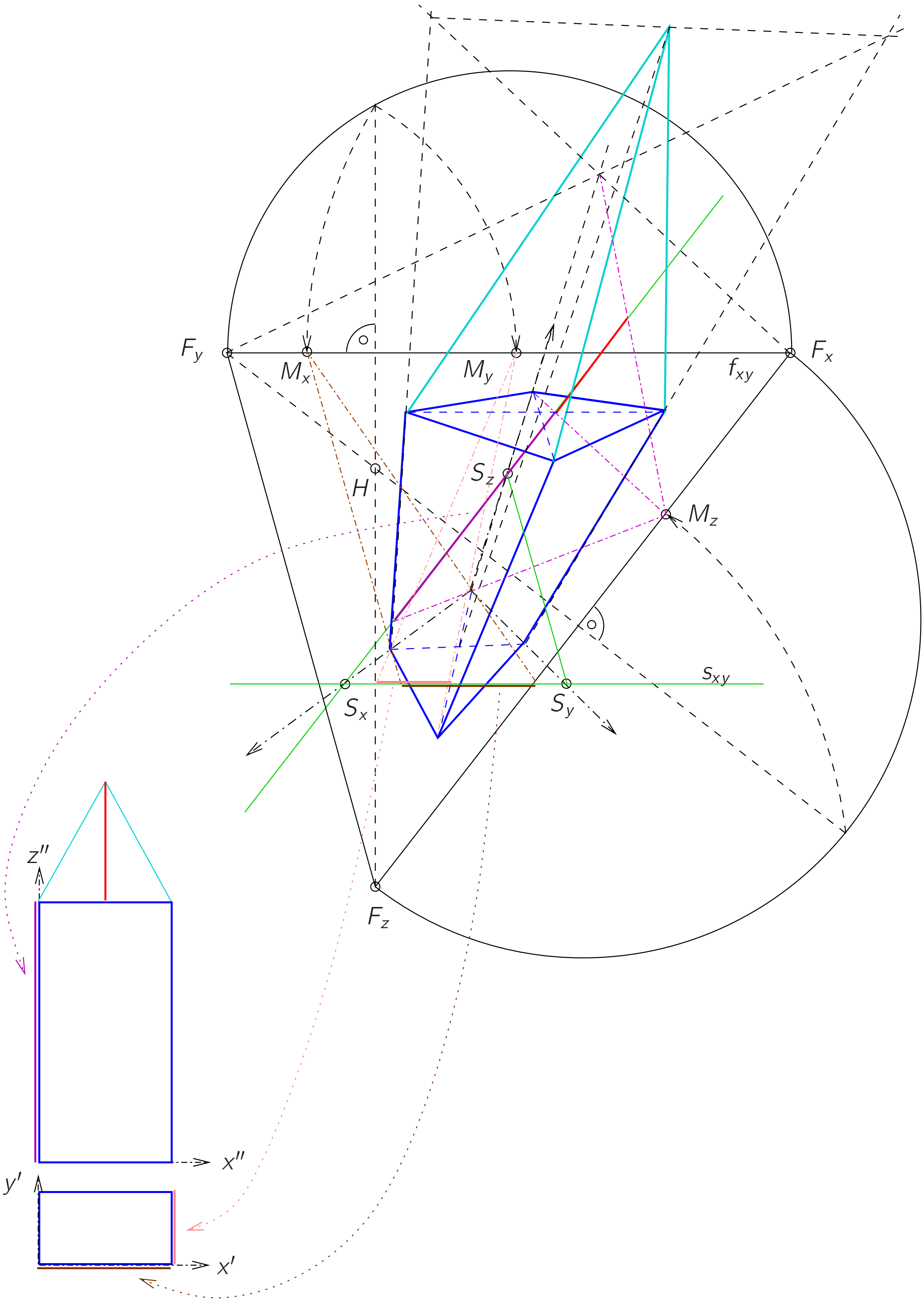



Abbildung 6.28: Zu Abb. 5.61 Rekonstruktion/Konstruktion bei geneigter Bildtafel: Wahre Abmessungen eines Quaders, Dach der Höhe 2cm

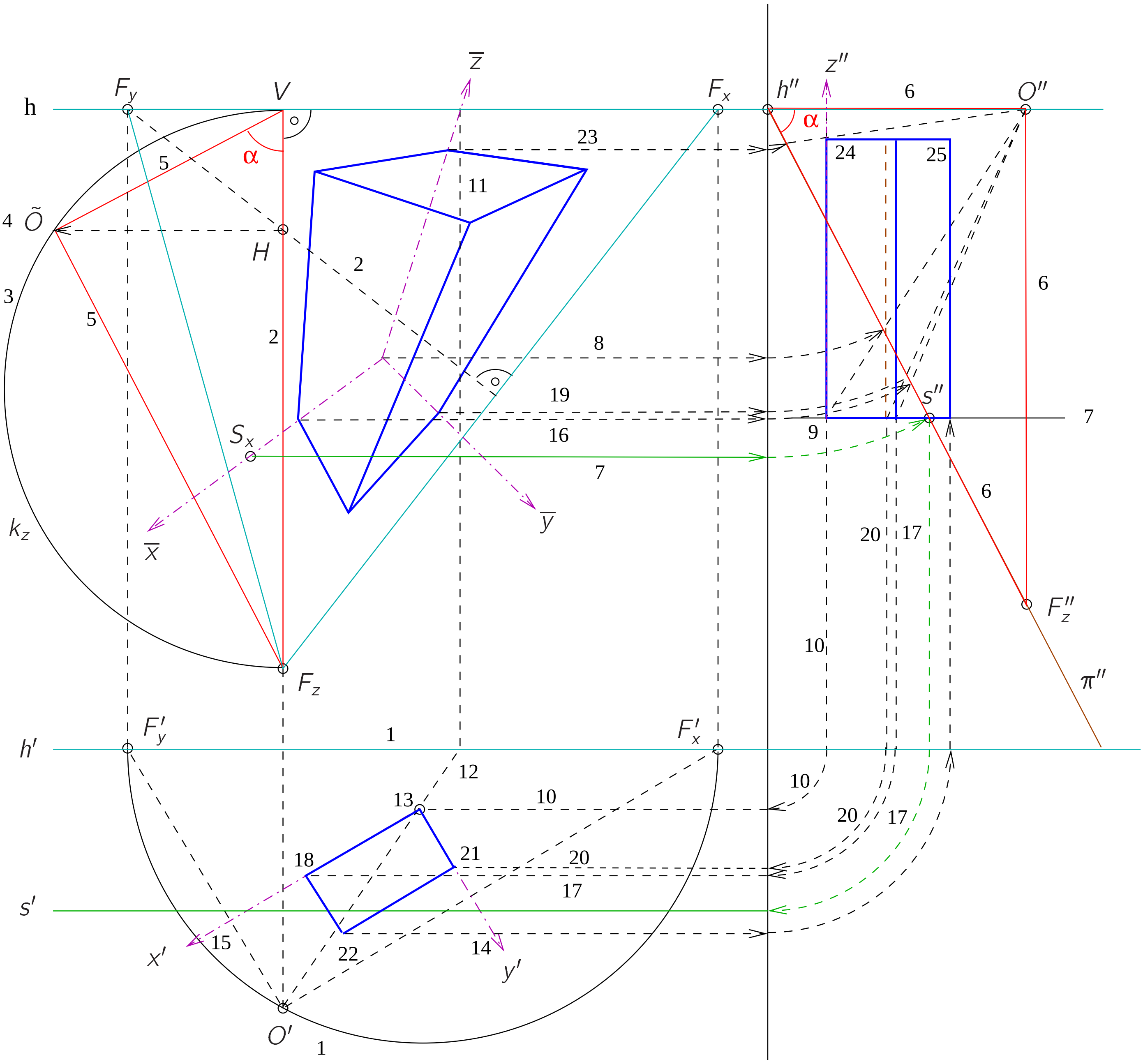



Abbildung 6.29: Zu Abb. 5.63 Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel: Grund-, Aufriss eines Quaders

