



Muddy Children

Wer weiß wann was? Lange Nacht der Mathematik 2025



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Stell Dir vor...

... eine Gruppe von Kindern hat draußen gespielt und nun haben einige von ihnen Matsch auf der Stirn;

jedes Kind sieht genau, welche anderen Kinder Matsch auf der Stirn haben, keines weiß es von sich selbst.

Mindestens ein Kind hat Matsch auf der Stirn.

Aber alles perfekte Logiker natürlich ...

Aussagen, Fragen und Fragen und ... und Antworten?

Beobachter zu allen: Da hat ja jemand Matsch auf der Stirn.

Beobachter fragt alle zusammen: Wer von Euch weiß über Matsch auf der eigenen Stirn bescheid? — **Niemand meldet sich**

Beobachter fragt alle zusammen: Wer von Euch weiß über Matsch auf der eigenen Stirn bescheid? — **Niemand meldet sich**

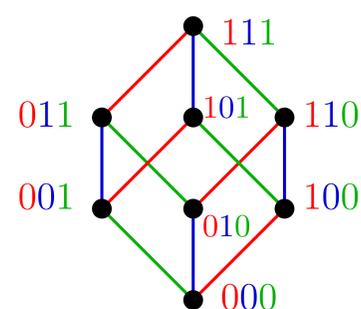
Beobachter fragt alle zusammen: Wer von Euch weiß über Matsch auf der eigenen Stirn bescheid? — **Niemand meldet sich**

Was folgt daraus, und wie geht das weiter?

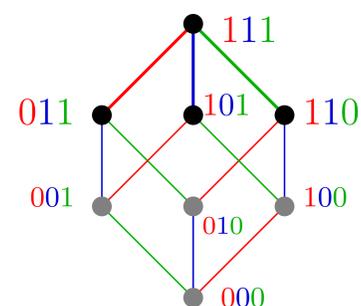
Modellierung möglicher Zustände

- Bei n Kindern (Kind 1, ..., Kind n) kann man die möglichen Zustände als Bit-Folgen (b_1, \dots, b_n) der Länge n erfassen: der Eintrag b_i in Position i beschreibt ob Kind i Matsch auf der Stirn hat ($b_i = 1$) oder nicht ($b_i = 0$).
- Vorab sind alle 2^n Möglichkeiten in Betracht zu ziehen (für $n = 3$ Kinder wären das $2^3 = 8$ Möglichkeiten, die man sich als die Ecken eines 3-dim. Würfels vorstellen kann, allg. ein n -dimensionaler Hyperkubus); nach der ersten Ansage wissen alle, dass der tatsächliche Zustand nicht $(0, \dots, 0)$ sein kann.
- Jedes Kind sieht alle anderen, ist also vorab genau über den eigenen Zustand im Unklaren. Aus der Perspektive von Kind i ist also alles klar bis auf b_i . Diese Unsicherheit spiegelt sich in den Kanten des Hyperkubus: Die Kanten in der i -ten Dimension verbinden diejenigen möglichen Zustände, die für Kind i zu Beginn ununterscheidbar sind.
- Sobald ein Kind aufgrund der (allen) verfügbaren Information eine der jeweils zwei Möglichkeiten, die mit der eigenen Beobachtung verträglich sind, ausschließen kann, weiß es also über den eigenen Zustand Bescheid – und meldet sich auf die Frage.
- Die restliche Analyse ergibt sich systematisch anhand dieser Fragen:
In welcher Fragerunde werden die ersten Kinder bescheidwissen?
Welche Kinder wissen in dieser Runde Bescheid?
Was können die restlichen aus deren Antworten schließen?

Beispiel mit drei Kindern



Nach der ersten Frage



Hintergrund und weitere Aspekte

Wissensrepräsentation und das logische Schließen in Bezug auf verteilte Information spielt in vielen Bereichen eine große Rolle: Analyse von Spielstrategien, Protokolle für die Übermittlung verschlüsselter Nachrichten, ...

Ein Zweig der mathematischen Logik, der sich mit Aussagen über (Aussagen über) verteilte Information befasst, ist die *Modallogik*.

Informations-Netzwerke geben Anlass zur Untersuchung von *verteilter Information* und Konzepten wie *common knowledge* oder *public announcement*.

Die Kodierung von (Informations-)Zuständen durch Bitfolgen in hoch-dimensionalen Räumen spielt in vielen Bereichen der Informationsverarbeitung eine Rolle; wenn direkte Kanten Paare von Knoten verbinden, die sich hinsichtlich eines Informations-Eintrags unterscheiden, liefert der *Hamming-Abstand* ein natürliches Maß der Informationsdifferenz; wichtig ist der zum Bsp. auch für Verfahren zur Fehlererkennung oder -korrektur in der Datenübertragung (*error detecting/error correcting codes*).

