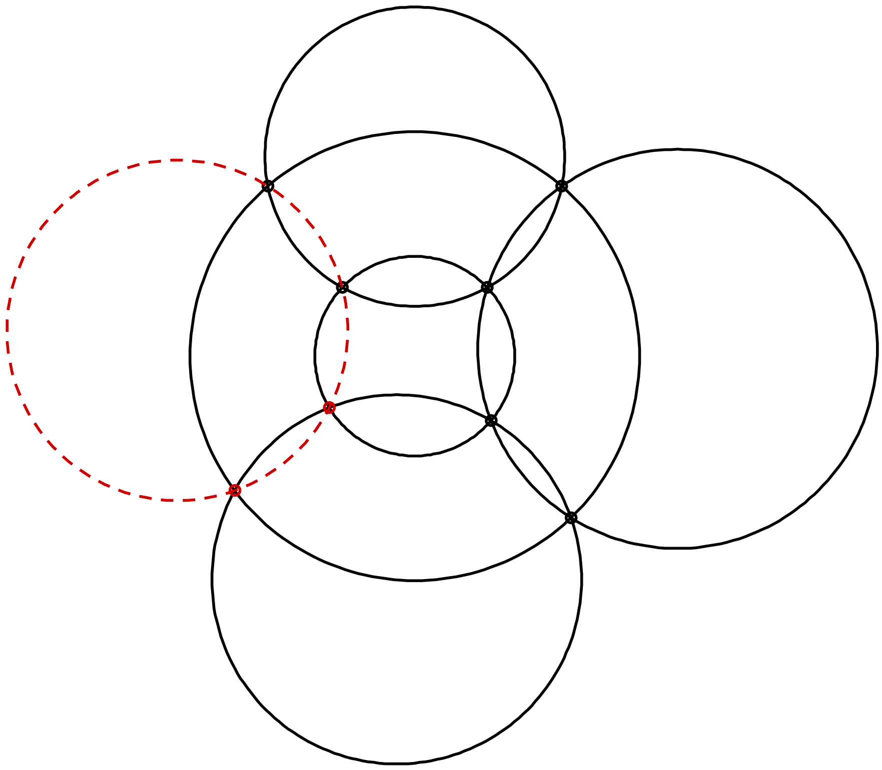
Ebene Kreisgeometrien

eine Einführung in die Möbius–, Laguerre– and Minkowski–Ebenen



Erich Hartmann

Fachbereich Mathematik
Technische Hochschule Darmstadt

Einleitung:

Eine affine Ebene ist aufgrund der Parallelitätsrelation auf der Menge der Geraden keine homogene Struktur (gewisse Geraden schneiden sich, andere schneiden sich nicht). Diese Inhomogenität läßt sich durch den Übergang zum projektiven Abschluß beseitigen (In einer projektiven Ebene schneiden sich je zwei Geraden !). Die Inhomogenität bezüglich der Beschreibung (eigentlicher Punkt, Fernpunkt) kann schließlich für desarguessche Ebenen durch ein räumliches Modell auch noch ausgeräumt werden.

Wir gehen jetzt von der reellen euklidischen Ebene aus und fassen die Menge der Geraden und die Menge der Kreise zu einer Blockmenge zusammen. Diese Konstruktion liefert eine sehr inhomogene Inzidenzstruktur. Denn durch je zwei Punkte gehen genau eine Gerade und beliebig viele Kreise. Der Trick, mit dem man diese Inzidenzstruktur in eine homogene Geometrie einbettet, ist die folgende Idee: Man füge der Punktmenge der reellen Ebene einen weiteren Punkt ∞ hinzu. ∞ soll mit jeder Geraden inzidieren. Jetzt ist ein Block durch genau *drei* Punkte eindeutig bestimmt. Diese "homogenisierte" Geometrie nennt man **klassische Möbius-Ebene**.

