Skript zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2016

Robert Haller-Dintelmann

27. Juni 2016

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Metrische Räume

1. Metrische Räume

Wir wollen uns zunächst ganz abstrakt mit Mengen beschäftigen, in denen ein Abstandsbegriff, eine sogenannte Metrik, definiert ist. Als Aufwärmübung, die gleichzeitig einen für das weitere fundamental wichtigen Spezialfall darstellt, betrachten wir speziell Vektorräume. Dort lässt sich der Begriff einer Länge folgendermaßen axiomatisieren.

Definition 1.1. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.*[1]

(a) Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ heißt Norm *auf V, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

   i) Es ist $\|x\| = 0$, genau dann wenn $x = 0$ ist. (Definitheit)

   ii) Für alle $x \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$. (Homogenität)

   iii) Für alle $x, y \in V$ gilt $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Dreiecksungleichung)

(b) In diesem Fall nennt man V mit $\|\cdot\|$ einen normierten (Vektor-)Raum.

Beispiel 1.2. (a) Im eindimensionalen Raum $\mathbb{K}$ haben wir schon eine Norm kennengelernt, nämlich den Betrag.

(b) Im d-dimensionalen Raum $\mathbb{K}^d$ gibt es eine ganze Reihe von Normen. Die gebräuchlichsten sind für $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T \in \mathbb{K}^d$

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(2-Norm)},$$

$$\|x\|_\infty := \max_{j=1}^{d} |x_j| \qquad \text{(Maximumsnorm oder Unendlich-Norm)},$$

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{d} |x_j| \qquad \text{(1-Norm)},$$

bzw. allgemein für $p \geq 1$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(p-Norm)}.$$

Beispielhaft rechnen wir hier durch, dass die 1-Norm tatsächlich eine Norm ist. Dazu überprüfen wir die Bedingungen (a)i) bis (a)iii) aus Defintion 1.1.

[1] Der Buchstabe $\mathbb{K}$ steht auch in diesem Semester wieder für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

i) Es ist offensichtlich $\|0\|_1 = 0$. Ist umgekehrt $\|x\|_1 = 0$ für ein $x \in \mathbb{K}^d$, so gilt $\sum_{j=1}^d |x_j| = 0$ und da jeder Summand positiv ist, muss jeder Summand Null sein. Also ist $x_j = 0$ für alle j und damit $x = 0$.

ii) Seien $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T \in \mathbb{K}^d$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{j=1}^d |\lambda x_j| = \sum_{j=1}^d |\lambda||x_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^d |x_j| = |\lambda|\|x\|_1.$$

iii) Aus der Dreiecksungleichung für den Betrag in $\mathbb{K}$ folgt für beliebige $x = (x_j)_{j=1,\dots,d}$, $y = (y_j)_{j=1,\dots,d} \in \mathbb{K}^d$

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= \sum_{j=1}^d |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^d \big(|x_j| + |y_j|\big) \\ &= \sum_{j=1}^d |x_j| + \sum_{j=1}^d |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1.\end{aligned}$$

Sie sind eingeladen, den entsprechenden Nachweis für die Supremumsnorm selbst zu führen. Wer eine Herausforderung braucht, nehme sich die p-Norm vor.

Um eine Vorstellung von einer Norm zu bekommen, ist es meist gut, sich die sogenannte *Einheitskugel* $K_1(0) := \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$ anzuschauen. Die Ränder der Einheitskugeln der 1-, 2- und ∞-Norm in $\mathbb{R}^2$ finden Sie in Abbildung 1.1

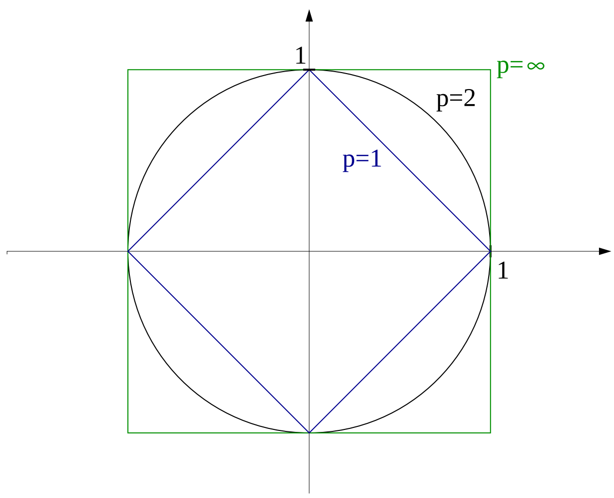

Abbildung 1.1.: Die Ränder der Einheitskugeln im $\mathbb{R}^2$ für die 1-, 2- und ∞-Norm

Bemerkung 1.3. Der durch die 2-Norm definierte Längenbegriff ist der uns im Alltag geläufige. Er liegt der Euklidischen Geometrie zugrunde. Deshalb wird die 2-Norm auch bisweilen als *Euklidische Norm* bezeichnet.

Die folgende Vergleichbarkeit von p- und ∞-Norm in $\mathbb{K}^d$ werden wir in den nächsten Abschnitten häufiger brauchen, bevor wir sie dann als Spezialfall eines viel allgemeineren Satzes, vgl. Satz 6.3, erkennen werden.

Satz 1.4. *Für alle $x \in \mathbb{K}^d$ gilt $\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le d^{1/p}\|x\|_\infty$.*

Beweis. Es gilt für alle $x \in \mathbb{K}^d$

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty &= \max_{j=1}^{d} |x_j| = \big(\max_{j=1}^{d} |x_j|^p\big)^{1/p} \le \Big(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{j=1}^{d} \|x\|_\infty^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \big(d\|x\|_\infty^p\big)^{\frac{1}{p}} = d^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty. \qquad \square\end{aligned}$$

Wir geben dieser Vergleichbarkeit von Normen im Moment erst einmal nur einen Namen.

Definition 1.5. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf V heißen* äquivalent*, wenn es Konstanten $c, C > 0$ gibt mit*

$$c\|x\| \le |||x||| \le C\|x\| \qquad \text{für alle } x \in V.$$

Bemerkung 1.6. Die Bezeichnung der Maximumsnorm mit dem Unendlich-Zeichen mag zunächst seltsam erscheinen. Tatsächlich ist sie aber in gewisser Weise der Grenzfall für p gegen unendlich. Geht man in der Ungleichungskette aus Satz 1.4 zum Grenzwert $p \to \infty$ über, so findet man mit dem Sandwich-Theorem $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Beispiel 1.7. Auch auf anderen Vektorräumen gibt es Normen. Beispielhaft betrachten wir den Raum $C(I)$ der stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall I in $\mathbb{R}$. Auch hier lassen sich für $1 \le p$ die p-Norm

$$\|f\|_p := \Big(\int_I |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}}$$

und die *Unendlich-Norm* oder *Supremums-* bzw. *Maximumsnorm*

$$\|f\|_\infty := \max_{t\in I} |f(t)|$$

definieren.
Der Nachweis der Norm-Eigenschaften für die 1- und ∞-Norm ist wieder einfach. Die allgemeine p-Norm braucht ein bisschen mehr Aufmerksamkeit.

Bemerkung 1.8. Wir erinnern an den Begriff eines Skalarproduktes aus der Vorlesung Lineare Algebra. Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann heißt eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ *Skalarprodukt*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Für alle $x \in V$ gilt $\langle x, x\rangle \in [0, \infty)$ und es ist $\langle x, x\rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist. (Definitheit)

(b) Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

(c) Für alle $x_1, x_2, y \in V$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ gilt

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1 \langle x_1, y\rangle + \lambda_2 \langle x_2, y\rangle. \quad \text{(Linearität im ersten Argument)}$$

Hat man ein Skalarpodukt auf V, so wird durch dieses immer mit Hilfe von $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ eine Norm definiert. Auf diese Weise sind in Beispiel 1.2 und Beispiel 1.7 jeweils die 2-Normen durch Skalarprodukte induziert. Die zugehörigen Skalarprodukte sind

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{d} x_j \overline{y_j}, \qquad x, y \in \mathbb{K}^d, \qquad \text{(Standardskalarprodukt)}$$

und

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad f, g \in C(I) \qquad (L^2\text{-Skalarpodukt}).$$

Man beachte, dass Normen, die sich aus Skalarprodukten gewinnen lassen, nur schöne Spezialfälle sind. Die meisten Normen lassen sich nicht mit einem Skalarprodukt assoziieren. Das gilt z.B. für alle anderen Normen in den beiden obigen Beispielen.

Wir sammeln ein paar einfache Eigenschaften von Normen.

Satz 1.9. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann gilt für alle $x, y \in V$*

(a) $\|x\| \geq 0$.

(b) $\|x - y\| \geq \big|\|x\| - \|y\|\big|$. *(umgekehrte Dreiecksungleichung)*

Beweis. Wir beweisen nur (a), den Beweis der umgekehrten Dreiecksungleichung können Sie direkt aus der Analysis I abschreiben. Sie müssen lediglich an einigen Stellen „$|$" durch „$\|$" ersetzen.
Für alle $x \in V$ gilt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$0 = \|0\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|x\| = 2\|x\|.$$

Also ist $\|x\| \geq 0$. □

Im Zusammenhang mit Skalarprodukten ist die folgende Ungleichung von zentraler Wichtigkeit. Für den Beweis verweisen wir hier auf die Lineare Algebra.

Satz 1.10 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)**.** *Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und assoziierter Norm $\|\cdot\|$, so gilt für alle $x, y \in V$*

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Vektorräume sind sehr wichtige, aber auch sehr reichhaltige Strukturen. Um in allgemeineren Zusammenhängen Analysis betreiben zu können, z.B. auf einer Kugeloberfläche (Mit einer solchen hat die Menschheit ja manchmal zu tun. . .), wäre ein Abstandsbegriff schön, der ohne die algebraische Struktur eines Vektorraums auskommt. Diesen liefert der folgende Begriff.

Definition 1.11. *Sei M eine nicht-leere Menge. Einge Abbildung $\mathrm{d} : M \times M \to \mathbb{R}$ heißt* Metrik *auf M, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:*

(a) $\mathrm{d}(x, y) = 0 \iff x = y$, *(Definitheit)*

(b) $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$, *(Symmetrie)*

(c) $\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$. *(Dreiecksungleichung)*

In diesem Fall nennt man M mit der Metrik d einen metrischen Raum*.*

Wir sammeln erste einfache Eigenschaften von Metriken und werden dabei auch sehen, dass wir damit wirklich ein verallgemeinertes Konstrukt haben, denn jede Norm erzeugt auch eine Metrik.

Satz 1.12. *(a) Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann gilt $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in M$.*

(b) Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $N \subseteq M$ sei nicht-leer. Dann ist die Einschränkung von d auf $N \times N$ eine Metrik auf N, die sogenannte induzierte Metrik*. Diese wird zuweilen als d_N notiert.*

(c) Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, so ist durch $\mathrm{d}(x, y) := \|x - y\|$, $x, y \in V$, eine Metrik auf V gegeben.

Beweis. (a) Wie im Beweis von Satz 1.9 (a) bekommen wir für alle $x, y \in M$

$$0 = \mathrm{d}(x, x) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, x) = 2\mathrm{d}(x, y),$$

also $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$.

(b) Alle drei Axiome einer Metrik sind Allaussagen auf Elemente in M. Diese gelten dann natürlich auch für alle Elemente in N.

(c) Wir müssen nur die drei Metrik-Axiome nachprüfen. Ist $x = y$, so ist $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(x,x) = \|x-x\| = \|0\| = 0$. Und gilt $0 = \mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|$, so ist dank der Definitheit der Norm, vgl. Definition 1.1 (a)i), sofort $x-y=0$, d.h. $x=y$.

Die Symmetrie folgt aus der Homogenität der Norm, denn für alle $x, y \in V$ gilt

$$\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1|\|y-x\| = \mathrm{d}(y,x).$$

Es bleibt noch die Dreiecksungleichung zu prüfen. Seien dazu $x, y, z \in V$. Dann ist dank der Dreiecksungleichung für Normen

$$\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\|+\|z-y\| = \mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(z,y). \qquad \square$$

Zum Abschluss wollen wir uns zwei Beispiele ansehen, die unter Anderem zeigen, dass man tatsächlich beliebige Mengen mit einer Metrik ausstatten kann.

Beispiel 1.13. (a) Wir betrachten zunächst die sogenannte *diskrete Metrik*. Diese ist auf jeder nicht-leeren Menge M gegeben durch

$$\mathrm{d}(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

für $x, y \in M$.

Dass dies eine Metrik ist, sieht man folgendermaßen: Zunächst ergibt sich die Definitheit direkt aus der Definition. Für die Symmetrie müssen wir nur beachten, dass mit $x = y$ auch $y = x$ gilt, bzw, dass $x \neq y$ auch $y \neq x$ impliziert. Sind schließlich $x, y, z \in M$, so kann zum Einen $x = y$ sein. In diesem Fall ist $\mathrm{d}(x,y) = 0$ und damit auf jeden Fall kleiner oder gleich $\mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(z,y)$ nach Satz 1.12 (a). Ist aber $x \neq y$, so muss auch z zumindest von x oder y verschieden sein, es ist also dann $\mathrm{d}(x,y) = 1 \leq \mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(z,y)$.

(b) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann haben wir in Satz 1.12 (c) gesehen, dass dieser auch ein metrischer Raum ist. Wir können aber nun noch eine andere Metrik auf V definieren, die selbst nicht durch eine Norm erzeugt wird, die sogenannte französische Eisenbahnmetrik

$$\mathrm{d}(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|, & \text{falls } x, y \text{ linear abhängig}, \\ \|x\| + \|y\|, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Der Abstand zweier Punkte ist also gleich dem „normalen“ Abstand, wenn diese auf einer gemeinsamen Ursprungsgerade liegen und gleich der Länge des Weges vom einen Punkt zum anderen mit Umweg über den Ursprung. Das entspricht der Weglänge in einem komplett zentralisiert aufgebauten

Verkehrsnetz, bei dem alle Punkte untereinander nur durch Wege über das Zentrum verbunden sind. In überzeichneter Sichtweise des französischen Eisenbahnnetzes kam diese Metrik zu ihrem Namen, wobei natürlich Paris im Ursprung liegt.

Die Aufgabe die Metrik-Axiome nachzuweisen bleibt als Übung stehen.

Eine Bedeutung dieses Beispiel liegt darin, dass dies eine Metrik auf dem Vektorraum V ergibt, die sich nicht im Sinne von Satz 1.12(c) durch eine Norm beschreiben lässt. Hier ein Tipp, falls Sie das nachweisen wollen: Jede Metrik, die von einer Norm herrührt, ist translationsinvariant, d. h. für alle $x, y, z \in V$ gilt die Gleichheit $\mathrm{d}(x + z, y + z) = \mathrm{d}(x, y)$.

2. Topologische Grundbegriffe

Haben wir in einer Menge eine Metrik, d. h. einen Abstandsbegriff zur Verfügung, so können wir damit „Kugeln“ beschreiben. Das führt uns in diesem Kapitel zu Verallgemeinerung von Begriffen wie offene und abgeschlossene Menge, Häufungspunkt, usw. auf metrische Räume. Wir werden so die Grundlage für analytische Betrachtungen auf solchen Mengen legen. Im gesamten Abschnitt sei (M, d) ein metrischer Raum.

Definition 2.1. *(a) Für $x_0 \in M$ und $r > 0$ ist*

$$U_r(x_0) := \{x \in M : \mathrm{d}(x, x_0) < r\}$$

die (offene) Kugel *um x_0 mit* Radius *r.*

(b) Eine Teilmenge U von M heißt Umgebung *von $x_0 \in M$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq U$.*

(c) Eine Teilmenge X von M heißt

i) beschränkt*, falls es ein $r > 0$ und ein $x_0 \in M$ gibt mit $X \subseteq U_r(x_0)$.*

ii) offen*, wenn für jedes $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x) \subseteq X$.*

iii) abgeschlossen*, falls $X^c = M \setminus X$ offen ist.*

Beispiel 2.2. Es seien $x_0 \in M$ und $r > 0$.

(a) Wir betrachten die offene Kugel $U_r(x_0)$ und zeigen, dass diese im Sinne unserer Definition auch wirklich offen ist. Es sei dazu $x \in U_r(x_0)$ ein beliebiger Punkt in dieser Menge. Dann ist nach der Definition der Kugel $\mathrm{d}(x, x_0) < r$ und es gilt $\varrho := r - \mathrm{d}(x, x_0) > 0$. Wir zeigen nun, dass $U_\varrho(x) \subseteq U_r(x_0)$ gilt, womit dann folgt, dass $U_r(x_0)$ offen ist.

Sei dazu $z \in U_\varrho(x)$. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung

$$\mathrm{d}(z, x_0) \leq \mathrm{d}(z, x) + \mathrm{d}(x, x_0) < \varrho + \mathrm{d}(x, x_0) = r.$$

Also ist $z \in U_r(x_0)$ und wir sind fertig.

(b) Wir betrachten die *abgeschlossene Kugel* um x_0 mit Radius r, d. h.

$$K_r(x_0) := \{x \in M : \mathrm{d}(x, x_0) \leq r\}$$

und zeigen, dass auch diese ihren Namen zurecht trägt, also abgeschlossen ist. Dazu müssen wir zeigen, dass $K_r(x_0)^c$ offen ist. Wir wählen also ein $x \in K_r(x_0)^c$. Dann ist $\mathrm{d}(x, x_0) > r$ und es gilt $\varrho := \mathrm{d}(x, x_0) - r > 0$. Wenn wir also zeigen könenn, dass $U_\varrho(x) \subseteq K_r(x_0)^c$ gilt, sind wir fertig.

Sei dazu $z \in U_\varrho(x)$. Dann gilt wieder mit Hilfe der Dreiecksungleichung $\mathrm{d}(x, x_0) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, x_0)$, also haben wir

$$\mathrm{d}(z, x_0) \geq \mathrm{d}(x, x_0) - \mathrm{d}(x, z) = \varrho + r - \mathrm{d}(x, z) > \varrho + r - \varrho = r.$$

Also ist $z \in K_r(x_0)^c$ und wir haben $U_\varrho(x) \subseteq K_r(x_0)^c$ erreicht.

Warnung 2.3. (a) Mengen sind keine Türen! Die meisten Mengen sind weder offen noch abgeschlossen, denken Sie z.B. an ein halboffenes Intervall in $\mathbb{R}$. Hüten Sie sich also vor dem Fehlschluss: „Ich habe festgestellt, dass meine Menge nicht offen ist, also ist sie abgeschlossen.“

(b) Die Eigenschaft einer Menge offen, bzw. abgeschlossen zu sein, hängt vom betrachteten umgebenden metrischen Raum ab. So ist die Menge $[0, 1)$ in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen. Betrachtet man sie als Teilmenge von $[0, \infty)$ (mit der natürlichen induzierten Metrik), so ist sie offen, aber nicht abgeschlossen, und als Teilmenge von $[0, 1)$ ist sie offen und abgeschlossen. Es lohnt sich, darüber ein wenig nachzudenken und diesen Effekt zu verinnerlichen. Das schützt später davor immer wieder in Fallen zu tappen. Zum Verständnis kann Ihnen auch die folgende Übungsaufgabe helfen.

Übungsaufgabe 2.4. Es sei $X \subseteq M$. Dann ist $Y \subseteq X$ bezüglich der induzierten Metrik in X

(a) genau dann offen, wenn es eine (in M) offene Menge $O \subseteq M$ gibt mit $Y = O \cap X$.

(b) genau dann abgeschlossen, wenn es eine (in M) abgeschlossene Menge $A \subseteq M$ gibt mit $Y = A \cap X$.

Offene bzw. abgeschlossene Mengen kann man recht gut vereinigen und schneiden ohne diese Eigenschaften zu verlieren. Genauer gilt das folgende Resultat.

Satz 2.5. *Es sei I eine beliebige Indexmenge.*

(a) Sind $X_i \subseteq M$ für jedes $i \in I$ offene Mengen, so ist auch $\bigcup_{i \in I} X_i$ offen.

(b) Sind $X_1, X_2 \subseteq M$ offen, so ist auch $X_1 \cap X_2$ offen.

(c) Sind $X_i \subseteq M$ für jedes $i \in I$ abgeschlossene Mengen, so ist auch $\bigcap_{i \in I} X_i$ abgeschlossen.

(d) Sind $X_1, X_2 \subseteq M$ abgeschlossen, so ist auch $X_1 \cup X_2$ abgeschlossen.

Bemerkung 2.6. In Worten sagt dieser Satz: Beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte von offenen Mengen sind offen, sowie beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen.
Man beachte, dass an den beiden Stellen, an denen hier „endlich“ steht, auch nicht mehr geht, wie man an den folgenden Beispielen aus $\mathbb{R}$ sieht:

$$[0,1) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big(-\frac{1}{n}, 1\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big[0, \frac{n}{n+1}\Big].$$

Beweis von Satz 2.5. Seien zunächst $X_i \subseteq M$ offen für jedes $i \in I$ und $x_0 \in \bigcup_{i\in I} X_i$. Dann gibt es ein $i_0 \in I$ mit $x_0 \in X_{i_0}$ und X_{i_0} ist eine offene Menge. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq X_{i_0}$. Dann ist aber auch $U_\varepsilon(x_0) \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i$. Wir haben also gezeigt, dass diese Menge offen ist und damit (a) erledigt.
Zum Nachweis von (b) seien nun $X_1, X_2 \subseteq M$ offene Mengen und $x_0 \in X_1 \cap X_2$. Da beide Mengen offen sind, gibt es dann Radii $r_1, r_2 > 0$ mit $U_{r_1}(x_0) \subseteq X_1$ und $U_{r_2}(x_0) \subseteq X_2$. Für $r := \min\{r_1, r_2\}$ gilt dann $U_r(x_0) \subseteq X_1 \cap X_2$. Also ist $X_1 \cap X_2$ offen.
Für (c) seien $X_i \subseteq M$ abgeschlossen für jedes $i \in I$. Dann ist mit den De Morgan'schen Regeln

$$\Big(\bigcap_{i\in I} X_i\Big)^c = \bigcup_{i\in I} X_i^c.$$

Nun ist jedes X_i^c offen und mit Hilfe von (a) ist die Vereinigung all dieser Mengen ebenfalls offen und damit auch $(\bigcap_{i\in I} X_i)^c$. Das bedeutet aber schlussendlich, dass $\bigcap_{i\in I} X_i$ abgeschlossen ist.
Genauso sieht man für abgeschlossene Mengen $X_1, X_2 \subseteq M$ mit Hilfe von (b), dass $(X_1 \cup X_2)^c = X_1^c \cap X_2^c$ offen und damit $X_1 \cup X_2$ abgeschlossen ist. Das liefert (d) und beendet den Beweis. □

Die Ergebnisse aus obigem Satz ermöglichen es, mittels der beliebten Technik der Hüllenbildung für jede Teilmenge von M eine minimale abgeschlossene Obermenge und eine maximale offene Teilmenge zu finden. Das liefert die folgenden Begriffe.

Definition 2.7. *Zu gegebenem $X \subseteq M$ betrachten wir die Mengensysteme $\mathcal{O}_X := \{O \subseteq X : O$ offen$\}$ und $\mathcal{A}_X := \{A \supseteq X : A$ abgeschlossen$\}$ und definieren:*

(a) $X^\circ := \bigcup_{O\in\mathcal{O}_X} O,$ (Inneres *von* X)

(b) $\overline{X} := \bigcap_{A\in\mathcal{A}_X} A,$ (Abschluss *von* X)

(c) $\partial X := \overline{X} \setminus X^\circ.$ (Rand *von* X)

Unter Verwendung von Satz 2.5 ist X° die größte offene Teilmenge von X und $\overline{X}$ die kleinste abgeschlossene Obermenge von X.
In engem Zusammenhang mit obiger Definition stehen die folgenden Begriffe für Elemente von M, vgl. Satz 2.9.

Definition 2.8. *Es sei X eine Teilmenge von M.*

(a) Ein $x_0 \in M$ heißt Häufungspunkt *von X, falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $U_\varepsilon(x_0) \cap X$ unendlich ist.*

(b) Ein $x_0 \in M$ ist Randpunkt *von X, falls für alle Umgebungen U von x_0 gilt, dass sowohl $U \cap X \neq \emptyset$ als auch $U \cap X^c \neq \emptyset$ ist.*

(c) Ein $x_0 \in X$ ist ein innerer Punkt *von X, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq X$.*

Satz 2.9. *Es sei X eine Teilmenge von M. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(a) $\overline{X} = X \cup \partial X = X^\circ \cup \partial X$.

(b) $X^\circ = \big\{x \in X : x \text{ innerer Punkt von } X\big\}$.

(c) $\partial X = \big\{x \in M : x \text{ Randpunkt von } X\big\}$.

(d) $\overline{X} = \big\{x \in M : x \in X \text{ oder } x \text{ Häufungspunkt von } X\big\}$.

Beweis. (a) Wegen $X^\circ \subseteq X \subseteq \overline{X}$ gilt nach der Definition des Randes

$$\begin{aligned}\overline{X} &= (\overline{X} \cap X^\circ) \cup (\overline{X} \setminus X^\circ) = X^\circ \cup \partial X \subseteq X \cup \partial X = X \cup (\overline{X} \setminus X^\circ)\\ &\subseteq \overline{X} \cup (\overline{X} \setminus X^\circ) = \overline{X}.\end{aligned}$$

Also sind alle drei Mengen gleich.

(b) Sei $x \in X^\circ$. Dann gibt es nach Definition von X° eine offene Teilmenge O von X mit $x \in O$. Da O offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq O \subseteq X$, also ist x ein innerer Punkt von X.

Ist umgekehrt x ein innerer Punkt von X, so ist für ein $\varepsilon > 0$ die offene Menge $U_\varepsilon(x)$ Teilmenge von X, d. h. $U_\varepsilon(x) \in \mathcal{O}_X$. Also ist $x \in U_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{O \in \mathcal{O}_X} = X^\circ$.

(c) Übung.

(d) Wir zeigen zunächst „$\subseteq$". Dazu sei $x \in \overline{X}$ und wir nehmen an, es wäre weder $x \in X$, noch x ein Häufungspunkt von X. Dann gibt es nach der Definition eines Häufungspunktes ein $\varepsilon > 0$, für das die Menge $U_\varepsilon(x) \cap X$ endlich ist. Es sei also $U_\varepsilon(x) \cap X = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ für ein $r \in \mathbb{N}$. Dann ist $\delta := \min\{\mathrm{d}(x, x_j) : j = 1, 2, \ldots, r\} > 0$, da x selbst nicht zu X gehört.

Damit ist $U_\delta(x) \cap X = \emptyset$, d. h. $U_\delta(x)^c$ ist eine abgeschlossene Obermenge von X und wir erhalten wegen

$$x \notin U_\delta(x)^c \supseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}_X} A = \overline{X}.$$

den Widerspruch $x \notin \overline{X}$.

Für die umgekehrte Inklusion „$\supseteq$" ist wegen $X \subseteq \overline{X}$ und (a) nur zu zeigen, dass jeder Häufungspunkt von X, der nicht zu X gehört, in ∂X liegt.

Es sei also x ein solcher Häufungspunkt von X, der selbst nicht zu X gehört. Ist U eine Umgebung von x, so ist zum Einen $x \in U \cap X^c$ und damit diese Menge nicht-leer. Zum Anderen gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq U$ und nach der Definition eines Häufungspunktes ist $U_\varepsilon(x) \cap X$ unendlich und damit insbesondere nicht-leer. Also ist auch $U \cap X$ nicht-leer und wir haben gezeigt, dass x ein Randpunkt von X ist. Also ist $x \in \partial X$ nach (c). $\square$

Beispiel 2.10. Wir betrachten auf M die diskrete Metrik d, d. h. $\mathrm{d}(x, y) = 1$ falls $x \neq y$ und $\mathrm{d}(x, y) = 0$ für $x = y$. Sei nun X eine beliebige Teilmenge von M. Für jeden Punkt $x_0 \in X$ ist dann

$$U_{1/2}(x_0) = \{y \in M : \mathrm{d}(y, x_0) < 1/2\} = \{y \in M : y = x_0\} = \{x_0\} \subseteq X.$$

Also ist jede Teilmenge von M offen und damit auch jede Teilmenge abgeschlossen. In diesem Sinne ist die diskrete Metrik ein extremer Fall.

Satz 2.11 (Hausdorff'sches Trennungsaxiom)**.** *Es seien $x, y \in M$ mit $x \neq y$. Dann existieren Umgebungen U_x und U_y von x bzw. y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$.*

Beweis. Es gilt $x \neq y$, also ist $\mathrm{d}(x, y) > 0$. Mit $\varepsilon := \mathrm{d}(x, y)/2 > 0$ setze $U_x := U_\varepsilon(x)$ und $U_y := U_\varepsilon(y)$. Dann ist U_x Umgebung von x und U_y Umgebung von y und, wenn wir annehmen, dass $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ gilt, so gibt es ein $z \in U_x \cap U_y$ mit dessen Hilfe wir zu dem Widerspruch

$$2\varepsilon = \mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

gelangen. Also ist $U_x \cap U_y = \emptyset$ und wir sind fertig. $\square$

3. Konvergenz in metrischen Räumen

Mit den Vorarbeiten aus dem letzten Abschnitt können wir nun den Konvergenzbegriff auf allgemeine metrische Räume verallgemeinern. Damit haben wir eine Basis für die weiteren Betrachtungen. In diesem ganzen Abschnitt sei wieder (M, d) ein metrischer Raum.

Definition 3.1. *Eine Folge (x_n) in M heißt*

(a) beschränkt*, falls die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ in M beschränkt ist.*

(b) konvergent *gegen $x_0 \in M$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, für das $x_n \in U_\varepsilon(x_0)$ für alle $n \geq n_0$ gilt.*

Der Punkt x_0 heißt dann Grenzwert *oder* Limes *der Folge (x_n) und wir schreiben wie gewohnt $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Viele Eigenschaften des Grenzwertes kann man analog zu unseren Betrachtungen in $\mathbb{R}$ aus der Analysis I beweisen, indem man den Abstand, der dort durch den Betrag beschrieben wird, durch die Metrik ausdrückt. Beispielhaft zeigen wir hier die Eindeutigkeit des Grenzwerts.

Satz 3.2. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.*

Beweis. Seien $x, y \in M$ Grenzwerte einer konvergenten Folge (x_n) in M. Nehmen wir an, es wäre $x \neq y$, so gibt es nach dem Hausdorff'schen Trennungsaxiom, Satz 2.11, Umgebungen U_x von x und U_y von y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$. Diese Umgebungen enthalten nach Definition je eine offene Kugel um x, bzw. y, d. h. es gibt $\varepsilon_x, \varepsilon_y > 0$, so dass $U_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U_x$ und $U_{\varepsilon_y}(y) \subseteq U_y$ gilt. Insbesondere ist damit $U_{\varepsilon_x}(x) \cap U_{\varepsilon_y}(y) = \emptyset$.
Andererseits konvergiert unsere Folge (x_n) gegen x und y, also liegen sowohl in $U_{\varepsilon_x}(x)$, als auch in $U_{\varepsilon_y}(y)$ jeweils fast alle Folgenglieder, womit wir bei einem Widerspruch wären. □

Beispiel 3.3. In $\mathbb{R}$ haben wir schon ein gutes Gefühl für Konvergenz, wie sieht das bei exotischen Metriken aus? Wir betrachten die diskrete Metrik d, vgl. Beispiel 1.13 (a). Haben wir nun eine konvergente Folge (x_n) in M mit Grenzwert x_0, so existiert zu $\varepsilon = 1/2$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$x_n \in U_{1/2}(x_0) = \big\{x \in M : \mathrm{d}(x, x_0) < 1/2\big\} = \{x_0\}.$$

Also ist (x_n) fast überall konstant.
Tatsächlich sind die bezüglich der diskreten Metrik konvergenten Folgen genau die ab einem Index konstanten Folgen.

Übungsaufgabe 3.4. Eine Folge (x_n) in M konvergiert gegen $x_0 \in M$, genau dann wenn die reelle Folge $(\mathrm{d}(x_n, x_0))$ eine Nullfolge ist.

Das folgende Beispiel kennen wir schon aus der Analysis I, aber wir können es nun in neuem Licht betrachten.

Beispiel 3.5. Wir betrachten ein kompaktes Intervall $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und den normierten Raum $C(I)$ mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{t\in I} |f(t)|$, vgl. Beispiel 1.7.
Eine Folge (f_n) in $C(I)$ ist dann eine Funktionenfolge von stetigen Funktionen und diese konvergiert nach Übungsaufgabe 3.4 genau dann in $C(I)$ gegen eine Funktion f, wenn

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(f_n, f) = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in I} |f_n(t) - f(t)|$$

gilt. Ein Vergleich mit Übungsaufgabe I.20.9(b)[1] aus Analysis I zeigt, dass das genau gleichmäßige Konvergenz von (f_n) gegen f bedeutet.
Gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge ist also nichts anderes als Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm.

Wir können nun weitere Begriffe im Zusammenhang mit Konvergenz verallgemeinern.