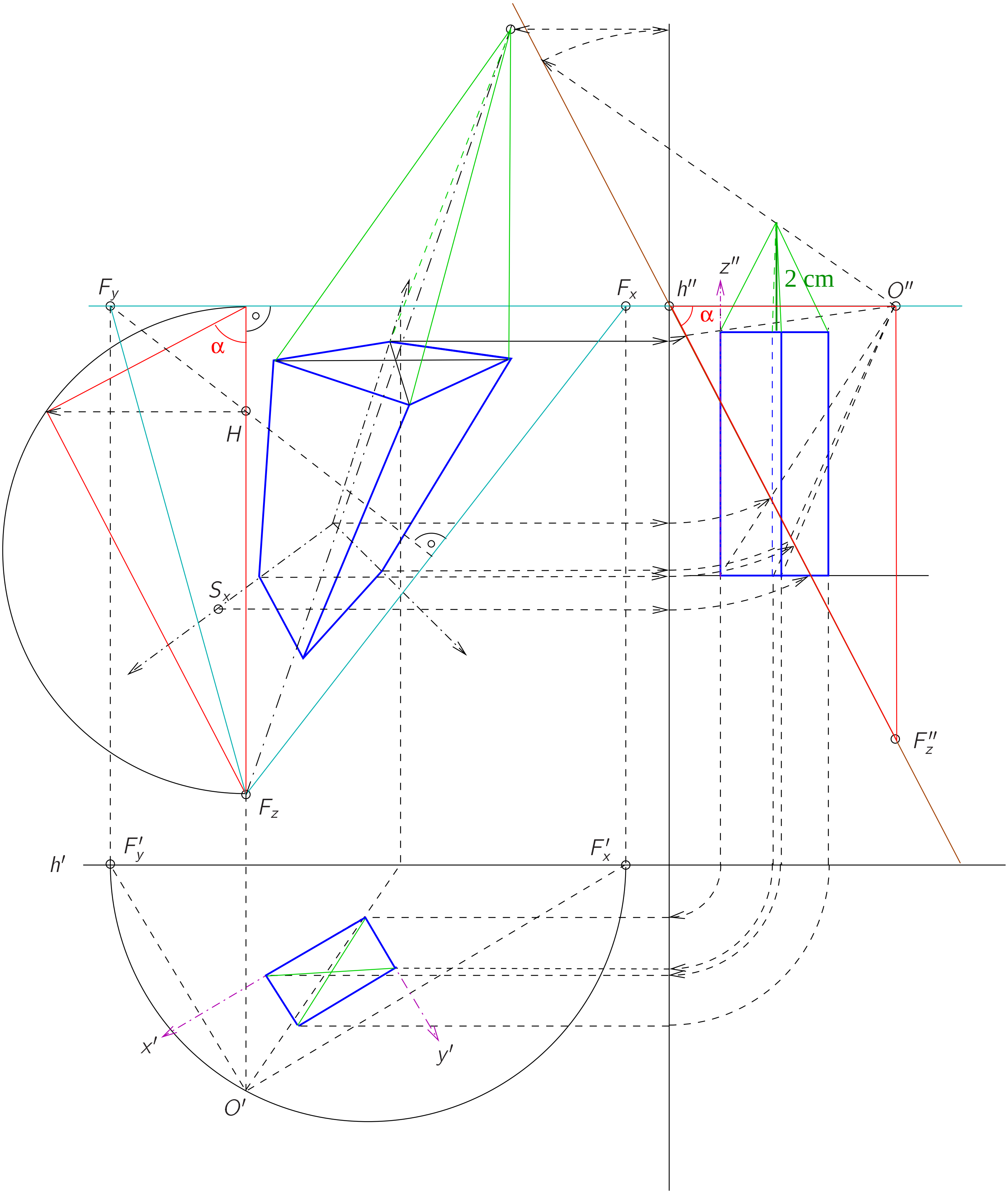



Abbildung 6.30: Zu Abb. 5.63 Rekonstruktion bei geneigter Bildtafel: Grund-, Aufriss eines Quaders