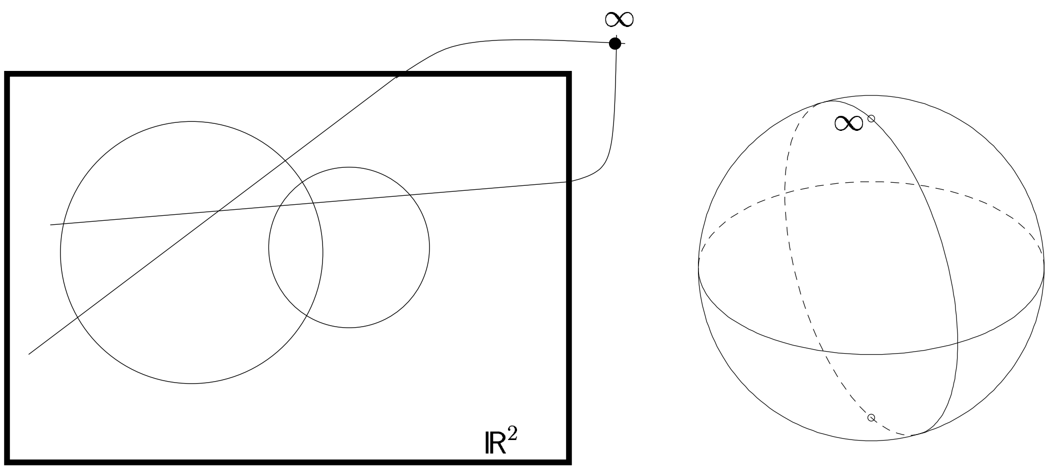


Figure 1: 2d– und 3d–Modell einer Moebius–Ebene

Die noch bestehende Inhomogenität der Beschreibung (Geraden, Kreise) läßt sich durch ein räumliches Modell beseitigen. Denn mittels einer "stereographischen Projektion" (vgl. §3) zeigt man, daß die klassische Möbius-Ebene zur Geometrie der ebenen Schnitte (Kreise) einer Kugel (im 3–dimensionalen reellen Raum) isomorph ist.
Analog zu den (axiomatischen) projektiven Ebenen nennt man eine Inzidenzstruktur, die im "wesentlichen" dasselbe Inzidenzverhalten hat wie die klassische Möbius-Ebene, (axiomatische) **Möbius–Ebene** (vgl. §3). Es gibt (wie zu erwarten) sehr viele Möbius-Ebenen, die von dem klassischen Modell verschieden sind

Geht man von $\mathbb{R}^2$ aus und nimmt die Kurven der Form $y = ax^2 + bx + c$ (Parabeln und Geraden) als Blöcke, so erweist sich folgende Homogenisierung als nützlich: Man nimmt zur Kurve $y = ax^2 + bx + c$ noch den uneigentlichen Punkt (∞, a) hinzu, d.h. die

Punktmenge besteht jetzt aus $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \times \mathbb{R}$. Diese Geometrie der Parabeln nennt man **klassische Laguerre–Ebene** (Sie wurde ursprünglich als die Geometrie der gerichteten Geraden und Kreise formuliert, vgl. BE73. Beide Geometrien sind zueinander isomorph.).

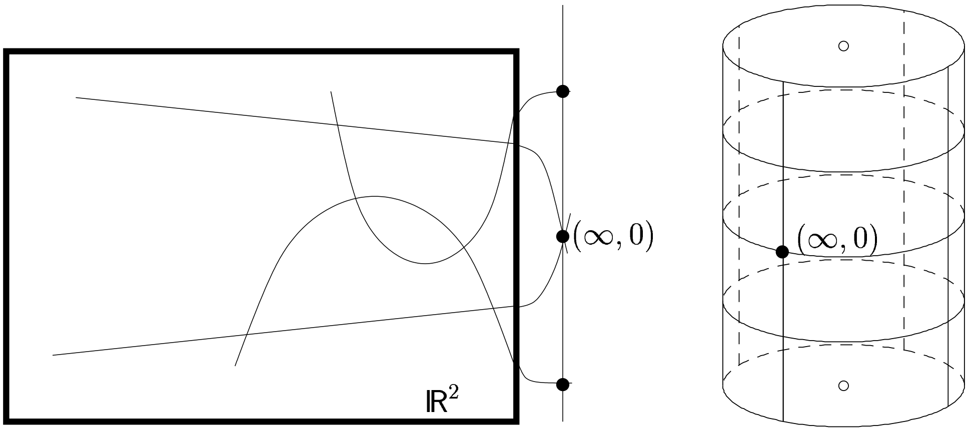


Figure 2: 2d– und 3d–Modell einer Laguerre–Ebene

Auch zur klassischen Laguerre–Ebene gibt es ein räumliches Modell: Sie ist zur Geometrie der ebenen Schnitte auf einem senkrechten Kreiszylinder (im $\mathbb{R}^3$) isomorph (vgl. §4). Eine Abstraktion führt (wie bei der Möbius–Ebene) zur (axiomatischen) **Laguerre–Ebene**.

Geht man schließlich von $\mathbb{R}^2$ aus und nimmt zu den Geraden $y = mx + d, m \neq 0$, noch die Hyperbeln $y = \frac{a}{x-b} + c, a \neq 0$, als Blöcke hinzu, so führt die folgende Idee zu einer homogenen Inzidenzstruktur: Man füge jeder Gerade den Punkt (∞, ∞) und jeder Hyperbel $y = \frac{a}{x-b} + c$ die Punkte $(b, \infty), (\infty, c)$ hinzu; d.h. die Punktmenge besteht in diesem Fall aus $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})^2$. Diese Geometrie der Hyperbeln nennt man **klassische Minkowski–Ebene**.

