Logik, Spiele, Strategien

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Logiken als formale Sprachen

Untersuchungsgegenstand der mathematischen Logik sind *formale* Sprachen zur Präzisierung mathematischer Sachverhalte. Ein einfaches Beispiel für mathematische Objekte sind *Graphen*, also Mengen von Punkten („Knoten“), von denen jeweils zwei durch eine Kante verbunden sein können. Als Beispiel für eine Sprache („Logik“), in der Aussagen über Graphen formalisiert werden können, lassen wir folgende Ausdrucksmöglichkeiten zu:

$\exists x$ („für einen Knoten x gilt...“),
$\forall x$ („für alle Knoten x gilt...“),
Exy („zwischen x und y ist eine Kante“)
$x = y$ („x und y sind der gleiche Knoten“)
$\neg$ („nicht“) $\quad\vee$ („oder“) $\quad\wedge$ („und“)

In dieser Logik („erststufige Prädikatenlogik“) sind zum Beispiel Aussagen wie

$$\exists x\, \forall y\, (x = y \vee Exy)$$

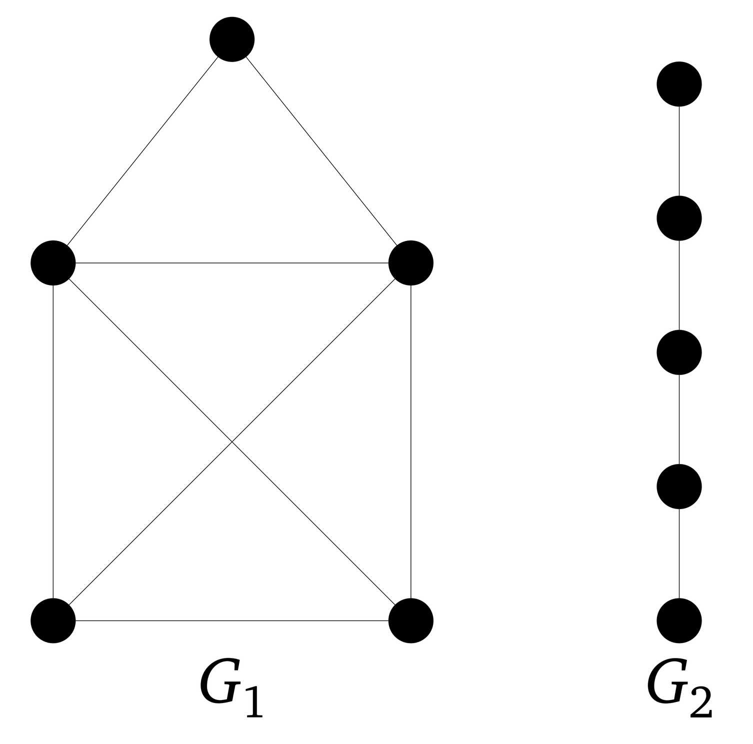
möglich. In natürlicher Sprache: Es gibt einen Knoten, der mit allen anderen Knoten verbunden ist. Im Beispielgraph G_1 ist das der Fall, im Graph G_2 nicht.

Uns interessieren nun Fragen wie:

- Wie können wir prüfen, ob eine Aussage in einem Graph gilt oder nicht?
- Ist es möglich, die Aussage „Der Graph kann ohne abzusetzen gezeichnet werden“ (Haus vom Nikolaus) in dieser Logik auszudrücken?
- Wie kann man beweisen, dass es *nicht* möglich ist, eine bestimmte Eigenschaft in dieser Logik auszudrücken?

Als ein wichtiges Hilfsmittel zur Beantwortung dieser und weiterer Fragen werden in der Logik verschiedene Zweipersonenspiele verwendet. Zwei dieser Spiele, das Prüfspiel und das Vergleichsspiel, wollen wir hier vorstellen. Mit dem Vergleichsspiel kann man etwa zeigen, dass es *keinen* Satz in der von uns hier betrachteten Logik gibt, der in einem Graphen G genau dann erfüllt ist, wenn er wie das Haus vom Nikolaus ohne abzusetzen gezeichnet werden kann. Damit lassen sich beispielweise grundsätzliche Beschränkungen der Datenbankabfragesprache SQL beweisen.