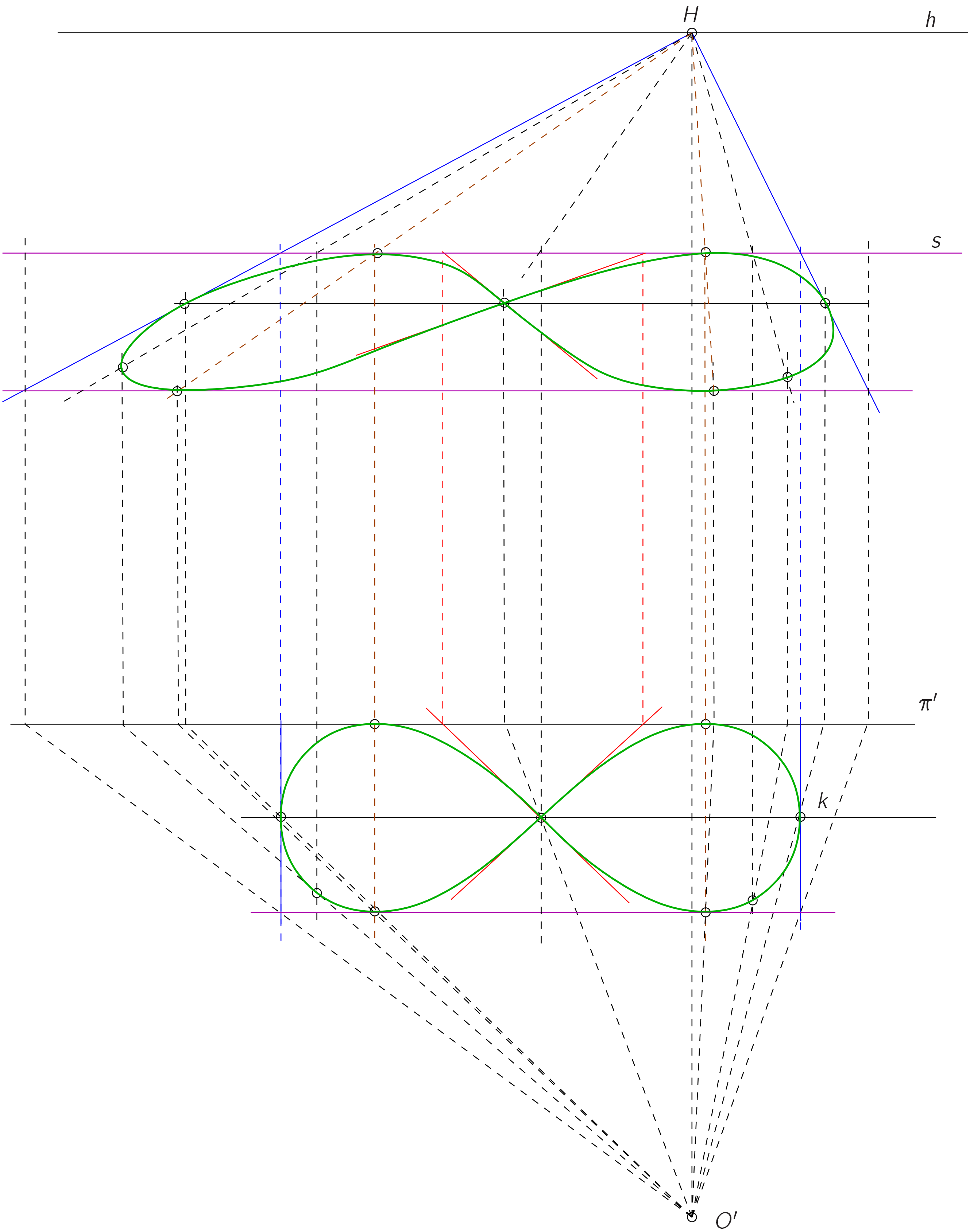



Abbildung 6.31: Zu Abb. 5.70 Zentralprojektion einer Kurve: Beispiel

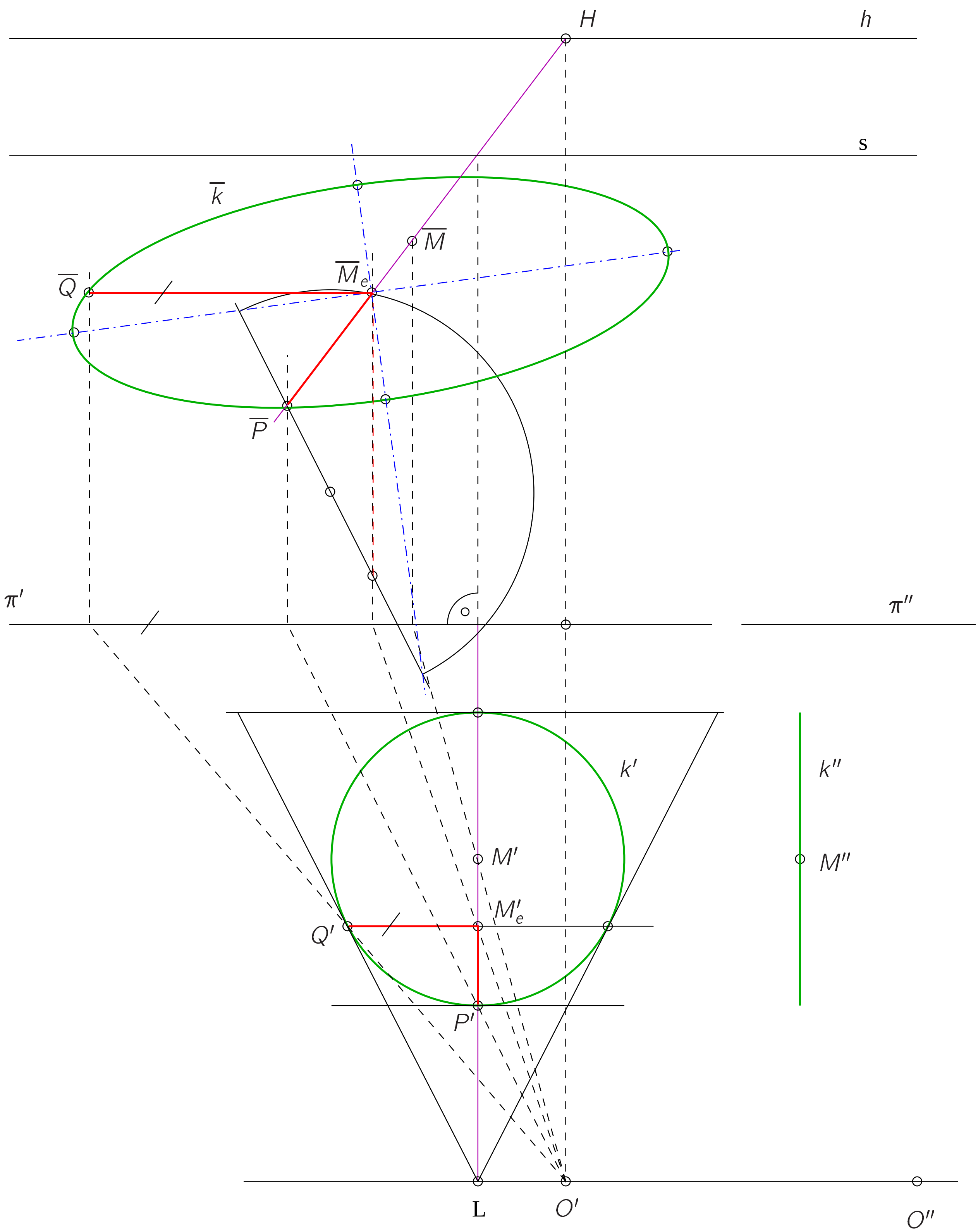



Abbildung 6.32: Zu Abb. 5.78 Projektion eines Kreises in der Standebene als Ellipse: Lösung