Definition 3.6. *Sei (x_n) eine Folge in M.*

(a) Ein $x_0 \in M$ heißt Häufungswert *von (x_n), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_\varepsilon(x_0)\}$ unendlich ist.*

(b) Die Folge (x_n) ist eine Cauchyfolge*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, für das $\mathrm{d}(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt.*

Die Beweise der Aussagen im folgenden Satz lassen sich dann wieder direkt aus den entsprechenden Beweisen der Analysis I übertragen, wenn man dort den Betrag durch die Metrik ersetzt.

Satz 3.7. *Sei (x_n) eine Folge in M. Dann gilt:*

(a) (x_n) konvergent $\Longrightarrow$ (x_n) Cauchyfolge $\Longrightarrow$ (x_n) beschränkt.

(b) Ist (x_n) konvergent mit Grenzwert x_0, so ist x_0 ein Häufungswert von (x_n).

[1] Verweise mit vorgestelltem „I.“ beziehen sich auf die entsprechenden Abschnittsnummern im Skript zur Analysis I.

(c) *Ein $x \in M$ ist genau dann ein Häufungswert von (x_n), wenn es eine Teilfolge von (x_n) gibt, die gegen x konvergiert.*

Wir zeigen noch schnell die folgende nützliche Charakterisierung abgeschlossener Mengen durch Folgenkonvergenz. Dieser Satz zeigt außerdem, dass unsere Definition einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ aus der Analysis I mit der hier gegebenen Definition konsistent ist.

Satz 3.8. *Eine Menge $A \subseteq M$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge in A, die in M konvergiert, der Grenzwert in A liegt.*

Beweis. **„$\Rightarrow$“** Es sei A abgeschlossen und (x_n) sei eine Folge in A, die in M konvergiert. Wir nennen den Grenzwert x_0 und nehmen an, dieser wäre nicht in A.

Dann liegt x_0 in A^c. Da A abgeschlossen ist, ist A^c offen, es gibt also ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(x_0) \subseteq A^c$ ist. Dank der Konvergenz von (x_n) gilt nun $x_n \in U_\varepsilon(x_0)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, insbesondere ist also $x_n \notin A$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, womit wir bei einem Widerspruch wären.

„$\Leftarrow$“ Wir zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen A^c offen ist. Dann ist nach Definition A abgeschlossen. Dazu müssen wir nachweisen, dass jeder Punkt von A^c ein innerer Punkt von A^c ist.

Wir nehmen also an es gäbe ein $x_0 \in A^c$, das kein innerer Punkt von A^c ist. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap (A^c)^c = U_\varepsilon(x_0) \cap A$. Für die speziellen Wahlen von $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, liefert das: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $x_n \in U_{1/n}(x_0) \cap A$. Damit ist (x_n) eine Folge in A, die nach Konstruktion gegen x_0 konvergiert. Unsere Voraussetzung liefert also den Widerspruch $x_0 \in A$. □

Übungsaufgabe 3.9. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ seien äquivalente Normen auf V, vgl. Definition 1.5. Zeigen Sie:

(a) Eine Teilmenge von V ist genau dann in $(V, \|\cdot\|)$ abgeschlossen/offen/beschränkt, wenn sie dies in $(V, |||\cdot|||)$ ist.

(b) Eine Folge in V ist genau dann beschränkt/konvergent/Cauchy-Folge in $(V, \|\cdot\|)$, wenn sie dies in $(V, |||\cdot|||)$ ist.

Bemerkung 3.10. Die Bedeutung obiger Übungsaufgabe besteht darin, dass bei zwei äquivalenten Normen alle für die Analysis relevanten Eigenschaften die selben sind. Es ist also in einer solchen Situation sehr oft egal, welche konkrete Norm man betrachtet, solange alle betrachteten Normen äquivalent sind. Diese Freiheit kann man sich oft zu Nutze machen und sich eine Norm aussuchen, die gut zum jeweils betrachteten Problem passt.

In Satz 3.7 (a) haben wir gesehen, dass die Implikation „Konvergenz $\Longrightarrow$ Cauchyfolge“ ganz allgemein in metrischen Räumen gilt. In $\mathbb{R}$ hatten wir auch die Umkehrung, aber wir hatten schon damals festgestellt, dass der entsprechende Beweis das Vollständigkeitsaxiom benötigt und die Umkehrung z.B. in $\mathbb{Q}$ im Allgemeinen falsch ist. Wir können also ganz sicher nicht im allgmeinen metrischen Raum erwarten, dass jede Cauchyfolge konvergiert, dazu braucht es eben Vollständigkeit. Aber wie definiert man die in diesem allgemeinen Kontext. Na, eben genau so!

Definition 3.11. *(a) Der metrische Raum (M, d) heißt* vollständig, *wenn jede Cauchyfolge in M konvergiert.*

(b) Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt Banachraum.

(c) Ein Banachraum, dessen Norm durch ein Skalarpodukt induziert wird, heißt Hilbertraum.

Die Konzepte des Banach- und Hilbertraums sind von großer Wichtigkeit für die moderne Entwicklung der Analysis und spielen in der heutigen Forschung eine zentrale Rolle. Im weiteren Verlauf Ihres Studiums werden sie Ihnen daher immer wieder begegnen. Für den Moment schauen wir uns einen ordentlichen Stapel Beispiele an.

Beispiel 3.12. (a) Für jedes $1 \le p \le \infty$ und jedes $d \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{K}^d$ mit der p-Norm $\|\cdot\|_p$ ein Banachraum.

Um das einzusehen, betrachten wir eine Folge (x_n) in $\mathbb{K}^d$, die bezüglich der p-Norm eine Cauchyfolge ist. Da alle p-Normen nach Satz 1.4 äquivalent zur ∞-Norm sind, ist diese Folge dann auch bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ eine Cauchyfolge, vgl. Übungsaufgabe 3.9. Für jedes $j \in \{1, \dots, d\}$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x_{n,j} - x_{m,j}| \le \max_{k=1}^{d} |x_{n,k} - x_{m,k}| = \|x_n - x_m\|_\infty.$$

Also sind mit (x_n) auch die Folgen $(x_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ Cauchyfolgen. Da $\mathbb{K}$ vollständig ist, existieren die Grenzwerte $x_{0,j} := \lim_{n\to\infty} x_{n,j} \in \mathbb{K}$ für jedes $j = 1, 2, \dots, d$ und für $x_0 := (x_{0,1}, \dots, x_{0,d})^T$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \max_{j=1}^{d} |x_{n,j} - x_{0,j}| = 0.$$

Also konvergiert (x_n) in $\mathbb{K}^d$ bezüglich der ∞-Norm gegen x_0 und nach Übungaufgabe 3.9 und Satz 1.4 gilt die gleiche Konvergenz auch bezüglich der p-Norm. Wir haben also die Konvergenz von (x_n) gezeigt und $\mathbb{K}^d$ ist mit der p-Norm ein Banachraum.

Insbesondere ist damit $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_2)$ ein Hilbertraum.

(b) Die rationalen Zahlen mit dem Betrag als Norm sind nicht vollständig, also kein Banachraum.

(c) Ein wichtiger Banachraum ist $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ mit einem kompakten Intervall $[a,b]$ in $\mathbb{R}$. Auch hier weisen wir nach, dass es sich wirklich um einen vollständigen normierten Raum handelt. Es sei also (f_n) eine Folge in $C([a,b])$, die bezüglich der Supremumsnorm eine Cauchyfolge ist. Da für alle $t \in [a,b]$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\big|f_n(t) - f_m(t)\big| \le \sup_{s\in[a,b]} \big|f_n(s) - f_m(s)\big| = \|f_n - f_m\|_\infty$$

gilt, ist die Folge $(f_n(t))$ in $\mathbb{K}$ für jedes $t \in [a,b]$ ebenfalls eine Cauchyfolge. Damit ist jede dieser Folgen konvergent, denn $\mathbb{K}$ ist vollständig.

Wir betrachten nun die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ mit $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$. Dann ist nach Konstruktion die Funktion f die punktweise Grenzfunktion der Funktionenfolge (f_n). Das reicht uns aber nicht, denn wir müssen nachweisen, dass (f_n) in $(C([a,b], \|\cdot\|_\infty)$ gegen f konvergiert. Dazu fehlen uns noch zwei Dinge: Erstens müssen wir sicherstellen, dass f selbst ein Element von $C([a,b])$ ist, d. h. wir brauchen Stetigkeit von f. Zum Zweiten brauchen wir Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm und das ist nach Beispiel 3.5 gleichbedeutend mit gleichmäßiger Konvergenz. Immerhin liefert die Lösung für das zweite Problem gleich die Lösung für das erste mit. Denn wenn wir nachweisen können, dass (f_n) gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen f konvergiert, so ist f ein gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktonen und damit selbst stetig.

Für den Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) seien $\varepsilon > 0$ und $t \in [a,b]$. Da (f_n) eine Cauchyfolge bezüglich der Maximumsnorm ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon/2$ für alle $n, m \ge n_0$. Zum Anderen konvergiert $(f_n(t))$ punktweise gegen $f(t)$, also existiert ein $m_0 \ge n_0$, so dass $|f_{m_0}(t) - f(t)| < \varepsilon/2$ ist. Zusammengenommen haben wir damit für alle $n \ge n_0$

$$\begin{aligned}\big|f_n(t) - f(t)\big| &\le \big|f_n(t) - f_{m_0}(t)\big| + \big|f_{m_0}(t) - f(t)\big| \\ &\le \|f_n - f_{m_0}\|_\infty + \big|f_{m_0}(t) - f(t)\big| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

und damit die gesuchte gleichmäßige Konvergenz, da das gefundene n_0 nicht von t abhängt.

Der hier vorgeführte Vollständigkeitsbeweis folgt einem meist erfolgreichen Muster: Man verschafft sich zunächst irgendwoher einen Kandidaten für den Grenzwert, ohne sich zuviel Gedanken zu machen, ob der auch die formalen Kriterien erfüllt. Dann zeigt man Konvergenz gegen diesen Grenzwert und durch diesen Konvergenzbeweis klären sich dann auch meist die formalen Schwierigkeiten.

(d) Zur Übung seien die folgenden Aussagen empfohlen:

- $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist nicht vollständig.
- $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_{C^1})$ mit $\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ist vollständig.

(e) Schließlich muss noch ein weiterer sehr wichtiger Hilbertraum erwähnt werden. Der Raum ℓ^2 besteht aus allen Folgen (x_n) in $\mathbb{K}$, die *quadratsummierbar* sind, d. h. für die

$$\|(x_n)\|_{\ell^2} := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\Big)^{1/2}$$

endlich ist. Es stellt sich heraus (nachweisen!), dass dieses eine Norm ist, die durch das ℓ^2-Skalarprodukt

$$\langle (x_n), (y_n)\rangle_{\ell^2} := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

induziert wird und dass ℓ^2 darüberhinaus vollständig, also ein Hilbertraum, ist.

Wir haben schon in der Analysis I bemerkt, dass Vollständigkeit eine sehr mächtige Eigenschaft ist. Wir wollen nun einen weiteren für die Analysis grundlegenden Satz beweisen, der Vollständigkeit ausnutzt. Sie werden ihm in den nächsten Semestern in allen möglichen Verkleidungen und in verschiedensten Vorlesungen wiederbegegnen. Auch deshalb behandeln wir ihn hier im ganz allgemeinen Rahmen eines vollständigen metrischen Raums.

Satz 3.13 (Banach'scher Fixpunktsatz)**.** *Es sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : M \to M$ eine* strikte Kontraktion, *d. h. es gebe ein $q \in (0,1)$ mit*

$$\mathrm{d}(f(x), f(y)) \le q\mathrm{d}(x,y) \quad \textit{für alle } x, y \in M.$$

Dann hat f genau einen Fixpunkt, d. h. es existiert genau ein $x^* \in M$ mit $f(x^*) = x^*$.
Außerdem konvergiert die Folge (x_n) in M mit $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, für jedes $x_0 \in M$ gegen x^* und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{d}(x_n, x^*) \le \frac{1}{1-q}\mathrm{d}(x_{n+1}, x_n) \le \frac{q^n}{1-q}\mathrm{d}(x_1, x_0). \tag{3.1}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz eines Fixpunkts von f. Dazu wählen wir ein $x_0 \in M$ beliebig und bezeichnen wie oben mit (x_n) die rekursiv definierte Folge in M mit $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung

$$\mathrm{d}(x_{n+1}, x_n) = \mathrm{d}(f(x_n), f(x_{n-1})) \le q\mathrm{d}(x_n, x_{n-1}).$$

Iterieren wir dieses Argument, so folgt

$$\mathrm{d}(x_{n+1}, x_n) \leq q^n \mathrm{d}(x_1, x_0). \tag{3.2}$$

Für beliebige $n, k \in \mathbb{N}$ gilt dann mit der Dreiecksungleichung, obiger Überlegung und freundlicher Unterstützung einer geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(x_{n+k}, x_n) &\leq \mathrm{d}(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + \mathrm{d}(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \cdots + \mathrm{d}(x_{n+1}, x_n) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{d}(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \leq \sum_{j=0}^{k-1} q^{n+j} \mathrm{d}(x_1, x_0) = q^n \mathrm{d}(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{k-1} q^j \\
&\leq \frac{q^n}{1-q} \mathrm{d}(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Da der letzte Ausdruck für $n \to \infty$ gegen Null geht, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, für den $\mathrm{d}(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon$ ist für jedes $n \geq n_0$ und jedes $k \in \mathbb{N}$. Also ist (x_n) eine Cauchyfolge in M.
Da M vollständig ist, muss (x_n) einen Grenzwert haben, den wir nun mit x^* bezeichnen. Dieser erfüllt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathrm{d}(x^*, f(x^*)) \leq \mathrm{d}(x^*, x_{n+1}) + \mathrm{d}(x_{n+1}, f(x^*)) = \mathrm{d}(x^*, x_{n+1}) + \mathrm{d}(f(x_n), f(x^*)) \\
&\leq \mathrm{d}(x^*, x_{n+1}) + q\mathrm{d}(x_n, x^*).
\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ geht der Ausdruck auf der rechten Seite gegen Null und somit gilt $\mathrm{d}(x^*, f(x^*)) = 0$, was wegen der Definitheit der Metrik $f(x^*) = x^*$ impliziert. Wir haben also einen Fixpunkt gefunden.
Wir wenden uns der Eindeutigkeit zu. Dazu überlegen wir uns zunächst, dass für alle $x, y \in M$ gilt

$$\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x, f(x)) + \mathrm{d}(f(x), f(y)) + \mathrm{d}(f(y), y) \leq d(x, f(x)) + q\mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y, f(y)).$$

Umstellen der Gleichung liefert

$$(1-q)\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x, f(x)) + \mathrm{d}(y, f(y)).$$

und wir erhalten (mit $y = x^*$) für alle $x \in M$

$$(1-q)\mathrm{d}(x, x^*) \leq \mathrm{d}(x, f(x)) + \mathrm{d}(x^*, f(x^*)) = \mathrm{d}(x, f(x)). \tag{3.3}$$

Das liefert nun für jeden Fixpunkt $x \in M$ von f die Ungleichung

$$(1-q)\mathrm{d}(x, x^*) \leq \mathrm{d}(x, f(x)) = 0$$

und da q in $(0,1)$ liegt, muss damit $\mathrm{d}(x, x^*) = 0$, d. h. $x = x^*$ gelten.
Es bleiben die beiden Abschätzungen aus (3.1) zu zeigen, die sich durch einfaches Zusammenbauen schon gefundener Erkenntnisse ergeben. Wir starten von (3.3) mit $x = x_n$ und erhalten für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe von (3.2)

$$\mathrm{d}(x_n, x^*) \leq \frac{1}{1-q}\mathrm{d}(x_n, f(x_n)) = \frac{1}{1-q}\mathrm{d}(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{q^n}{1-q}\mathrm{d}(x_1, x_0). \qquad \square$$

Beispielhafte Anwendungen dieses Satzes werden Sie in dieser und in anderen Vorlesungen noch reichlich sehen, so dass wir hier auf ein konstruiertes Schaufenster-Beispiel verzichten wollen. Lassen Sie uns stattdessen nach der Vollständigkeit ein anderes unverzichtbares Hilfsmittel der Analysis in den Kontext von metrischen Räumen herüberretten: die Kompaktheit.

4. Kompaktheit

Dass die Übertragung der Kompaktheit aus der Analysis I nicht 1:1 geht, war dort schon angedroht worden. Das folgende Beispiel zeigt das zu Grunde liegende Problem auf.
In diesem gesamten Abschnitt sei wieder (M, d) ein beliebiger metrischer Raum.

Beispiel 4.1. Wir betrachten den Hilbertraum $(\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2})$ aus Beispiel 3.12 (e). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sind die Elementarfolgen $e^{(k)} = (\delta_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$, die nur an der k-ten Stelle eine 1 enthalten und sonst Nullen, Elemente von ℓ^2 mit

$$\|e^{(k)}\|_{\ell^2} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{nk}^2\Big)^{1/2} = 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Damit liegen alle diese Folgen in der abgeschlossenen Einheitskugel $K_1(0)$ von ℓ^2. Dieses ist eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von ℓ^2 und $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in dieser Menge (Achtung, das ist jetzt eine Folge, deren Folgenglieder selbst Folgen sind!). Aber diese Folge hat leider keinen einzigen Häufungswert, denn für alle $k, m \in \mathbb{N}$ mit $k \neq m$ gilt

$$\|e^{(k)} - e^{(m)}\|_{\ell^2} = \big(1^2 + (-1)^2\big)^{1/2} = \sqrt{2}.$$

Wenn wir also bei „kompakt = abgeschlossen und beschränkt“ bleiben, müssen wir uns von Bolzano-Weierstraß und vielen weiteren Freunden verabschieden. Ein solcher Kompaktheitsbegriff wäre inhaltsleer und nutzlos.
Das Problem ist, dass ℓ^2 als unendlichdimensionaler Vektorraum so weitläufig ist, dass man darin auf beschränktem Raum unendlich viele Punkte ohne Häufungswert unterbringt. wir brauchen also einen restriktiveren Kompaktheitsbegriff, der die Teilmengen solch „großer“ Räume, oder gleich eines beliebigen metrischen Raums, auszeichnet, in denen eben Bolzano-Weierstraß usw. gelten.
Eine Möglichkeit wäre es nun, analog zur Vollständigkeit, die gewünschte Eigenschaft einfach zur Definition zu erheben. Glücklicherweise kann man im Falle der Kompaktheit eine elementare Definition angeben. (Elementar heißt leider nicht immer übersichtlich…)

Definition 4.2. *Es sei $X \subseteq M$.*

(a) Ist I eine beliebige Indexmenge und O_i für jedes $i \in I$ eine offene Teilmenge von M, so dass $X \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$ gilt, dann nennt man $\{O_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung *von X.*

(b) *Die Menge X heißt* kompakt, *wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält, d. h. für jede Familie $\{O_i : i \in I\}$ wie in (a) existieren ein $r \in \mathbb{N}$ und $i_1, i_2, \dots, i_r \in I$ mit $X \subseteq \bigcup_{k=1}^{r} O_{i_k}$.*

Ist M selbst kompakt, so spricht man auch von einem kompakten metrischen Raum.

Bemerkung 4.3. Da Kompaktheit über die Betrachtung offener Mengen definiert ist, und sich die offenen Mengen nach Übungsaufgabe 3.9 beim Übergang zu einer äquivalenten Norm nicht ändern, ist auch dieser Begriff davon nicht betroffen.

Beispiel 4.4. Jede endliche Menge ist banalerweise kompakt. Interessanter ist das folgende Beispiel, das in jedem metrischen Raum funktioniert: Es sei (x_n) eine konvergente Folge in M mit $x_0 := \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann ist die Menge $K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ kompakt.
Zum Nachweis betrachten wir eine beliebige offene Überdeckung $\{O_i : i \in I\}$ von K. Da K in der Vereinigung aller O_i enthalten ist, gibt es ein $i_0 \in I$ mit $x_0 \in O_{i_0}$. Desweiteren ist O_{i_0} offen, was uns die Existenz eines $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq O_{i_0}$ sichert. Dank der Konvergenz von (x_n) gegen x_0 gibt es nun wiederum ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in U_\varepsilon(x_0) \subseteq O_{i_0}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Nun bleiben nur noch endlich viele Folgenglieder $x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}$ übrig, die jeweils in einem $O_{i_1}, \dots, O_{i_{n_0-1}}$ liegen. Zusammen gilt also $K \subseteq \bigcup_{k=0}^{n_0-1} O_{i_k}$ und wir haben unsere endliche Teilüberdeckung gefunden.

Satz 4.5. *Es sei $K \subseteq M$ eine kompakte Menge. Ist $A \subseteq K$ abgeschlossen in M, so ist auch A kompakt.*

Beweis. Sei $\{O_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von A. Da A^c in M offen ist, und

$$K \subseteq M = A^c \cup A \subseteq A^c \cup \bigcup_{i\in I} O_i$$

gilt, ist $\{O_i : i \in I\} \cup \{A^c\}$ eine offene Überdeckung von K. Dank der Kompaktheit von K, können wir aus dieser eine endliche Teilüberdeckung auswählen, d. h. es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ und $i_1, i_2, \dots, i_r \in I$ mit $A \subseteq K \subseteq A^c \cup O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_r}$. Schließlich kann A^c an dieser Überdeckung von A keinen Anteil haben, es gilt also $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{r} O_{i_k}$ und wir haben eine endliche Teilüberdeckung von A gefunden. □

Nun können wir zeigen, dass dieser Kompaktheitsbegriff unsere Erwartungen erfüllt: Kompakte Mengen sind genau die, in denen jede Folge eine konvergente Teilfolge hat. Damit haben wir tatsächlich das Problem aus dem Einführungsbeispiel dieses Abschnitts gelöst.

Satz 4.6 (Folgenkompaktheit)**.** *Eine Menge $K \subseteq M$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge hat.*

Beweis. **„⇒"** Wir nehmen an, es gäbe eine Folge (x_n) in K, die keine konvergente Teilfolge, d. h. keinen Häufungswert, hat. Nach der Definition eines Häufungswerts bedeutet das, dass es für jedes $x \in K$ ein $\varepsilon = \varepsilon(x)$ gibt, so dass die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_{\varepsilon(x)}(x)\}$ endlich ist.

Dann ist die Familie $\{U_{\varepsilon(x)}(x) : x \in K\}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt vorausgesetzt ist, gibt es nun eine endliche Teilüberdeckung, d. h. es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \dots, a_r \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} U_{\varepsilon(a_j)}(a_j)$. Damit folgt aber

$$\begin{aligned}\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\} &\subseteq \Big\{n \in \mathbb{N} : x_n \in \bigcup_{j=1}^{r} U_{\varepsilon(a_j)}(a_j)\Big\} \\ &= \bigcup_{j=1}^{r} \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_{\varepsilon(a_j)}(a_j)\}.\end{aligned}$$

Wir haben also $\mathbb{N}$ als eine endliche Vereinigung von endlichen Mengen geschrieben, womit $\mathbb{N}$ endlich ist, was als Widerspruch durchgehen sollte.

„⇐" Sei $\{O_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von K.

Schritt 1: Wir zeigen: $\exists \delta_0 > 0\ \forall x \in K\ \exists i \in I : U_{\delta_0}(x) \subseteq O_i$.

Dazu nehmen wir an, diese Aussage ist falsch, d. h. für jedes $\delta > 0$ gibt es ein $x \in K$, so dass $U_\delta(x) \not\subseteq O_i$ für jedes $i \in I$ gilt. Nun bauen wir ein Folge (x_n) in K, indem wir diese Annahme für alle δ der Form $1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ausschlachten. Das liefert uns für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$, so dass gilt

$$U_{1/n}(x_n) \not\subseteq O_i \quad \text{für jedes } i \in I. \tag{4.1}$$

Da (x_n) eine Folge in K ist, hat diese nach Voraussetzung eine in K konvergente Teilfolge (x_{n_k}), deren Grenzwert wir im Folgenden x_0 nennen. Da $x_0 \in K$ und $\{O_i : i \in I\}$ eine Überdeckung von K ist, gibt es ein $i_0 \in I$ mit $x_0 \in O_{i_0}$, und da O_{i_0} eine offene Menge ist, gibt es weiter ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq O_{i_0}$.

Dank der Konvergenz der Teilfolge (x_{n_k}) gegen x_0 können wir nun ein $\ell \in \mathbb{N}$ finden, für das zum Einen $\ell > 2/\varepsilon$ und zum Anderen $\mathrm{d}(x_0, x_\ell) < \varepsilon/2$ gilt. Dann gilt für alle $x \in U_{\varepsilon/2}(x_\ell)$

$$\mathrm{d}(x, x_0) \le \mathrm{d}(x, x_\ell) + \mathrm{d}(x_\ell, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also haben wir $U_{\varepsilon/2}(x_\ell) \subseteq U_\varepsilon(x_0)$ und das liefert nun zusammengenommen

$$U_{1/\ell}(x_\ell) \subseteq U_{\varepsilon/2}(x_\ell) \subseteq U_\varepsilon(x_0) \subseteq O_{i_0},$$

was uns einen Widerspruch zu (4.1) liefert.

Schritt 2: Wir zeigen: Für jedes $\delta > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_\delta(x_j)$.

Auch zum Nachweis dieser Behauptung führen wir einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, es gäbe ein $\delta_1 > 0$, so dass für jede endliche Wahl von Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ gilt, dass $K \nsubseteq \bigcup_{j=1}^n U_{\delta_1}(x_j)$ ist.

Nun wählen wir ein $x_0 \in K$ und definieren rekursiv eine Folge in K durch

$$x_k \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} U_{\delta_1}(x_j), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Man beachte, dass diese Konstruktion möglich ist, denn nach Annahme ist in jedem Schritt diese Menge nicht leer.

Seien nun $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ gegeben. Dann gilt für unsere eben gewonnene Folge (x_k), dass $x_m \notin U_{\delta_1}(x_n)$, also ist $\mathrm{d}(x_n, x_m) \geq \delta_1$. Das bedeutet aber, dass keine Teilfolge von (x_k) eine Cauchyfolge sein kann, d. h. diese Folge (x_k) hat keine konvergente Teilfolge und wir haben einen Widerspruch zur Voraussetzung.

Schritt 3: Eigentlicher Beweis, dass K kompakt ist.

Wir nehmen uns das δ_0 aus dem ersten Schritt her. Dazu gibt es nun nach dem zweiten Schritt eine endliche Wahl von Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{\delta_0}(x_j)$. Für jeden der Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wenden wir jetzt Schritt 1 an. Damit erhalten wir für $j = 1, 2, \ldots, n$ jeweils ein $i_j \in I$ mit $U_{\delta_0}(x_j) \subseteq O_{i_j}$ und damit ist schließlich

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{\delta_0}(x_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^n O_{i_j}$$

und wir haben eine endliche Teilüberdeckung gefunden, womit K als kompakt entlarvt ist. $\square$

Kompaktheit ist ein sehr starker Begriff, der immer wieder mit zum Teil großem Gewinn verwendet werden kann. Sie werden in Ihrem Studium noch viele Beispiele dafür sehen. Für den Augenblick notieren wir die folgende überraschende Folgerung.

Satz 4.7. *Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.*

Beweis. Sei (M, d) ein kompakter metrischer Raum und (x_n) eine Cauchyfolge in M, von der wir nachweisen müssen, dass sie konvergiert. Nach Satz 4.6 hat (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}), deren Grenzwert wir mit x_0 bezeichnen.
Wir wollen nun zeigen, dass die gesamte Folge (x_n) schon gegen x_0 konvergiert und geben dazu ein $\varepsilon > 0$ vor. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, das gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllt:

- $\mathrm{d}(x_{n_{k_0}}, x_m) < \varepsilon/2$ für alle $m \geq n_{k_0}$. (Da (x_n) Cauchyfolge)
- $\mathrm{d}(x_0, x_{n_{k_0}}) < \varepsilon/2$. (Da $x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$)

Damit gilt dann für alle $n \geq n_{k_0}$

$$\mathrm{d}(x_n, x_0) \leq \mathrm{d}(x_n, x_{n_{k_0}}) + \mathrm{d}(x_{n_{k_0}}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Satz 4.8. *Jede kompakte Menge ist abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis. Es sei K eine kompakte Teilmenge von M. Ist $K = \emptyset$, so ist die Aussage des Satzes erfüllt, wir nehmen also ab jetzt an, dass $K \neq \emptyset$ ist.
Sei $x_0 \in K$ beliebig. Dann gilt $K \subseteq M = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n(x_0)$. Also ist das Mengensystem $\{U_n(x_0) : n \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d. h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} U_n(x_0) = U_m(x_0).$$

Also ist K beschränkt.
Für die Abgeschlossenheit verwenden wir Satz 3.8. Sei also (x_n) eine Folge in K, die in M gegen x_0 konvergiert. Dann hat (x_n) nach Satz 4.6 eine in K konvergente Teilfolge. Deren Grenzwert muss aber x_0 sein, also ist $x_0 \in K$ und wir sind fertig. $\square$

Wir haben in Beispiel 4.1 bereits gesehen, dass die Umkehrung obigen Satzes in metrischen Räumen im Allgemeinen falsch ist. Wir wollen nun zeigen, dass sie in den wichtigen Räumen $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_p)$ für $1 \leq p \leq \infty$ aber richtig ist. Tatsächlich werden wir später sehen, dass sie in jedem endlichdimensionalen normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum gilt, vgl. Satz 6.7.

Satz 4.9 (Heine-Borel, Spezialfall)**.** *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Eine Teilmenge des Raums $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_p)$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Da alle p-Normen in $\mathbb{K}^d$ nach Satz 1.4 zur ∞-Norm äquivalent sind, reicht es diese Norm zu betrachten, vgl. Bemerkung 4.3.
Dank Satz 4.8 müssen wir nur noch zeigen, dass jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{K}^d$ kompakt ist. Dazu nehmen wir an, es gäbe eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge K von $\mathbb{K}^d$ und eine offene Überdeckung $\{O_i : i \in I\}$ von K, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.
Da K beschränkt ist, gibt es ein $r > 0$ mit

$$K \subseteq U_r(0) \subseteq \overline{U_r(0)} = \{x \in \mathbb{K}^d : \|x\|_\infty \leq r\} =: Q_0.$$

Geometrisch ist dieses Q_0 ein Würfel mit Seitenlänge $\ell := 2r$ und Mittelpunkt im Ursprung. Im folgenden schreiben wir für einen Würfel Q in $\mathbb{K}^d$ für dessen Seitenlänge $L(Q)$.

Wir zerlegen nun durch halbieren aller Seiten den Würfel Q_0 in 2^d kleinere Würfel $Q_{0,1}, Q_{0,2}, \dots, Q_{0,2^d}$ mit Seitenlängen $L(Q_{0,j}) = \ell/2$ für $j = 1, 2, \dots, 2^d$. Dann muss es ein $j_0 \in \{1, 2, \dots, 2^d\}$ geben, für das $Q_{0,j_0} \cap K$ keine endliche Teilüberdeckung hat, denn anderenfalls wären die endlich vielen endlichen Teilüberdeckungen von $Q_{0,j} \cap K$ für $j = 1, 2, \dots, 2^d$ zusammengenommen eine endliche Teilüberdeckung von K, und eine solche gibt es ja nach Annahme nicht.
Wir nehmen uns diesen nicht endlich überdeckbaren Würfel her und setzen $Q_1 := Q_{0,j_0}$. Nun zerlegen wir diesen Würfel genauso und fahren das selbe Argument wieder. Das liefert uns einen Teilwürfel Q_2 von Q_1 mit $L(Q_2) = \ell/4$, so dass $Q_2 \cap K$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt.
Iteration dieses Arguments liefert eine Folge Q_j, $j \in \mathbb{N}$, von Würfeln mit $Q_0 \supseteq Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \dots$ und $L(Q_j) = \ell/2^j$ für alle $j \in \mathbb{N}$, so dass jeweils $Q_j \cap K$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt.
Wir wählen nun für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein $x_j \in Q_j \cap K$. (Diese Mengen sind sicher alle nicht leer, denn die leere Menge besitzt eine sogar sehr endliche Teilüberdeckung.) Von der so entstehenden Folge (x_j) zeigen wir nun zunächst, dass sie eine Cauchyfolge ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\ell/2^{n_0} < \varepsilon$. Sind nun $n, m \geq n_0$, so gilt $x_n, x_m \in Q_{n_0}$, womit folgt

$$\|x_n - x_m\|_\infty \leq L(Q_{n_0}) = \frac{\ell}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

Nach Beispiel 3.12 (a) ist $\mathbb{K}^d$ mit der ∞-Norm vollständig, also ist (x_j) eine konvergente Folge und wir nennen deren Grenzwert a. Dann gilt $a \in K$, denn (x_j) war eine Folge in K und K ist abgeschlossen, vgl. Satz 3.8. Da $\{O_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von K ist, gibt es damit ein $i_0 \in I$ mit $a \in O_{i_0}$. Diese Menge O_{i_0} ist eine offene Menge und enthält damit eine Kugel $U_\varrho(a)$ für ein klein genug gewähltes $\varrho > 0$.
Wir nehmen uns nun ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\ell/2^k < \varrho$ her. Dann gilt $a \in Q_k$ und für alle $x \in Q_k$ gilt sogar

$$\|x - a\|_\infty \leq L(Q_k) = \frac{\ell}{2^k} < \varrho,$$

d. h. wir haben

$$Q_k \cap K \subseteq Q_k \subseteq U_\varrho(a) \subseteq O_{i_0},$$

im Widerspruch dazu, dass $Q_k \cap K$ keine endliche Teilüberdeckung hat. □

5. Stetigkeit

Wir wollen nun den Begriff der Stetigkeit auf metrische Räume verallgemeinern. Das geht wieder geradeaus, indem wir in der Definition aus $\mathbb{R}$ alle Ausdrücke der Form „$|x-y|$“ durch „$\mathrm{d}(x,y)$“ ersetzen.
Im gesamten Kapitel seien nun (M, d_M) und (N, d_N) zwei metrische Räume.
Bevor wir loslegen, sei zunächst an einige elementare Zusammenhänge zwischen Bildmengen bzw. Urbildmengen von Funktionen erinnert, die wir im Folgenden immer wieder verwenden werden.