Beispiele für Graphen



im Netz

Lange Nacht der Mathematik

dieses Handout

Prüfspiele (Model Checking)

Beim Prüfspiel versucht Alice (die „Überzeugerin“), Bob (den „Zweifler“) davon zu überzeugen, dass in einem gegebenen Graph eine Formel der Form

$$Q_1x_1\,Q_2x_2\ldots Q_kx_k\varphi(x_1,\ldots,x_k)$$

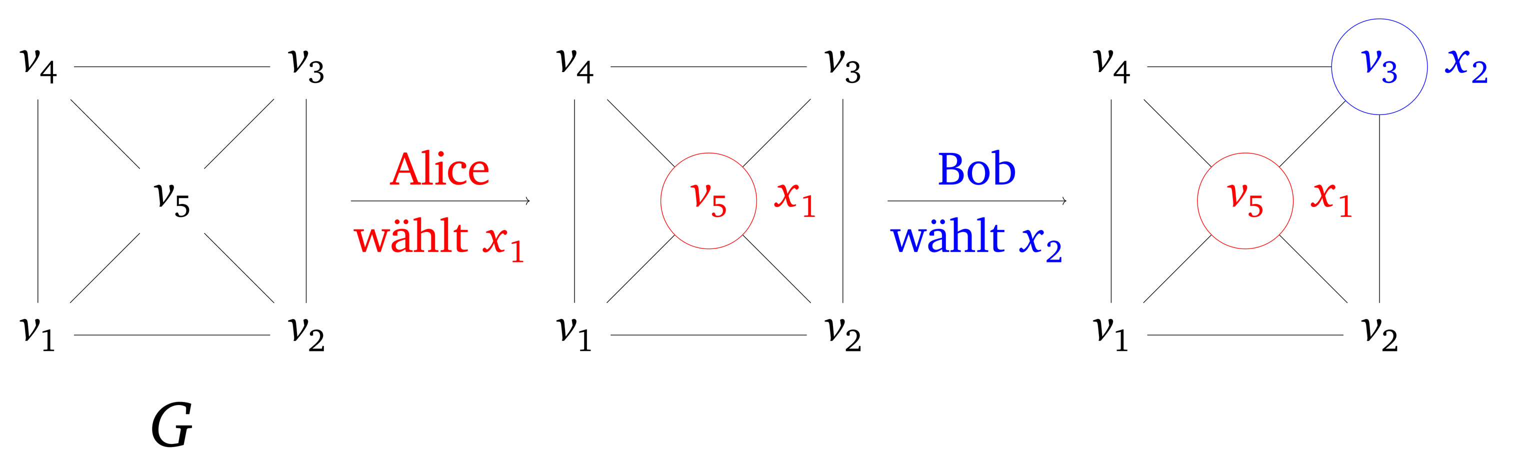
wahr ist. $Q_1,\ldots,Q_k$ sind dabei jeweils entweder $\exists$ oder $\forall$, und in der Formel φ kommen nur die Variablen $x_1,\ldots,x_k$, $=$, E, $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ vor (also *kein* $\forall$ und *kein* $\exists$).

Das Spiel läuft in k Runden. In der i-ten Runde darf sich, falls $Q_i = \exists$ gilt, Alice einen Knoten für x_i aussuchen. Falls $Q_i = \forall$ gilt darf dagegen Bob einen Knoten für x_i aussuchen. Alice gewinnt, wenn nach der k-ten Runde die ausgesuchten Knoten die Formel φ erfüllen.

Beispiel: Wir betrachten die Formel

$$\exists x_1\,\forall x_2\,(Ex_1x_2 \vee x_1 = x_2)$$

und den Graphen G (siehe unten). Da die Formel mit $\exists$ beginnt, darf zunächst Alice einen Knoten für x_1 aussuchen, etwa Knoten v_5. In der zweiten Runde darf dann Bob einen Knoten für x_2 aussuchen, etwa v_3. Da eine Kante zwischen v_5 und v_3 existiert, ist die Formel Ex_1x_2 und damit auch $Ex_1x_2 \vee x_1 = x_2$ erfüllt, Alice gewinnt also.



Ein einzelner Spielverlauf ist dabei wenig aussagekräftig (der unterlegene Spieler könnte ja einfach schlecht gespielt haben). Man kann jedoch zeigen:

> Wenn $Q_1x_1\,Q_2x_2\ldots Q_kx_k\varphi(x_1,\ldots,x_k)$ in dem betrachteten Graphen gilt,
> und nur dann, kann Alice auf jeden Fall gewinnen
> (sie hat eine *Gewinnstrategie*).