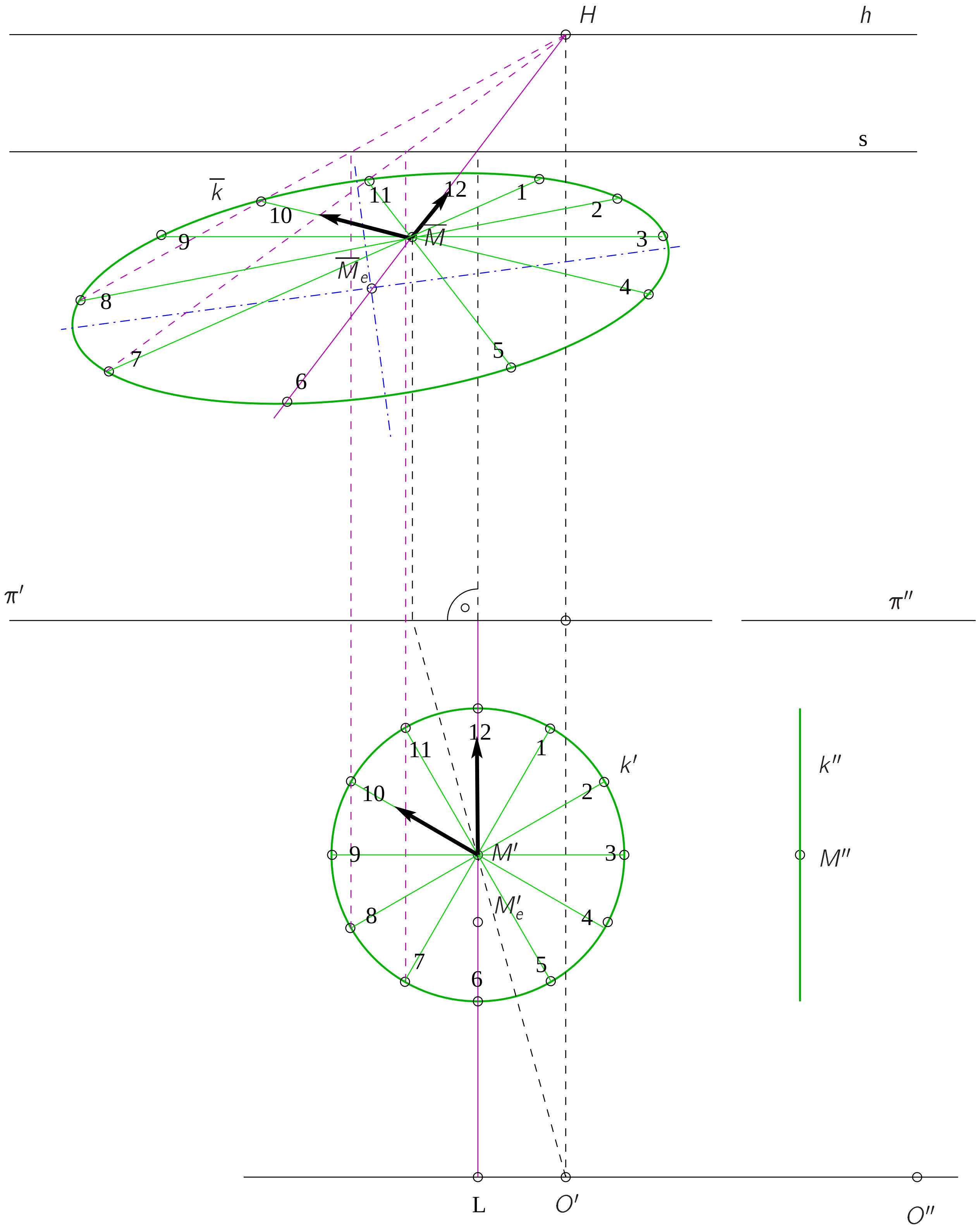



Abbildung 6.33: Zu Abb. 5.78 Projektion eines Kreises in der Standebene als Ellipse: Lösung

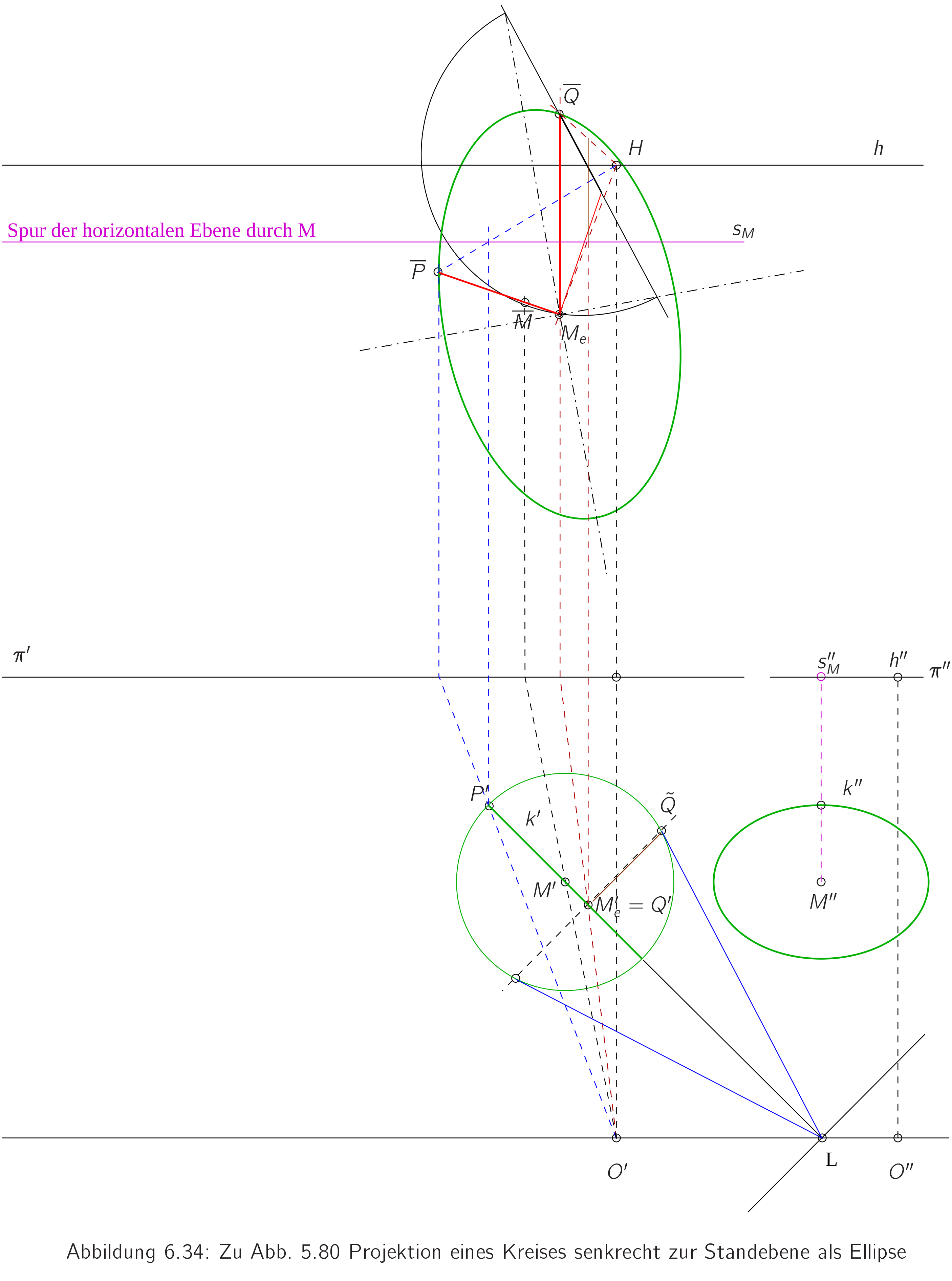



Abbildung 6.34: Zu Abb. 5.80 Projektion eines Kreises senkrecht zur Standebene als Ellipse

