Beweise

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Mathematik als sichere Wissenschaft

Eines der Alleinstellungsmerkmale der Mathematik unter den Wissenschaften ist die Forderung nach strengen Beweisen. Anders als die meisten anderen Wissenschaften gewinnt die Mathematik ihre Erkenntnisse nicht grundlegend aus empirischen Beobachtungen, sondern aus theoretischen Ableitungen. So ist es der Mathematik möglich, zu sicherem Wissen zu kommen. Erst in der Motivation von neuen mathematischen Forschungsobjekten und Fragestellungen sowie in der Modellbildung zu Anwendungszwecken spielen empirische Methoden wieder eine Rolle.

Beweise in der Mathematik

Um zu neuer Erkenntnis zu gelangen, setzt die Mathematik auf Beweise. Ein mathematischer Beweis ist dabei eine Argumentationskette, die aus gewissen Annahmen die Behauptung herleitet. Dabei genügt es nicht, die Behauptung nur plausibel zu machen, oder sie mit genug Daten und Beispielen zu unterfüttern: Der Anspruch an einen mathematischen Beweis ist eine hieb- und stichfeste Begründung, die zumindest prinzipiell, nach genug Überlegung, nicht anzweifelbar ist.

Die Wurzel aus 2 ist irrational

Als Beispiel wollen wir zeigen, dass die Wurzel aus 2 irrational ist, sich also nicht als Bruch $\frac{a}{b}$ zweier natürlicher Zahlen a und b schreiben lässt. Dieser Beweis wird i.d.R. Euklid (ca. 300 v. Chr.) zugeschrieben, war aber schon vorher bekannt. Der Beweis folgt der Idee eines Widerspruchsbeweises. Wir nehmen also an, dass es natürliche Zahlen a und b gibt, die $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ erfüllen, und führen dies zu einem Widerspruch.

Sei also $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Wenn a und b einen gemeinsamen Teiler außer 1 haben, so können wir den Bruch mit dem Teiler kürzen. Wir können also davon ausgehen, dass a und b keinen gemeinsamen Teiler haben. Quadrieren wir die Gleichung $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, so erhalten wir $2 = \frac{a^2}{b^2}$, also $a^2 = 2b^2$. Also ist a^2 und damit auch a gerade. Es gibt also eine natürliche Zahl c mit $a = 2c$. Dann ist $2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2$, also $b^2 = 2c^2$. Also ist auch b^2 und damit b gerade. Damit wäre aber 2 ein gemeinsamer Teiler von a und b, was unserer Annahme widerspricht.

Darstellung Euklids, Ausschnitt aus Raffaels *La scuola di Atene*, 1510

Um sicherzugehen, dass wir keine Argumentationslücken übersehen haben, können wir überprüfen, wo wir die verschiedenen Annahmen im Beweis benutzt haben.

- Wo im Beweis haben wir benutzt, dass a und b natürliche Zahlen sind?
- Wo im Beweis haben wir benutzt, dass wir $\sqrt{2}$ untersuchen? Welcher Beweisschritt bricht etwa für $\sqrt{4} = 2$?

Eine erfolgreich bewiesene mathematische Aussage lädt auch immer dazu ein, nach Verallgemeinerungen zu fragen:

- Für welche anderen natürlichen Zahlen n ist $\sqrt{n}$ irrational?
- Was ist mit höheren Wurzeln, etwa $\sqrt[3]{2}$?

Versuch dich doch mal daran!

Beweiskalküle

Während der theoretische Anspruch an mathematische Beweise hoch ist, ist es im Alltag meist unpraktikabel Beweise in der Formalität aufzuschreiben. Daher wählt man einen Kompromiss zwischen Rigorosität und Praktikabilität und begnügt sich damit, den Beweis so formal aufzuschreiben, dass man ihn, sollten noch Zweifel bestehen, jederzeit formalisieren könnte.

Will man jedoch ganz sicher gehen, gibt es Formalismen, um Beweise so genau aufzuschreiben, dass sie selbst mit einem Computer überprüft werden können. Solche Formalismen sind *Beweiskalküle*. Diese erlauben nur wenige Axiome als Grundannahmen, die nicht weiter bewiesen werden müssen, und erlauben dann durch sogenannte *Schlussregeln* weitere Aussagen daraus herzuleiten.

Ein Beweis im Kalkül ist eine Folge von Aussagen, wobei jede Aussage entweder ein Axiom ist, oder durch Anwendung einer Schlussregel aus vorherigen Aussagen folgt. Um einen solchen Beweis auf Korrektheit zu prüfen, muss man den Beweis nicht verstehen; es genügt stumpf zu überprüfen, ob jede neue Aussage entweder ein Axiom ist, oder durch eine Anwendung einer Schlussregel aus vorherigen Aussagen folgt. Dies kann also selbst ein Computer erledigen!

Hilbert-Kalküle sind Beweiskalküle, die mit besonders wenigen Schlussregeln auskommen. Sie gehen auf Gottlob Frege (1848 – 1925) und David Hilbert (1862 – 1943) zurück. Als Beispiel betrachten wir einen Hilbertkalkül für die Aussagenlogik, mithilfe dessen sich allgemeingültige Aussagen über boolesche Variablen, d.h. Variablen, die nur die Werte ‚wahr' und ‚falsch' annehmen können, beweisen lassen.

David Hilbert, Fotografie, 1912

Gottlob Frege, Fotografie, 1878/79

Unser Kalkül benutzt drei Axiome, das heißt Grundannahmen, die nicht weiter bewiesen werden müssen. Für diese muss man also „von Hand" überprüfen, dass sie mit unseren Intuitionen zur Aussagenlogik übereinstimmen.

1. Axiom $A \to (B \to A)$

2. Axiom $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

3. Axiom $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

Hierbei sind A, B und C beliebige Aussagen, $A \to B$ steht für die Aussage ‚A *impliziert* B' und $\neg A$ steht für die Aussage ‚*nicht* A'.

Als einzige Schlussregel benötigt unser Beweiskalkül die Regel *Modus ponens*:

Modus ponens: Aus den Aussagen A und $A \to B$ folgt die Aussage B.

Überraschenderweise stellt sich heraus, dass schon ein so einfacher Kalkül ausreicht, um alle allgemeingültigen Aussagen der Aussagenlogik zu beweisen. Es ist jedoch nicht immer einfach, einen solchen Beweis auch zu finden. Wie lässt sich etwa im obigen Kalkül die allgemeingültige Aussage $A \to A$ beweisen?

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Logik

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Handout