Erinnerung 5.1. Es seien A, B zwei Mengen $f : A \to B$ eine Funktion und I eine beliebige Indexmenge. Sind dann $C, C_i \subseteq A$, sowie $D, D_i \subseteq B$ für $i \in I$, so gelten die folgenden Aussagen:

(a) $f\big(\bigcup_{i\in I} C_i\big) = \bigcup_{i\in I} f(C_i)$ und $f\big(\bigcap_{i\in I} C_i\big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(C_i)$.

(b) $f^{-1}\big(\bigcup_{i\in I} D_i\big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(D_i)$ und $f^{-1}\big(\bigcap_{i\in I} D_i\big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(D_i)$.

(c) $f^{-1}(f(C)) \supseteq C$ und $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$.

(d) $f^{-1}(D^c) = \big(f^{-1}(D)\big)^c$.

Definition 5.2. *Eine Funktion $f : M \to N$ heißt*

(a) stetig *in $x_0 \in M$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in M$ mit $\mathrm{d}_M(x, x_0) < \delta$ gilt $\mathrm{d}_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.*

(b) stetig auf *M, wenn f in allen Punkten $x_0 \in M$ stetig ist.*

Bemerkung 5.3. In Termen von ε-Umgebungen lässt sich obige Definition von Stetigkeit in x_0 auch schön so hinschreiben:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)).$$

Man beachte, dass dabei die Umgebung um x_0 in M bezüglich d_M gebildet wird und die Umgebung um $f(x_0)$ in N bezüglich d_N.
Schreibt man das noch konsequenter um, so ergibt sich, dass f in x_0 genau dann stetig ist, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f\big(U_\delta(x_0)\big) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$$

gilt.

Zur Abwechslung haben wir hier die ε-δ-Definition der Stetigkeit verwendet. Wie schon in $\mathbb{R}$ kann man Stetigkeit äquivalent auch mit Hilfe von Folgengrenzwerten definieren. Außerdem gibt es noch eine dritte äquivalente Umformulierung mit Hilfe von Umgebungen. Das wollen wir nun zeigen.

Satz 5.4. *Sei $f : M \to N$ eine Funktion und $x_0 \in M$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) f ist stetig in x_0.

(b) Für jede Folge (x_n) in M mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. (Folgenstetigkeit)

(c) Für jede Umgebung $V \subseteq N$ von $f(x_0)$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq M$ von x_0 mit $f(U) \subseteq V$.

Beweis. Die Äquivalenz zwischen (a) und (b) ist analog zum Beweis in Analysis I. Wir zeigen noch, dass (a) und (c) äquivalent sind.
Zunächst sei also f in x_0 stetig und $V \subseteq N$ eine Umgebung von $f(x_0)$. Nach Definition einer Umgebung existiert dann ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq V$ und dank der Stetigkeit von f in x_0 gibt es zu diesem ε ein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$, vgl. Bemerkung 5.3. Damit ist $U := U_\delta(x_0) \subseteq M$ eine Umgebung von x_0 mit $f(U) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq V$, d. h. U erfüllt die im Satz geforderten Bedingungen.
Wir wenden uns also noch der Implikation „(c)$\Rightarrow$(a)“ zu. Sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir betrachten $V := U_\varepsilon(f(x_0))$ als Umgebung von $f(x_0)$. Nach (c) existiert dann eine Umgebung $U \subseteq M$ von x_0 mit $f(U) \subseteq V$. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subseteq U$ und es gilt

$$f(U_\delta(x_0)) \subseteq f(U) \subseteq V = U_\varepsilon(f(x_0)),$$

d. h. f ist stetig in x_0 nach Bemerkung 5.3. □

Wie im letzten Semester definieren wir:

Definition 5.5. *Sei $f : M \to N$ eine Funktion, $x_0 \in M$ ein Häufungspunkt von M und $a \in N$. Wir schreiben*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a,$$

falls für jede Folge (x_n) in $M \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Auch der Beweis des folgenden Satzes lässt sich direkt aus der Analysis I übertragen.

Satz 5.6. *Es sei $f : M \to N$ eine Funktion, $x_0 \in M$ ein Häufungspunkt von M und $a \in N$.*

(a) Ist für jede Folge (x_n) in $M \setminus \{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert, die Folge $(f(x_n))$ konvergent, so existiert der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

(b) Es gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, genau dann wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ gilt $f(x) \in U_\varepsilon(a)$.

Wir geben noch zwei äquivalente Beschreibungen für Stetigkeit auf M an, die die Stetigkeit nur mit Hilfe der Begriffe offen/abgeschlossen charakterisieren. Diese Sichtweise auf Stetigkeit lässt sich dann sogar über den Fall von metrischen Räumen hinaus verallgemeinern auf soganannte topologische Räume. Wir wollen das aber hier nicht vertiefen, sondern auf die entsprechende Vorlesung in Topologie verweisen.

Satz 5.7 (Topologische Stetigkeit)**.** *Es sei $f : M \to N$ eine Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) f ist stetig auf M.

(b) Für alle offenen Teilmengen $O \subseteq N$ ist $f^{-1}(O) \subseteq M$ offen.

(c) Für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subseteq N$ ist $f^{-1}(A) \subseteq M$ abgeschlossen.

Beweis. **„(a)⇒(b)"** Sei $O \subseteq N$ eine offene Menge. Ist $f^{-1}(O) = \emptyset$, so ist $f^{-1}(O)$ offen. Wir können uns also auf den Fall $f^{-1}(O) \neq \emptyset$ konzentrieren. Sei $x_0 \in f^{-1}(O)$ gewählt. Dann ist unser Ziel nun nachzuweisen, dass x_0 ein innerer Punkt dieser Menge ist.

Wir haben $f(x_0) \in f(f^{-1}(O)) \subseteq O$ und O ist offen, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq O$. Zu diesem ε gibt es, dank der Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, so dass $f(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq O$ ist. Also ist $U_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(O)$ und das bedeutet, dass x_0 ein innerer Punkt von $f^{-1}(O)$ ist. Da $x_0 \in f^{-1}(O)$ beliebig war, ist diese Menge damit offen.

„(b)⇒(c)" Sei $A \subseteq N$ abgeschlossen. Dann ist A^c offen in N und nach Voraussetzung ist somit $f^{-1}(A^c)$ offen in M. Wegen $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ ist damit $f^{-1}(A^c)$ abgeschlossen in M.

„(c)⇒(b)" Genauso wie im vorigen Punkt ist für jede offene Menge $O \subseteq N$, die Urbildmenge $f^{-1}(O^c) = (f^{-1}(O))^c$ abgeschlossen und das bedeutet, dass $f^{-1}(O)$ offen ist.

„(b)⇒(a)" Sei $x_0 \in M$ beliebig und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann ist $U_\varepsilon(f(x_0))$ eine offene Menge in N. Also ist nach Voraussetzung $f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$ offen in M. Nun liegt aber x_0 in dieser Menge und ist damit ein innerer Punkt. D. h. es gibt ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$. Das liefert

$$f(U_\delta(x_0)) \subseteq f\big(f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))\big) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$$

und das bedeutet genau Stetigkeit von f in x_0. □

Beispiel 5.8. Wir schauen uns wieder den Extremfall der diskreten Metrik an, vgl. Beispiel 1.13 (a). Ist die Metrik d_M auf M die diskrete Metrik, so ist nach Beispiel 2.10 jede Teilmenge von M offen. Also ist für eine Funktion $f : M \to N$ auch $f^{-1}(O)$ für jede offene Teilmenge O von N offen. Das bedeutet, dass in diesem Fall jede Abbildung auf M stetig ist.
Ist N mit der diskreten Metrik ausgestattet, so ist jede Teilmenge von N offen. Damit eine Funktion $f : M \to N$ in diesem Fall stetig ist, muss also $f^{-1}(B)$ für jede Teilmenge B von N eine offene Menge sein. Es gibt in diesem Fall also i. A. sehr wenige stetige Funktionen. Wie viele es gibt hängt von der Metrik auf M ab.

In dieser Vorlesung werden wir uns die meiste Zeit mit Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ beschäftigen, also sollten wir auch noch ein solches Beispiel betrachten.

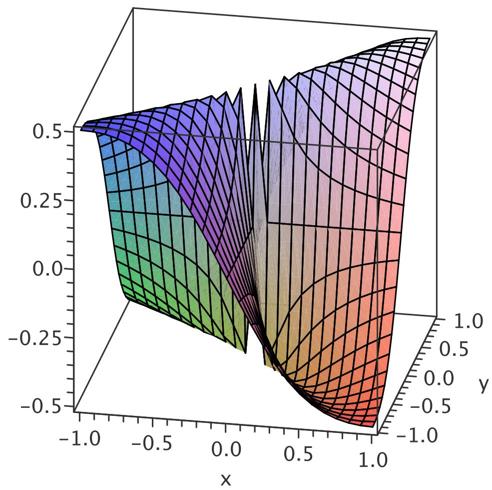

Abbildung 5.1.: Der Graph der Funktion $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$

Beispiel 5.9. Wir betrachten die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

vgl. Abbildungen 5.1 und 5.2. Zunächst ist in beiden Funktionsvorschriften der Nenner für alle $(x, y) \neq (0, 0)$ immer ungleich Null, also sind beide Funktionen f und g in allen Punkten $(x, y) \neq (0, 0)$ nach den Grenzwertsätzen stetig. Es

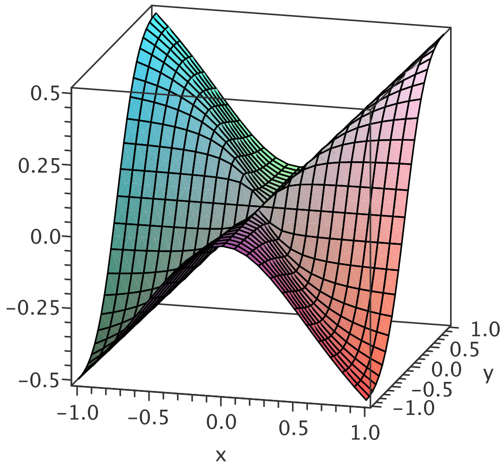

Abbildung 5.2.: Der Graph der Funktion $(x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$

bleibt uns nur die Stetigkeit in $(0, 0)$ zu überprüfen. Hierzu greifen wir auf die Charakterisierung via Folgenstetigkeit zurück, vgl. Satz 5.4.

Zu f: Wir betrachten die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((1/n, 1/n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

in $\mathbb{R}^2$. Diese konvergiert gegen $(0, 0)$, wobei $a_n \neq (0, 0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daher ist

$$f(a_n) = f(1/n, 1/n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Das liefert uns $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1/2 \neq 0 = f(0, 0)$. Also ist f in $(0, 0)$ nicht stetig.

Zu g: Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = (0, 0)$. Dann ist $a_n = (x_n, y_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit den beiden reellen Koordinatenfolgen (x_n) und (y_n). Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, für die $x_n \neq 0$ ist,

$$|g(a_n)| = \left|\frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2}\right| = \frac{x_n^2 |y_n|}{x_n^2 + y_n^2} \leq \frac{x_n^2 |y_n|}{x_n^2} = |y_n|.$$

Ist $x_n = 0$, so gilt auf jeden Fall $|g(a_n)| = 0 \leq |y_n|$, also haben wir diese Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$.
Da (y_n) und damit auch $(|y_n|)$ eine Nullfolge ist, gilt nach dem Sandwich-Theorem $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = 0 = g(0, 0)$, was gerade bedeutet, dass g in $(0, 0)$ stetig ist.

Mit zu den einfachsten Abbildungen zwischen Vektorräumen gehören die linearen Abbildungen (Gruß an die Lineare Algebra!). Diese spielen in vielen Bereichen der Mathematik eine wichtige Rolle und werden auch in dieser Vorlesung zentral sein. Deshalb wollen wir uns nun mit der Stetigkeit dieser Funktionen befassen.

Satz 5.10. *Es seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Vektorräume und $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) T ist stetig auf V.

(b) Es gibt ein $x_0 \in V$, so dass T in x_0 stetig ist.

(c) T ist Lipschitz-stetig.

(d) Es gibt ein $C \geq 0$ mit $\|Tx\|_W \leq C\|x\|_V$ für alle $x \in V$.

Beweis. **„(a)⇒(d)"** Für $x = 0$ gilt wegen $Tx = 0$ die Aussage immer und für jedes $C \geq 0$. Sei also $x \in V \setminus \{0\}$. Nach Voraussetzung ist T stetig in 0, also existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit $\|Ty\|_W = \|Ty - T0\|_W < 1$ für alle $y \in V$ mit $\|y\|_V = \|y - 0\|_V < \delta$. Es ist nun

$$\Big\|\frac{\delta}{2\|x\|_V}x\Big\|_V = \frac{\delta}{2}\frac{\|x\|_V}{\|x\|_V} = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Also wissen wir dank der Linearität von T

$$\|Tx\|_W = \Big\|\frac{2\|x\|_V}{\delta}T\Big(\frac{\delta}{2\|x\|_V}x\Big)\Big\|_W = \frac{2}{\delta}\|x\|_V \underbrace{\Big\|T\Big(\frac{\delta}{2\|x\|_V}x\Big)\Big\|_W}_{<1} \leq \frac{2}{\delta}\|x\|_V.$$

„(d)⇒(c)" Für alle $x, y \in V$ gilt dank der Linearität von T und nach Voraussetzung

$$\|Tx - Ty\|_W = \|T(x - y)\|_W \leq C\|x - y\|_V$$

und das ist gerade Lipschitz-Stetigkeit.

„(c)⇒(b)" Aus Lipschitz-Stetigkeit folgt sofort Stetigkeit in einem Punkt.

„(b)⇒(a)" Es sei nun T stetig in x_0 und $y \in V$ beliebig. Zum Nachweis, dass T auch in y stetig ist, betrachten wir eine Folge (x_n) in V mit $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Dann gilt wieder dank der Linearität von T

$$T(x_n) = T(x_n - y + x_0 + y - x_0) = T(x_n - y + x_0) + T(y - x_0).$$

Nun konvergiert die Folge $(x_n - y + x_0)$ gegen x_0 und da T dort stetig ist, gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T(x_n) &= \lim_{n\to\infty} T(x_n - y + x_0) + \lim_{n\to\infty} T(y - x_0)\\ &= T(x_0) + T(y - x_0) = T(x_0) + T(y) - T(x_0) = T(y).\end{aligned}$$

Nach Satz 5.4 ist also T in y stetig. □

Definition 5.11. *Sind V, W zwei normierte Vektorräume, so notieren wir*

$$\mathcal{L}(V,W) := \{T : V \to W \mid T \text{ linear und stetig}\}.$$

Ist $V = W$, so schreibt man auch $\mathcal{L}(V)$ statt $\mathcal{L}(V,V)$.

Satz 5.12. *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ und $(X, \|\cdot\|_X)$ drei normierte Vektorräume und $V, X \neq \{0\}$.*

(a) Mit

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_W : x \in V \text{ mit } \|x\|_V = 1\}, \qquad T \in \mathcal{L}(V,W),$$

ist $(\mathcal{L}(V,W), \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.

(b) Die Norm aus (a) erfüllt

i) $\|Tx\|_W \leq \|T\|\|x\|_V$ für alle $x \in V$ und alle $T \in \mathcal{L}(V,W)$ sowie

ii) $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$ für alle $T \in \mathcal{L}(V,W)$ und $S \in \mathcal{L}(X,V)$.

Beweis. Übung.

Bemerkung 5.13. (a) Eine lineare Abbildung, die die Eigenschaft (d) aus Satz 5.10 erfüllt, wird oft als *beschränkt* bezeichnet. In diesem Sinne sagt Satz 5.10, dass eine lineare Abbildung genau dann stetig ist, wenn sie beschränkt ist.

Aber Vorsicht: Eine beschränkte lineare Abbildung ist keine beschränkte Funktion im dem üblichen Sinne, dass die Bildmenge der Funktion eine beschränkte Menge ist! Dessen muss man sich beim Umgang mit diesem Begriff immer bewusst sein.

(b) Die Norm in Satz 5.12 heißt *Operatornorm*, oder im Falle von endlichdimensionalen Vektorräumen auch (zu $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ *assoziierte*) *Matrixnorm*.

Übungsaufgabe 5.14. Zeigen Sie, dass im Fall $V = \mathbb{R}^d$ mit $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_\infty$ und $W = \mathbb{R}^p$ mit $\|\cdot\|_W = \|\cdot\|_\infty$ die assoziierte Matrixnorm in $\mathbb{R}^{p\times d}$ gegeben ist durch die *Zeilensummennorm*:

$$\|A\|_{ZS} := \max_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{d} |a_{jk}|, \qquad A = (a_{jk})_{j=1,\ldots,p,k=1,\ldots d} \in \mathbb{R}^{p\times d}.$$

Gibt es denn überhaupt unstetige lineare Abbildungen? Ja! Das zeigt die folgende Übungsaufgabe.

Übungsaufgabe 5.15. Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ mit $T(f) = f'$ eine unstetige lineare Abbildung ist. Sie können dazu die Funktionen $f_n(t) = \sin(n^2 t)/n$ betrachten.

6. Eigenschaften stetiger Funktionen

Nun ist es Zeit zu ernten und unsere zentralen Sätze über stetige Funktionen im neuen allgemeinen Gewand zu beweisen. Auch hier seien wieder (M, d_M) und (N, d_N) zwei metrische Räume.
Wir beginnen mit dem Satz, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Minimum und Maximum annehmen. Dieser ist so natürlich nicht mehr formulierbar, denn metrische Räume haben im Allgemeinen keine Ordnungsstruktur, aber eine verallgemeinerte Version lässt sich erfreulich kompakt hinschreiben.

Satz 6.1. *Sei $f : M \to N$ eine stetige Funktion. Ist M kompakt, so ist auch $f(M)$ kompakt.*

Bemerkung 6.2.

(a) Ist $N = \mathbb{R}$, so liefert die Kompaktheit von $f(M)$ gerade, dass f beschränkt ist, und dass das Supremum und Infimum von $f(M)$ zu $f(M)$ gehören. D. h. f nimmt dann sein Minimum und Maximum an.

(b) Der Satz ist für kompakte metrische Räume formuliert. Man beachte, dass jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes selbst (mit der induzierten Metrik) ein kompakter metrischer Raum ist. In diesem Sinne bekommt man also das gleiche Ergebnis, wenn f nur auf einer kompakten Teilmenge eines metrischen Raums definiert/stetig ist.

Beweis von Satz 6.1. Sei $\{O_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von $f(M)$ in N. Dann ist dank der Stetigkeit von f die Menge $f^{-1}(O_i)$ für alle $i \in I$ eine offene Teilmenge von M nach Satz 5.7. Außerdem ist

$$M \subseteq f^{-1}(f(M)) \subseteq f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} O_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i).$$

Also ist $\{f^{-1}(O_i) : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von M. Da M kompakt ist, können wir eine endliche Teilüberdeckung $\{f^{-1}(O_{i_1}), f^{-1}(O_{i_2}), \dots, f^{-1}(O_{i_r})\}$ mit einem $r \in \mathbb{N}$ auswählen und es gilt

$$f(M) \subseteq f\Big(\bigcup_{j=1}^{r} f^{-1}(O_{i_j})\Big) = f\Big(f^{-1}\Big(\bigcup_{j=1}^{r} O_{i_j}\Big)\Big) \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} O_{i_j}.$$

Wir haben also damit eine endliche Teilüberdeckung von $f(M)$ gefunden und sind fertig. □

Dieser Satz hat weitreichende Konsequenzen. Wir wollen ein paar Schlussfolgerungen ziehen, die viele Betrachtungen aus diesem und den vorigen Abschnitten zusammenführen.

Satz 6.3. *Ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, so sind alle Normen auf V äquivalent.*

Beweis. Wir beginnen den Beweis damit, uns die Arbeit etwas zu vereinfachen.

1. Reduktion: Es reicht aus $V = \mathbb{K}^d$ zu betrachten.

Sei $d = \dim(V)$. Dann schenkt uns die lineare Algebra einen Vektorraumisomorphismus $T : \mathbb{K}^d \to V$. Sind nun zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf V gegeben, so definieren wir auf $\mathbb{K}^d$ die beiden Normen (nachrechnen!)

$$\|x\|_T := \|Tx\| \quad \text{und} \quad |||x|||_T := |||Tx|||, \qquad x \in \mathbb{K}^d.$$

Gehen wir nun davon aus, dass wir das Resultat für $\mathbb{K}^d$ schon kennen, so haben wir $c, C > 0$ mit $c\|x\|_T \leq |||x|||_T \leq C\|x\|_T$ für alle $x \in \mathbb{K}^d$. Damit gilt für alle $v \in V$

$$|||v||| = |||TT^{-1}v||| = |||T^{-1}v|||_T \leq C\|T^{-1}v\|_T = C\|TT^{-1}v\| = C\|v\|$$

und genauso

$$c\|v\| = c\|TT^{-1}v\| = c\|T^{-1}v\|_T \leq |||T^{-1}v|||_T = |||TT^{-1}v||| = |||v|||.$$

2. Reduktion: Es reicht, dass jede Norm in $\mathbb{K}^d$ äquivalent zu $\|\cdot\|_2$ ist.

Seien $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen in $\mathbb{K}^d$, die beide äquivalent zur 2-Norm sind, d. h. es gibt $c_1, C_1, c_2, C_2 > 0$ mit

$$c_1\|x\| \leq \|x\|_2 \leq C_1\|x\| \quad \text{und} \quad c_2|||x||| \leq \|x\|_2 \leq C_2|||x||| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}^d.$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{K}^d$ auch

$$\frac{c_1}{C_2}\|x\| \leq \frac{1}{C_2}\|x\|_2 \leq |||x||| \leq \frac{1}{c_2}\|x\|_2 \leq \frac{C_1}{c_2}\|x\|$$

und auch $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ sind äquivalent.

Wir kommen jetzt also zum Hauptbeweis. Es bleibt noch zu zeigen, dass jede Norm in $\mathbb{K}^d$ äquivalent zur 2-Norm ist. Sei also $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^d$.
Wir bezeichnen mit $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^d$. Dann gilt für jedes $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)^T \in \mathbb{K}^d$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\|x\| = \Big\|\sum_{j=1}^d x_j e_j\Big\| \leq \sum_{j=1}^d \|x_j e_j\| = \sum_{j=1}^d |x_j|\|e_j\|.$$

Den letzten Ausdruck können wir nun als ein Standardskalarprodukt der beiden Vektoren $(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_d|)^T$ und $(\|e_1\|, \|e_2\|, \dots, \|e_d\|)^T$ in $\mathbb{K}^d$ auffassen. Also folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus Satz 1.10

$$\|x\| = \left\langle \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_d| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \|e_1\| \\ \vdots \\ \|e_d\| \end{pmatrix} \right\rangle \leq \sqrt{\sum_{j=1}^d |x_j|^2} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{j=1}^d \|e_j\|^2}}_{=:C} = C\|x\|_2,$$

und da offensichtlich $C > 0$ gilt, haben wir schon die erste Abschätzung und damit die halbe Miete.
Die umgekehrte Abschätzung $c\|x\|_2 \leq \|x\|$ ist ein bisschen tiefliegender, dafür ist das Argument mit Hilfe von Satz 6.1 wunderschön.
Wir betrachten dabei die Menge

$$S := \big\{x \in \mathbb{K}^d : \|x\|_2 = 1\big\}$$

und setzen $c := \inf\{\|x\| : x \in S\}$. Man beachte, dass dieses Infimum existiert, da die betrachtete Menge nicht-leer und nach unten (durch 0) beschränkt ist. Dieses c ist nun unser Kandidat für die gesuchte Abschätzung und tatsächlich gilt für alle $x \in \mathbb{K}^d \setminus \{0\}$, da $x/\|x\|_2 \in S$ ist,

$$\|x\| = \|x\|_2 \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \geq \|x\|_2 \cdot c$$

und banalerweise gilt auch $\|0\| = 0 \geq c \cdot 0 = c\|0\|_2$. Es bleibt noch ein klitzekleines Problem: Wir müssen irgendwie sicherstellen, dass $c > 0$ ist.
Dazu nehmen wir an, es wäre $c = 0$. Das bedeutet, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in S$ existiert mit $\|x_n\| \leq 1/n$. Damit ist (x_n) eine Folge in S mit $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$. Weiter ist S nach dem Satz von Heine-Borel 4.9 eine in $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_2)$ kompakte Teilmenge, also hat (x_n) nach Satz 4.6 eine bezüglich der 2-Norm konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit Grenzwert $a \in S$. Insbesondere gilt $\|a\|_2 = 1$.
Andererseits gilt nach dem schon oben bewiesenen für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\|a\| \leq \|a - x_{n_k}\| + \|x_{n_k}\| \leq C\|a - x_{n_k}\|_2 + \|x_{n_k}\| \leq C\|x_{n_k} - a\|_2 + \frac{1}{n_k}$$

und mit $k \to \infty$ folgt $\|a\| \leq C \cdot 0 + 0 = 0$. Dank der Definitheit der Norm ist also $a = 0$ und damit auch $\|a\|_2 = 0$, was der angestrebte Widerspruch ist. □

Nach so vielen äquivalenten Normen könnte man auf die Idee kommen, dass es gar keine nicht äquivalenten Normen gibt. Das wäre aber zu endlichdimensional gedacht. Hier ist ein typisches Beispiel.

Beispiel 6.4. Auf $V = C([0,1])$ betrachten wir die beiden Normen

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|, \qquad f \in C([0,1]),$$

vgl. Beispiel 1.7. Dann gilt für alle $f \in C([0,1])$ nach der Standardabschätzung für Integrale

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t \le \|f\|_\infty (1-0) = \|f\|_\infty,$$

aber die Normen sind nicht äquivalent, wie man an dem folgendem Beispiel, vgl. Beispiel I.20.2(c), sieht.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$f_n(t) = \frac{2nt}{1+n^2t^2}, \qquad t \in [0,1],$$

aus $C([0,1])$ und es gilt $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Andererseits gilt aber

$$\begin{aligned} \|f_n\|_1 &= \int_0^1 |f_n(t)| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2nt}{1+n^2t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n} \ln(1+n^2t^2)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{n} \ln(1+n^2) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Nehmen wir an, es gäbe ein $C > 0$ mit $\|f\|_\infty \le C\|f\|_1$ für alle $f \in C([0,1])$, so folgt damit der Widerspruch

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 \ge \lim_{n\to\infty} \frac{1}{C}\|f_n\|_\infty = \frac{1}{C}.$$

Mit der Erkenntnis, dass in endlichdimensionalen Räumen alle Normen äquivalent sind, können wir nun einige Dinge vereinfachen. Z. B. gilt folgendes schöne Konvergenz- bzw Stetigkeits-Kriterium für $\mathbb{K}^d$-wertige Folgen bzw. Funktionen, das uns wieder auf Konvergenz- bzw. Stetigkeitsbetrachtungen in $\mathbb{K}$ zurückbringt.

Satz 6.5. *(a) Eine Folge $(x_n) = ((x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,d})^T)$ in $\mathbb{K}^d$ konvergiert genau dann, wenn jede* Koordinatenfolge *$(x_{n,j})$, $j = 1,2,\ldots,d$, in $\mathbb{K}$ konvergiert. In diesem Fall gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} x_{n,1} \\ \lim_{n\to\infty} x_{n,2} \\ \vdots \\ \lim_{n\to\infty} x_{n,d} \end{pmatrix}.$$

(b) Es sei $f : M \to \mathbb{K}^d$ eine Abbildung mit Koordinatenfunktionen *$f_j : M \to \mathbb{K}$, $f_j(x) := f(x)_j$, $j = 1,2,\ldots,d$. Dann ist f genau dann stetig, wenn alle f_j, $j = 1,2,\ldots,d$, stetig sind.*

Beweis. Wir kümmern uns hier nur um (a), die zweite Aussage bleibt als Übungsaufgabe stehen. Ist einerseits (x_n) eine in $\mathbb{K}^d$ gegen $x \in \mathbb{K}^d$ konvergente Folge, so konvergiert sie insbesondere bezüglich der ∞-Norm, denn auf $\mathbb{K}^d$ sind ja alle Normen äquivalent. Also gilt für jedes $j = 1,2,\ldots,d$

$$|x_{n,j} - x_j| \le \max_{j=1}^{d} |x_{n,j} - x_j| = \|x_n - x\|_\infty \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Sind andererseits alle Koordinatenfolgen $(x_{n,j})$ konvergent gegen $x_j \in \mathbb{K}$ für $j = 1, 2, \dots, d$, so gilt mit $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \max_{j=1}^{d} |x_{n,j} - x_j| = 0,$$

also konvergiert dann (x_n) gegen x in $\mathbb{K}^d$, wobei wiederum egal ist mit welcher Norm dieser Raum daherkommt. □

Wir können nun auch den kompletten Satz von Heine-Borel beweisen. Dazu brauchen wir zunächst das folgende beruhigende Ergebnis.

Satz 6.6. *Sind $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume und ist V endlichdimensional, so ist jede lineare Abbildung $T : V \to W$ stetig.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $|||\cdot||| : V \to \mathbb{R}$ mit $|||x||| := \|x\|_V + \|Tx\|_W$, $x \in V$. Dies ist eine Norm auf V (nachweisen!) und damit ist diese nach Satz 6.3 äquivalent zu $\|\cdot\|_V$, d. h. es gibt ein $C > 0$ mit $|||x||| \leq C\|x\|_V$ für alle $x \in V$. Also ist

$$\|Tx\|_W \leq \|x\|_V + \|Tx\|_W = |||x||| \leq C\|x\|_V \quad \text{für alle } x \in V.$$

Das liefert nach Satz 5.10 die Stetigkeit von T. □

Satz 6.7 (Heine-Borel, Vollversion)**.** *Eine Teilmenge eines endlichdimensionalen normierten Vektorraums ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Für $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|)$ mit einer beliebigen Norm folgt die Aussage aus Satz 4.9 und Satz 6.3. Ist V ein anderer d-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|_V$, so gibt es wieder einen Isomorphismus $T : \mathbb{K}^d \to V$ und dieser ist ebenso wie T^{-1} nach Satz 6.6 stetig.
Sei nun $K \subseteq V$ abgeschlossen und beschränkt. Dann ist $T^{-1}(K) \subseteq \mathbb{K}^d$ nach Satz 5.7 als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung ebenfalls abgeschlossen. Außerdem gilt für alle $x \in T^{-1}(K)$, dass Tx in K liegt, also ist für alle $x \in T^{-1}(K)$ nach Satz 5.12

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\|_{V\to\mathbb{K}^d} \|Tx\|_V \leq \|T^{-1}\|_{V\to\mathbb{K}^d} \sup\{\|y\|_V : y \in K\}.$$

Zusammengenommen ist $T^{-1}(K)$ eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{K}^d$ also nach obiger Überlegung kompakt. Schließlich ist dann auch $K = T(T^{-1}(K))$ als stetiges Bild einer kompakten Menge nach Satz 6.1 kompakt. □

Bemerkung 6.8. Als Information für die Zukunft sei hier noch vermerkt, dass der Satz von Heine-Borel sogar endlichdimensionale Räume charakterisiert. Tatsächlich ist die abgeschlossene Einheitskugel eines normierten Vektorraums genau dann kompakt, wenn dieser endlichdimensional ist. Zum Beweis sei hier auf die Vorlesung „Funktionalanalysis“ verwiesen.

Wir wollen abschließend noch den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit verallgemeinern.

Definition 6.9. *Eine Funktion $f : M \to N$ ist* gleichmäßig stetig *auf M, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in M$ mit $\mathrm{d}_M(x, y) < \delta$ gilt, dass $\mathrm{d}_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ist.*

Wie in Satz I.21.4 gilt auch in diesem allgemeinen Kontext, dass stetige Funktionen auf kompakten Räumen sogar gleichmäßig stetig sind. Der Beweis verläuft analog wie damals.

Satz 6.10. *Es sei M kompakt und $f : M \to N$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf M.*

Die wichtigste Eigenschaft gleichmäßig stetiger Funktionen ist, dass diese sich unter geeigneten Voraussetzungen auf den Rand ihres Definitionsgebietes stetig fortsetzen lassen. Dies formulieren wir exakt im folgenden Satz.