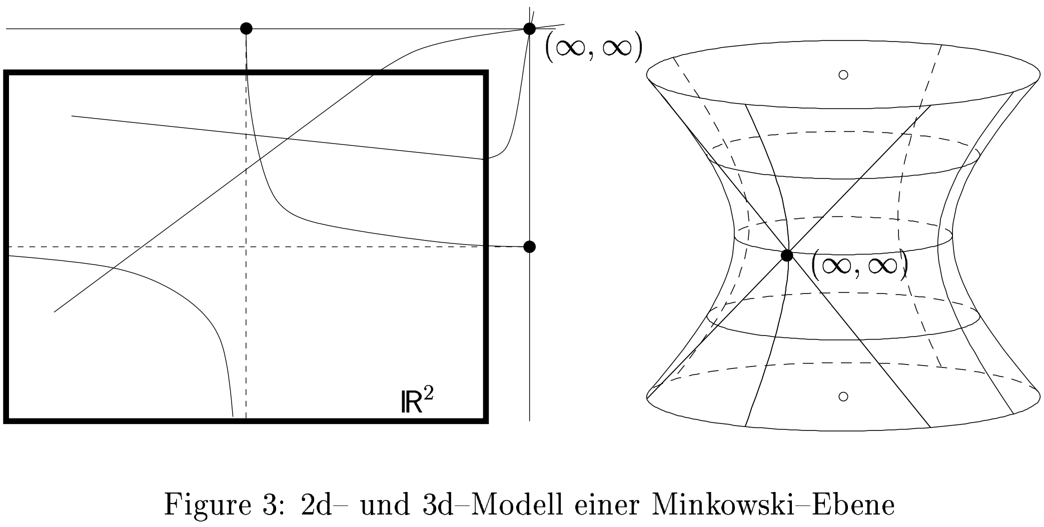


Figure 3: 2d– und 3d–Modell einer Minkowski–Ebene

Wie bei den klassischen Möbius– und Laguerre–Ebenen gibt es auch hier ein räumliches Modell: Die klassische Minkowski–Ebene ist zur Geometrie der ebenen Schnitte auf einem einschaligen Hyperboloid (nicht ausgeartete Quadrik vom Index 2) im 3–dimensionalen reellen projektiven Raum isomorph (vgl. §5). Wie bei den ersten beiden Fällen gelangt man dann zur (axiomatischen) **Minkowski–Ebene**.

Da die Blöcke in jedem der drei Fälle projektiv Kreise (nicht ausgeartete Kegelschnitte) sind benutzt man als Sammelbegriff für diese Geometrien die Bezeichnung **ebene Kreisgeometrien**. Das Wort *eben* soll andeuten, daß es auch höher dimensionale Möbius–, Laguerre– und Minkowski–Ebenen gibt. Ferner ist zu beachten, daß die hier behandelten Kreisgeometrien von dem allgemeineren Standpunkt in BE73, S. 205, aus Kreisgeometrien "im engeren Sinn" sind.

Die wichtigsten Klassen der ebenen Kreisgeometrien werden über Körper mit Hilfe von Kegelschnitten konstruiert. Deswegen wurde ein Paragraph über "ovale Kegelschnitte" (§2) mit aufgenommen. Um die zugehörigen räumlichen Modelle dieser Beispielklassen verstehen zu können, wurde ein Anhang über Quadriken (§6) hinzugefügt. Der Anhang über Fastkörper (§7) ist zum Verständnis einer großen Klasse von Minkowski–Ebenen wichtig.

Das vorliegende Skript richtet sich an Studenten, die eine Vorlesung über die Grundlagen der (linearen) Geometrie gehört haben und sich in das Gebiet der ebenen Kreisgeometrien einarbeiten möchten. Besonderer Wert wurde auf die Angabe von Beispielen gelegt. Tieferliegende Resultate werden nur zitiert, um den Rahmen des Skriptes nicht zu sprengen. Die zahlreichen Ergebnisse über Möbius–Ebenen in den Büchern von BENZ (BE73) und DEMBOWSKI (DE68), die über eine Einführung hinausgehen, wurden nicht übernommen. Dem Leser sei in jedem Fall das Studium dieser Bücher empfohlen. Das "Speermodell" der klassischen Laguerre–Ebene und die Darstellung einer miquelschen Laguerre–Ebene über "duale Zahlen" (vgl. BE73) werden hier nicht besprochen, da die meisten Betrachtungen über Laguerre–Ebenen auch ohne dies Beschreibungen auskommen.