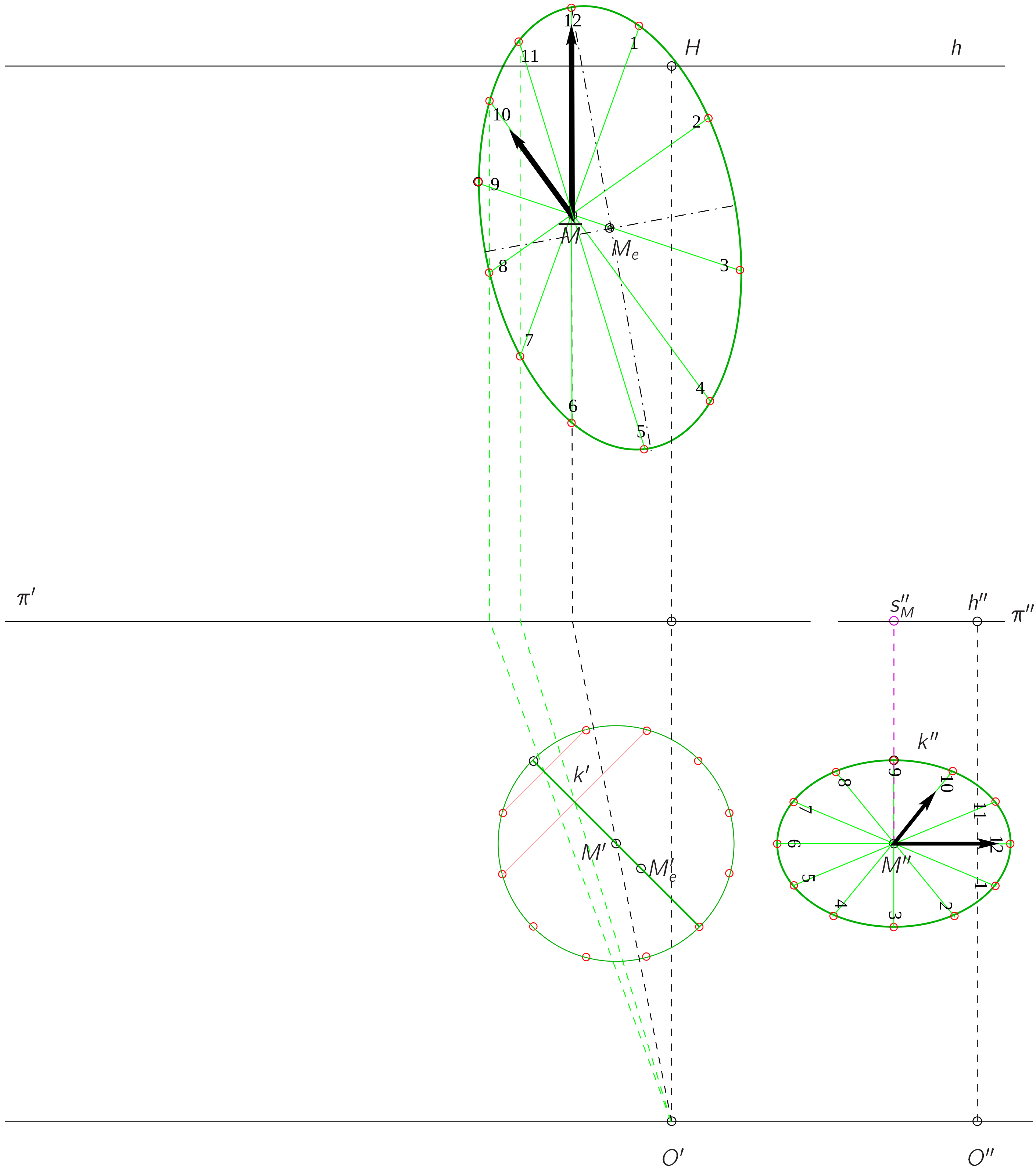



Abbildung 6.35: Zu Abb. 5.80 Projektion eines Kreises senkrecht zur Standebene als Ellipse