Satz 6.11. *Es sei N vollständig und $D \subseteq M$. Ist $f : D \to N$ gleichmäßig stetig, so existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung $\hat{f} : \overline{D} \to N$ von f.*

Beweis. Wir zeigen, dass für jedes $x_0 \in \overline{D} \setminus D$ der Grenzwert $\lim_{x \to x_0, x \in D} f(x)$ existiert. Man beachte dabei, dass jedes $x \in \overline{D} \setminus D$ ein Häufungspunkt von D ist und damit der betrachtete Grenzwert sinnvoll ist. Haben wir das gezeigt, so ist

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D, \\ \lim_{x \to x_0, x \in D} f(x), & x \in \overline{D} \setminus D, \end{cases}$$

eine stetige Fortsetzung und diese ist auch eindeutig, denn der obige Funktionsgrenzwert ist ja die einzige Wahl, die zu einer stetigen Funktion führt.
Sei nun also $x_0 \in \overline{D} \setminus D$. Zum Nachweis der Existenz des Funktionsgrenzwertes zeigen wir, dass für jede Folge (x_n) in D, die gegen x_0 konvergiert, die Folge $(f(x_n))$ eine Cauchyfolge ist. Dann ist diese Dank der vorausgesetzten Vollständigkeit von N konvergent und die Existenz von $\lim_{x \to x_0, x \in D} f(x)$ folgt mit Satz 5.6 (a).
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert dank der gleichmäßigen Stetigkeit von f ein $\delta > 0$ mit $\mathrm{d}_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $x, y \in D$ mit $\mathrm{d}_M(x, y) < \delta$. Aus der Konvergenz von x_n gegen x_0 bekommen wir dann weiter ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\mathrm{d}_M(x_n, x_0) < \delta/2$ ist für alle $n \geq n_0$. Nun gilt für alle $n, m \geq n_0$

$$\mathrm{d}_M(x_n, x_m) \leq \mathrm{d}_M(x_n, x_0) + \mathrm{d}_M(x_0, x_m) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Also ist $\mathrm{d}_N(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ und das bedeutet gerade, dass $(f(x_n))$ eine Cauchyfolge in N ist. $\square$

Nun müssten wir ein großes Projekt starten und viele unserer Begriffe und Erkenntnisse über Folgen, Reihen und Funktionenfolgen aus der Analysis I auf allgemeine metrische Räume, normierte Vektorräume oder zumindest den $\mathbb{K}^d$ verallgemeinern. Das ist konzeptionell nicht besonders schwierig – meistens müssen nur Betragsstriche durch Normen ersetzt werden – würde allerdings die uns zur Verfügung stehende Zeit deutlich sprengen.
Die für das weitere Vorgehen wichtigsten Sätze sind darum in der folgenden Übungsaufgabe gesammelt. Diese gibt Ihnen eine gute Gelegenheit zu überprüfen, ob Sie ein Gefühl für unseren Übergang von $\mathbb{K}$ zu $\mathbb{K}^d$ bekommen haben. Zum Teil beinhalten diese Aussagen Begriffe, die wir hier noch gar nicht definiert haben, z.B. absolute Konvergenz einer Reihe. Das sollten Sie dann zunächst selbst erledigen. Keine Sorge, das geht jeweils ganz ohne Fußangeln.

Übungsaufgabe 6.12. (a) Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum. Dann ist jede in V absolut konvergente Reihe auch konvergent.

(b) Sind $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume, $D \subseteq V$, $f, g : D \to W$ stetig und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, so sind auch $\alpha f + \beta g$ und $\|f\|_W$ stetig.

Ist dabei $W = \mathbb{K}$, so sind auch fg und, falls g Nullstellen-frei ist, auch f/g stetig.

Ist schließlich $(X, \|\cdot\|_X)$ ein weiterer normierter Vektorraum, $H \subseteq W$ mit $f(G) \subseteq H$, und $h : H \to X$ stetig, so ist auch $h \circ f$ stetig.

(c) Sind $f_n : M \to N$ stetige Funktionen und ist die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $f : M \to N$, so ist auch f stetig.

7. Zusammenhang

Für einige Aussagen war es im letzten Semester entscheidend, dass der Definitionsbereich einer Funktion ein Intervall war, z.B. für den Zwischenwertsatz. Das entscheidende an einem Intervall ist dabei, dass es sich um einen zusammenhängenden Klumpen Menge handelt. Einen entsprechenden Begriff wollen wir nun im Kontext metrischer Räume kennenlernen.
In diesem Abschnitt sei wieder (M, d) ein metrischer Raum.
Wie beschreibt man, dass eine Menge zusammenhängt, bzw. andersherum formuliert, dass sie nicht in mehrere Stücke zerfällt? Ein erster Versuch wäre: Es gibt nicht zwei nicht-leere, disjunkte Teilmengen, die vereinigt die ganze Menge ergeben. Dieser führt aber ins Leere, denn $\mathbb{R}$ halten wir als Intervall für zusammenhängend, aber natürlich ist z.B. $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$ und diese beiden Teilmengen sind disjunkt und nicht-leer. Der Trick ist zu verbieten, dass sich die betrachtete Menge in zwei nicht-leere, disjunkte und *offene* Teilmengen zerlegen lässt.

Definition 7.1. *Der metrische Raum M heißt* zusammenhängend*, wenn für alle offenen Teilmengen O_1, O_2 von M gilt: Ist $O_1 \cup O_2 = M$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, so gilt entweder $O_1 = \emptyset$ oder $O_2 = \emptyset$.*

Bemerkung 7.2. Für eine Teilmenge X von M erklärt sich damit der Begriff des Zusammenhangs wieder über die induzierte Metrik: X ist zusammenhängend, wenn der metrische Raum (X, d_X) zusammenhängend ist. In diesem Zusammenhang sei dringend an Warnung 2.3(b) erinnert, vgl. Beispiel 7.4(a).

Satz 7.3. *Ein metrischer Raum M ist genau dann zusammenhängend, wenn M und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen von M sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.*

Beweis. **„$\Rightarrow$"** Es sei M zusammenhängend und $X \subseteq M$ sei offen und abgeschlossen. Dann ist X^c offen und damit ist $M = X \cup X^c$, wobei sowohl X als auch X^c offen sind. Da außerdem natürlich $X \cap X^c = \emptyset$ gilt, muss dank des Zusammenhangs von M entweder $X = \emptyset$ oder $X^c = \emptyset$ sein, d. h. es ist $X = \emptyset$ oder $X = M$.

„$\Leftarrow$" Seien $O_1, O_2 \subseteq M$ offen mit $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ und $O_1 \cup O_2 = M$. Dann ist $O_1^c = M \setminus O_1 = O_2$, also ist auch O_1^c offen und damit O_1 sowohl offen als auch abgeschlossen. Nach Voraussetzung ist dann $O_1 = M$ oder $O_1 = \emptyset$, also entweder $O_1 = \emptyset$ oder $O_2 = O_1^c = \emptyset$. Das bedeutet aber gerade, dass M zusammenhängend ist. $\square$

Beispiel 7.4. (a) Die Menge $[1,2] \cup [3,4]$ in $\mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend. Man beachte dabei, vgl. Warnung 2.3(b), dass $[1,2]$ und $[3,4]$ in dem metrischen Raum $[1,2] \cup [3,4]$ offene Mengen sind!

(b) Die Mengen $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^d$ und die Einheitskugel $U_1(0)$ in $\mathbb{K}^d$ sind zusammenhängend, $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ist nicht zusammenhängend, wohl aber $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ für $d \geq 2$.

(c) Betrachtet man einen metrischen Raum mit der diskreten Metrik, so sind alle Teilmengen offen. Damit ist dort jede Teilmenge, die mindestens zwei Elemente hat, nicht zusammenhängend. Das begründet auch den Namen dieser Metrik: Die Punkte eines diskreten metrischen Raums liegen einzeln und unzusammenhängend, eben diskret, herum.

(d) Die rationalen Zahlen sind als Teilmenge von $\mathbb{R}$ nicht zusammenhängend, denn es gilt $\mathbb{Q} = \big((-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}\big) \cup \big((\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}\big)$.

Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle. Nach dem Zwischenwertsatz bilden stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ Intervalle auf Intervalle (bzw. im Spezialfall einer konstanten Funktion auf einen Punkt) ab. Das ist nur ein spezieller Fall des folgenden allgemeinen Satzes.

Satz 7.5. *Es seien M, N metrische Räume und $f : M \to N$ eine stetige Funktion. Ist M zusammenhängend, so ist auch $f(M)$ eine zusammenhängende Teilmenge von N.*

Beweis. Wir nehmen an $f(M)$ wäre nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei in $f(M)$ offene, nicht-leere Teilmengen X und Y von $f(M)$ mit $X \cap Y = \emptyset$ und $X \cup Y = f(M)$. Nach Übungsaufgabe 2.4(a) gibt es dann in N offene Mengen $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ mit $X = f(M) \cap \tilde{X}$ und $Y = f(M) \cap \tilde{Y}$. Damit gilt

$$f^{-1}(X) = f^{-1}(f(M) \cap \tilde{X}) = f^{-1}(f(M)) \cap f^{-1}(\tilde{X}) = M \cap f^{-1}(\tilde{X}) = f^{-1}(\tilde{X})$$

und genauso $f^{-1}(Y) = f^{-1}(\tilde{Y})$. Also ist

$$M = f^{-1}(f(M)) = f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) = f^{-1}(\tilde{X}) \cup f^{-1}(\tilde{Y}).$$

Da $f : M \to N$ stetig ist, sind die Mengen $f^{-1}(\tilde{X})$ und $f^{-1}(\tilde{Y})$ als Urbilder offener Mengen offen. Weiter sind beide nicht-leer, da $\tilde{X} \cap f(M) = X \neq \emptyset$ und $\tilde{Y} \cap f(M) = Y \neq \emptyset$ ist. Schließlich gilt auch

$$f^{-1}(\tilde{X}) \cap f^{-1}(\tilde{Y}) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Zusammen ist dann also M auch nicht zusammenhängend, womit wir bei einem Widerspruch wären. □

Als Korollar können wir nun die allgemeine Version des Zwischenwertsatzes formulieren, der sich als Spezialfall obigen Satzes erweist.

Korollar 7.6 (Zwischenwertsatz)**.** *Es seien M zusammenhängend, $a, b \in M$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beispiel 7.7. (a) Wir betrachten die allgemeine lineare Gruppe der invertierbaren $d \times d$-Matrizen $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{d\times d} : A \text{ invertierbar}\}$ und behaupten, dass diese nicht zusammenhängend in $\mathbb{R}^{d\times d} = \mathbb{R}^{d^2}$ ist. Dazu verwenden wir das Ergebnis $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{d\times d} : \det(A) \neq 0\}$ aus der Linearen Algebra.

Die Abbildung $\det : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}$ ist ein Polynom in den d^2 Koeffizienten der Matrix, also insbesondere eine stetige Abbildung, und da $\det(\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ nicht zusammenhängend ist, kann nach Satz 7.5 auch $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ nicht zusammenhängend sein.

(b) Mit einem ähnlichen Argument sieht man, dass es für $d \geq 2$ keine bijektive und stetige Abbildung von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$ gibt. Denn gäbe es eine solche Abbildung f, so müsste das Bild der zusammenhängenden Menge $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ zusammenhängend sein. Aus der Bijektivität von f folgt aber

$$f\big(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}\big) = f(\mathbb{R}^d) \setminus \{f(0)\} = \mathbb{R} \setminus \{f(0)\} = (-\infty, f(0)) \cup (f(0), \infty)$$

und diese Menge ist offensichtlich nicht zusammenhängend.

Wenn Sie nun sagen, ist doch klar, dass es so einen Quatsch nicht gibt, dann seien Sie vor voreiligen intuitiven Vermutungen gewarnt: Recherchieren Sie mal nach dem Stichwort „Peano-Kurve".

Übungsaufgabe 7.8. Es seien I eine Indexmenge und X_i, $i \in I$, zusammenhängende Teilmengen von M mit $\bigcap_{i\in I} X_i \neq \emptyset$. Dann ist auch $\bigcup_{i\in I} X_i$ zusammenhängend.

Teil II.

Differentiation

8. Kurven

Dieser erste Abschnitt zur Differentialrechnung in mehreren Variablen passt gar nicht wirklich zur Überschrift, da wir zunächst bei einer Variablen bleiben, aber Funktionen von (Teilmengen von) $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^d$ betrachten. Auf diesen Fall lässt sich die Differentialrechnung aus dem letzten Semester ganz geradeaus erweitern, so dass wir hier noch keine großen Schwierigkeiten haben werden. Darüberhinaus werden wir feststellen, dass der hier zentrale Begriff der Kurve auch noch einen schönen Zusammenhang zu unserer Diskussion über zusammenhängende Mengen im letzten Abschnitt hat, so dass dieses Kapitel ein bisschen eine Brückenfunktion einnimmt.

Eine Kurve ist intuitiv eine u. U. wild gebogene Linie in der Ebene oder im Raum oder gleich in einem metrischen Raum, z. B. der Funktionsgraph einer stetigen reellen Funktion oder eine Satellitenbahn. Dies wollen wir nun mathematisch beschreiben. Ein gutes Bild im Kopf ist dabei die Satellitenbahn: Zu deren Beschreibung kann man für jeden Zeitpunkt t den Ort im Raum angeben, an dem sich der Satellit zu diesem Zeitpunkt befindet. Das ergibt eine stetige[1] Funktion von $\mathbb{R}$ oder einem Intervall in $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^3$. Die Bildmenge dieser Abbildung ist dann die Kurve als geometrische Linie. Sie entsteht also als ein durch unsere Funktion „verbogenes“ Stück $\mathbb{R}$ im Raum.

In diesem gesamten Kapitel sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und (M, d) ein metrischer Raum.

Definition 8.1. *(a) Eine stetige Funktion $\gamma : I \to M$ heißt* Kurve *in M.*

(b) Ist $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $\gamma : I \to M$ eine Kurve, so nennt man $\gamma(a)$ den Anfangspunkt *und $\gamma(b)$ den* Endpunkt *der Kurve. Ist darüberhinaus $\gamma(a) = \gamma(b)$ so heißt die Kurve* geschlossen.

(c) Die Bildmenge $\mathrm{spur}(\gamma) := \{\gamma(t) : t \in I\} \subseteq M$ *heißt* Spur *der Kurve oder auch* Weg.

Bemerkung 8.2. (a) Im Umgang mit Kurven unterscheide man penibel zwischen der Kurve, die eine Abbildung ist, und dem Weg, der eine Punktmenge ist. Die Kurve enthält viel mehr Information, z. B. in welcher Richtung der Weg durchflogen wird oder wie schnell, während der Weg nur die bereiste Strecke nachzeichnet. Oder wie es Herr Große-Brauckmann in seinem

[1] Wir gehen mal davon aus, dass der Satellit nicht durch Wurmlöcher o.ä. fliegt.

Skript so schön beschreibt: Der Weg ist das Gleis, die Kurve enthält auch den ganzen Fahrplan.

(b) Die Satellitenbahn aus der Einleitung ist eine sehr nützliche Verwendung des Kurvenbegriffs und auch ein gutes Bild, das Sie im Kopf haben können, wenn Sie sich die folgenden Betrachtungen anschaulich machen wollen. Es ist in diesem Zusammenhang sehr gut, sich die Variable t als eine Zeitvariable vorzustellen und $\gamma(t)$ als den Ort, an dem sich ein Satellit, Atomkern oder irgendsonstein Teilchen zum Zeitpunkt t befindet.

Wir betrachten nun $M = \mathbb{K}^d$ und eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{K}^d$. Dann lässt sich deren Ableitung einfach wieder über den Differenzenquotienten definieren, sofern dessen Grenzwert existiert.

Definition 8.3. *Eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{K}^d$ heißt* differenzierbar*, wenn für alle $t_0 \in I$ der Grenzwert*

$$\gamma'(t_0) := \lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

existiert. Für $t \in I$ heißt dann $\gamma'(t) \in \mathbb{K}^d$ auch Tangentialvektor *von γ in t. Weiter heißt eine differenzierbare Kurve* stetig differenzierbar*, wenn die Abbildung $t \mapsto \gamma'(t)$ stetig ist.*

Bemerkung 8.4. (a) Nach Satz 6.5 (a) gilt für eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{K}^d$ mit Koordinatenfunktionen $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_d : I \to \mathbb{K}$, falls die beteiligten Grenzwerte existieren,

$$\gamma'(t_0) = \left(\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma_j(t) - \gamma_j(t_0)}{t - t_0}\right)_{j=1}^{d} = \big(\gamma_j'(t_0)\big)_{j=1}^{d}$$

für $t_0 \in I$. Wir können also einfach koordinatenweise differenzieren.

(b) Physikalisch ist die Ableitung des Orts eines Teilchens nach der Zeitvariablen genau die Geschwindigkeit des Teilchens zu diesem Zeitpunkt. Das ist auch hier die Bedeutung des Tangentialvektors: Bei einer differenzierbaren Kurve zeigt der Tangentialvektor zu jedem Zeitpunkt $t_0 \in I$ in Richtung der aktuellen Bewegung, d. h. tangential zum Weg im Punkt $\gamma(t_0)$ und seine 2-Norm entspricht der (skalaren) Geschwindigkeit, mit der sich ein Teilchen entsprechend γ auf diesem bewegt.

Beispiel 8.5. (a) Sind $p, v \in \mathbb{R}^d$ fest vorgegeben, so entspricht die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ mit $\gamma(t) = p + tv$ einer gleichförmigen Bewegung entlang der durch den Aufpunkt p und den Richtungsvektor v gegebenen Gerade. Es gilt dann $\operatorname{spur}(\gamma) = \{p + tv : t \in \mathbb{R}\}$ und $\gamma'(t) = v$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Wir betrachten für ein $r > 0$ die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Diese Kurve beschreibt eine Bewegung entlang der Kreislinie um den Ursprung mit Radius r. Der Anfangs- und Endpunkt ist jeweils $(r, 0)$, es handelt sich also um eine geschlossene Kurve.

Der Tangentialvektor errechnet sich zu

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

und seine 2-Norm ist $\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{r^2\sin^2(t) + r^2\cos^2(t)} = r$. Es handelt sich also auch hier um eine Bewegung mit konstantem Wert der Geschwindigkeit, aber die Richtung ändert sich beständig, wie alle wissen, die schon einmal Karussell gefahren sind.

Diese Kurve ist auch besonders wichtig, wenn man sie in $\mathbb{C}$ statt in $\mathbb{R}^2$ begreift. Dort lässt sie sich einfacher als $\gamma_{\mathbb{C}} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_{\mathbb{C}}(t) = re^{\mathrm{i}t}$ beschreiben.

(c) Ein nicht ganz so einfaches, aber doch alltägliches Beispiel ist die Zykloide $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Diese beschreibt die Kurve, vgl. Abbildung 8.1, die ein Punkt auf einem Kreis mit Radius 1 beschreibt, der auf einer Geraden abgerollt wird, d. h. den Weg den ein Punkt auf Ihrem Fahrradreifen zurücklegt, wenn Sie das Rad vorwärts schieben.

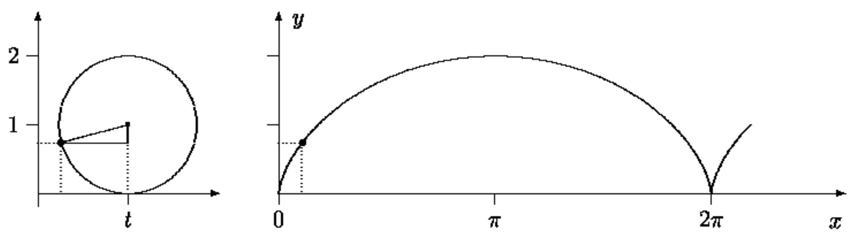

Abbildung 8.1.: Die Zykloide

Diese Kurve ist, auch wenn das Bild zunächst nicht so aussieht, differenzierbar mit

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Definition 8.6. *Es sei* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *ein kompaktes Intervall und* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{K}^d$ *eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist die* Länge *von* γ *gegeben durch*

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

Bemerkung 8.7. Diese Definition kann man sich wieder gut mit Hilfe der Anschauung einer Kurve als Flugbahn klar machen. Die Länge der Gesamtstrecke erhält man, indem man in jedem Punkt den Wert der Momentangeschwindigkeit aufsummiert, d. h. aufintegriert.
Man beachte, dass die verwendete Norm in der Definition der Kurvenlänge nicht egal ist. Bei verschiedener Wahl der Norm kommen natürlich auch verschiedene Kurvenlängen heraus. Üblicherweise wird man den alltäglichen Längenbegriff, d. h. die 2-Norm, verwenden wollen.

Beispiel 8.8. (a) Wir überprüfen diese Formel für die Weglänge auch anhand unseres obigen Beispiels 8.5(b). Wir betrachten also wieder

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{mit} \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}t = 2\pi r,$$

was recht gut mit unserer Erwartung an den Umfang eines Kreises vom Radius r harmoniert.

(b) Als zweites Beispiel können wir nun die Länge des Funktionsgraphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ berechnen. Dieser Graph als Linie in $\mathbb{R}^2$ lässt sich nämlich folgendermaßen als Spur einer Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ parametrisieren:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a,b].$$

Damit ist die Länge des Graphen gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} \,\mathrm{d}t.$$

Bemerkung 8.9. Nun steht ein berechtigter Einwand in der Luft: Wir berechnen in Beispiel 8.8 mithilfe der *Kurve* γ die Länge der *Linie* $\mathrm{spur}(\gamma)$. Es gibt aber zur selben Spur immer mehrere mögliche Kurven, so ist z.B.

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(2t) \\ r\sin(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi], \quad \text{mit} \quad \tilde{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -2r\sin(2t) \\ 2r\cos(2t) \end{pmatrix}$$

ebenfalls eine Kurve, deren Spur die einfach durchlaufene Kreislinie um den Ursprung mit Radius r ist, genauso wie das γ aus Beispiel 8.5(b). Nur durchläuft $\tilde{\gamma}$ den Weg in der doppelten Geschwindigkeit und dafür in der halben Zeit. Durch eine solche *Umparametrisierung* sollte sich natürlich bitte die Weglänge nicht ändern.
Um das einzusehen, sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{K}^d$ eine stetig differenzierbare Kurve. Die Umparametrisierung auf ein weiteres kompaktes Intervall $[\alpha, \beta]$ in $\mathbb{R}$ wird beschrieben durch eine stetig differenzierbare und bijektive Funktion $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ mit $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$. Dann ist auch $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}^d$ mit $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$ eine stetig differenzierbare Kurve und es gilt $\operatorname{spur}(\gamma) = \operatorname{spur}(\tilde{\gamma})$.
Tatsächlich ist auch $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$. Dazu berechnen wir zunächst

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_\alpha^\beta \|\tilde{\gamma}'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \big\|\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)\big\| \,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \big\|\gamma'(\varphi(t))\big\||\varphi'(t)| \,\mathrm{d}t.$$

Nun ist dank der Nullstellenfreiheit von φ' entweder $\varphi' > 0$ oder $\varphi' < 0$ auf $[\alpha, \beta]$. Im ersteren Fall ist $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$. Man nennt eine solche Umparametrisierung *orientierungserhaltend*. Im Fall, dass φ' überall negativ ist, gilt umgekehrt $\varphi(\alpha) = b$ und $\varphi(\beta) = a$. Eine solche Umparametrisierung wird *orientierungsumkehrend* genannt.
In beiden Fällen erhalten wir jedoch mit der Substitution $s = \varphi(t)$

$$L(\tilde{\gamma}) = \left\{ \begin{array}{lcll} \displaystyle\int_\alpha^\beta \big\|\gamma'(\varphi(t))\big\|\varphi'(t)\,\mathrm{d}t & = & \displaystyle\int_a^b \|\gamma'(s)\|\,\mathrm{d}s & \text{falls } \varphi' > 0 \\ \displaystyle -\int_\alpha^\beta \big\|\gamma'(\varphi(t))\big\|\varphi'(t)\,\mathrm{d}t & = & \displaystyle\int_a^b \|\gamma'(s)\|\,\mathrm{d}s & \text{falls } \varphi' < 0 \end{array} \right\} = L(\gamma).$$

Nun ist eine weitere *Warnung* angebracht, denn es liegt der Schnellschluss nahe, dass die Länge eine Eigenschaft des Weges ist und für jede Kurve, die diesen Weg beschreibt gleich. Das stimmt aber auch nicht, wie das folgende einfache Beispiel zeigt. Die Kurve $\hat{\gamma} : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t))^T$ hat ebenfalls die selbe Spur wie γ und $\tilde{\gamma}$, aber nun wird die Kreislinie zweimal durchlaufen und die Länge dieser Kurve ist $4\pi r$.

Kurven, bzw. Wege, bieten eine zweite Möglichkeit Zusammenhang von Mengen zu definieren. Intuitiv ist eine Menge ein zusammenhängendes Gebilde, wenn wir von jedem Punkt zu jedem anderen innerhalb der Menge gelangen können, wenn wir die beiden also durch einen Weg in der Menge verbinden können. Wir wollen hier nicht tief einsteigen, sondern definieren nur kurz den entsprechenden Begriff.

Definition 8.10. *Ein metrischer Raum (M, d) heißt* wegzusammenhängend, *wenn für alle $x, y \in M$ ein Intervall $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ und eine Kurve $\gamma : [a, b] \to M$ existieren, so dass $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ ist.*

Tatsächlich sind die beiden Begriffe Zusammenhang und Wegzusammenhang nicht identisch, sondern es gibt hier subtile Unterschiede. Wir notieren jedoch die folgenden Zusammenhänge, deren Beweise als Übungsaufgabe verbleiben.

Satz 8.11. *(a) Jeder wegzusammenhängende metrische Raum ist auch zusammenhängend.*

(b) Eine offene Teilmenge eines normierten Vektorraums, die zusammenhängend ist, ist auch wegzusammenhängend.

9. Partielle Ableitungen

Wir betrachten nun Funktionen $f : G \to \mathbb{R}^p$ mit $G \subseteq \mathbb{R}^d$ und wollen den Ableitungsbegriff und die Differentialrechnung auf diese erweitern. Dazu sei im gesamten Abschnitt $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.
Die direkte Übertragung der Definition über den aus der Analysis I bekannten Differenzenquotienten

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ist nicht möglich, denn nun sind ja $x, x_0 \in G \subseteq \mathbb{R}^d$, bzw. $h \in \mathbb{R}^d$, Vektoren und durch Vektoren kann man nicht teilen. Wir haben hier also ein strukturelles Problem.
Dieses Problem ist natürlich nicht nur formaler Natur, sondern hat auch eine anschauliche Komponente. In $\mathbb{R}^d$ gibt es viel mehr Richtungen als nur hin und her. Diese reichhaltigere Geometrie kann das reine dividieren durch den Abstand nicht ausleuchten. Der Graph einer Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ lässt sich noch gut als Graph in $\mathbb{R}^3$ visualisieren, vgl. Abbildungen 5.2 und 5.1. Stellen Sie sich vor sie stehen auf diesem Graph und machen dort eine Wanderung. Wie groß ist nun die Steigung in einem Punkt? Das kommt eben darauf an, in welche Richtung Sie schauen, es gibt einfach nicht *die* Steigung.
In diesem und dem nächsten Abschnitt werden wir zwei Ansätze kennenlernen, um dieses Problem zu lösen, die beide im Wesentlichen zum selben Ergebnis führen. Trotzdem sind beide Zugänge wichtig, da der erste ohne den zweiten keine vernünftige Theorie ergibt und der zweite ohne den ersten zu einer nicht praktikabel zu berechnenden Ableitung führt.
Wir versuchen zunächst den Differenzenquotienten zu retten, indem wir uns darauf beschränken, mehrere eindimensionale Ableitungen zu berechnen, die zusammen das Verhalten der Funktion f beschreiben sollen. Dazu berechnen wir die Ableitung zunächst nur in eine Richtung.

Definition 9.1. *Es sei $f : G \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion, $x_0 \in G$ und $v \in \mathbb{R}^d$. Existiert dann der Grenzwert*

$$\partial_v f(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h},$$

so heißt f in x_0 in Richtung v differenzierbar *und $\partial_v f(x_0)$ die* Richtungsableitung *von f in x_0* in Richtung v.

Anschaulich bedeutet diese Definition, dass wir uns nur die Funktionswerte von f entlang der Geraden $\{x_0+\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ in G anschauen und den Schnitt von f entlang dieser Geraden im eindimensionalen Sinne differenzieren. Wir bestimmen die Steigung am Hang, wenn wir stur in Richtung v laufen. Dies ist in Abbildung 9.1 angedeutet.

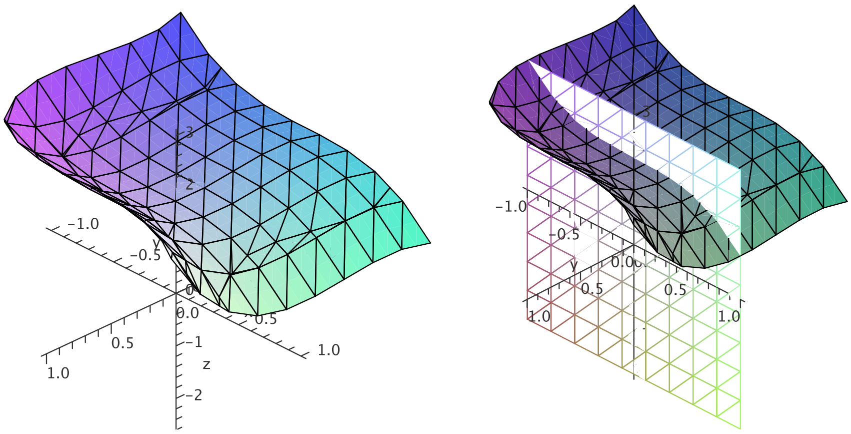

Abbildung 9.1.: Der Graph einer Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ und der Schnitt, der zu einer partiellen Ableitung, d. h. Richtungsableitung in Richtung einer Koordinatenachse, führt

Bemerkung 9.2. In obiger Definition ist bewusst auch die Ableitung in „Richtung“ des Nullvektors definiert. Diese ist für jede Funktion und an jeder Stelle immer Null und damit nicht besonders interessant. Dieses Vorgehen erspart aber im Folgenden viele unübersichtliche Fallunterscheidungen.

Übungsaufgabe 9.3. Definiert man $g_v(h) := f(x_0 + hv)$ für alle $h \in \mathbb{R}$, für die $x_0 + hv$ in G liegt, so gilt

$$\partial_v f(x_0) = g_v'(0).$$

Nun statten wir den $\mathbb{R}^d$ mit der Standardbasis aus. Die Ableitungen in Richtung der Standardbasisvektoren bekommen einen eigenen Namen.

Definition 9.4. *Es sei $f : G \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion und $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^d$.*

(a) *Existieren in einem $x_0 \in G$ die Richtungsableitungen von f in alle Richtungen $e_1, e_2, \dots, e_d$, so heißt f in x_0* partiell differenzierbar. *Man schreibt dann für $j = 1, 2, \dots, d$ auch*

$$\partial_j f(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) := f_{x_j}(x_0) := \partial_{e_j} f(x_0)$$

für die partielle Ableitung *von f in x_0* nach der j-ten Koordinate.

(b) Ist f in allen $x_0 \in G$ partiell differenzierbar, so sagt man f ist in G partiell differenzierbar *und schreibt* $\partial_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} = f_{x_j} : G \to \mathbb{R}^p$ *für die* partielle Ableitung(sfunktion).

(c) Ist f in G partiell differenzierbar und sind sämtliche partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_d f : G \to \mathbb{R}^p$ stetig, so nennt man f stetig partiell differenzierbar in G.

Bemerkung 9.5. Die Notation ist im Bereich der partiellen Ableitungen leider ziemlich vielfältig. Alle oben angeführen Bezeichnungen sind synonym und in der Literatur üblich, so dass man sich wohl oder übel an alle gewöhnen muss.

Beispiel 9.6. Wir betrachten die Identität $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit $f(x) = x$. Dann gilt für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^d$ und jedes $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\partial_v f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0 + hv - x_0}{h} = v.$$

Damit gilt für die partiellen Ableitungen

$$\partial_j f(x_0) = e_j \qquad \text{für alle } j = 1, 2, \dots, d.$$

Bemerkung 9.7. Die praktische Berechnung der partiellen Ableitungen ist einfach: Will man die j-te partielle Ableitung von f bestimmen, so behandelt man die anderen Variablen $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d$ als konstante Parameter und leitet ganz wie gewohnt nach der einen Variablen x_j ab. Das sieht man z.B. für $j = 1$ an der Rechnung

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x_1, \dots, x_d) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\big((x_1, \dots, x_d)^T + h(1, 0, \dots, 0)^T\big) - f(x_1, \dots, x_d)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \dots, x_d) - f(x_1, x_2, \dots, x_d)}{h}.\end{aligned}$$

Beispiel 9.8. Für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x\mathrm{e}^{xz+y^2}$ gilt nach obiger Bemerkung damit

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x, y, z) &= \mathrm{e}^{xz+y^2} + x\mathrm{e}^{xz+y^2} \cdot z = (1 + xz)\mathrm{e}^{xz+y^2}, \\ \partial_2 f(x, y, z) &= x\mathrm{e}^{xz+y^2} \cdot 2y = 2xy\mathrm{e}^{xz+y^2}, \\ \partial_3 f(x, y, z) &= x\mathrm{e}^{xz+y^2} \cdot x = x^2\mathrm{e}^{xz+y^2}.\end{aligned}$$

Der Fall einer Funktion mit Werten in $\mathbb{R}^p$ für $p > 1$ lässt sich wie schon bei der Stetigkeit auf den Fall $p = 1$ zurückspielen.