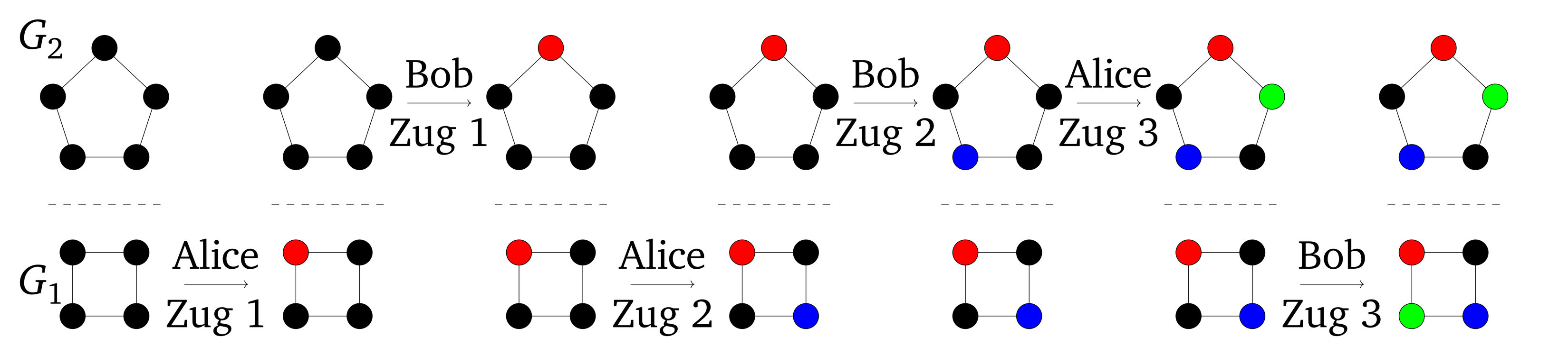
Vergleichsspiele (Back & Forth)

Auch beim Vergleichsspiel tritt Alice (Spielerin I, „Unterscheiderin“) gegen Bob (Spieler II, „Nachahmer“) an. Diesmal versucht Alice, Bob davon zu überzeugen, dass zwei gegebene Graphen G_1 und G_2 verschieden sind.

In der ersten Runde sucht sich Alice einen der beiden Graphen aus und markiert einen Knoten in ihm mit der Variablen x_1. Bob muss dann einen Knoten *des anderen Graphen* ebenfalls mit x_1 markieren. In jeder weiteren Runde darf sich Alice erneut einen der beiden Graphen aussuchen und dort wieder einen Knoten mit der nächsten Variablen x_i belegen, und Bob muss im jeweils anderen Graphen antworten. Dabei dürfen Knoten auch mit mehreren Variablen markiert werden.

Nach k Runden hat Alice gewonnen, wenn alle Formeln der Form $x_i = x_j$ und Ex_ix_j $(1 \le i, j \le k)$ entweder in beiden Graphen oder in keinem der beiden gelten. Anderenfalls gewinnt Bob.

Beispiel:



Nach drei Runden hat Alice dieses Spiel gewonnen, da es in G_1 eine Kante zwischen dem blauen (x_2) und dem grünen (x_3) Knoten gibt, in G_2 jedoch nicht. Für seinen letzten Zug hätte Bob auch keine Möglichkeit mehr gehabt, in G_1 einen Knoten zu wählen, der weder bereits rot noch bereits blau ist und nicht mit dem blauen Knoten verbunden ist.

Auch hier geht es nicht um einen konkreten Spielverlauf, sondern um die Frage, ob Alice oder Bob eine Gewinnstrategie hat. Man kann zeigen:

> Wenn es eine Aussage der Form $Q_1x_2\ldots Q_kx_k\,\varphi$ gibt,
> die in G_1 aber nicht in G_2 gilt,
> dann hat Alice eine Gewinnstrategie im k-Runden Vergleichsspiel.
> (Dabei darf φ wieder weder $\exists$ noch $\forall$ enthalten.)
>
> Umgekehrt kann man aus einer Gewinnstrategie für Alice eine Formel
> konstruieren, die nur in einem der beiden Graphen gilt.