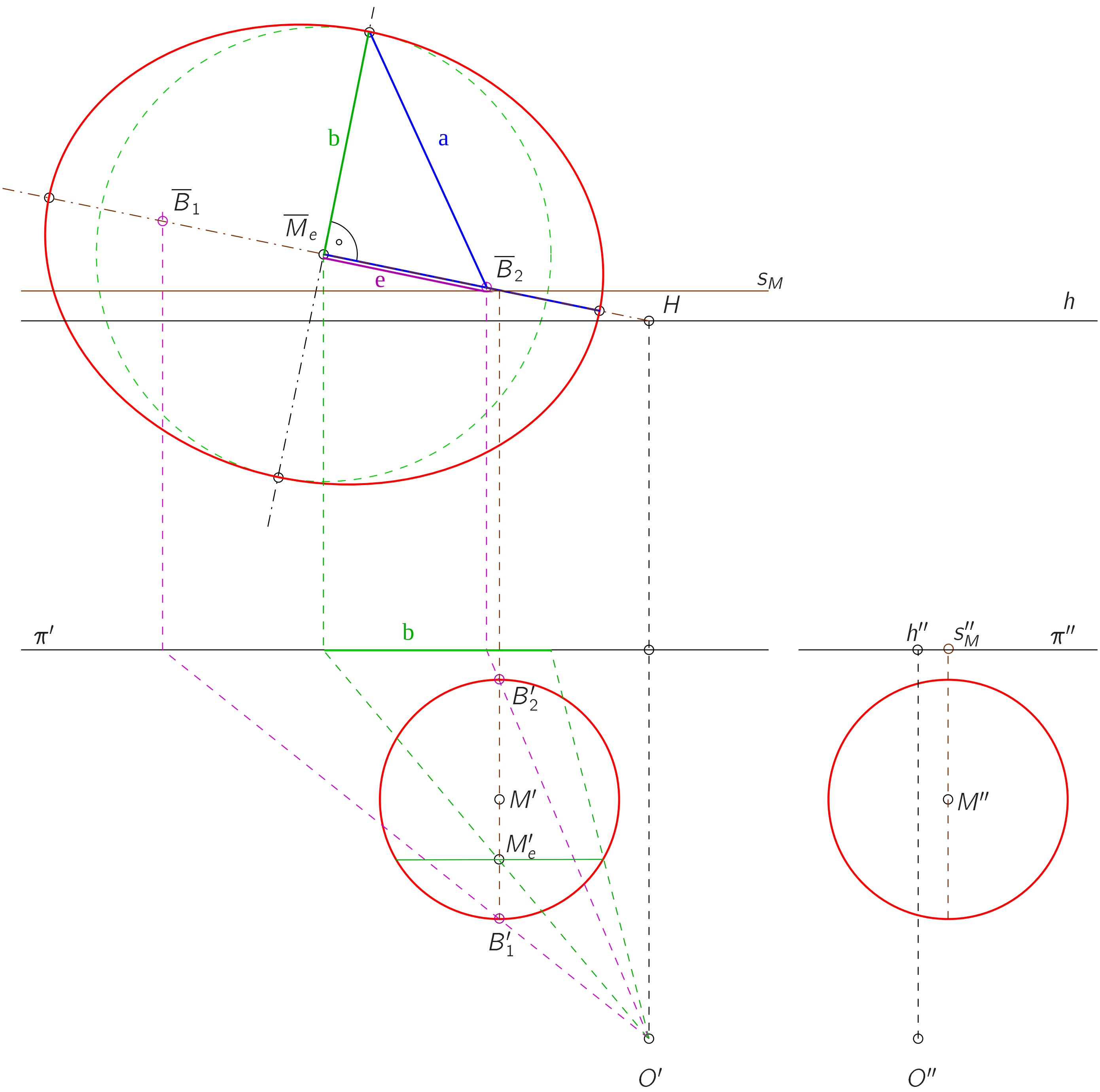



Abbildung 6.36: Zu Abb. 5.84 Projektion des Umrisses einer Kugel als Ellipse

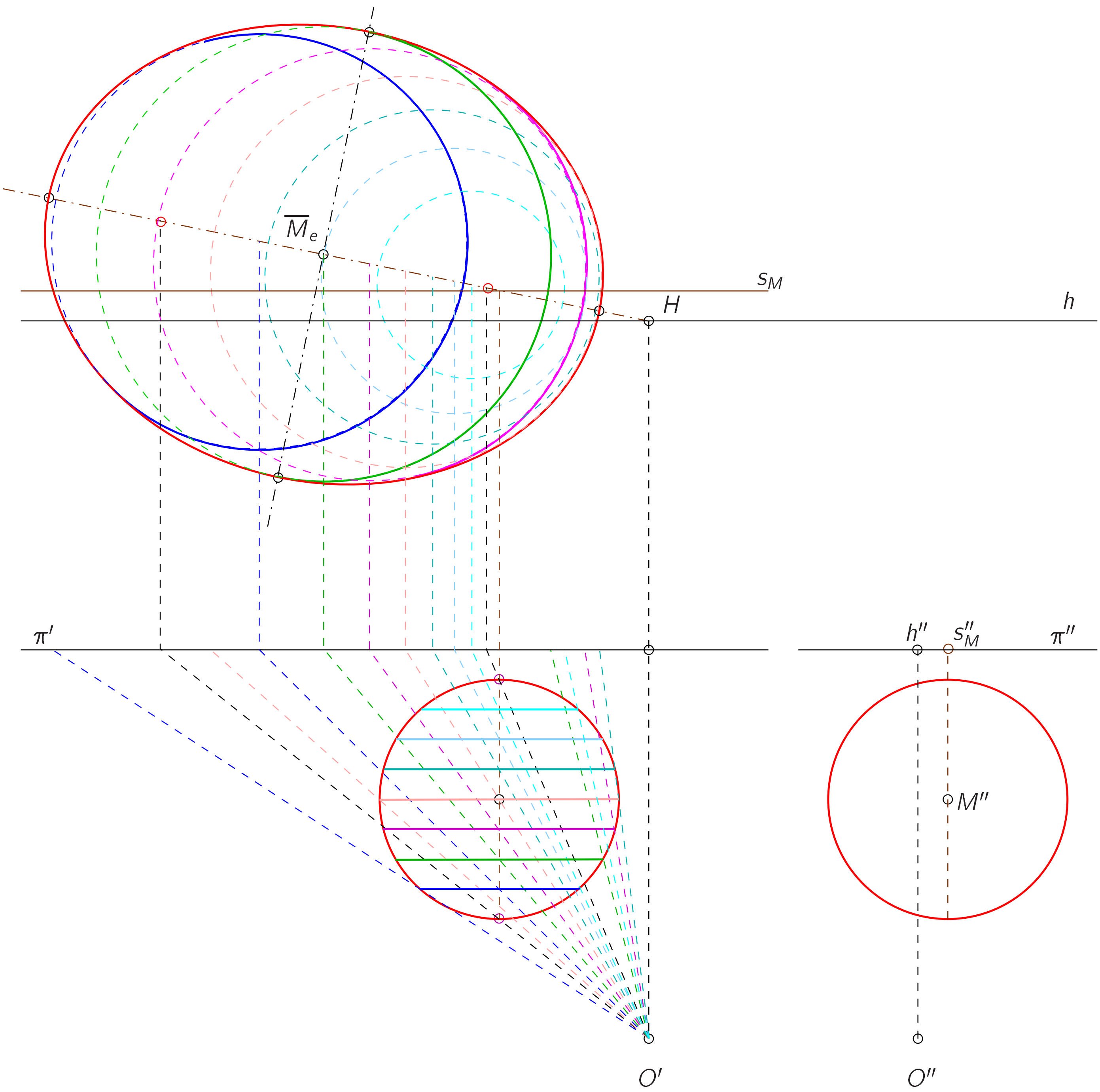



Abbildung 6.37: Zu. Abb. 5.84 Projektion des Umrisses einer Kugel als Ellipse

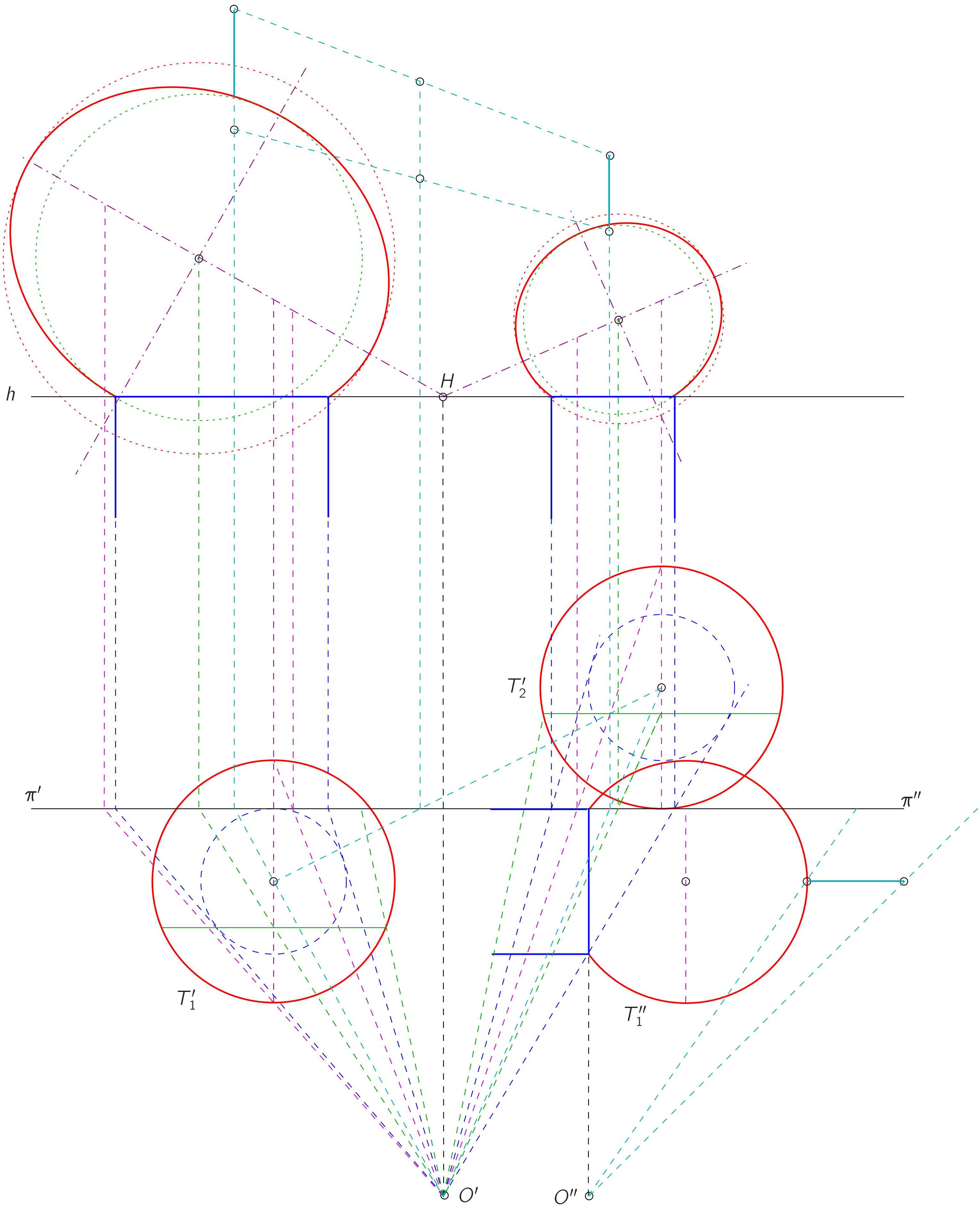



Abbildung 6.38: Zu Abb. 5.85 Projektion zweier Türme

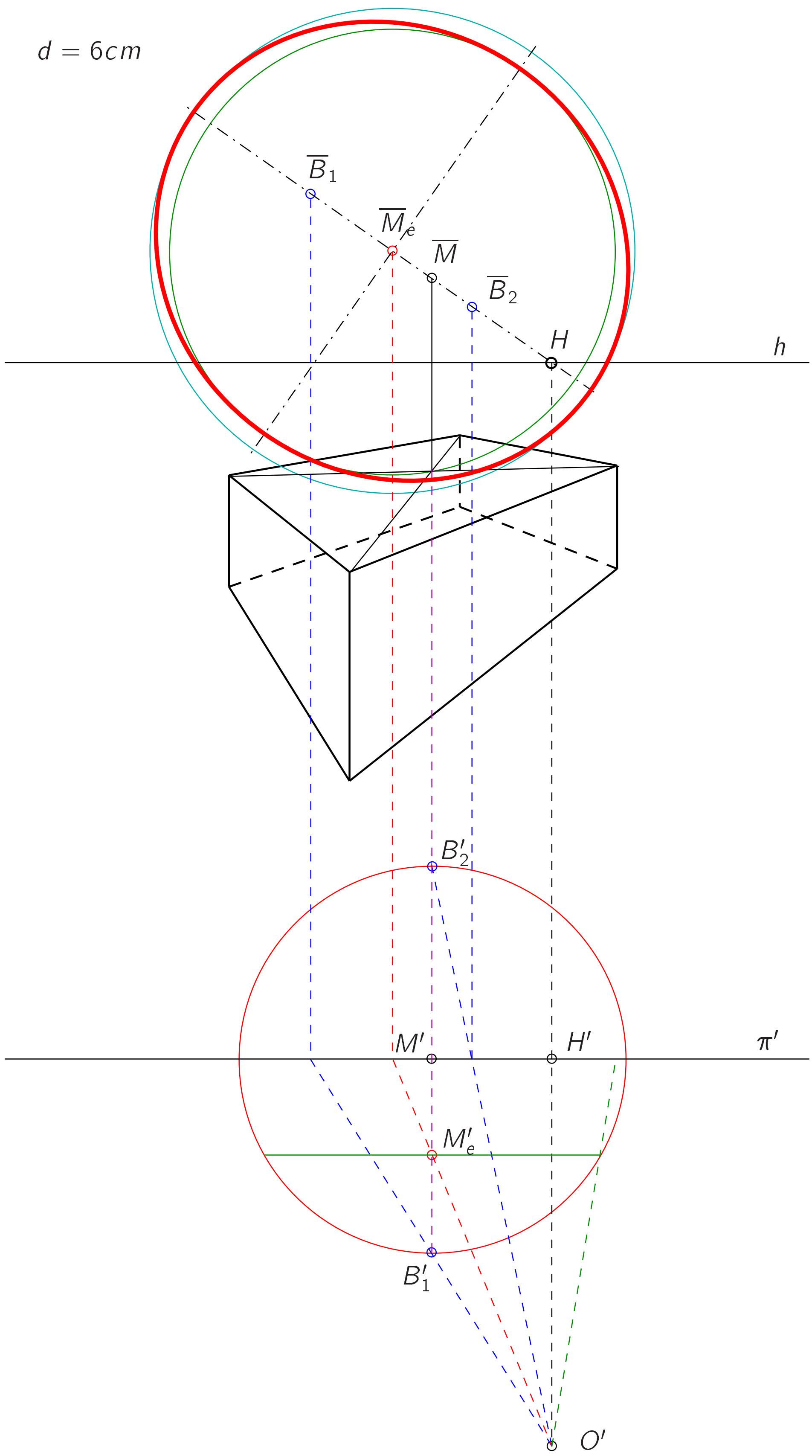



Abbildung 6.39: Zu Abb. 5.89 Konstruktion eines Kugelumrisses im perspektiven Bild