Satz 9.9. *Ist $f : G \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion und $x_0 \in G$, so ist f in x_0 genau dann partiell differenzierbar, wenn alle Koordinatenfunktionen $f_1, f_2, \dots, f_p : G \to \mathbb{R}$ in x_0 partiell differenzierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$\partial_j f(x_0) = \big(\partial_j f_1(x_0), \partial_j f_2(x_0), \dots, \partial_j f_p(x_0)\big)^T, \qquad j = 1, 2, \dots, d.$$

Beweis. Die Funktion f ist in x_0 genau dann partiell nach der j-ten Koordinaten differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + he_j) - f(x_0)}{h}$$

in $\mathbb{R}^p$ existiert und der Wert ist dann die partielle Ableitung. Damit folgt die Behauptung aus Satz 6.5(a) über koordinatenweise Konvergenz. $\square$

Bemerkung 9.10. Mit Bemerkung 9.7 und diesem Satz haben wir das Problem der konkreten Berechnung von partiellen Ableitungen auf den Fall von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ zurückgespielt. Wir brauchen also keine neuen Ableitungsregeln, sondern können mit unserem bisherigen Wissen alle partiellen Ableitungen berechnen, sofern diese existieren.

Definition 9.11. *Ist $f : G \to \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ partiell differenzierbar, so heißt die $p \times d$-Matrix aller partiellen Ableitungen*

$$J_f(x_0) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \dots & \partial_d f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \dots & \partial_d f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_p(x_0) & \partial_2 f_p(x_0) & \dots & \partial_d f_p(x_0) \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix *von f.*
Im Spezialfall $p = 1$ nennt man die $1 \times d$-Matrix, d. h. den $\mathbb{R}^d$-Zeilenvektor

$$\nabla f(x_0) := J_f(x_0) = \big(\partial_1 f(x_0), \partial_2 f(x_0), \dots, \partial_d f(x_0)\big)$$

Gradient *von f.*

Bemerkung 9.12. (a) Es gilt in dieser Notation

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \nabla f_2(x) \\ \vdots \\ \nabla f_p(x) \end{pmatrix}.$$

(b) Der Gradient einer Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ hat auch eine anschauliche Bedeutung. Ist f glatt genug, so gibt der Vektor $\nabla f(x_0)$ die Richtung an, in der der Graph von f an der Stelle x_0 am stärksten ansteigt und seine Länge entspricht dieser maximalen Steigung. Einen Beweis dieser Aussage können wir erst in Bemerkung 10.10 geben, dazu fehlt uns noch einiges theoretisches Rüstzeug.

Auf dieser Eigenschaft beruhen viele numerische Optimierungsverfahren, die zum Suchen des Optimums in Richtung des Gradienten der zu optimierenden Größe gehen („Gradientenmethoden"), getreu dem Motto: Der schnellste Weg zum Gipfel ist immer in die steilste Richtung den Hang hinauf und das ist eben die Richtung des Gradienten.

Beispiel 9.13. Wir betrachten wieder die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

vgl. Beispiel 5.9. Außerhalb von $(0,0)$ ist diese offensichtlich partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= \frac{y(x^2+y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \\ \partial_2 f(x,y) &= \frac{x(x^2+y^2) - 2y \cdot xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \neq (0,0). \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen im Ursprung berechnen sich über den Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} \partial_1 f(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0, \quad \text{und} \\ \partial_2 f(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Also ist $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Versuchen wir nun die Richtungsableitung im Ursprung in eine Richtung $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ zu bestimmen, so bekommen wir den Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + hv) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{hv_1 hv_2}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{v_1 v_2}{h(v_1^2 + v_2^2)}.$$

Sobald v_1 und v_2 beide nicht Null sind, wir uns also nicht in Richtung einer Koordinatenachse bewegen, existiert dieser Grenzwert aber gar nicht. Die einzigen Richtungen in die hier Richtungsableitungen existieren, sind also gerade die Richtungen der Standardbasis, die zu den partiellen Ableitungen gehören. Betrachten Sie dazu auch noch einmal den Graphen der Funktion f in Abbildung 5.1.
Daran sieht man, dass man aus der Existenz der partiellen Ableitungen alleine nicht auf irgendwelche anderen Richtungsableitungen schließen kann.
Das Beispiel zeigt darüber hinaus auch aus einem anderen Grund, dass alleine mit dem Begriff der partiellen Differenzierbarkeit kein Staat zu machen ist. Wir haben hier nämlich eine im Ursprung partiell differenzierbare Funktion, die dort aber noch nicht einmal stetig ist wie wir in Beispiel 5.9 gesehen haben.

Beachten Sie, dass f im vorstehenden Beispiel nicht *stetig* partiell differenzierbar ist. Tatsächlich ist dies ein entscheidendes Detail, denn wenn die partiellen Ableitungen stetig sind, können solche Sauereien nicht passieren. Bis wir das in Satz 10.12 exakter formulieren können brauchen wir aber noch einen Stapel Theorie.
Wir führen zunächst die partiellen Ableitungen höherer Ordnung ein. Die Definition dürfte keine große Überraschung sein.

Definition 9.14. *Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, $x_0 \in G$ und $f : G \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion.*

*(a) Man nennt f n-*mal (stetig) partiell differenzierbar *in x_0, wenn sie schon $(n-1)$-mal (stetig) partiell differenzierbar auf G ist und alle $(n-1)$-ten partiellen Ableitungen in x_0 wieder (stetig) partiell differerenzierbar sind.*

*(b) Man nennt f n-*mal (stetig) partiell differenzierbar *auf G, wenn f dieses in jedem $x_0 \in G$ ist.*

(c) Es bezeichnet für $H \subseteq \mathbb{R}^p$ und $k \in \mathbb{N}$

$$C^k(G, H) := \big\{ f : G \to H \mid f \ k\text{-mal stetig partiell differenzierbar auf } G \big\}.$$

Notiert werden mehrfache partielle Ableitungen durch Hintereinanderschreiben der einzelnen Ableitungen, also z.B.

$$\partial_1 \partial_3 \partial_1 f, \quad \partial_2^3 \partial_1 f, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2} \quad \text{oder} \quad f_{x_1 x_2 x_3},$$

je nach der verwendeten Notation. Wie wir gleich sehen werden, ist die Reihenfolge der Ableitungen dabei meist egal, sollte das nicht der Fall sein, ist mit obigen Schreibweisen die folgende Klammerung gemeint:

$$\partial_1 \partial_2 f = \partial_1(\partial_2 f), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big), \qquad f_{x_2 x_1} = (f_{x_2})_{x_1}.$$

Beispiel 9.15. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 y + x\mathrm{e}^y$. Dann haben wir für die partiellen Ableitungen erster Ordnung

$$\partial_1 f(x, y) = 3x^2 y + \mathrm{e}^y \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x, y) = x^3 + x\mathrm{e}^y.$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten

$$\begin{aligned} \partial_1^2 f(x, y) &= 6xy & \partial_1 \partial_2 f(x, y) &= 3x^2 + \mathrm{e}^y \\ \partial_2 \partial_1 f(x, y) &= 3x^2 + \mathrm{e}^y & \partial_2^2 f(x, y) &= x\mathrm{e}^y. \end{aligned}$$

So kann man nun natürlich ewig weitermachen. Hier ist noch die dritte Ordnung:

$$\begin{aligned} \partial_1^3 f(x, y) &= 6y & \partial_1 \partial_2^2 f(x, y) &= \mathrm{e}^y \\ \partial_1 \partial_2 \partial_1 f(x, y) &= 6x & \partial_2^2 \partial_1 f(x, y) &= \mathrm{e}^y \\ \partial_1^2 \partial_2 f(x, y) &= 6x & \partial_2 \partial_1 \partial_2 f(x, y) &= \mathrm{e}^y \\ \partial_2 \partial_1^2 f(x, y) &= 6x & \partial_2^3 f(x, y) &= x\mathrm{e}^y. \end{aligned}$$

Betrachtet man die partiellen Ableitungen in obigem Beispiel noch einmal genauer, so stellt man fest, dass das Ergebnis der Ableiterei nicht von der Reihenfolge der Differenziationen, sondern nur von der Anzahl abzuhängen scheint, wie oft jeweils nach der ersten bzw. der zweiten Koordinaten differenziert wird. So ist in obigem Beispiel z.B. $\partial_1\partial_2 f(x,y) = \partial_2\partial_1 f(x,y)$. Das ist tatsächlich kein Zufall, denn es gilt der folgende Satz.

Satz 9.16 (Satz von Schwarz)**.** *Es seien $f : G \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion und $j,k \in \{1,2,\dots,d\}$. Existieren in G die partiellen Ableitungen $\partial_j f$, $\partial_k f$ und $\partial_j\partial_k f$ und ist $\partial_j\partial_k f$ stetig in $x_0 \in G$, so existiert auch $\partial_k\partial_j f(x_0)$ und es gilt*

$$\partial_k\partial_j f(x_0) = \partial_j\partial_k f(x_0).$$

Beweis. Da G offen ist, gibt es ein $\delta > 0$, für das $x_0 + se_j + te_k \in G$ liegt für alle $(s,t) \in (-\delta,\delta)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir betrachten nun die Funktion $\varphi : (-\delta,\delta)^2 \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(s,t) = f(x_0 + se_j + te_k)$ Für diese gilt

$$\begin{aligned}
\partial_1\varphi(s,t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(s+h,t) - \varphi(s,t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f\big(x_0 + (s+h)e_j + te_k\big) - f(x_0 + se_j + te_k)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + se_j + te_k + he_j) - f(x_0 + se_j + te_k)}{h} \\
&= \partial_j f(x_0 + se_j + te_k).
\end{aligned}$$

Genauso zeigt man

$$\begin{aligned}
\partial_2\varphi(s,t) &= \partial_k f(x_0 + se_j + te_k) \quad \text{und} \\
\partial_1\partial_2\varphi(s,t) &= \partial_j\partial_k f(x_0 + se_j + te_k).
\end{aligned}$$

Nun können wir darangehen, die Existenz von $\partial_2\partial_1\varphi(0,0) = \partial_k\partial_j f(x_0)$ nachzuweisen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_2\partial_1\varphi(0,0) &= \Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\lim_{s\to 0} \frac{\varphi(s,t) - \varphi(0,t)}{s}\Big)\Big]\Big|_{t=0} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\lim_{s\to 0} \frac{\varphi(s,t)-\varphi(0,t)}{s} - \lim_{s\to 0} \frac{\varphi(s,0)-\varphi(0,0)}{s}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\frac{\big(\varphi(s,t) - \varphi(0,t)\big) - \big(\varphi(s,0) - \varphi(0,0)\big)}{t}.
\end{aligned}$$

Für $s \in (-\delta,\delta)$ setzen wir nun $\Phi_s(t) := \varphi(s,t) - \varphi(0,t)$, $t \in (-\delta,\delta)$. Dann gilt $\Phi_s'(t) = \partial_2\varphi(s,t) - \partial_2\varphi(0,t)$ und mit dem Mittelwertsatz bekommen wir für ein $\kappa \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
\partial_2\partial_1\varphi(0,0) &= \lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\frac{\Phi_s(t) - \Phi_s(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\Phi_s'(\kappa t) \\
&= \lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0} \frac{\partial_2\varphi(s,\kappa t) - \partial_2\varphi(0,\kappa t)}{s}.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung existiert $\partial_1\partial_2\varphi(s,t)$, also ist für jedes $t \in (-\delta,\delta)$ die Funktion $\Psi_t(s) := \partial_2\varphi(s,\kappa t)$, $s \in (-\delta,\delta)$, differenzierbar mit $\Psi_t'(s) = \partial_1\partial_2\varphi(s,\kappa t)$ und wir können nun auf diese Funktion den Mittelwertsatz anwenden. Das liefert für ein $\eta \in (0,1)$

$$\partial_2\partial_1\varphi(0,0) = \lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0}\frac{\Psi_t(s)-\Psi_t(0)}{s} = \lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0}\Psi_t'(\eta s) = \lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0}\partial_1\partial_2\varphi(\eta s,\kappa t).$$

Nun greift die Voraussetzung, dass $\partial_1\partial_2\varphi$ in $(0,0)$ stetig ist. Demnach existiert obiger Limes und es gilt

$$\partial_k\partial_j f(x_0) = \partial_2\partial_1\varphi(0,0) = \lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0}\partial_1\partial_2\varphi(\eta s,\kappa t) = \partial_1\partial_2\varphi(0,0) = \partial_j\partial_k f(x_0). \qquad \square$$

Kein Satz bleibt ohne die Warnung auf die Voraussetzungen zu achten. Ist f zweimal partiell differenzierbar, aber sind die partiellen Ableitungen nicht stetig, so gilt der Satz von Schwarz im Allgemeinen nicht, wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel 9.17. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dann ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 f(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\partial_2 f(x,y) = \begin{cases} x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Damit ist

$$\partial_2\partial_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{h\frac{-h^4}{h^4}-0}{h} = -1 \quad \text{und}$$

$$\partial_1\partial_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{h\frac{h^4}{h^4}}{h} = 1.$$

10. Totale Differenzierbarkeit

Wir wollen nun die unbefriedigenden Anteile des vorigen Abschnittes auflösen und das Differenziationsproblem im $\mathbb{R}^d$ noch mal ein wenig abstrakter anschauen. Das ist dringend nötig, denn wie wir in Beispiel 9.13 gesehen haben, lässt sich aus der reinen Existenz der partiellen Ableitungen noch nichts brauchbares folgern. In diesem Fall können diese Ableitungen in keiner Weise geometrisch interpretiert oder für eine Anwendung verwendet werden. Das liegt daran, dass der Begriff der partiellen Ableitungen zu schwach ist, es ist einfach noch nicht der richtige Ableitungsbegriff für Funktionen in mehreren Variablen. Diesen „richtigen“ Begriff wollen wir jetzt kennenlernen.
Dazu erinnern wir uns daran, dass in einer Variablen die Ableitung in ihrer Interpretation als Tangentensteigung eine lineare Approximation der Funktion darstellt. Wir können nun natürlich nicht mehr durch eine Gerade approximieren, aber weiterhin durch eine lineare Abbildung. Diese Idee haben wir in der Analysis I in Aufgabe (G3) vom 13. Übungsblatt beleuchtet. Dort wurde gezeigt, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, wenn es eine lineare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + g(h) + r(h) \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

In diesem Fall ist der Graph der Funktion $h \mapsto f(x_0) + g(h)$ dann genau die Tangente an f in x_0 und die Steigung von g ist die Ableitung von f in x_0.
Auch diese Formulierung können wir nicht direkt für Vektoren x_0 und h nutzen, denn es würde dann immer noch durch den Vektor h geteilt. Der entscheidende Unterschied ist aber, dass der dabei betrachtete Grenzwert nun Null sein soll. Wir können also äquivalent um den hier betrachteten Bruch Betragsstriche oder in $\mathbb{R}^d$ Normstriche machen. Das beschert uns die folgende zentrale Definition.
Im gesamten Abschnitt sei wieder $G \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge.

Definition 10.1. *Eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}^p$ heißt* (total) differenzierbar *in $x_0 \in G$, wenn es eine lineare Abbildung $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ gibt, so dass gilt*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Th + r(h), \qquad x_0 + h \in G,$$

mit einer Funktion $r : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$, die

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

erfüllt.
Die lineare Abbildung $Df(x_0) := T$ *heißt dann* (totale) Ableitung *von* f *in* x_0*.* *Ist* f *in allen* $x_0 \in G$ *total differenzierbar, so heißt* f (total) differenzierbar auf G *und die Funktion* $Df : G \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ *die* Ableitung(sfunktion) *von* f*.*

Bemerkung 10.2. (a) Wie üblich ist die konkrete Wahl der Norm in obiger Definition dank Satz 6.3 unerheblich. In diesem Sinne werden wir hier auch in allen weiteren Betrachtungen einfach $\|\cdot\|$ schreiben, wenn die konkrete Wahl der Norm egal ist.

(b) Desweiteren ist es häufig von Vorteil sich klarzumachen, dass die Grenzwertbedinung an die Restfunktion r gleichbedeutend mit $\lim_{h\to 0} \|r(h)\|/\|h\| = 0$ als Grenzwert in $\mathbb{R}$ ist.

Um obige Definition wasserdicht zu machen brauchen wir noch die Eindeutigkeit der Ableitung.

Satz 10.3. *Die totale Ableitung ist, sofern sie existiert, eindeutig.*

Beweis. Übungsaufgabe

Beispiel 10.4. (a) Es sei $y \in \mathbb{R}^d$ fest gewählt, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^d$ und $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \langle y, x\rangle$. Dann gilt für alle x_0 in $\mathbb{R}^d$ dank der Linearität des Skalarprodukts

$$f(x_0 + h) = \langle y, x_0 + h\rangle = \langle y, x_0\rangle + \langle y, h\rangle = f(x_0) + y^T h.$$

Die Abbildung $h \mapsto y^T h$, $h \in \mathbb{R}^d$, ist aus $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Wir haben also eine Darstellung für $f(x)$ gefunden wie sie in Definition 10.1 gefordert ist. Hier ist sogar $r(h) = 0$, $h \in \mathbb{R}^d$, womit die Grenzwertbedingung sicher erfüllt ist. Die Ableitungsfunktion Df ist also konstant und ihr Wert ist die lineare Abbildung, die durch die Multiplikation mit y^T gegeben ist.

Allgemein gilt, dass die Ableitung einer linearen Abbildung $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ in jedem Punkt die Abbildung T selbst ist. Rechnen Sie das doch mal nach!

(b) Für eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \langle x, Bx\rangle = \sum_{j,k=1}^d b_{jk} x_j x_k$. Dann ist für alle $x_0, h \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= \langle x_0 + h, B(x_0 + h)\rangle \\ &= \langle x_0, Bx_0\rangle + \langle x_0, Bh\rangle + \langle h, Bx_0\rangle + \langle h, Bh\rangle \\ &= f(x_0) + 2\langle Bx_0, h\rangle + \langle h, Bh\rangle = f(x_0) + (2Bx_0)^T \cdot h + \langle h, Bh\rangle \\ &= f(x_0) + Th + r(h) \end{aligned}$$

mit der linearen Abbildung $T : v \mapsto 2(Bx_0)^T \cdot v$ und dem Rest $r(h) = \langle h, Bh\rangle$, für den mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung wie verlangt

$$\frac{|r(h)|}{\|h\|} = \frac{|\langle h, Bh\rangle|}{\|h\|} \le \frac{\|h\|\|Bh\|}{\|h\|} = \|Bh\| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)$$

gilt, da lineare Abbildungen auf $\mathbb{R}^d$ nach Satz 6.6 stetig sind.

Also ist f in jedem $x_0 \in \mathbb{R}^d$ differenzierbar und es gilt $Df(x_0)v = 2\langle Bx_0, v\rangle$, $v \in \mathbb{R}^d$.

Wir wollen nun zunächst zeigen, dass die totale Differenzierbarkeit Stetigkeit der Funktion impliziert, im Gegensatz zur partiellen Differenzierbarkeit, vgl. Beispiel 9.13.

Satz 10.5. *Ist $f : G \to \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ total differenzierbar, so ist f auch stetig in x_0.*

Beweis. Für alle $h \in \mathbb{R}^d$ mit $x_0 + h \in G$ gilt nach der Definition der totalen Differenzierbarkeit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + r(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Nun ist dank Satz 6.6 die lineare Abbildung $Df(x_0)$ stetig und deshalb gilt $\lim_{h\to 0} Df(x_0)h = 0$.
Außerdem impliziert die totale Differenzierbarkeit von f insbesondere

$$\lim_{h\to 0} r(h) = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} \cdot \|h\| = 0 \cdot 0 = 0.$$

Also haben wir

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h\to 0}\big(f(x_0) + Df(x_0)h + r(h)\big) = f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0). \qquad \square$$

Wir wollen nun eine erste Brücke von den totalen Ableitungen zu den partiellen schlagen und zeigen, dass der Begriff der totalen Ableitung stärker ist.

Satz 10.6. *Es sei $f : G \to \mathbb{R}^p$ eine in $x_0 \in G$ total differenzierbare Funktion und $v \in \mathbb{R}^d$. Dann existiert in x_0 die Richtungsableitung von f in Richtung v und es gilt*

$$\partial_v f(x_0) = Df(x_0)v.$$

Beweis. Wir wenden für $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x_0 + sv \in G$ die Definition der totalen Differenzierbarkeit 10.1 mit $h = sv$ an. Das ergibt

$$f(x_0 + sv) = f(x_0) + Df(x_0)(sv) + r(sv) \quad \text{mit} \quad \lim_{s\to 0} \frac{\|r(sv)\|}{|s|\|v\|} = 0.$$

Also ist $\lim_{s\to 0} \frac{r(s,v)}{s} = 0$ und es gilt dank der Linearität von $Df(x_0)$

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + sv) - f(x_0)}{s} &= \lim_{s\to 0} \frac{Df(x_0)(sv) + r(sv)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{sDf(x_0)v + r(sv)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0}\Big[Df(x_0)v + \frac{r(sv)}{s}\Big] = Df(x_0)v,\end{aligned}$$

was nach der Definition der Richtungsableitung 9.1 genau die Behauptung ist. $\square$

Damit können wir nun den folgenden zentralen Zusammenhang zwischen der totalen Ableitung und den partiellen Ableitungen beweisen.

Satz 10.7. *Ist $f : G \to \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ total differenzierbar, so ist f in x_0 auch partiell differenzierbar und die Abbildungsmatrix von $Df(x_0)$ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{R}^p$ ist die Jacobi-Matrix $J_f(x_0)$.*

Beweis. In den Spalten der Abbildungsmatrix von $Df(x_0)$ stehen die Bilder der Basisvektoren. Nach Satz 10.6 gilt für die Standardbasisvektoren $e_1, e_2, \dots, e_d$ genau

$$Df(x_0)e_j = (\partial_{e_j} f)(x_0) = \partial_j f(x_0), \quad j = 1, 2, \dots, d,$$

also enthält die j-te Spalte die partielle Ableitung $\partial_j f(x_0)$ genau wie in der Jacobi-Matrix, vgl. Definition 9.11. □

Bemerkung 10.8. (a) Man beachte, dass die Umkehrung dieses Satzes falsch ist. Das folgt aus Beispiel 9.13 und Satz 10.5.

(b) Im Folgenden werden wir oft $Df(x_0)$ mit der Jacobi-Matrix identifizieren, d. h. wir trennen nicht sauber zwischen der linearen Abbildung und der Abbildungsmatrix. Was in der linearen Algebra strikt verboten ist, ist hier opportun, um unnötige Haarspaltereien zu vermeiden. Das geht gut, weil wir im Folgenden nie von der oben getroffenen Wahl der Standardbasen abweichen werden.

Nimmt man Satz 10.6 und Satz 10.7 zusammen, so kann man unter der Voraussetzung totaler Differenzierbarkeit aus den partiellen Ableitungen jede Richtungsableitung bestimmen.

Korollar 10.9. *Ist $f : G \to \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ total differenzierbar, so gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^d$*

$$\partial_v f(x_0) = J_f(x_0)v.$$

Bemerkung 10.10. Nun können wir auch einen Beweis für die Behauptung in Bemerkung 9.12(b) geben, dass der Gradient in die Richtung des steilsten Anstiegs zeigt. Es sei $f : G \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in G$ total differenzierbar mit $\nabla f(x_0) \neq 0$. Dann gilt für die Richtungsableitung mit Richtung $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ in x_0 nach Korollar 10.9 und mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, vgl. Satz 1.10,

$$\big|\partial_v f(x_0)\big| = \big|\nabla f(x_0)v\big| = \big|\big\langle (\nabla f(x_0))^T, v\big\rangle\big| \leq \|\nabla f(x_0)\|_2 \|v\|_2$$

und wenn Gleichheit gilt, so müssen $\nabla f(x_0)$ und v linear abhängig sein, d. h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x_0)^T = \lambda v$. Nehmen wir an λ wäre negativ, so ist

$$\partial_v f(x_0) = \nabla f(x_0)v = \lambda v^T \cdot v = \lambda \|v\|^2 < 0$$

und damit ganz sicher nicht maximal. Also müssen $\nabla f(x_0)$ und v die gleiche Richtung haben, wenn $\partial_v f(x_0)$ maximal ist.

Wie schon für viele andere Dinge, so gilt auch für die totale Differenzierbarkeit, dass man sie komponentenweise nachprüfen kann.

Satz 10.11. *Eine Funktion $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p) : G \to \mathbb{R}^p$ ist genau dann in $x_0 \in G$ total differenzierbar, wenn jede Koordinatenfunktion $f_j : G \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, in x_0 total differenzierbar ist.*

Beweis. **„⇒“** Nach Voraussetzung gilt

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + r(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Also gilt auch für jedes $j = 1, 2, \ldots, p$

$$f_j(x_0 + h) = f_j(x_0) + (Df(x_0)h)_j + r_j(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r_j(h)}{\|h\|} = 0,$$

da für die Nullfolge $(r(h)/\|h\|)$ von Vektoren auch jede Komponente gegen Null konvergiert. Nun ist die Abbildung, die h auf die j-te Komponente von $Df(x_0)h$ abbildet eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$, also ist f_j total differenzierbar in x_0.

„⇐“ Nach Voraussetzung gilt für $j = 1, 2, \ldots, p$ und alle $h \in \mathbb{R}^d$ mit $x_0 + h \in G$

$$f_j(x_0 + h) = f_j(x_0) + Df_j(x_0)h + r_j(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r_j(h)}{\|h\|} = 0.$$

Wir setzen $Th := (Df_1(x_0)h, Df_2(x_0)h, \ldots, Df_p(x_0)h)^T$, $h \in \mathbb{R}^d$. Dann ist $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ und es gilt

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= \big(f_j(x_0 + h)\big)_{j=1}^p = \big(f_j(x_0) + Df_j(x_0)h + r_j(h)\big)_{j=1}^p \\ &= f(x_0) + Th + \big(r_j(h)\big)_{j=1}^p \end{aligned}$$

mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{\big(r_j(h)\big)_{j=1}^p}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \Big(\frac{r_j(h)}{\|h\|}\Big)_{j=1}^p = \Big(\lim_{h \to 0} \frac{r_j(h)}{\|h\|}\Big)_{j=1}^p = 0.$$

Also ist f in x_0 total differenzierbar. □

Wir sind damit schon in einer ziemlich komfortablen Situation. Die totale Differenzierbarkeit verallgemeinert unser Konzept der Differenzierbarkeit in einer Variablen ins mehrdimensionale und wenn wir die Ableitungen konkret ausrechnen müssen, können wir uns an die einfach zu berechnenden partiellen Ableitungen halten, denn die totale Ableitung ergibt sich ja aus der Jacobi-Matrix. Es bleibt noch eine Frage zu klären: Wo bekommen wir die totale Differenzierbarkeit her? Oder anders formuliert: Können wir irgendwie schon an den partiellen Ableitungen sehen, ob eine Funktion total differenzierbar ist? Ja, es gibt ein sehr brauchbares hinreichendes Kriterium:

Satz 10.12. *Ist $f : G \to \mathbb{R}^p$ stetig partiell differenzierbar, so ist f total differenzierbar.*

Beweis. Zunächst einmal können wir uns dank Satz 10.11 auf den Fall $p = 1$ zurückziehen und wir können uns $\mathbb{R}^d$ mit der 1-Norm versehen.
Sei $x_0 \in G$, $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(x_0) \subseteq G$ und $h \in U_\varepsilon(0)$ in $\mathbb{R}^d$. Dann setzen wir mit der Standardbasis $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ des $\mathbb{R}^d$

$$z_0 := x_0 \quad \text{und} \quad z_k := z_{k-1} + h_k e_k = x_0 + \sum_{j=1}^{k} h_j e_j, \quad k = 1, 2, \dots, d.$$

Damit ist $z_d = x_0 + h_1 e_1 + h_2 e_2 + \cdots + h_d e_d = x_0 + h$ und es gilt

$$\|x_0 - z_k\|_1 = \Big\|\sum_{j=1}^{k} h_j e_j\Big\|_1 = \sum_{j=1}^{k} |h_j| \leq \sum_{j=1}^{d} |h_j| = \|h\|_1, \quad k = 0, 1, \dots, d. \tag{10.1}$$

Wegen $\|h\|_1 < \varepsilon$ sind damit alle $z_1, z_2, \dots, z_d$ in $U_\varepsilon(x_0)$. Also ist mit Hilfe einer Teleskopsumme und der Definition der z_k

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) = f(z_d) - f(z_0) &= \sum_{k=1}^{d} \big(f(z_k) - f(z_{k-1})\big) \\ &= \sum_{k=1}^{d} \big(f(z_{k-1} + h_k e_k) - f(z_{k-1})\big). \end{aligned} \tag{10.2}$$

Wir betrachten nun die Funktionen $g_k(t) := f(z_{k-1} + t e_k)$ mit $t \in (-\delta, \delta)$, wobei $\delta > 0$ so klein gewählt ist, dass alle Argumente von f immer noch in $U_\varepsilon(x_0)$ liegen. Für diese Funktionen gilt

$$\begin{aligned} g_k'(t) &= \lim_{\eta \to 0} \frac{g_k(t + \eta) - g_k(t)}{\eta} = \lim_{\eta \to 0} \frac{f(z_{k-1} + t e_k + \eta e_k) - f(z_{k-1} + t e_k)}{\eta} \\ &= \partial_k f(z_{k-1} + t e_k), \end{aligned}$$

da f nach Voraussetzung in $z_{k-1} + t e_k$ partiell differenzierbar ist. Also können wir den eindimensionalen Mittelwertsatz anwenden und erhalten aus (10.2)

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \sum_{k=1}^{d} \big(g_k(h_k) - g_k(0)\big) = \sum_{k=1}^{d} g_k'(\tau_k)(h_k - 0) \\ &= \sum_{k=1}^{d} \partial_k f(z_{k-1} + \tau_k e_k) h_k \end{aligned}$$

mit τ_k jeweils zwischen 0 und h_k.

Nun können wir die totale Differezierbarkeit von f zeigen. Wir wissen schon aus Satz 10.7: Wenn f in x_0 total differenzierbar ist, so muss die Ableitung durch $\nabla f(x_0) = (\partial_k f(x_0))_{k=1}^d$ gegeben sein. Wir schauen uns also den entsprechenden Rest an und erhalten mit unseren obigen Überlegungen

$$\begin{aligned}
|r(h)| &:= \big|f(x_0+h) - f(x_0) - \nabla f(x_0)h\big| \\
&= \Big|\sum_{k=1}^d \partial_k f(z_{k-1} + \tau_k e_k)h_k - \sum_{k=1}^d \partial_k f(x_0)h_k\Big| \\
&= \Big|\sum_{k=1}^d \big(\partial_k f(z_{k-1} + \tau_k e_k) - \partial_k f(x_0)\big)h_k\Big| \\
&\leq \sum_{k=1}^d \big|\partial_k f(z_{k-1} + \tau_k e_k) - \partial_k f(x_0)\big||h_k|.
\end{aligned}$$

Da $|h_k|/\|h\|_1 \leq \|h\|_1/\|h\|_1 = 1$ gilt, ist damit

$$\frac{|r(h)|}{\|h\|_1} \leq \sum_{k=1}^d \big|\partial_k f(z_{k-1} + \tau_k e_k) - \partial_k f(x_0)\big|.$$

Schicken wir nun h gegen Null, so geht auch jedes h_k gegen Null und da $|\tau_k| \leq h_k$ ist, muss dann auch τ_k gegen Null gehen. Außerdem geht dank (10.1) mit h gegen Null z_k gegen x_0 für jedes $k = 0, 1, \ldots, d$. Wir bekommen also dank der Stetigkeit der partiellen Ableitungen von f

$$0 \leq \lim_{h\to 0} \frac{|r(h)|}{\|h\|_1} \leq \sum_{k=1}^d \big|\partial_k f(x_0 + 0e_k) - \partial_k f(x_0)\big| = 0$$

und damit die totale Differenzierbarkeit von f in x_0. □

Bemerkung 10.13. Ist eine Funktion stetig partiell differenzierbar auf G, so ist sie nach obigem Satz auf G total differenzierbar und nach Satz 10.7 stimmt die Abbildungsmatrix der totalen Ableitung mit der Jacobi-Matrix überein, hängt also auch stetig von $x \in G$ ab. In diesem Sinne müssen wir bei stetig differenzierbaren Funktionen nicht zwischen partieller und totaler Differenzierbarkeit unterscheiden. Das rechtfertigt im Nachhinein die Notation aus Definition 9.14(c).

Es ist sinnvoll, zum Abschluss dieses Kapitels die verschiedenen Beziehungen zwischen totaler, partieller und Richtungs-Differenzierbarkeit noch einmal zusammenzufassen:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{stetig partiell differenzierbar} & \Longrightarrow & \text{total differenzierbar} & \Longrightarrow & \text{stetig} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \\
\text{partiell differenzierbar} & \Longleftarrow & \text{alle Richtungsabl. existieren} & &
\end{array}$$

Wichtig ist noch zu bemerken, dass bei *allen* Implikationen in diesem Diagramm die Rückrichtung im Allgemeinen falsch ist.