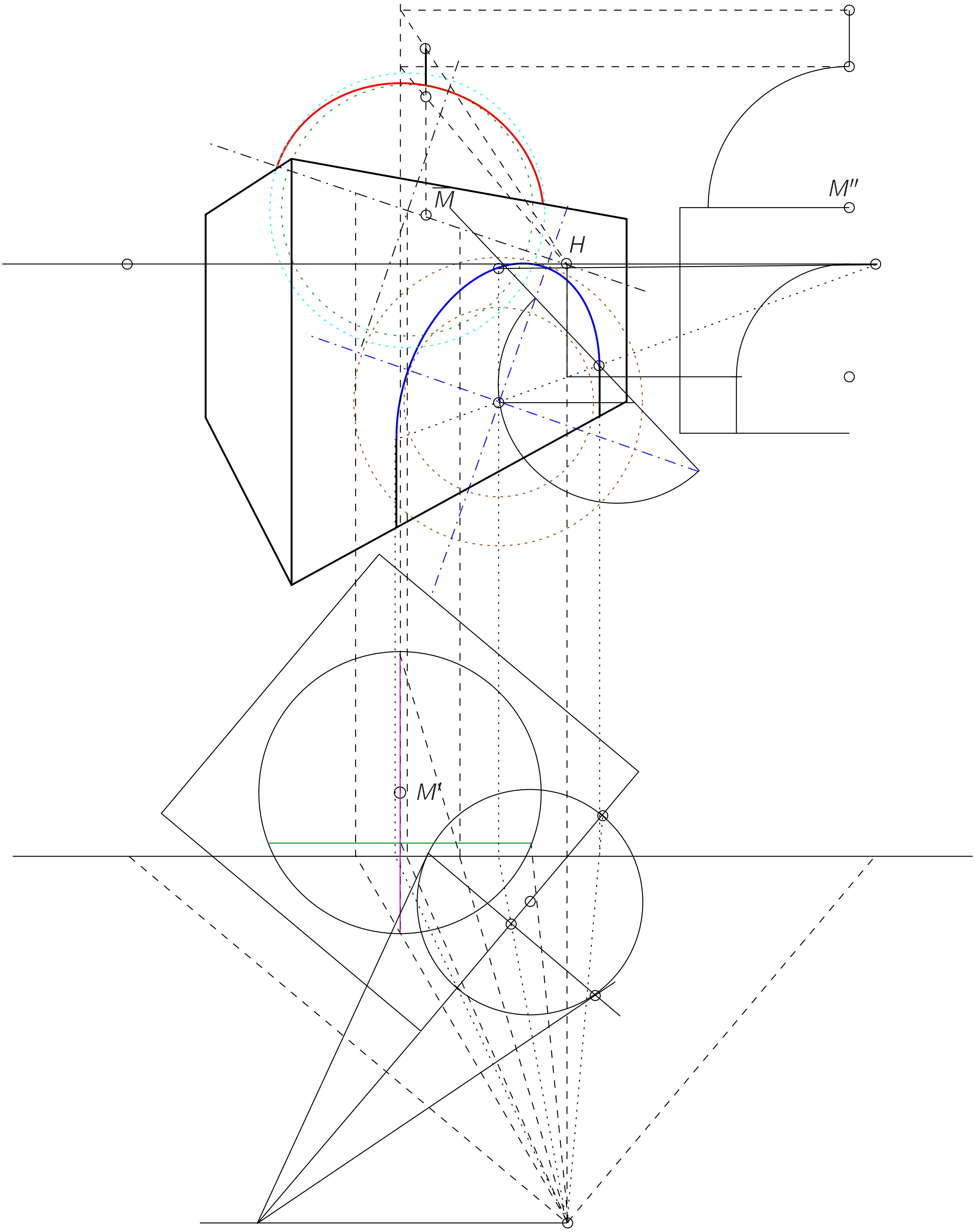



Abbildung 6.40: Zu Abb. 5.90 Projektion von Quader, Kugel und Kreis

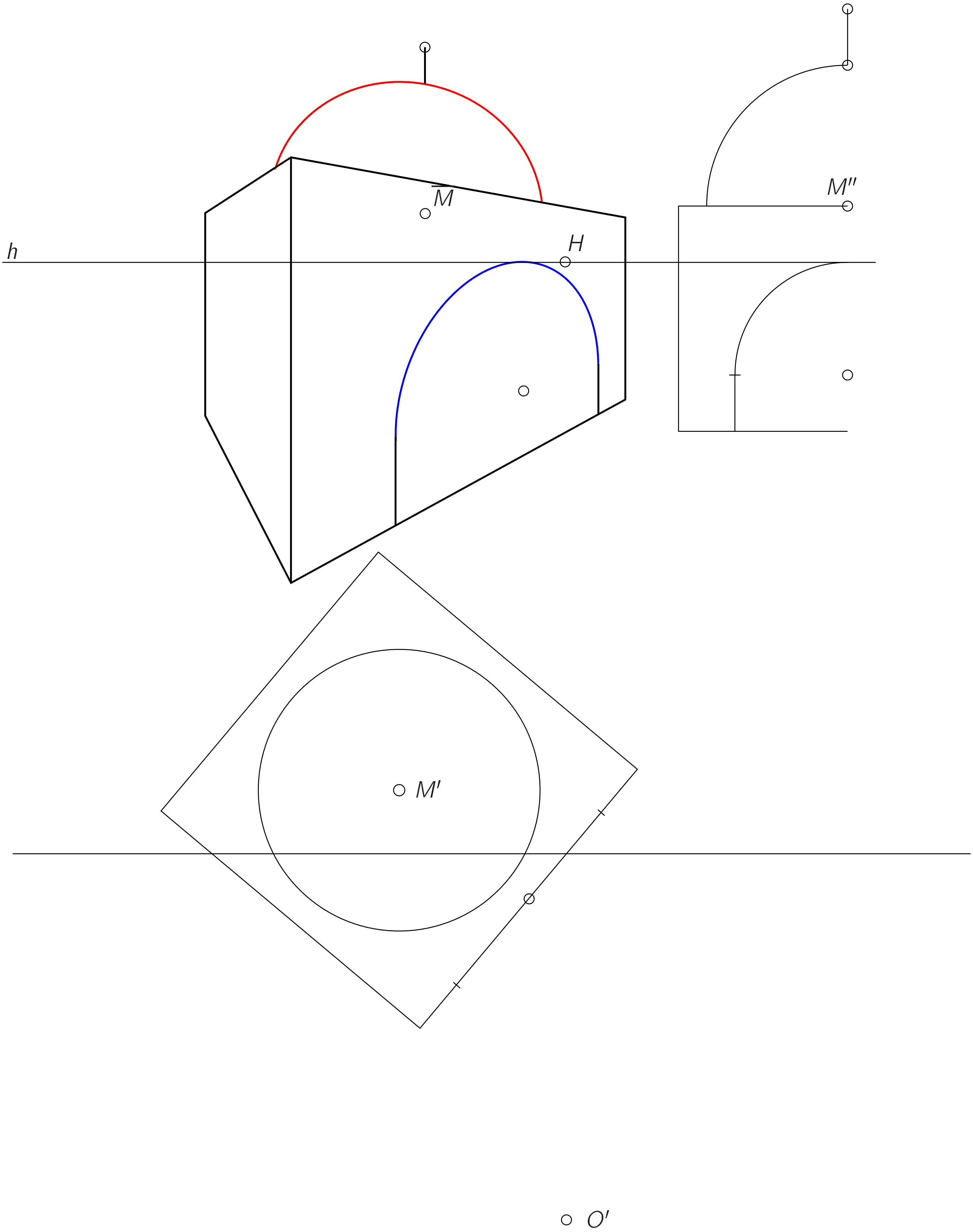



Abbildung 6.41: Zu Abb. 5.90 Projektion von Quader, Kugel und Kreis

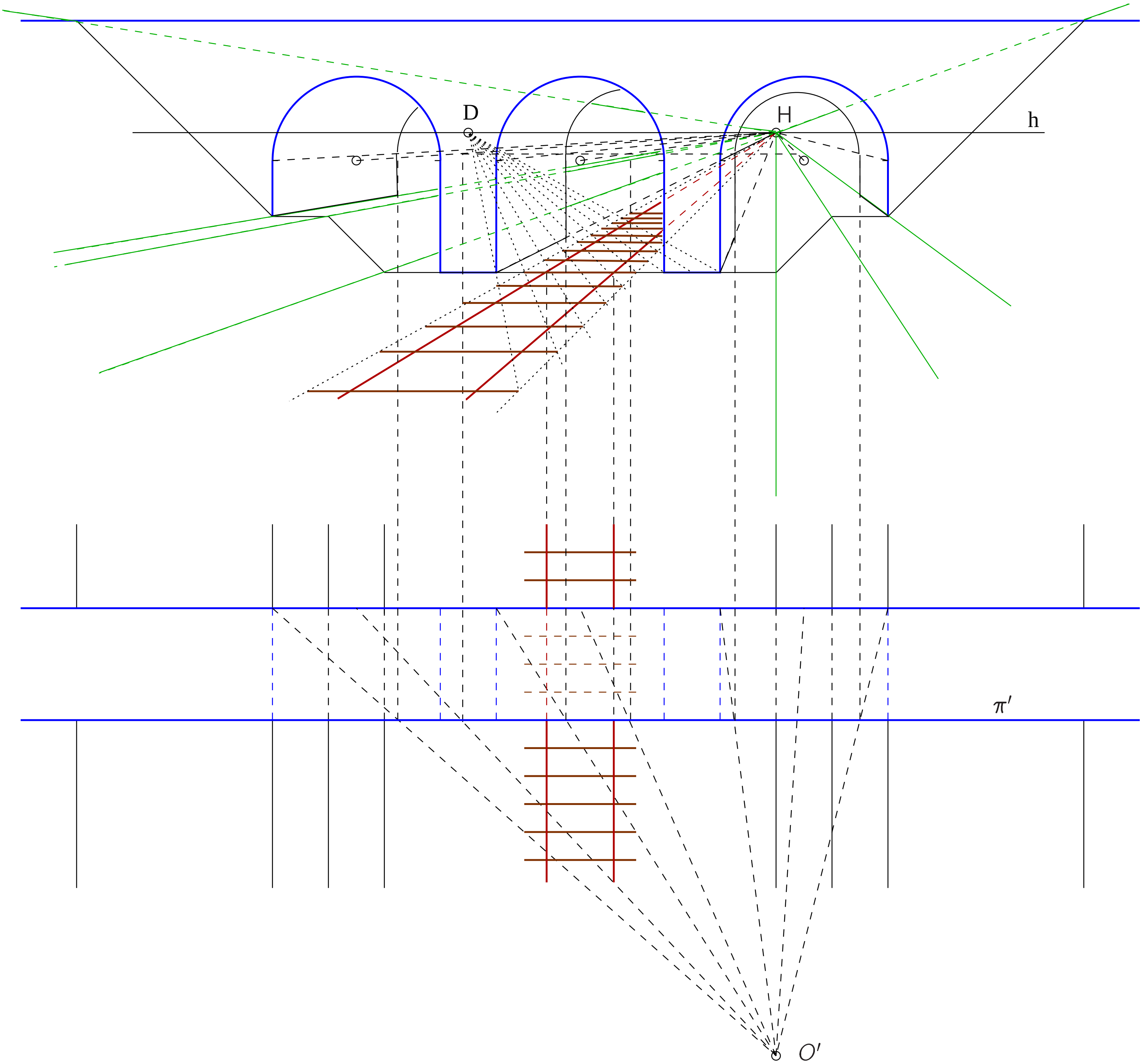



Abbildung 6.42: Zu 5.95 Frontalprojektion einer Bruecke