11. Ableitungsregeln und der Mittelwertsatz

Grundsätzlich haben wir die praktische Berechnung der Ableitungen durch die partiellen Ableitungen schon auf den eindimensionalen Fall zurückgespielt. Trotzdem lohnt es sich die relevanten Ableitungsreglen in die mehrdimensionale Sprache zu übersetzen. Insbesondere die Kettenregel ist in dieser Form oft mit Gewinn zu gebrauchen, während der Rückgriff auf die eindimensionale Kettenregel, obgleich natürlich möglich, meist zu einem Indexdschungel führt.
Hier und im folgenden werden wir oft nur von „differenzierbaren“ Funktionen sprechen, ohne den Zusatz „partiell“ oder „total“. Damit ist dann immer totale Differenzierbarkeit gemeint, denn mit reiner partieller Differenzierbarkeit kann man normalerweise nichts anfangen. Der Begriff „stetig differenzierbar“ ist sogar unproblematisch, vgl. Bemerkung 10.13.
Auch in diesem Abschnitt sei wieder $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

Satz 11.1 (Kettenregel)**.** *Es seien $H \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, sowie $g : G \to H$ und $f : H \to \mathbb{R}^q$ Funktionen, so dass g in $x_0 \in G$ und f in $g(x_0)$ differenzierbar sind. Dann ist auch die Funktion $f \circ g : G \to \mathbb{R}^q$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0))Dg(x_0),$$

bzw. in Matrixnotation

$$J_{f\circ g}(x_0) = J_f(g(x_0)) \cdot J_g(x_0).$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + Dg(x_0)h + r_g(h) \qquad \text{mit } \lim_{h\to 0} \frac{r_g(h)}{\|h\|} = 0$$
$$f(g(x_0) + k) = f(g(x_0)) + Df(g(x_0))k + r_f(k) \qquad \text{mit } \lim_{k\to 0} \frac{r_f(k)}{\|k\|} = 0$$

für $h \in \mathbb{R}^d$ mit $x_0 + h \in G$ und $k \in \mathbb{R}^p$ mit $g(x_0) + k \in H$. Wir betrachten nun speziell

$$k(h) := g(x_0 + h) - g(x_0) = Dg(x_0)h + r_g(h). \tag{11.1}$$

Man beachte, dass $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$ ist, denn g ist in x_0 stetig. Dank der Offenheit von H können wir damit insbesondere das h so klein wählen, dass auch $g(x_0) +$

$k(h) \in H$ liegt. Nun folgt

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x_0 + h) &= f(g(x_0 + h)) = f\big(g(x_0) + Dg(x_0)h + r_g(h)\big) = f\big(g(x_0) + k(h)\big) \\
&= f(g(x_0)) + Df(g(x_0))k(h) + r_f(k(h)) \\
&= f(g(x_0)) + Df(g(x_0))\big(Dg(x_0)h + r_g(h)\big) + r_f(k(h)) \\
&= f(g(x_0)) + Df(g(x_0))Dg(x_0)h + Df(g(x_0))r_g(h) + r_f(k(h)) \\
&=: f(g(x_0)) + Df(g(x_0))Dg(x_0)h + r(h).
\end{aligned}$$

Wenn wir nun zeigen können, dass $r(h)/\|h\|$ für $h \to 0$ gegen Null geht, so sind wir fertig. Wegen der Stetigkeit der linearen Abbildung $Df(g(x_0))$ und dank unseres Wissens über r_g gilt schonmal

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \Big(\underbrace{Df(g(x_0)) \frac{r_g(h)}{\|h\|}}_{\to 0} + \frac{r_f(k(h))}{\|h\|} \Big) = \lim_{h \to 0} \frac{r_f(k(h))}{\|k(h)\|} \frac{\|k(h)\|}{\|h\|}. \tag{11.2}$$

Außerdem ist

$$\frac{\|k(h)\|}{\|h\|} = \frac{\big\|Dg(x_0)h + r_g(h)\big\|}{\|h\|} \leq \frac{\|Dg(x_0)h\|}{\|h\|} + \frac{\|r_g(h)\|}{\|h\|}.$$

Die Stetigkeit der linearen Abbildung $Dg(x_0)$ liefert nun, dass $\|Dg(x_0)h\|/\|h\|$ für $h \in \mathbb{R}^d$ beschränkt ist, vgl. Satz 5.10. Außerdem konvergiert $r_g(h)/\|h\|$ für $h \to 0$ gegen Null und ist damit insbesondere in einer Umgebung von Null beschränkt. Zusammengenommen ist also der Ausdruck $\|k(h)\|/\|h\|$ für h in einer Umgebung von Null durch ein $C \geq 0$ beschränkt und wir bekommen aus (11.2)

$$0 \leq \lim_{h \to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \leq \lim_{h \to 0} C \frac{\|r_f(k(h))\|}{\|k(h)\|} = C \lim_{k \to 0} \frac{\|r_f(k)\|}{\|k\|} = 0. \qquad \square$$

Beispiel 11.2. Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 y + x\mathrm{e}^y$, vgl. Beispiel 9.15, und interessieren uns für

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(t^2, t^3)\big).$$

Damit ist gemeint, dass wir die ganz normale eindimensionale Ableitung der Funktion $t \mapsto f(t^2, t^3)$ suchen. Wir setzen also $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $g(t) = (t^2, t^3)^T$ und berechnen mit der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(t^2, t^3)\big) = (f \circ g)'(t) = Df(g(t))Dg(t) = \nabla f(g(t)) \cdot J_g(t).$$

Es ist $J_g(t) = (2t, 3t^2)^T$ und in Beispiel 9.15 haben wir

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 y + \mathrm{e}^y, x^3 + x\mathrm{e}^y)$$

berechnet. Das liefert zusammen mit $(x,y) = g(t) = (t^2, t^3)$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(t^2,t^3)\big) &= (3t^4t^3 + \mathrm{e}^{t^3}, t^6 + t^2\mathrm{e}^{t^3}) \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} = 6t^8 + 2t\mathrm{e}^{t^3} + 3t^8 + 3t^4\mathrm{e}^{t^3} \\ &= 9t^8 + (2t + 3t^4)\mathrm{e}^{t^3}.\end{aligned}$$

Aus der Kettenregel kann man auch bequem die anderen bekannten Ableitungsregeln gewinnen. Wir führen hier beispielhaft die Linearität aus. Die Produktregel verbleibt dann als Übungsaufgabe.

Satz 11.3 (Linearität der Ableitung)**.** *Sind $f, g : G \to \mathbb{R}^p$ in $x_0 \in G$ differenzierbare Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch $\alpha f + \beta g$ in x_0 differenzierbar und es gilt $D(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha Df(x_0) + \beta Dg(x_0)$.*

Beweis. Wir betrachten $h : G \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ und $T : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ mit

$$h(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}, \quad x \in G \qquad \text{und} \qquad T(u,v) = \alpha u + \beta v, \quad u, v \in \mathbb{R}^p.$$

Dann ist $T(h(x)) = \alpha h_1(x) + \beta h_2(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ für alle $x \in G$. Weiter ist h nach Voraussetzung und dank der Unterstützung von Satz 10.11 differenzierbar in x_0 mit $Dh(x_0) = (Df(x_0), Dg(x_0))^T$ und schließlich ist T als lineare Abbildung differenzierbar in $h(x_0)$ mit $DT(h(x_0)) = T$, vgl. Beispiel 10.4 (a). Nach der Kettenregel gilt also

$$\begin{aligned}D(\alpha f + \beta g)(x_0) &= D(T \circ h)(x_0) = DT(h(x_0))Dh(x_0) = T\big(Df(x_0), Dg(x_0)\big) \\ &= \alpha Df(x_0) + \beta Dg(x_0).\end{aligned}$$ □

Satz 11.4 (Produktregel)**.** *Sind $f, g : G \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in G$, so ist auch fg in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$D(fg)(x_0) = f(x_0)Dg(x_0) + g(x_0)Df(x_0).$$

Als nächstes nehmen wir uns den Mittelwertsatz vor. Um diesen auf Funktionen meherer Veränderlicher zu übertragen, müssen wir zunächst ein geeigentes „zwischen" in $\mathbb{R}^d$ definieren.

Definition 11.5. *Für $a, b \in \mathbb{R}^d$ bezeichnet*

$$\overline{ab} := \{a + \lambda(b - a) : \lambda \in [0,1]\}$$

die Verbindungsstrecke *von a nach b.*

Damit gilt dann der folgende Satz.

Satz 11.6 (Mittelwertsatz)**.** *Es sei $f : G \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Sind $a, b \in G$ so, dass $\overline{ab} \subseteq G$ gilt, so gibt es ein $\xi \in \overline{ab}$ mit*

$$f(b) - f(a) = \nabla f(\xi)(b - a).$$

Beweis. Wir definieren $g : [0,1] \to G$ durch $g(\lambda) = a + \lambda(b-a)$ und $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ als $\varphi = f \circ g$. Da g mit $Dg(\lambda) = b - a$ differenzierbar ist, ist auch φ differenzierbar und es gilt nach der Kettenregel in Satz 11.1

$$\varphi'(\lambda) = \nabla f(g(\lambda)) \cdot Dg(\lambda) = \nabla f(g(\lambda)) \cdot (b-a), \qquad \lambda \in [0,1].$$

Auf diese Funktion können wir nun den Mittelwertsatz für Funktionen in einer Variablen, Satz I.22.16, anwenden. Es gibt also ein $\tau \in (0,1)$, für das

$$f(b) - f(a) = f(g(1)) - f(g(0)) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)(1-0) = \nabla f(g(\tau))(b-a)$$

gilt. Mit $\xi := g(\tau)$ folgt die Behauptung. □

Warnung 11.7. Der Mittelwertsatz gilt nur für reellwertige Funktionen. Ist der Zielraum mehrdimensional, so ist eine entsprechende Aussage im Allgemeinen falsch!
Oft nutzt man den Mittelwertsatz allerdings nicht um eine Gleichheit zu bekommen, sondern ist nur an einer Abschätzung interessiert. In diesem Fall kann man sich ein Substitut für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^p$ bauen, das wir nun betrachten wollen.

Satz 11.8 (Schrankensatz). *Es sei $f : G \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar. Gibt es ein $L \geq 0$ mit $\|J_f(x)\| \leq L$ für alle $x \in G$, so gibt es ein $C \geq 0$ mit*

$$\|f(a) - f(b)\| \leq CL\|a-b\| \qquad \text{für alle } a, b \in G \text{ mit } \overline{ab} \subseteq G.$$

Beweis. Im Satz sind die verwendeten Normen in $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{R}^{p\times d}$ bewusst nicht spezifiziert. Wir wählen hier in $\mathbb{R}^{p\times d}$ die Zeilensummennorm aus Übungsaufgabe 5.14 und zeigen

$$\|f(a) - f(b)\|_\infty \leq L\|a-b\|_\infty, \tag{11.3}$$

die allgemeine Aussage im Satz folgern wir dann mal wieder daraus, dass in den betrachteten Räumen jeweils alle Normen äquivalent sind, vgl. Satz 6.3.
Seien $a, b \in G$ mit $\overline{ab} \subseteq G$. Dann gilt mit dem Mittelwertsatz 11.6, angewandt auf die einzelnen rellwertigen Koordinatenfunktionen $f_1, f_2, \dots, f_p$ mit $\xi_j \in \overline{ab}$, $j = 1, 2, \dots, p$,

$$\begin{aligned}
\|f(a) - f(b)\|_\infty &= \max_{j=1}^{p} |f_j(a) - f_j(b)| = \max_{j=1}^{p} \big|\nabla f_j(\xi_j)(a-b)\big| \\
&= \max_{j=1}^{p} \Big|\sum_{k=1}^{d} \partial_k f_j(\xi_j)(a_k - b_k)\Big| \leq \max_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{d} |\partial_k f_j(\xi_j)||a_k - b_k| \\
&\leq \max_{j=1}^{p} \|a-b\|_\infty \sum_{k=1}^{d} |\partial_k f_j(\xi_j)| \leq \|a-b\|_\infty \max_{x\in G} \max_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{d} |\partial_k f_j(x)| \\
&= \|a-b\|_\infty \max_{x\in G} \|J_f(x)\|_{ZS} = L\|a-b\|_\infty.
\end{aligned}$$

Für die allgemeine Aussage nutzen wir die Äquivalenz der Normen und erhalten Konstanten $C_1, C_2, C_3 \geq 0$ mit $\|J_f(x)\|_{ZS} \leq C_1\|J_f(x)\|$ für alle $x \in G$ und mit

$$\|f(a) - f(b)\| \leq C_2\|f(a) - f(b)\|_\infty \leq C_2C_1L\|a - b\|_\infty \leq C_3C_2C_1L\|a - b\|. \quad \square$$

Beispiel 11.9. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\arctan(x)}{(\sin(y) + 3)^2} \\ \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\sin(x+y)/3} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für die Koordinatenfunktionen f_1 und f_2

$$\nabla f_1(x, y) = \Big(\frac{1}{(\sin(y) + 3)^2}\frac{1}{1 + x^2}, \frac{-2\arctan(x)\cos(y)}{(\sin(y) + 3)^3}\Big)$$

und

$$\begin{aligned}\nabla f_2(x, y) &= \frac{1}{4}\Big(\mathrm{e}^{\sin(x+y)/3}\frac{1}{3}\cos(x + y), \mathrm{e}^{\sin(x+y)/3}\frac{1}{3}\cos(x + y)\Big) \\ &= \frac{1}{12}\mathrm{e}^{\sin(x+y)/3}\cos(x + y)\big(1, 1\big).\end{aligned}$$

Nun gilt für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\|\nabla f_1(x, y)\|_1 &= \frac{1}{(\sin(y) + 3)^2}\frac{1}{1 + x^2} + \frac{2|\arctan(x)||\cos(y)|}{(\sin(y) + 3)^3} \\ &\leq \frac{1}{(-1 + 3)^2} \cdot 1 + \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1}{(-1 + 3)^3} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} \leq \frac{1}{4} + \frac{4}{8} = \frac{3}{4}, \\ \|\nabla f_2(x, y)\|_1 &= \frac{1}{12}\mathrm{e}^{\sin(x+y)/3}\big|\cos(x + y)\big|\|(1, 1)\|_1 \\ &\leq \frac{1}{12}\mathrm{e}^{1/3} \cdot 1 \cdot 2 \leq \frac{1}{12}8^{1/3} \cdot 2 = \frac{1}{3},\end{aligned}$$

also ist für alle $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$

$$\|J_f(x, y)\|_{ZS} = \max\big\{\|\nabla f_1(x, y)\|_1, \|\nabla f_2(x, y)\|_1\big\} \leq \max\{3/4, 1/3\} = 3/4.$$

und das liefert mit (11.3) für alle $a, b \in \mathbb{R}^2$

$$\|f(a) - f(b)\|_\infty \leq \frac{3}{4}\|a - b\|_\infty,$$

wobei die Bedingung $\overline{ab} \subseteq \mathbb{R}^2$ natürlich immer erfüllt ist.

Wir haben also gezeigt, dass f auf $\mathbb{R}^2$ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $3/4$. Und was soll das nun? Damit ist f eine strikte Kontraktion auf dem Banachraum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, also hat f nach dem Banach'schen Fixpunktsatz 3.13 genau einen Fixpunkt in $\mathbb{R}^2$. Wir haben damit gezeigt, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x\big(\sin(y)+3\big)^2 &= \arctan(x) \\ 4y &= \mathrm{e}^{\sin(x+y)/3} \end{aligned}$$

genau eine Lösung in $\mathbb{R}^2$ hat. Hätten Sie das dem Gleichungssystem angesehen?

12. Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor

Auch in diesem Kapitel sei grundsätzlich $G \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge.
Mehrfache partielle Ableitungen haben wir schon in Definition 9.14 kennengelernt. Im Prinzip sind auch höhere totale Ableitungen nicht komplizierter, es wird nur etwas unübersichtlich rekursiv, denn für eine ausreichend oft stetig partiell differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{R}^p$ ist nach Definition 10.1, die totale Ableitung Df eine Funktion von G nach $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$. Dementsprechend gilt für deren totale Ableitung dann $D(Df) : G \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p))$ und für die dritte totale Ableitung gilt dann $DDDf(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)))$ für jedes $x_0 \in G$.
Das gibt zwar ein schönes Strickmuster, aber so richtig viel darunter vorstellen kann man sich nicht. Es gibt zum Glück noch eine andere Sichtweise auf die Sache, die wir hier anhand der zweiten totalen Ableitung einer reellwertigen Funktion entwickeln wollen.
Es sei also nun $f \in C^2(G, \mathbb{R})$. Die zweite Ableitung $D(Df)(x_0)$ von f an einer Stelle x_0 ist ein Element von $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}))$, also ist für jedes $v \in \mathbb{R}^d$ die Anwendung dieser Ableitung auf v, d. h. $D(Df)(x_0)v$, ein Element von $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ und die Zuordnung $v \mapsto D(Df)(x_0)v$ ist linear in v. Wenn wir diese lineare Abbildung wiederum auf ein $u \in \mathbb{R}^d$ anwenden, so ist

$$\big[D(Df)(x_0)v\big]u \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad u \mapsto \big[D(Df)(x_0)v\big]u \text{ linear in } u.$$

Für ein fixes x_0 ist damit $(u, v) \mapsto \big[D(Df)(x_0)v\big]u$ eine Abbildung von $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$, die in u und v linear ist, also eine Bilinearform.
Weiter gilt nach Satz 10.6

$$\big[D(Df)(x_0)v\big]u = \big[D(\partial_v f)(x_0)\big]u = \partial_u \partial_v f(x_0).$$

Wir können also die zweite totale Ableitung von f an der Stelle x_0 als die folgende Bilinearform auffassen:

$$D^2 f(x_0) : \begin{cases} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \to \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto \partial_u \partial_v f(x_0). \end{cases}$$

Damit ordnet dann die zweite Ableitungsfunktion $D^2 f$ jedem $x_0 \in G$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^d$ zu.

Diese Bilinearform kann man auch mit Hilfe einer Matrix darstellen. Es gilt für alle $x_0 \in G$ und für alle $u, v \in \mathbb{R}^d$ nach Korollar 10.9

$$\begin{aligned}\big[D^2 f(x_0)\big](u,v) &= \partial_u \partial_v f(x_0) = \big[\nabla \partial_v f(x_0)\big] u = \sum_{j=1}^d \partial_j \partial_v f(x_0) u_j \\ &= \sum_{j=1}^d \partial_j (\nabla f(x_0) \cdot v) u_j = \sum_{j=1}^d \partial_j \sum_{k=1}^d \partial_k f(x_0) v_k u_j \\ &= \sum_{j,k=1}^d \partial_j \partial_k f(x_0) v_k u_j = u^T \big(\partial_j \partial_k f(x_0)\big)_{j,k=1}^d v.\end{aligned}$$

Die Matrix in diesem Ausdruck bekommt nun einen Namen.

Definition 12.1. *Es sei $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar in $x_0 \in G$. Dann heißt die $d \times d$-Matrix*

$$H_f(x_0) := \big(\partial_j \partial_k f(x_0)\big)_{j,k=1}^d = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x_0) & \partial_1 \partial_2 f(x_0) & \dots & \partial_1 \partial_d f(x_0) \\ \partial_2 \partial_1 f(x_0) & \partial_2^2 f(x_0) & \dots & \partial_2 \partial_d f(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_d \partial_1 f(x_0) & \partial_d \partial_2 f(x_0) & \dots & \partial_d^2 f(x_0) \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix *von f in x_0.*

Bemerkung 12.2. (a) Ist f sogar zweimal stetig partiell differenzierbar, also in $C^2(G, \mathbb{R})$, so ist die Hesse-Matrix dank des Satzes von Schwarz 9.16 für jedes $x_0 \in G$ eine symmetrische Matrix.

(b) In ähnlicher Weise wie oben kann man für eine Funktion $f \in C^k(G, \mathbb{R})$ die k-te Ableitung $D^k f(x_0)$ als k-Linearfom in $\mathbb{R}^d$ auffassen mit

$$D^k f(x_0)(v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}) = \partial_{v^{(1)}} \partial_{v^{(2)}} \dots \partial_{v^{(k)}} f(x_0).$$

für $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)} \in \mathbb{R}^d$.

Das Notieren von Ableitungen beliebig hoher Ordnung ist mit den bisher betrachteten Mitteln sehr mühsam und schnell unübersichtlich. Deshalb wollen wir nun mit der Multiindex-Schreibweise ein notationelles Hilfsmittel dafür kennenlernen.

Definition 12.3. *(a) Ein Tupel $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ heißt* Multiindex.

(b) Für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ schreibt man

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d \qquad \textit{(Betrag von } \alpha\textit{)} \\ \alpha! &:= \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_d!. \end{aligned}$$

Der Betrag wird, vor allem im Zusammenhang mit Ableitungen, oft auch Ordnung *des Mulitiindex genannt.*

(c) Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex der Ordnung $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(G, \mathbb{R}^p)$ und $x \in \mathbb{R}^d$ so schreibt man kurz

$$\begin{aligned} x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d} \\ D^\alpha f &:= \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_d^{\alpha_d} f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}} f \end{aligned}$$

und ist $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ *der Null-Multiindex, so setzen wir wieder* $D^0 f := f$.

Beispiel 12.4. Für $\alpha = (3, 5, 7, 0, 6)$ ist

$$\begin{aligned} |\alpha| &= 3 + 5 + 7 + 6 = 21, \\ \alpha! &= 3! \cdot 5! \cdot 7! \cdot 6!, \\ D^\alpha f &= \partial_1^3 \partial_2^5 \partial_3^7 \partial_5^6 f, \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ \pi \\ 1 \end{pmatrix}^\alpha &= 5^3 \cdot 3^5 \cdot (-1)^7 \cdot 1^6 = -5^3 \cdot 3^5. \end{aligned}$$

Bemerkung 12.5. Die Multiindexschreibweise ist für Ableitungen nur dann sinnvoll, wenn stetige Differenzierbarkeit vorliegt, da im Multiindex keine Information darüber enthalten ist, in welcher Reihenfolge abgeleitet werden soll und der Satz von Schwarz 9.16 die Unabhängigkeit der Ableitung von der Reihenfolge der partiellen Ableitungen nur bei stetiger Differenzierbarkeit garantieren kann.

Wir wollen die Multiindizes nun einmal bei der Arbeit sehen und formulieren und beweisen mit ihrer Hilfe eine „Multinomialformel“, also eine Binomialformel für mehrere Summanden unter der Potenz.

Lemma 12.6. *Für alle $a \in \mathbb{R}^d$ und alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_d)^\ell = \ell! \sum_{|\alpha| = \ell} \frac{a^\alpha}{\alpha!}.$$

Die Schreibweise $\sum_{|\alpha|=\ell}$ bedeutet hier, dass über alle möglichen Multiindizes vom Betrag ℓ summiert wird.

Beweis. Wir beweisen die Formel per Induktion über d. Für den Induktionsanfang stellen wir fest, dass es für $d = 1$ nur einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^1$ mit $|\alpha| = \ell$ gibt, nämlich (ℓ). Also ist

$$\ell! \sum_{|\alpha| = \ell} \frac{a^\alpha}{\alpha!} = \ell! \frac{a^\ell}{\ell!} = a^\ell = a_1^\ell$$

und die Behauptung ist für $d = 1$ gezeigt.
Für den Induktionsschluss von d nach $d + 1$ gehen wir davon aus, dass die Behauptung für d gilt. Im Folgenden zerlegen wir Multiindizes α aus $\mathbb{N}_0^{d+1}$ als $\alpha = (\alpha', \alpha_{d+1})$ mit $\alpha' \in \mathbb{N}_0^d$ und genauso $a \in \mathbb{R}^{d+1}$ als $a = (a', a_{d+1})$ mit $a' \in \mathbb{R}^d$.
Es sei nun $a \in \mathbb{R}^{d+1}$ und $\ell \in \mathbb{N}$. Wir setzen $b := a_1 + a_2 + \cdots + a_d$. Dann gilt mit der Binomialformel

$$(a_1 + \cdots + a_d + a_{d+1})^\ell = (b + a_{d+1})^\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} a_{d+1}^j b^{\ell-j}.$$

Nun können wir für den Ausdruck $b^{\ell-j}$ die Induktionsvoraussetzung verwenden und erhalten

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} a_{d+1}^j (\ell-j)! \sum_{|\alpha'|=\ell-j} \frac{a'^{\alpha'}}{\alpha'!} \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{|\alpha'|=\ell-j} \frac{\ell!}{j!} \frac{a'^{\alpha'} a_{d+1}^j}{\alpha'!}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\left\{(\alpha', j) \in \mathbb{N}_0^{d+1} : |\alpha'| = \ell - j,\ j = 0, 1, \dots, \ell\right\} = \left\{\alpha \in \mathbb{N}_0^{d+1} : |\alpha| = \ell\right\},$$

also folgt durch Ersetzung von j durch α_{d+1}

$$\begin{aligned} (a_1 + \cdots + a_d + a_{d+1})^\ell &= \sum_{\alpha_{d+1}=0}^{\ell} \sum_{|\alpha'|=\ell-\alpha_{d+1}} \frac{\ell!}{\alpha_{d+1}!} \frac{a'^{\alpha'} a_{d+1}^{\alpha_{d+1}}}{\alpha'!} \\ &= \ell! \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{a^\alpha}{\alpha!}. \end{aligned}$$

□

Wenn Sie das immer noch sehr unübersichtlich finden – und das dürfen Sie mit gutem Gewissen – dann versuchen Sie mal dieses Lemma ohne die Verwendung von Multiindizes zu formulieren und zu beweisen!
Ein anderer praktischer Nutzen von Multiindizes ergibt sich beim Umgang mit Polynomen in mehreren Variablen. Ein allgemeines Polynom vom Grad $m \in \mathbb{N}$ in d Variablen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$ können wir nun einfach hinschreiben als

$$p(\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \xi^\alpha$$

mit *Koeffizienten* $a_\alpha \in \mathbb{K}$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \le m$. Das hat den übersichtlichen Vorteil, dass das nun, bis auf die ungewohnte Angabe des Summationsbereichs unter dem Summenzeichen, genauso aussieht, wie wir das in einer Variablen gewohnt sind. Machen Sie sich aber unbedingt klar, dass man auf diese Weise tatsächlich alle Polynome in d Variablen erwischt!

Definition 12.7. *Sei $p(\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \xi^\alpha$ ein Polynom in d Variablen wie oben. Dann heißt*

$$p(D) : \begin{cases} C^m(G, \mathbb{R}) & \to C(G, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto p(D)f := \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha f \end{cases}$$

linearer Differentialoperator *der* Ordnung m *mit* Koeffizienten a_α*,* $|\alpha| \le m$*.*

Bemerkung 12.8. (a) Für jedes Polynom p ist $p(D)$ wie oben angegeben eine lineare Abbildung. Dahinter steckt nichts als die Linearität der Differentiation.

(b) Der Übergang vom Polynom zum zugehörigen Differentialoperator entsteht formal, indem jeweils für $j = 1, 2, \dots, d$ die j-te Variable ξ_j durch die partielle Ableitung ∂_j ersetzt wird. Diese Aktion verträgt sich brav mit den gängigen Rechenoperationen für Polynome: Überzeugen Sie sich, dass

$$(p+q)(D) = p(D) + q(D) \quad \text{und} \quad (p \cdot q)(D) = p(D)q(D)$$

für alle Polynome p, q gilt.

Beispiel 12.9. (a) Der wichtigste Differentialoperator ist gegeben durch

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_d^2 = \sum_{j=1}^d \partial_j^2.$$

Dieser heißt *Laplace-Operator* oder kurz nur *Laplace* und entsteht aus dem Polynom $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_d^2$.

Man beachte, dass für jede Funktion $f \in C^2(G, \mathbb{R})$ gilt $\Delta f = \mathrm{spur} H_f$.

Dieser Operator taucht in vielen für Physik, Mechanik, Wirtschaft, Chemie,... fundamental wichtigen Differentialgleichungen auf, z.B.

$$\begin{aligned} \text{Wellengleichung:} \quad & \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = \Delta_x u(t,x), \\ \text{Wärmeleitungsgleichung:} \quad & \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \Delta_x u(t,x), \\ \text{Schrödingergleichung:} \quad & \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = i\Delta_x u(t,x). \end{aligned}$$

(b) Das zweite Beispiel ist bei weitem nicht so prominent, wir brauchen es aber gleich im Beweis des Satzes von Taylor.

Es sei $h \in \mathbb{R}^d$ ein fix gewählter Vektor. Dann ist

$$p(\xi) := \langle h, \xi \rangle = \sum_{j=1}^d h_j \xi_j$$

ein Polynom vom Grad 1 (bzw. für $h = 0$ vom Grad 0). Dieses liefert uns den linearen Differentialoperator

$$\langle h, \nabla \rangle := p(D) = \sum_{j=1}^{d} h_j \partial_j.$$

Wenden wir diesen nun $\ell \in \mathbb{N}$ mal auf eine Funktion $f \in C^{\ell}(G, \mathbb{R})$ an, so gilt mit Hilfe von Lemma 12.6 und Bemerkung 12.8(b)

$$\begin{aligned} \langle h, \nabla \rangle^{\ell} f &= (h_1\partial_1 + h_2\partial_2 + \cdots + h_d\partial_d)^{\ell} f = \ell! \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{(h_1\partial_1, h_2\partial_2, \ldots, h_d\partial_d)^{\alpha}}{\alpha!} f \\ &= \ell! \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{h_1^{\alpha_1}\partial_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2}\partial_2^{\alpha_2} \ldots h_d^{\alpha_d}\partial_d^{\alpha_d}}{\alpha!} f = \ell! \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{h^{\alpha} D^{\alpha}}{\alpha!} f. \qquad (12.1) \end{aligned}$$

Eigentlich sollte es in diesem Abschnitt ja um den Satz von Taylor gehen und dem wollen wir uns nun auch zuwenden. Alle bisherigen Vorbereitungen über Multiindizes und lineare Differenzialoperatoren werden dabei zusammenfließen. Zunächst erinnern wir uns an die eindimensionale Situation: Ist $f \in C^{m+1}(I)$ für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und sind $x, x_0 \in I$, so gilt

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + R_{m+1}f(x, x_0),$$

wobei wir für das Restglied $R_{m+1}f(x, x_0)$ die beiden Darstellungen

$$R_{m+1}f(x, x_0) = \begin{cases} \dfrac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}, & \text{für ein } \xi \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x, \\ \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) \,\mathrm{d}t \end{cases}$$

hergeleitet hatten.

Satz 12.10 (Taylor)**.** *Seien $x_0, x \in G$ mit $\overline{x_0x} \subseteq G$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C^{m+1}(G, \mathbb{R})$. Dann gibt es ein $\xi \in \overline{x_0x}$ mit*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{|\alpha| \le m} \frac{D^{\alpha} f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^{\alpha} + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^{\alpha} f(\xi)}{\alpha!}(x - x_0)^{\alpha} \\ &=: T_m f(x, x_0) + R_{m+1} f(x, x_0). \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $h = (h_j)_{j=1}^{d} := x - x_0 \in \mathbb{R}^d$. Damit betrachten wir die Funktion $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $F(t) := f(x_0 + th)$, $t \in [0, 1]$. Dann ist $F \in C^{m+1}([0, 1])$ und es gilt für $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(x_0 + th)\big) = \nabla f(x_0 + th) \cdot h = \sum_{j=1}^{d} h_j \partial_j f(x_0 + th) \\ &= \langle h, \nabla \rangle f(x_0 + th) \end{aligned}$$

und genauso

$$F''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\langle h, \nabla\rangle f(x_0+th)\big) = \langle h, \nabla\rangle\big(\langle h, \nabla\rangle f\big)(x_0+th) = \langle h, \nabla\rangle^2 f(x_0+th),$$

bzw. induktiv für $\ell = 1, 2, \ldots, m+1$

$$F^{(\ell)}(t) = \langle h, \nabla\rangle^\ell f(x_0+th).$$

Wir wenden nun auf F den eindimensionalen Satz von Taylor I.24.7 mit Entwicklungspunkt 0 an und erhalten für ein $\tau \in (0,1)$

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0+h) = F(1) &= \sum_{\ell=0}^{m} \frac{F^{(\ell)}(0)}{\ell!}(1-0)^\ell + \frac{F^{(m+1)}(\tau)}{(m+1)!}(1-0)^{m+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{m} \frac{\langle h, \nabla\rangle^\ell f(x_0)}{\ell!} + \frac{\langle h, \nabla\rangle^{m+1} f(x_0+\tau h)}{(m+1)!}. \end{aligned}$$

Verwenden wir nun unsere Überlegungen aus (12.1) in Beispiel 12.9(b), so liefert das mit $\xi := x_0 + \tau h = x_0 + \tau(x-x_0) \in \overline{x_0 x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{\ell!}\ell! \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{h^\alpha D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} + \frac{1}{(m+1)!}(m+1)! \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{h^\alpha D^\alpha f(\xi)}{\alpha!} \\ &= \sum_{|\alpha|\le m} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha. \end{aligned}$$ □

Bemerkung 12.11. (a) Das Polynom $T_m f(x, x_0)$ heißt dann natürlich wieder *Taylorpolynom* der Ordnung m von f in x_0 und $R_{m+1} f(x, x_0)$ ist das zugehörige *Restglied* in *Lagrange-Darstellung*.

(b) Genau wie in einer Dimension fällt der Satz von Taylor für $m = 0$ mit dem Mittelwertsatz zusammen.

(c) Am häufigsten wird der Satz von Taylor im Fall $m = 1$ verwendet. Dann lässt sich die Formel recht schön so schreiben:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_1 f(x, x_0) + R_2 f(x, x_0) \\ &= f(x_0) + \sum_{j=1}^{d} \partial_j f(x_0)(x_j - x_{0,j}) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} \partial_j \partial_k f(\xi)(x_j - x_{0,j})(x_k - x_{0,k}) \\ &= f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^T H_f(\xi)(x-x_0) \end{aligned}$$

mit einem $\xi \in \overline{x_0 x}$.

Übungsaufgabe 12.12. Ist $f \in C^{m+1}(G, \mathbb{R})$ und $x_0 \in G$, so ist die Approximation von $T_m f(x, x_0)$ an f in der Nähe von x_0 von Ordnung m, d. h.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_m f(x, x_0)}{\|x - x_0\|^m} = 0.$$

Beispiel 12.13. Wir suchen das Taylorpolynom 2. Ordnung von

$$f(x, y) = \sin\Big(\frac{x + 2y}{2}\Big) + \cos\Big(\frac{2x - y}{2}\Big), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$. Es ist nach einiger Ableiterei

$$\begin{aligned}
&T_2 f\big((x, y), (0, 0)\big) \\
&= f(0, 0) + \frac{f_x(0, 0)}{1!}(x - 0) + \frac{f_y(0, 0)}{1!}(y - 0) \\
&\qquad + \frac{f_{xx}(0, 0)}{2!}(x - 0)^2 + \frac{f_{xy}(0, 0)}{1!1!}(x - 0)(y - 0) + \frac{f_{yy}(0, 0)}{2!}(y - 0)^2 \\
&= \dots = 1 + \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{8}y^2.
\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch die bekannten Reihen von Sinus und Cosinus nutzen:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!}\Big(\frac{x + 2y}{2}\Big)^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\Big(\frac{2x - y}{2}\Big)^{2k} \\
&= \frac{x + 2y}{2} - \frac{1}{6}\Big(\frac{x + 2y}{2}\Big)^3 + \dots + 1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{2x - y}{2}\Big)^2 + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{8}(2x - y)^2 + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{8}y^2 + \dots,
\end{aligned}$$

wobei die Auslassungspünktchen Terme bezeichnen, die mindestens vom Grad 3 sind.

Zur Information ist hier noch eine Version des Satzes von Taylor mit Integralrestglied in mehreren Variablen aufgeführt.

Satz 12.14 (Satz von Taylor mit Integralrestglied)**.** *Es seien $x_0, x \in G$ so, dass $\overline{x_0 x} \subseteq G$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C^{m+1}(G, \mathbb{R})$. Dann gilt*

$$f(x) = T_m f(x, x_0) + \int_0^1 \frac{(1 - t)^m}{m!} \langle h, \nabla \rangle^{m+1} f(x_0 + th) \,\mathrm{d}t.$$

13. Lokale Extrema

Wir gehen weiter im Programm unsere Ergebnisse aus der Analysis I mehrdimensional zu erweitern und wenden uns dem Auffinden lokaler Extrema mithilfe der Differentialrechnung zu. In diesem Abschnitt sei grundsätzlich $G \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $f : G \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Definition 13.1. *(a) Die Funktion f hat in $x_0 \in G$ ein* lokales *(oder* relatives*)* Maximum, *wenn es eine Umgebung $U \subseteq G$ von x_0 gibt mit $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U$.*

(b) Die Funktion f hat in $x_0 \in G$ ein lokales *(oder* relatives*)* Minimum, *wenn es eine Umgebung $U \subseteq G$ von x_0 gibt mit $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in U$.*

(c) Die Funktion f hat in $x_0 \in G$ ein lokales *(oder* relatives*)* Extremum, *wenn f in x_0 ein lokales Maximum oder Minimum besitzt.*

Für das Vorliegen eines lokalen Extremums gibt es auch in mehreren Variablen das übliche notwendige Kriterium. Man beachte, dass dafür eine sehr schwache Differenzierbarkeitsbedingung schon ausreicht.

Satz 13.2. *Ist f partiell differenzierbar in $x_0 \in G$ und hat f dort ein lokales Extremum, so gilt $\nabla f(x_0) = 0$.*

Beweis. Es sei $e_1, e_2, \dots, e_d$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^d$. Da G offen ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $x_0 + te_j \in G$ für alle $j = 1, 2, \dots, d$ und alle $t \in [-\delta, \delta]$.
Wir betrachten nun für $j = 1, 2, \dots, d$ die Funktionen $g_j : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ mit $g_j(t) = f(x_0 + te_j)$, d. h. g_j entspricht der Einschränkung von f auf eine kurze Strecke durch den Punkt x_0 in Richtung des j-ten Koordinateneinheitsvektors, wobei $g(0) = f(x_0)$ ist. Damit hat g_j in Null ebenfalls ein lokales Extremum.
Außerdem ist g_j nach Voraussetzung differenzierbar in Null mit

$$g_j'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g_j(t) - g_j(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tej) - f(x_0)}{t} = \partial_j f(x_0).$$

Nach dem bekannten eindimensionalen Resultat über kritische Punkte I.22.14 gilt also $\partial_j f(x_0) = g_j'(0) = 0$ für jedes $j = 1, 2, \dots, d$ und das bedeutet gerade $\nabla f(x_0) = 0$. ☐

Definition 13.3. *Ist f in x_0 partiell differenzierbar und gilt $\nabla f(x_0) = 0$, so heißt x_0 ein* kritischer Punkt *von f.*

Es dürfte nicht überraschend sein, dass die Welt in mehreren Variablen nicht schöner wird als in einer: Nicht jeder kritische Punkt ist auch eine lokale Extremstelle. Hier sind die notorischen Beispiele.

Beispiel 13.4. (a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2+y^2$. Dann ist $f(x, y) > 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $f(0, 0) = 0$. Also hat f in $(0, 0)$ ein lokales (sogar globales) Minimum und tatsächlich ist $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ und damit $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

(b) Wir betrachten jetzt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2-y^2$. Dann ist $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ und damit auch hier $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, d. h. $(0, 0)$ ist ein kritischer Punkt von f. Hier gilt aber $f(x, 0) > 0$ für alle $x \neq 0$ und $f(0, y) < 0$ für alle $y \neq 0$. In jeder Umgebung von Null ohne den Urpsrung sind also die Werte von f auf der x-Achse strikt positiv und auf der y-Achse strikt negativ. Damit kann im Ursprung kein lokales Extremum vorliegen.

Man nennt einen solchen kritischen Punkt, an dem kein Extremum vorliegt, einen *Sattelpunkt*.

Wie unterscheidet man nun einen Sattelpunkt von einer Extremstelle? Die Idee ist genau die gleiche wie im letzten Semester: Ist $f \in C^2(G, \mathbb{R})$ und $x_0 \in G$ ein kritischer Punkt von f, so entwickeln wir f in sein Taylorpolynom erster Ordnung mit Entwicklungsstelle x_0.
Dazu sei $\varrho > 0$ so, dass $U_\varrho(x_0) \subseteq G$ gilt. Dann ist für alle $x \in U_\varrho(x_0)$ die Verbindungsstrecke $\overline{xx_0} \subseteq U_\varrho(x_0) \subseteq G$, so dass es nach dem Satz von Taylor 12.10, vgl. auch Bemerkung 12.11(c), ein $\xi \in \overline{xx_0}$ gibt mit

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)}_{=0}(x - x_0) + (x - x_0)^T H_f(\xi)(x - x_0).$$

Also ist

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^T H_f(\xi)(x - x_0) \tag{13.1}$$

und das Vorzeichen der rechten Seite bestimmt das Vorzeichen der linken Seite und das entscheidet darüber ob eine, und wenn ja, was für eine, Extremstelle vorliegt. Dabei hilft uns folgende Defintion weiter, die wahrscheinlich nur eine Erinnerung an die Lineare Algebra ist.

Definition 13.5. *Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ heißt*

(a) positiv definit*, falls $x^T Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gilt.*

(b) negativ definit*, falls $x^T Ax < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gilt.*

(c) indefinit*, falls $x, y \in \mathbb{R}^d$ existieren mit $x^T Ax > 0$ und $y^T Ay < 0$.*

Lemma 13.6. *Die Mengen der positiv definiten, der negativ definiten und der indefiniten Matrizen sind offene Teilmengen von $\{T \in \mathbb{R}^{d\times d} : T$ symmetrisch$\}$.*

Beweis. Wir führen den Beweis nur für die Menge der positiven Matrizen. Die Argumente in den anderen Fällen sind mehr oder weniger analog.
Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ positiv definit. Da die Einheitssphäre $K := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}$ kompakt ist und $f : K \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \langle x, Ax\rangle$ stetig auf K ist, nimmt die Abbildung f auf K ihr Minimum an. Wir nennen diesen Minimalwert α und beobachten, dass wegen $f(x) > 0$ für alle $x \in K$ auch $\alpha > 0$ gelten muss.
In $\mathbb{R}^{d\times d}$ können wir uns noch eine Norm aussuchen und da wir wegen des Skalarprodukts in $\mathbb{R}^d$ sinnigerweise mit der 2-Norm arbeiten, versehen wir $\mathbb{R}^{d\times d}$ mit der zur 2-Norm assoziierten Operatornorm $\|\cdot\|$, vgl. Definition 5.12.
Wir weisen nun nach, dass $U_{\alpha/2}(A)$ in der Menge der positiv definiten Matrizen enthalten ist, womit diese dann offen ist. Sei also $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine symmetrische Matrix mit $\|B - A\| < \alpha/2$. Dann gilt für alle $x \in K$

$$\langle x, Bx\rangle = \langle x, Ax - (A - B)x\rangle = \langle x, Ax\rangle - \langle x, (A - B)x\rangle.$$

Wir wenden im letzten Skalarprodukt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung an, ziehen damit mehr ab und erhalten für alle $x \in K$

$$\langle x, Bx\rangle \geq \langle x, Ax\rangle - \underbrace{\|x\|_2}_{=1} \|(A - B)x\|_2 \geq \alpha - \|(A - B)x\|_2.$$

Nun verwenden wir Satz 5.12(b)i) und erhalten weiterhin für alle $x \in K$

$$\langle x, Bx\rangle \geq \alpha - \|A - B\|\|x\|_2 = \alpha - \|A - B\| > \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Damit haben wir schließlich für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

$$\langle x, Bx\rangle = \|x\|_2^2 \Big\langle \frac{x}{\|x\|}, B\frac{x}{\|x\|_2} \Big\rangle \geq \|x\|_2^2 \frac{\alpha}{2} > 0.$$

Also ist auch B eine positiv definite Matrix und $U_{\alpha/2}(A)$ eine Teilmenge der positiv definiten Matrizen. □

Satz 13.7 (Hinreichende Bedingung für Extrema)**.** *Ist $f \in C^2(G, \mathbb{R})$ und $x_0 \in G$ ein kritischer Punkt von f, so gilt:*

(a) Ist $H_f(x_0)$ positiv definit, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.

(b) Ist $H_f(x_0)$ negativ definit, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.

(c) Ist $H_f(x_0)$ indefinit, so hat f in x_0 kein Extremum.

Beweis. (a) Wir haben in (13.1) bereits gesehen, dass

$$f(x) - f(x_0) = \big\langle x - x_0, H_f(\xi)(x - x_0)\big\rangle \quad \text{mit einem } \xi \in \overline{xx_0}$$

ist, solange $x \in U_\varrho(x_0)$ mit einem geeigneten $\varrho > 0$ gilt.

Ist nun $H_f(x_0)$ positiv definit, so gibt es nach Lemma 13.6 ein $\kappa > 0$, so dass alle symmetrischen Matrizen, die näher als κ an $H_f(x_0)$ liegen, ebenfalls positiv definit sind. Die Abbildung $x \mapsto H_f(x)$ ist nach Voraussetzung in G stetig, also gibt es ein $\delta > 0$ mit $H_f(x) \in U_\kappa(H_f(x_0))$ für alle $x \in U_\delta(x_0)$, d. h. $H_f(x)$ ist dann positiv definit.

Ist nun $\varepsilon := \min\{\delta, \varrho\}$, so gilt für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$, dass auch das zugehörige ξ in $U_\varepsilon(x_0)$ liegt und damit $H_f(\xi)$ positiv definit ist. Also ist für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$

$$f(x) - f(x_0) = \big\langle x - x_0, H_f(\xi)(x - x_0)\big\rangle \geq 0$$

und damit $f(x) \geq f(x_0)$, d. h. in x_0 liegt ein relatives Minimum vor.

(b) Ist $H_f(x_0)$ negativ definit, so ist $H_{-f}(x_0) = -H_f(x_0)$ positiv definit und nach unseren obigen Erkenntnissen hat dann $-f$ ein lokales Minimum in x_0, d. h. f hat ein lokales Maximum in x_0. Man beachte dabei, dass die Voraussetzungen des Satzes, wenn sie für f erfüllt sind, auch für $-f$ gelten.

(c) Ist $H_f(x_0)$ indefinit, so gibt es $v, w \in \mathbb{R}^d$ mit

$$\langle v, H_f(x_0)v\rangle > 0 \quad \text{und} \quad \langle w, H_f(x_0)w\rangle < 0$$

und v und w sind offensichtlich nicht Null. Da G offen ist, können wir dann ein $\varepsilon > 0$ finden mit $x_0 + tv, x_0 + tw \in G$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Wir betrachten die beiden Funktionen $\varphi_v, \varphi_w : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_v(t) = f(x_0 + tv)$ und $\varphi_w(t) = f(x_0 + tw)$. Dann sind $\varphi_v, \varphi_w \in C^2((-\varepsilon, \varepsilon))$ mit

$$\varphi_v'(t) = \nabla f(x_0 + tv) \cdot v, \quad \text{also} \quad \varphi_v'(0) = \nabla f(x_0) \cdot v = 0$$

und genauso $\varphi_w'(0) = 0$. Weiterhin gilt

$$\varphi_v''(t) = \langle v, H_f(x_0 + tv)v\rangle, \quad \text{und damit} \quad \varphi_v''(0) = \langle v, H_f(x_0)v\rangle > 0$$

und genauso $\varphi_w''(0) < 0$. Damit hat die Einschränkung von f auf die Gerade durch x_0 in Richtung v, also φ_v, in x_0 ein striktes lokales Minimum und die Einschränkung auf die Gerade durch x_0 in Richtung w in x_0 ein striktes lokales Maximum. In Summe kann damit f in x_0 kein Extremum haben. □

Die Frage wie man nun feststellt, ob eine gegebene symmetrische Matrix positiv, negativ oder indefinit ist, gehört in den Zuständigkeitsbereich der Linearen Algebra. Wir zitieren hier die wichtigsten Methoden.

Satz 13.8. *Sei $A = (a_{j,k})_{j,k=1}^d \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch. Dann ist A*

(a) genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A strikt positiv sind und das ist genau dann der Fall, wenn die Minoren von A alle positiv sind, d. h. für alle $m = 1, 2, \dots, d$ gilt $\det((a_{j,k})_{j,k=1}^m) > 0$.

(b) genau dann negativ definit, wenn alle Eigenwerte von A strikt negativ sind und das ist genau dann der Fall, wenn die Vorzeichen der Minoren von A alternieren mit $(-1)^m \det((a_{j,k})_{j,k=1}^m) > 0$ für alle $m = 1, 2, \dots, d$.

(c) genau dann indefinit, wenn A sowohl einen strikt positiven als auch einen strikt negativen Eigenwert hat.

Beispiel 13.9. Wir bestimmen die relativen Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2},$$

vgl. Abbildung 13.1.

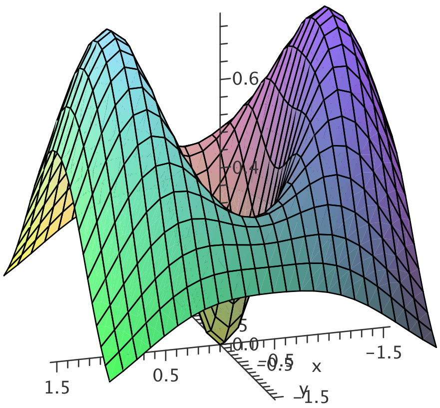

Abbildung 13.1.: Der Graph der Funktion $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

Wir bestimmen die kritischen Punkte mit $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Da

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \left(2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2} - 2x(x^2 + 2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}, 4y\mathrm{e}^{-x^2-y^2} - 2y(x^2 + 2y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\right) \\ &= 2\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\left(x(1 - x^2 - 2y^2), y(2 - x^2 - 2y^2)\right),\end{aligned}$$

ist, bekommen wir die kritischen Punkte als die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} x(1 - x^2 - 2y^2) &= 0 \\ y(2 - x^2 - 2y^2) &= 0. \end{cases}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $x = 0$. Dann ist die erste Gleichung erfüllt und die zweite vereinfacht sich zu $y(2 - 2y^2) = 0$. Diese hat die drei Lösungen 0, 1 und -1. Also haben wir bereits die drei Nullstellen des Gradienten $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(0, -1)$.

Im Fall $x \neq 0$ können wir die erste Gleichung durch x dividieren und verbleiben mit $-x^2 - 2y^2 = -1$. Setzen wir das in die zweite Gleichung ein, so erhalten

wir $0 = y(2-1) = y$. In diesem Fall muss also $y = 0$ sein. Dann ist die zweite Gleichung auf jeden Fall erfüllt und nun vereinfacht sich die erste Gleichung zu $1 - x^2 = 0$, also muss dann $x = 1$ oder $x = -1$ sein.
Insgesamt haben wir fünf kritische Stellen $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ und $(-1,0)$. Wir bestimmen nun die Hesse-Matrix $H_f(x,y)$ zu

$$2e^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} 1-5x^2-2y^2+2x^4+4x^2y^2 & -2xy(3-x^2-2y^2) \\ -2xy(3-x^2-2y^2) & 2-x^2-10y^2+2x^2y^2+4y^4 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
H_f(0,0) &= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, && \text{Eigenwerte: } 2,\ 4 \rightsquigarrow \text{pos. def.} && \rightsquigarrow \text{Minimum,} \\
H_f(0,1) &= \frac{2}{e}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, && \text{Eigenwerte: } \frac{-2}{e},\ \frac{-8}{e} \rightsquigarrow \text{neg. def.} && \rightsquigarrow \text{Maximum,} \\
H_f(0,-1) &= H_f(0,1) && && \rightsquigarrow \text{Maximum,} \\
H_f(1,0) &= \frac{2}{e}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, && \text{Eigenwerte: } \frac{-4}{e},\ \frac{2}{e} \rightsquigarrow \text{indefinit} && \rightsquigarrow \text{kein Extr.,} \\
H_f(-1,0) &= H_f(1,0) && && \rightsquigarrow \text{kein Extr..}
\end{aligned}$$

Bemerkung 13.10. In $\mathbb{R}^d$ können ein paar Dinge passieren, die im eindimensionalen nicht vorkommen, z.B. kann eine auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion zwei relative Maxima haben, ohne ein relatives Mimimum zu besitzen, vgl. Abbildung 13.2. Hüten Sie sich also vor eindimensionalem Denken!

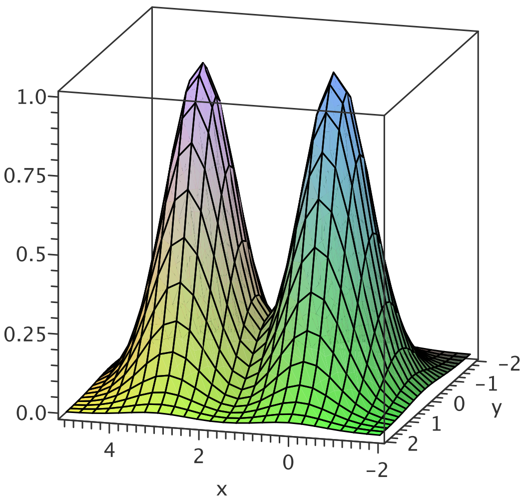

Abbildung 13.2.: Der Graph der Funktion $f(x,y) = e^{-x^2-y^2} + e^{-(x-3)^2-y^2}$

14. Umkehrfunktionen

Ein Grundproblem der Mathematik ist das Auflösen von Gleichungen. Ein allgemeines Gleichungssystem mit d Unbekannten und p Gleichungen können wir schreiben als $f(x) = b$ mit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$, wobei $b \in \mathbb{R}^p$ gegeben und $x \in \mathbb{R}^d$ gesucht ist.
Besonders übersichtlich ist der Fall von linearen Gleichungssystemen, den Sie aus der Linearen Algebra kennen:

- Ist $p > d$, so ist das LGS überbestimmt und hat i. A. keine Lösung.
- Ist $p = d$ und die Matrix des LGS regulär, so hat dieses genau eine Lösung.
- Ist $p < d$, so ist das LGS unterbestimmt und hat, falls es lösbar ist, einen affinen Unterraum als Lösungsmenge.

Wir haben nun genug analytisches Rüstzeug zusammen, um uns mit nichtlinearen Gleichungssystemen zu beschäftigen. Deren Behandlung ist naturgemäß deutlich komplizierter und von der Idee, so etwas wie ein allgemeines Lösungsverfahren finden zu wollen, sollten Sie sich gleich verabschieden. Das Ziel wird vielmehr sein, analog zu obiger Aufstellung, anhand von Eigenschaften der Funktion f Aussagen darüber treffen zu können, wie die Struktur der Lösungsmenge aussieht.
Für überbestimmte Gleichungssysteme ist auch hier nichts zu holen, keine Lösung ist keine Lösung.
Für den Fall $p = d$ erhoffen wir uns eine eindeutige Lösung, wenn irgendetwas regulär genug ist. Wir werden in diesem Kapitel dazu den Satz über die Umkehrfunktion 14.5 zeigen, der grob gesprochen besagt: Ist $a \in \mathbb{R}^d$ eine Lösung unserer Gleichung, d. h. $f(a) = b$ und ist $Df(a)$ regulär, so gibt es für jedes y nahe bei b genau ein x nahe bei a mit $f(x) = y$. Oder anders gesagt: In diesem Fall gibt es in einer kleinen Umgebung von b eine Umkehrfunktion von f, d. h. f ist in einer kleinen Umgebung von a injektiv.
Im Fall von unterbestimmten Gleichungssystemen erwarten wir viele Lösungen zu einer gegebenen rechten Seite. Das Ziel wird hier sein, zu zeigen, dass sich diese Menge an Lösungen geeignet parametrisieren, d. h. als Graph einer Funktion darstellen lässt. Diese wird allerdings nicht wie bei linearen Gleichungssystemen affin sein und ist auch im allgemeinen nicht zu bestimmen. Der im nächsten Kapitel präsentierte Satz über implizit definierte Funktionen 15.2, der unter geeigneten Voraussetzungen eine solche Parametrisierung garantiert, ist demnach ein nicht konstruktives Existenztheorem, aber trotzdem ein ungemein nützliches Resultat.

Definition 14.1. *Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^d$ und $H \subseteq \mathbb{R}^p$ offen. Eine Funktion $f : G \to H$ heißt* Diffeomorphismus, *wenn sie bijektiv und stetig diffbar auf G ist sowie ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : H \to G$ ebenfalls stetig differenzierbar ist.*

Bemerkung 14.2. So wie alle „-morphismen" ist ein Diffeomorphismus eine strukturerhaltende Abbildung. Hier wird die Struktur der Differenzierbarkeit übertragen.
Man beachte, dass die Forderung nach stetiger Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion nicht redundant ist, denn sie folgt nicht von selbst. Das sieht man schon an dem relativ einfachen Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$. Diese Funktion ist stetig differenzierbar und bijektiv, aber *kein* Diffeomorphismus, da ihre Umkehrfunktion in Null nicht differenzierbar ist.

In Analysis I haben wir gezeigt, dass jede stetig differenzierbare Funktion f auf einem Intervall I, deren Ableitung nie verschwindet, eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion hat, dass dann also $f : I \to f(I)$ ein Diffeomorphismus ist. Außerdem besagt die Regel über die Ableitung der Umkehrfunktion, dass dann $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$ für alle $x \in I$ gilt.
In mehreren Variablen ist die Sache deutlich komplizierter: Erstens verkommt dieses Kriterium zu einer nur noch notwendigen Bedingung und es geht auch nicht darum, dass die Ableitung nur ungleich null ist. Stattdessen muss sie als lineare Abbildung – bzw. Matrix – invertierbar sein, ein Unterschied, der bei 1×1-Matrizen nicht sichtbar ist.

Satz 14.3. *Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^d$ und $H \subseteq \mathbb{R}^p$ offen. Ist $f : G \to H$ ein Diffeomorphismus, so gilt $d = p$ und es ist* $\det Df(x) \neq 0$ *sowie $(Df(x))^{-1} = Df^{-1}(f(x))$ für alle $x \in G$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_G$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_H$. Also ist nach der Kettenregel für alle $x \in G$ und alle $y \in H$

$$Df^{-1}(f(x))Df(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{und} \quad Df(f^{-1}(y))Df^{-1}(y) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^p},$$

d. h. mit $y := f(x)$

$$Df^{-1}(f(x))Df(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{und} \quad Df(x)Df^{-1}(f(x)) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^p}.$$

Also ist $Df(x)$ für jedes $x \in G$ eine invertierbare lineare Abbildung. Damit sind alle Behauptungen aus obigem Satz alte Bekannte aus der Linearen Algebra. □

Das nächste Beispiel zeigt, dass die Regularität der Ableitung in jedem Punkt in mehreren Variablen tatsächlich nur noch eine notwendige Bedingung für die Umkehrbarkeit einer Funktion darstellt.

Beispiel 14.4. Wir betrachten die Funktion, die Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten umrechnet, d. h.

$$f : \begin{cases} (0, \infty) \times \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (r, \varphi) & \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

vgl. Abbildung 14.1.

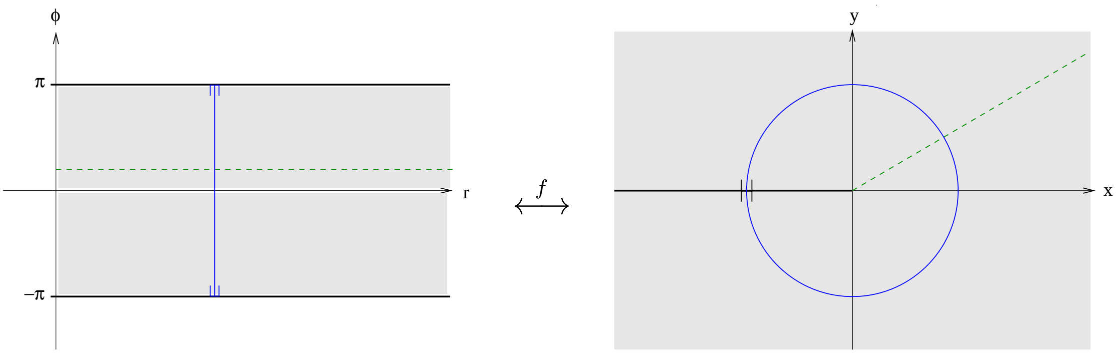

Abbildung 14.1.: Die Polarkoordinaten-Abbildung f bildet $(0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ diffeomorph auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ ab, ist aber auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ nicht bijektiv.

Dann ist f eine stetig differenzierbare Funktion auf der offenen und zusammenhängenden Menge $G := (0, \infty) \times \mathbb{R}$ und für alle $(r, \varphi) \in G$ ist die Jacobi-Matrix

$$J_f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

wegen $\det(J_f(r, \varphi)) = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = r \neq 0$ invertierbar. Trotzdem ist f nicht bijektiv, denn es gilt z.B. $f(1, 0) = f(1, 2\pi) = (1, 0)$.
Das Problem ist, dass man in $\mathbb{R}^2$ im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ im Kreis laufen kann, man kann so zum Ausgangspunkt zurückkehren ohne umzukehren.

Wir müssen also ein wenig bescheidener sein. Tatsächlich kann man zeigen, dass die Regularität der Ableitung es gestattet, zumindest eine lokale Umkehrfunktion zu definieren. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes von der Umkehrfunktion. Dieser ist ein sehr tiefliegendes Resultat und wir werden den bisher aufwändigsten Beweis der ganzen Analysis I/II führen.

Theorem 14.5 (Satz von der Umkehrfunktion)**.** *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x_0 \in G$ und $f \in C^1(G; \mathbb{R}^d)$. Ist $Df(x_0)$ invertierbar, so existieren offene Umgebungen $U \subseteq G$ von x_0 und $V \subseteq \mathbb{R}^d$ von $y_0 := f(x_0)$, so dass $\hat{f} := f|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.*

Bemerkung 14.6. Der Satz von der Umkehrfunktion sagt, wie am Anfang des Abschnitts schon formuliert, etwas über die Lösbarkeit nichtlinearer quadratischer Gleichungssysteme aus: Hat man ein x_0 mit $f(x_0) = y_0$ und ist $Df(x_0)$ regulär, so gibt es für jedes y nahe bei y_0 eine eindeutige Lösung x nahe bei x_0 der Gleichung $f(x) = y$.
Dabei macht der Satz *keine* Aussage über globale Eindeutigkeit der Lösung, es kann durchaus noch andere Punkte $w \in G$ mit $f(w) = y$ geben, diese sind dann aber „weit weg" von x_0. Dass eine solche Aussage im Allgemeinen auch nicht gilt, sieht man an Beispiel 14.4. Der Nachweis, dass eine gegebene Abbildung ein globaler Diffeomorphismus ist, ist im Allgemeinen ein sehr schwieriges Problem.

Bevor wir in den Beweis des Satzes von der Umkehrfunktion einsteigen, brauchen wir noch zwei vorbereitende Lemmata, deren Aussagen allerdings auch für sich genommen wesentliche Resultate sind. Für diese Betrachtungen statten wir $\mathbb{K}^d$ mit irgendeiner Norm aus und notieren die zugehörige Matrixnorm, vgl. Satz 5.12(a), mit $\|\cdot\|$.

Lemma 14.7 (Neumann-Reihe)**.** *Für alle $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ mit $\|A\| < 1$ ist $I - A$ invertierbar*[1] *und es gilt*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Beweis. Dank Satz 5.12(b)i) und wegen $\|A\| < 1$ gilt mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|},$$

und damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ absolut konvergent in $\mathbb{K}^{d\times d}$. Nach Übungaufgabe 6.12(a) ist sie also konvergent. Weiter gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$(I - A)\sum_{n=0}^{N} A^n = \sum_{n=0}^{N} A^n - \sum_{n=0}^{N} A^{n+1} = I + \sum_{n=1}^{N} A^n - \sum_{n=1}^{N} A^n - A^{N+1} = I - A^{N+1}.$$

Es ist

$$0 \le \lim_{N\to\infty} \|A^{N+1}\| \le \lim_{N\to\infty} \|A\|^{N+1} = 0,$$

also gilt $\lim_{N\to\infty} A^{N+1} = 0$ in $\mathbb{K}^{d\times d}$ und wir bekommen zusammengenommen

$$(I - A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \lim_{N\to\infty} (I - A)\sum_{n=0}^{N} A^n = \lim_{N\to\infty} (I - A^{N+1}) = I,$$

woraus alles Behauptete folgt. □

[1] Mit I ist hier die Einheitsmatrix bezeichnet.

Lemma 14.8 (Stetigkeit der Matrixinversion). *Die Menge aller invertierbaren Matrizen* $\mathrm{GL}(d, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{d\times d} : A \text{ invertierbar}\}$ *ist offen in* $\mathbb{K}^{d\times d}$ *und die Matrixinversionsabbildung*

$$\mathrm{inv} : \begin{cases} \mathrm{GL}(d, \mathbb{K}) & \to \mathbb{K}^{d\times d} \\ A & \mapsto A^{-1} \end{cases}$$

ist stetig.