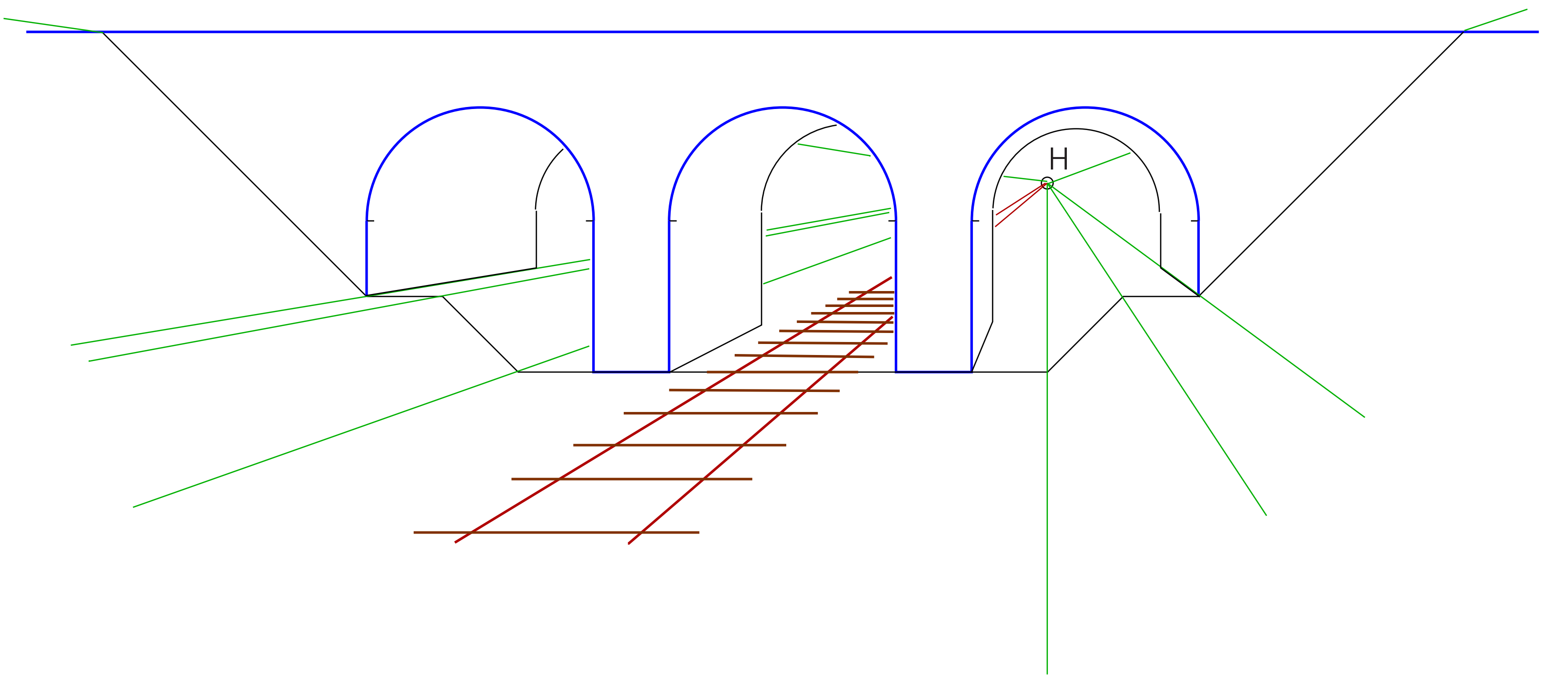
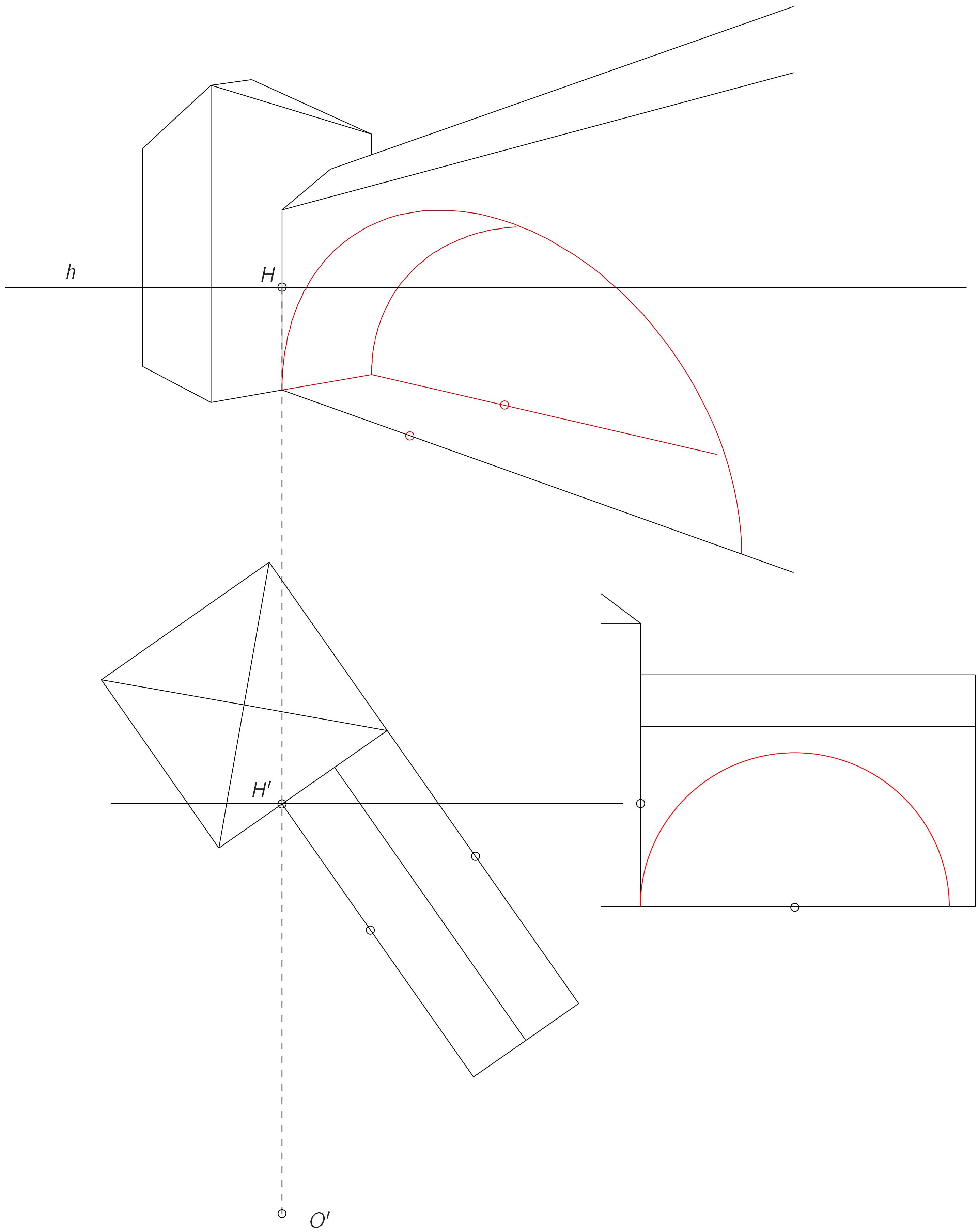



Abbildung 6.43: Zu 5.95 Frontalprojektion einer Bruecke


h
H
H′
O′

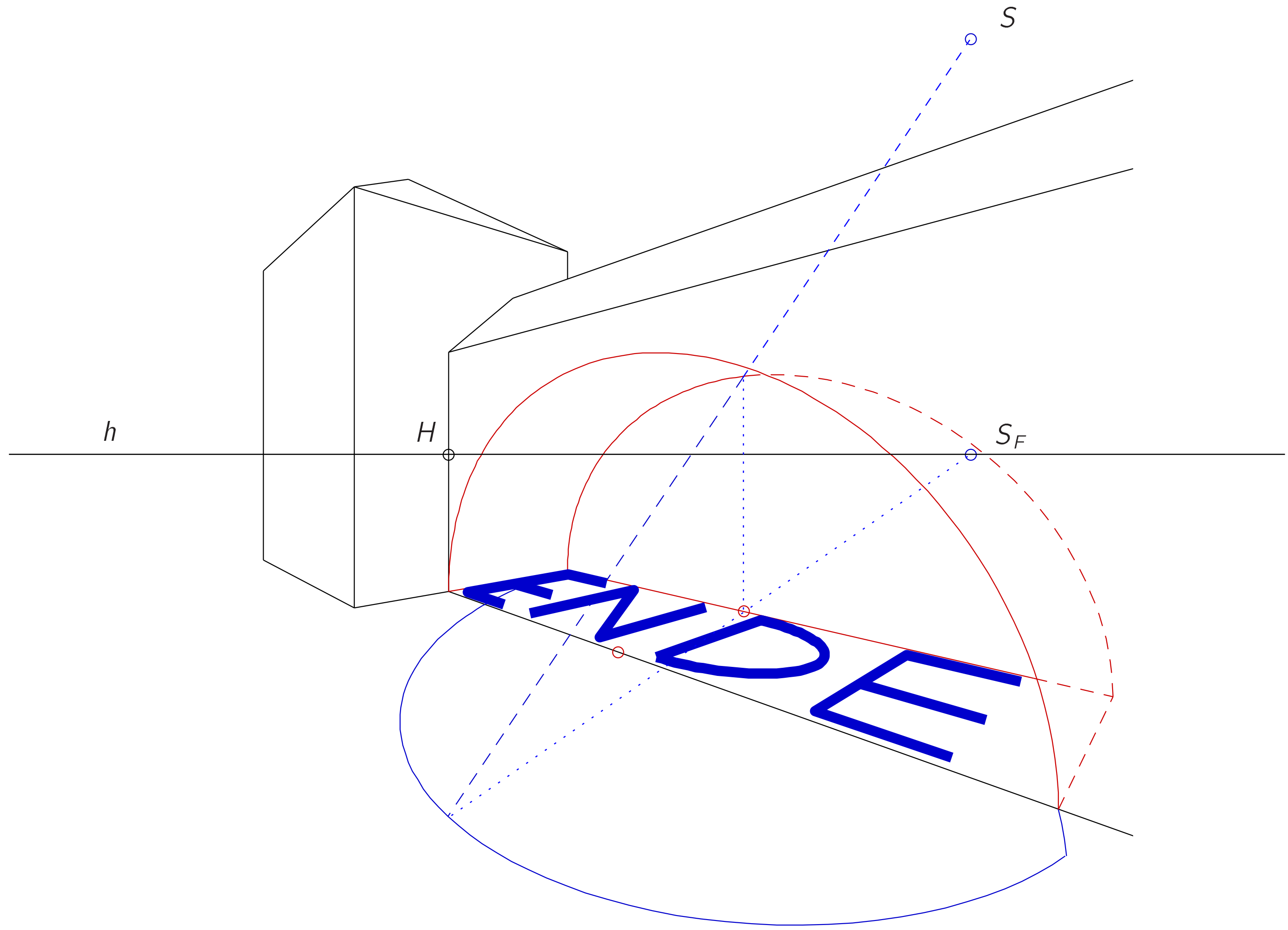



Abbildung 6.45: Zu Abb. 5.92: Schatten eines Torbogens bei gegebenem Sonnenlicht