Beweis. Sei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ eine invertierbare Matrix und $\varepsilon := 1/\|A^{-1}\|$. Wir zeigen zunächst, dass $U_\varepsilon(A)$ nur invertierbare Matrizen enthält. Das liefert uns, dass jedes $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{K})$ ein innerer Punkt dieser Menge ist, d. h. diese ist offen.
Sei also $B \in U_\varepsilon(A)$. Dann ist $\|B - A\| < \varepsilon = 1/\|A^{-1}\|$. Weiter gilt

$$B = A + B - A = A\big(I + A^{-1}(B - A)\big), \tag{14.1}$$

und es ist nach Satz 5.12(b)i)

$$\|A^{-1}(B - A)\| \leq \|A^{-1}\|\|B - A\| < \|A^{-1}\|\frac{1}{\|A^{-1}\|} = 1. \tag{14.2}$$

Nach Lemma 14.7 ist also die Matrix $I + A^{-1}(B - A)$ invertierbar und wir bekommen aus (14.1), dass auch B invertierbar ist mit

$$B^{-1} = \big(I + A^{-1}(B - A)\big)^{-1}A^{-1}.$$

Damit ist der erste Teil des Lemmas erledigt und wir müssen noch die Stetigkeit der Inversionabbildung zeigen. Dazu sei $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{K})$ und $B \in U_\varepsilon(A)$ wie oben. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\mathrm{inv}(A) - \mathrm{inv}(B)\| &= \|A^{-1} - B^{-1}\| = \big\|A^{-1}(B - A)B^{-1}\big\| \\ &\leq \|A^{-1}\|\|B - A\|\|B^{-1}\| \\ &= \|A^{-1}\|\|B - A\|\|B^{-1} - A^{-1} + A^{-1}\| \\ &\leq \|A^{-1}\|\|B - A\|\big(\|B^{-1} - A^{-1}\| + \|A^{-1}\|\big) \\ &= \|A^{-1}\|\|B - A\|\|\mathrm{inv}(A) - \mathrm{inv}(B)\| + \|A^{-1}\|^2\|B - A\|. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\big(1 - \|A^{-1}\|\|B - A\|\big)\|\mathrm{inv}(A) - \mathrm{inv}(B)\| \leq \|A^{-1}\|^2\|B - A\|.$$

Nun haben wir schon in (14.2) festgestellt, dass $\|A^{-1}\|\|B - A\| < 1$ gilt. Also ist $1 - \|A^{-1}\|\|B - A\| > 0$ und wir erhalten

$$\|\mathrm{inv}(A) - \mathrm{inv}(B)\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2\|B - A\|}{1 - \|A^{-1}\|\|B - A\|}.$$

Dieser Bruch geht nun für $B \to A$ gegen $0/1 = 0$, also ist

$$\lim_{B\to A} \mathrm{inv}(B) = \mathrm{inv}(A)$$

und das bedeutet gerade Stetigkeit von inv in A. □

Beweis von Satz 14.5. Die Hauptarbeit in diesem Beweis wird es sein, die Aussage in dem Spezialfall

$$x_0 = 0, \quad f(x_0) = f(0) = 0 \quad \text{und} \quad Df(x_0) = Df(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} \tag{14.3}$$

zu zeigen. Wir unterteilen diese Herausforderung in mehrere Teile.

Ouvertüre:

Unsere Aufgabe ist es für jedes gegebene y nahe bei 0 ein x nahe bei 0 zu finden, das die Gleichung $f(x) = y$ löst. Dazu betrachten wir für jedes $y \in \mathbb{R}^d$ die Funktion

$$\varphi_y : \begin{cases} G & \to \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto y + x - f(x). \end{cases}$$

Dann ist

$$y = f(x) \iff \varphi_y(x) = x \iff x \text{ Fixpunkt von } \varphi_y. \tag{14.4}$$

Unser Problem lässt sich auf diese Weise als Fixpunktproblem formulieren und wir wollen dieses mit dem Banach'schen Fixpunktsatz angehen. Dazu müssen wir zeigen, dass φ_y auf einem geeigneten vollständigen metrischen Raum eine strikte Kontraktion ist. Dazu statten wir $\mathbb{R}^d$ mit der ∞-Norm aus und verstehen alle vorkommenden Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ als metrische Räume mit der durch $\|\cdot\|_\infty$ induzierten Metrik, vgl. Satz 1.12(b).

1. Akt: $\exists \varrho > 0 : \varphi_y : \overline{U_{2\varrho}(0)} \to \overline{U_{2\varrho}(0)}$ ist strikte Kontraktion für alle $y \in U_\varrho(0)$.

Die Abbildung φ_y ist für jedes y nach Voraussetzung stetig differenzierbar auf G mit

$$D\varphi_y(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} - Df(x), \qquad x \in G.$$

Man beachte, dass diese Ableitung unabhängig von y ist, es gilt also $D\varphi_y(x) = D\varphi_0(x)$ für alle $x \in G$ und alle $y \in \mathbb{R}^d$. Außerdem ist wegen (14.3)

$$D\varphi_y(0) = D\varphi_0(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} - Df(0) = 0, \qquad y \in \mathbb{R}^d.$$

Die Funktion $D\varphi_0$, und damit auch J_{φ_0}, sind auf G nach Voraussetzung stetig, also gibt es ein $\varrho > 0$ mit $U_{3\varrho}(0) \subseteq G$ und

$$\|J_{\varphi_y}(x)\|_{ZS} = \|J_{\varphi_0}(x)\|_{ZS} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } x \in U_{3\varrho}(0) \text{ und alle } y \in \mathbb{R}^d. \tag{14.5}$$

Nun liefert der Schrankensatz 11.8, insbesondere (11.3), für alle $x_1, x_2 \in U_{3\varrho}(0)$ und alle $y \in \mathbb{R}^d$

$$\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|_\infty. \tag{14.6}$$

Insbesondere gilt das für alle $x_1, x_2 \in \overline{U_{2\varrho}(0)}$. Um den ersten Akt zu beenden müssen wir nun noch zeigen, dass für alle $y \in U_\varrho(0)$ gilt $\varphi_y(\overline{U_{2\varrho}(0)}) \subseteq \overline{U_{2\varrho}(0)}$. Sei also $y \in U_\varrho(0)$ und $x \in \overline{U_{2\varrho}(0)}$. Dann gilt mit Hilfe von (14.6) und der Definition von φ_y

$$\begin{aligned} \|\varphi_y(x)\|_\infty &\le \|\varphi_y(x) - \varphi_y(0)\|_\infty + \|\varphi_y(0)\|_\infty \\ &\le \frac{1}{2}\|x - 0\|_\infty + \|y - f(0)\|_\infty = \frac{1}{2}\|x\|_\infty + \|y\|_\infty \\ &< \frac{1}{2} \cdot 2\varrho + \varrho = 2\varrho. \end{aligned} \tag{14.7}$$

Also ist $\varphi_y(x) \in \overline{U_{2\varrho}(0)}$.

2. Akt: Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes.

Die Menge $\overline{U_{2\varrho}(0)}$ ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^d$, also nach Heine-Borel 4.9 kompakt in $\mathbb{R}^d$. Satz 4.7 liefert dann, dass der metrische Raum $\overline{U_{2\varrho}(0)}$ vollständig ist. Damit sind für jedes $y \in U_\varrho(0)$ für die Funktionen φ_y die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes 3.13 erfüllt. Also gibt es für jedes $y \in U_\varrho(0)$ genau ein $x \in \overline{U_{2\varrho}(0)}$ mit $\varphi_y(x) = x$, d. h. mit $f(x) = y$, vgl. (14.4). Tatsächlich haben wir nach (14.7) für jedes solchermaßen gefundene x

$$\|x\|_\infty = \|\varphi_y(x)\|_\infty < 2\varrho,$$

also ist sogar jeweils $x \in U_{2\varrho}(0)$.
Zusammen haben wir also nun als Ergebnis für ein geeignetes $\varrho > 0$:

Für alle $y \in U_\varrho(0)$ existiert genau ein $x \in U_{2\varrho}(0)$ mit $f(x) = y$.

3. Akt: Definition von U, V und $\hat{f}$.

Wir setzen nun

$$V := U_\varrho(0), \qquad U := f^{-1}(V) \cap U_{2\varrho}(0).$$

Dann gilt $U \subseteq U_{2\varrho}(0) \subseteq G$ nach der Wahl von ϱ. Desweiteren sind U und V offene Mengen, es gilt offensichtlich $0 \in V$ und wegen $f(0) = 0$ ist auch $0 \in f^{-1}(V)$ und damit $0 \in U$. Also ist $U \subseteq G$ eine offene Umgebung von 0 und V eine offene Umgebung von $0 = f(0)$. Schließlich besagen unsere Ergebnisse aus dem 2. Akt, dass $\hat{f} := f|_U : U \to V$ bijektiv ist. Man beachte dabei, dass für jedes $y \in V$ das zugehörige $x \in U_{2\varrho}(0)$ aus dem 2. Akt wegen $f(x) = y \in V$ automatisch in $f^{-1}(V)$ und damit in U liegt.
Uns verbleibt nun „nur noch" zu zeigen, dass $\hat{f}^{-1} : V \to U$ auf V stetig differenzierbar ist. Wir fangen mit kleineren Brötchen an.

4. Akt: $\hat{f}^{-1} : V \to U$ ist Lipschitz-stetig.

Es seien $y_1, y_2 \in V$. Dann gilt wegen $\varphi_0(x) = x - f(x)$, $x \in G$, für $x_1 := \hat{f}^{-1}(y_1)$ und $x_2 := \hat{f}^{-1}(y_2)$

$$\left\|\hat{f}^{-1}(y_1) - \hat{f}^{-1}(y_2)\right\|_\infty = \|x_1 - x_2\|_\infty = \left\|\varphi_0(x_1) + f(x_1) - \varphi_0(x_2) - f(x_2)\right\|_\infty.$$

Da x_1 und x_2 in U sind, gilt $f(x_1) = \hat{f}(x_1) = \hat{f}(\hat{f}^{-1}(y_1)) = y_1$ und genauso $f(x_2) = y_2$. Damit haben wir unter weiterer Verwendung von (14.6)

$$\begin{aligned}\big\|\hat{f}^{-1}(y_1) - \hat{f}^{-1}(y_2)\big\|_\infty &\leq \big\|\varphi_0(x_1) - \varphi_0(x_2)\big\|_\infty + \|y_1 - y_2\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|_\infty + \|y_1 - y_2\|_\infty \\ &= \frac{1}{2}\big\|\hat{f}^{-1}(y_1) - \hat{f}^{-1}(y_2)\big\|_\infty + \|y_1 - y_2\|_\infty.\end{aligned}$$

Umstellen dieser Ungleichung liefert mit

$$\frac{1}{2}\big\|\hat{f}^{-1}(y_1) - \hat{f}^{-1}(y_2)\big\|_\infty \leq \|y_1 - y_2\|_\infty, \text{ d. h. } \big\|\hat{f}^{-1}(y_1) - \hat{f}^{-1}(y_2)\big\|_\infty \leq 2\|y_1 - y_2\|_\infty$$

die gewünschte Lipschitz-Stetigkeit.

5. Akt: Für alle $x \in U$ ist $Df(x)$ invertierbar.

Wir zeigen, dass $\ker(Df(x)) = \{0\}$ ist. Sei also $x \in U$ und $v \in \ker(Df(x))$. Wegen $f(x) = x - \varphi_0(x)$ ist $Df(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} - D\varphi_0(x)$ und damit gilt

$$0 = J_f(x)v = v - J_{\varphi_0}(x)v, \quad \text{d. h.} \quad v = J_{\varphi_0}(x)v.$$

Damit ist dank (14.5)

$$\|v\|_\infty = \|J_{\varphi_0}(x)v\|_\infty \leq \|J_{\varphi_0}(x)\|_{ZS}\|v\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|v\|_\infty$$

und wir haben $\|v\|_\infty/2 \leq 0$, also $\|v\|_\infty \leq 0$ und damit schließlich $v = 0$.
Nach diesen Vorbereitungen können wir uns nun der Differenzierbarkeit von $\hat{f}^{-1}$ widmen.

6. Akt: $\hat{f}^{-1}$ ist stetig differenzierbar auf V.

Sei $y \in V$ und $k \in \mathbb{R}^d$ so, dass $y + k \in V$. Dann ist $x := \hat{f}^{-1}(y) \in U$ und mit $h_k := \hat{f}^{-1}(y + k) - \hat{f}^{-1}(y)$ gilt

$$f(x) + k = y + k = \hat{f}\big(\hat{f}^{-1}(y + k)\big) = f\big(h_k + \hat{f}^{-1}(y)\big) = f(x + h_k).$$

Das liefert dank der Differenzierbarkeit von f in x

$$k = f(x + h_k) - f(x) = Df(x)h_k + r(h_k) \quad \text{mit} \quad \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{\|h\|_\infty} = 0. \tag{14.8}$$

Nun stützen wir uns auf den 5. Akt und erhalten mit den bisherigen Überlegungen

$$\begin{aligned}\hat{f}^{-1}(y + k) - \hat{f}^{-1}(y) = h_k &= h_k + \big(Df(x)\big)^{-1}k - \big(Df(x)\big)^{-1}k \\ &= h_k + \big(Df(x)\big)^{-1}k - \big(Df(x)\big)^{-1}\big(Df(x)h_k + r(h_k)\big) \\ &= h_k + \big(Df(x)\big)^{-1}k - h_k - \big(Df(x)\big)^{-1}r(h_k) \\ &= \big(Df(x)\big)^{-1}k - \big(Df(x)\big)^{-1}r(h_k).\end{aligned}$$

Unser nächstes Ziel ist nun zu zeigen, dass $\lim_{k\to 0}(Df(x))^{-1}r(h_k)/\|k\|_\infty = 0$ ist. Wenn das erreicht ist, so liefert das die Differenzierbarkeit von $\hat{f}^{-1}$ in y.
Es ist nach den Ergebnissen des 4. Akts

$$\begin{aligned}\|h_k\|_\infty = \|x + h_k - x\|_\infty &= \big\|\hat{f}^{-1}\big(f(x+h_k)\big) - \hat{f}^{-1}\big(f(x)\big)\big\|_\infty \\ &\le 2\big\|f(x+h_k) - f(x)\big\|_\infty = 2\|k\|_\infty\end{aligned}$$

und wir bekommen zum Einen, dass $\lim_{k\to 0} h_k = 0$ ist, und zum Anderen mit Hilfe von (14.8)

$$0 \le \frac{\|r(h_k)\|_\infty}{\|k\|_\infty} \le \frac{2\|r(h_k)\|_\infty}{\|h_k\|_\infty} \longrightarrow 0 \quad (k \to 0).$$

Da die lineare Abbildung $(Df(x))^{-1}$ auf $\mathbb{R}^d$ stetig ist, liefert das

$$\lim_{k\to 0}\big(Df(x)\big)^{-1}\frac{r(h_k)}{\|k\|_\infty} = \big(Df(x)\big)^{-1}\lim_{k\to 0}\frac{r(h_k)}{\|k\|_\infty} = \big(Df(x)\big)^{-1}0 = 0.$$

Es ist also $\hat{f}^{-1}$ in y differenzierbar und es gilt

$$D\hat{f}^{-1}(y) = \big(Df(x)\big)^{-1} = \big(Df(\hat{f}^{-1}(y))\big)^{-1} = \operatorname{inv}\big(Df(\hat{f}^{-1}(y))\big).$$

Nun ist $\hat{f}^{-1}$ stetig nach Akt 4, Df stetig nach Voraussetzung und die Matrixinversion stetig nach Lemma 14.8. Damit ist $y \mapsto D\hat{f}^{-1}(y)$ als Verkettung von stetigen Funktionen stetig, d. h. $\hat{f}^{-1}$ ist auf V stetig differenzierbar.

Finale: Vom Spezialfall zum allgmeneinen Fall.

Wir haben den Satz für die Situation in (14.3) gezeigt und machen uns nun daran, diese Einschränkungen wieder los zu werden. Es sei f nun also irgendeine Funktion, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Dann betrachten wir auf $\tilde{G} := G - x_0 := \{z - x_0 : z \in G\}$ die Funktion $g : \tilde{G} \to \mathbb{R}^d$ mit

$$g(x) := \big(Df(x_0)\big)^{-1}\big(f(x+x_0) - f(x_0)\big).$$

Dann gilt erstens $g(0) = (Df(x_0))^{-1}(f(x_0) - f(x_0)) = 0$. Zweitens haben wir $Dg(x) = (Df(x_0))^{-1}Df(x+x_0)$ und damit $Dg(0) = (Df(x_0))^{-1}Df(x_0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}$.
Wir können also auf unsere Funktion g das bisher Bewiesene anwenden.
Das liefert offene Umgebungen $\tilde{U}, \tilde{V}$ von 0 in $\mathbb{R}^d$, für die $\hat{g} = g|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ ein Diffeomorphismus ist. Außerdem gilt $D\hat{g}^{-1}(0) = (Dg(0))^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}$.
Wir setzen nun

$$U := \tilde{U} + x_0, \qquad V := Df(x_0)(\tilde{V}) + f(x_0).$$

Dann ist U eine offene Umgebung von x_0 und, da $Df(x_0)(\tilde{V}) = (Df(x_0)^{-1})^{-1}(\tilde{V})$ das Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung ist, ist V eine offene

Umgebung von $f(x_0)$. Wir zeigen nun, dass $\hat{f} = f|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.
Zunächst steckt die stetige Differenzierbarkeit von $\hat{f}$ direkt in der Voraussetzung. Zum Nachweis der Bijektivität sei $y \in V$. Dann gibt es nach Definition von V und dank der Bijektivität von $Df(x_0)$ genau ein $\tilde{y} \in \tilde{V}$ mit $y = Df(x_0))\tilde{y} + f(x_0)$. Weiter gibt es, da $\hat{g} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ ein Diffeomorphismus ist, genau ein $\tilde{x} \in \tilde{U}$ mit $\hat{g}(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Das bedeutet ausgeschrieben

$$\big(Df(x_0)\big)^{-1}\big(f(\tilde{x} + x_0) - f(x_0)\big) = g(\tilde{x}) = \tilde{y} = \big(Df(x_0)\big)^{-1}(y - f(x_0)).$$

Da $(Df(x_0))^{-1}$ invertierbar ist, haben wir also ein eindeutiges $\tilde{x} \in \tilde{U}$ mit

$$f(\tilde{x} + x_0) - f(x_0) = y - f(x_0), \quad \text{d. h.} \quad f(\tilde{x} + x_0) = y.$$

Damit ist $x := \tilde{x} + x_0 \in U$ ein eindeutiges Element aus U mit $f(x) = y$ und wir haben gezeigt, dass $\hat{f} : U \to V$ bijektiv ist.
Obige Rechnung zeigt außerdem, dass

$$\hat{f}^{-1}(y) = x = \tilde{x} + x_0 = \hat{g}^{-1}(\tilde{y}) + x_0 = \hat{g}^{-1}\Big(\big(Df(x_0)\big)^{-1}(y - f(x_0))\Big) + x_0$$

und aus dieser Darstellung können wir nun ablesen, dass mit $\hat{g}^{-1}$ auch $\hat{f}^{-1}$ differenzierbar ist und die Ableitungsfunktion

$$y \mapsto D\hat{f}^{-1}(y) = D\hat{g}^{-1}\Big(\big(Df(x_0)\big)^{-1}(y - f(x_0))\Big)\big(Df(x_0)\big)^{-1}$$

ist stetig. □

Wenn wir nun so viel Arbeit investiert haben, wollen wir natürlich auch ein bisschen Ertrag haben. Hier kommen zwei direkte Folgerungen aus diesem Satz und auch das nächste große Resultat dieser Vorlesung, der Satz über implizite Funktionen, wird im wesentlichen aus dem Satz über die Umkehrfunktion folgen. Die wahre Stärke all dieser Resulate kann allerdings in dieser Veranstaltung noch nicht präsentiert werden.

Korollar 14.9. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(G; \mathbb{R}^d)$ so, dass $Df(x)$ in allen $x \in G$ invertierbar ist. Dann ist $f(G)$ offen in $\mathbb{R}^d$.*

Die Offenheit von $f(G)$ folgt nicht automatisch aus der Stetigkeit von f! Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen sind immer offen, aber nicht unbedingt Bilder. Betrachten Sie z.B. das Bild von $(-1, 1)$ unter der reellen Funktion $f(x) = x^2$.

Beweis. Sei $y \in f(G)$ und $x \in G$ ein Punkt mit $f(x) = y$. Dann sagt der Satz über die Umkehrfunktion 14.5, dass es offene Umgebungen V von y und $U \subseteq G$ von x gibt, so dass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist. Also ist $y \in V = f(U) \subseteq f(G)$ und V ist offen, d. h. y ist ein innerer Punkt von $f(G)$. □

Korollar 14.10. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(G;\mathbb{R}^d)$. Ist f injektiv und $Df(x)$ für alle $x \in G$ invertierbar, so ist $f : G \to f(G)$ ein Diffeomorphismus.*

Beweis. Die Funktion $f : G \to f(G)$ ist nach Voraussetzung bijektiv und stetig differenzierbar. Die stetige Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion folgt aus Theorem 14.5. □

15. Satz über implizite Funktionen

Wir wenden uns nun dem Satz über implizite Funktionen zu, in dem es um unterbestimmte Gleichungssysteme geht. Es sei also $G \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $f : G \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion mit $p < d$. Wir wollen nun für $w \in \mathbb{R}^p$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $f(u) = w$ beschreiben. Dazu beschränken wir uns auf den Fall $w = 0$, denn für beliebiges w kann man sonst einfach die Funktion $f - w$ betrachten.
Wir setzen $k := d - p$ und identifizieren $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{k+p} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$. In diesem Sinne notieren wir ein $u \in G$ als

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{k+p}) = (x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_p) =: (x, y).$$

Der einfachste Fall ist natürlich der eines linearen Gleichungssystems. Um diese Notation zu durchschauen und um zu demonstrieren, was das Ziel dieses Abschnitts ist, betrachten wir als Beispiel das folgende LGS $f(x, y) = 0$ mit $d = 4$ und $p = k = 2$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Um die Lösungsmenge zu beschreiben kann man nun z.B. x_1, x_2 als freie Parameter wählen und erhält

$$y_2 = -x_2, \quad y_1 = x_1 - x_2$$

als Parametrisierung der Lösungsmenge. Dabei drückt man die restlichen Variablen y_1 und y_2 durch die freien Variablen x_1 und x_2 aus, d. h. man gibt eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, so dass die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^4$ mit $y = g(x)$ genau die Lösungen des LGS sind. Es gilt also dann $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. In diesem Fall wäre $g(x_1, x_2) = (-x_2, x_1 - x_2)$.
Wir wollen nun untersuchen unter welchen Voraussetzungen eine solche Parametrisierung der Lösungsmenge nach geeigneten freien Variablen für allgemeine nichtlineare überbestimmte Gleichungssysteme möglich ist, wann es also eine solche Funktion g gibt. Da diese durch die Gleichung $f(x, g(x)) = 0$ bestimmt wird, sagt man dann die Funkton g ist *implizit definiert*.
Für allgemeine Gleichungssysteme ist es nicht zu erwarten, dass diese Gleichung explizit auflösbar ist, d. h. dass wir wie im obigen linearen System eine explizite Formel für g erhalten. Desweiteren können wir hier, genau wie beim Satz über

die Umkehrfunktion, nur ein lokales Resultat erwarten, d. h. eine Bedingung an f unter der, in der Nähe einer gegebenen Lösung (a, b) (d. h. $f(a, b) = 0$) eine solche auflösende Funktion g existiert.
Wir führen dazu zunächst für die Belange der folgenden Betrachtungen ein paar abkürzende Notationen ein.

Definition 15.1. *Es seien $k, p \in \mathbb{N}$.*

(a) Für $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^p$ bezeichne

$$(x, y) := (x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^{k+p}.$$

(b) Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^{k+p}$ offen und $f \in C^1(G; \mathbb{R}^p)$. Für $(a, b) \in G$ sei

$$D_x f(a,b) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a,b) & \partial_2 f_1(a,b) & \ldots & \partial_k f_1(a,b) \\ \partial_1 f_2(a,b) & \partial_2 f_2(a,b) & \ldots & \partial_k f_2(a,b) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_p(a,b) & \partial_2 f_p(a,b) & \ldots & \partial_k f_p(a,b) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times k},$$

$$D_y f(a,b) = \begin{pmatrix} \partial_{k+1} f_1(a,b) & \partial_{k+2} f_1(a,b) & \ldots & \partial_{k+p} f_1(a,b) \\ \partial_{k+1} f_2(a,b) & \partial_{k+2} f_2(a,b) & \ldots & \partial_{k+p} f_2(a,b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{k+1} f_p(a,b) & \partial_{k+2} f_p(a,b) & \ldots & \partial_{k+p} f_p(a,b) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}.$$

Theorem 15.2 (Satz über implizite Funktionen)**.** *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar und $(a, b) \in G$ mit $f(a, b) = 0$ und* $\det(D_y f(a, b)) \neq 0$. *Dann existieren offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^k$ von a und $V \subseteq \mathbb{R}^p$ von b mit $U \times V \subseteq G$, sowie eine eindeutige stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$, für die gilt*

$$f(x, y) = 0 \iff y = g(x) \quad \text{für alle } x \in U \text{ und } y \in V.$$

Insbesondere ist $g(a) = b$.
Schließlich gilt

$$Dg(x) = -\big(D_y f(x, g(x))\big)^{-1} D_x f(x, g(x)) \qquad \text{für alle } x \in U.$$

Beweis. Wir führen dieses Theorem auf den Umkehrsatz 14.5 zurück. Dazu betrachten wir die Funktion $F : G \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$ mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}, \qquad (x, y) \in G.$$

Dann ist F nach Voraussetzung stetig differenzierbar und es ist für alle $(x, y) \in G$

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} I_{\mathbb{R}^k} & 0 \\ D_x f(x, y) & D_y f(x, y) \end{pmatrix}. \tag{15.1}$$

Um den Umkehrsatz 14.5 in einer Umgebung von (a, b) auf F anwenden zu können, müssen wir nachweisen, dass $DF(a, b)$ invertierbar ist. Das zeigen wir, indem wir nachweisen, dass der Kern dieser linearen Abbildung trivial ist. Sei also $(h, k) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$ mit $DF(a, b)\left(\begin{smallmatrix} h \\ k \end{smallmatrix}\right) = 0$. Dann ist

$$0 = \begin{pmatrix} I_{\mathbb{R}^k} & 0 \\ D_x f(a,b) & D_y f(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ D_x f(a,b)h + D_y f(a,b)k \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Zeile folgt sofort $h = 0$, also reduziert sich die zweite Zeile zu $D_y f(a, b)k = 0$. Nach Voraussetzung ist aber die (quadratische!) Matrix $D_y f(a, b)$ invertierbar, also ist auch $k = 0$ und wir haben die benötigte Invertierbarkeit von $DF(a, b)$ nachgewiesen.
Der Umkehrsatz 14.5 liefert uns nun offene Umgebungen $\hat{U} \subseteq G$ von (a, b) und $\hat{V} \subseteq \mathbb{R}^{k+p}$ von $F(a, b) = (a, 0)$, so dass $\hat{F} := F|_{\hat{U}} : \hat{U} \to \hat{V}$ ein Diffeomorphismus ist. Für alle $(v, w) \in \hat{V}$ ist nach der Definition von F

$$(v,w) = \hat{F}\big(\hat{F}^{-1}(v,w)\big) = \big(\hat{F}_1^{-1}(v,w), \hat{F}_2^{-1}(v,w), \dots, \hat{F}_k^{-1}(v,w), f(\hat{F}^{-1}(v,w))\big),$$

also wirkt $\hat{F}^{-1}$ in den ersten k Koordinaten wie die Identität, d. h. wir haben $\hat{F}_j^{-1}(v, w) = v_j$ für alle $j = 1, 2, \dots, k$. Damit gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $\hat{g} : \hat{V} \to \mathbb{R}^p$ mit

$$\hat{F}^{-1}(v,w) = \big(v, \hat{g}(v,w)\big), \qquad (v,w) \in \hat{V}.$$

Diese Funktion $\hat{g}$ erfüllt nun für alle $(x, y) \in \hat{U}$

$$\begin{aligned} f(x,y) = 0 &\iff \hat{F}(x,y) = F(x,y) = (x,0) \\ &\iff (x,y) = \hat{F}^{-1}(x,0) = \big(x, \hat{g}(x,0)\big) \iff y = \hat{g}(x,0). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\hat{g}(a, 0) = b$, denn $(a, b) \in \hat{U}$ und $f(a, b) = 0$.
Ein Abgleich mit der angestrebten Behauptung im Theorem zeigt schnell, dass die gesuchte Funktion g durch $g(x) := \hat{g}(x, 0)$ gegeben ist. Diese ist nach Konstruktion stetig differenzierbar solange $(x, 0) \in \hat{V}$ liegt und sie erfüllt auch $f(x, y) = 0 \iff y = g(x)$ für alle $(x, y) \in \hat{U}$. Außerdem ist $g(a) = b$.
Zu unserem Glück fehlen uns also nur noch die geeigneten offenen Umgebungen U von a und V von b, so dass $g(U) \subseteq V$ ist, $U \times V \subseteq \hat{U}$ gilt und $(x, 0) \in \hat{V}$ für alle $x \in U$ erfüllt ist.
Wir wissen, dass $\hat{U}$ eine Umgebung von (a, b) ist. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon((a, b)) \subseteq \hat{U}$. Wir nehmen uns nun die Freiheit diese Umgebung bezüglich der ∞-Norm zu nehmen. Das hat den Vorteil, dass in diesem Fall einfach

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(a,b) &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{k+p} : \|(x,y) - (a,b)\|_\infty < \varepsilon\big\} \\ &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{k+p} : \max\{\max_{j=1}^{k} |x_j - a_j|, \max_{n=1}^{p} |y_n - b_n|\} < \varepsilon\big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{k+p} : \|x-a\|_\infty < \varepsilon \text{ und } \|y-b\|_\infty < \varepsilon\big\} \\ &= U_\varepsilon(a) \times U_\varepsilon(b) \end{aligned}$$

gilt.
Wir setzen zunächst $V := U_\varepsilon(b)$. Dank der Stetigkeit von g in a und wegen $g(a) = b$ gibt es nun ein $\delta \in (0,\varepsilon)$, für das $g(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(b)$ ist. Außerdem können wir δ so klein wählen, dass für alle $x \in U := U_\delta(a)$ auch $(x,0) \in \hat{V}$ gilt, denn $(a,0) \in \hat{V}$ und $\hat{V}$ ist offen.
Mit dieser Wahl von U und V ist dann außerdem $g(U) = g(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(b) = V$ und

$$U \times V = U_\delta(a) \times U_\varepsilon(b) \subseteq U_\varepsilon(a) \times U_\varepsilon(b) = U_\varepsilon((a,b)) \subseteq \hat{U}$$

und damit passt alles zusammen.
Schließlich müssen wir noch die im Theorem angegebene Formel für die Ableitung von g nachrechnen. Dazu differenzieren wir für alle $x \in U$ die Gleichung $f(x,g(x)) = 0$. Das liefert mit viel Kettenregel

$$0 = D_x f(x,g(x)) \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k} + D_y f(x,g(x)) \cdot Dg(x).$$

Es ist $(x,g(x)) \in U \times V \subseteq \hat{U}$. Also ist F in einer Umgebung von $(x,g(x))$ umkehrbar und damit $DF(x,g(x))$ invertierbar. Nach (15.1) impliziert das aber, dass $D_y f(x,g(x))$ invertierbar ist. Wir können also obige Gleichung nach $Dg(x)$ auflösen und erhalten

$$D_y f(x,g(x)) \cdot Dg(x) = -D_x f(x,g(x))$$

und damit

$$Dg(x) = -\big(D_y f(x,g(x))\big)^{-1} \cdot D_x f(x,g(x)). \qquad \square$$

Beispiel 15.3. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x^3 + y_1^3 + y_2^3 &= 7 \\ xy_1 + y_1y_2 + xy_2 &= -2. \end{cases} \tag{15.2}$$

Eine Lösung dieses Systems ist durch $(a,b_1,b_2) = (2,-1,0)$ gegeben und wir interessieren uns lokal in einer Umgebung U um den Punkt $a = 2$ für eine Parametrisierung der Lösungsmenge als

$$\big\{(x,y_1,y_2) \in \mathbb{R}^3 : x \in U \text{ und } (x,y_1,y_2) \text{ löst } (15.2)\big\} = \big\{(x,g(x)) : x \in U\big\} \tag{15.3}$$

durch eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}^2$. D. h. wir untersuchen, ob sich das System lokal um $a = 2$ nach dem Parameter x auflösen lässt.
Um genau ins Fahrwasser des Satzes über implizite Funktionen 15.2 zu kommen, müssen wir die Gleichungen in (15.2) noch so umformen, dass auf der rechten Seite Null steht. Deshalb definieren wir $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} f_1(x,y_1,y_2) \\ f_2(x,y_1,y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7 \\ xy_1 + y_1y_2 + xy_2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Da f offensichtlich stetig differenzierbar ist, bleibt als Voraussetzung noch sicherzustellen, dass $D_y f(a, b_1, b_2) = D_y f(2, -1, 0)$ invertierbar ist. Tatsächlich ist

$$D_y f(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 3y_1^2 & 3y_2^2 \\ x + y_2 & y_1 + x \end{pmatrix}, \qquad (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2,$$

und damit

$$D_y f(2, -1, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar.
Der Satz über implizite Funktionen 15.2 liefert uns also eine offene Umgebung U von $a = 2$, eine offene Umgebung V von $(b_1, b_2) = (-1, 0)$ und die Existenz unserer Auflösungsfunktion $g : U \to V$ mit $g(2) = (-1, 0)$ und $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$, d. h. wir haben (15.3) erreicht und es sind nahe bei $(2, -1, 0)$ genau $y_1 = g_1(x)$ und $y_2 = g_2(x)$ die Lösungen von (15.2) bei gegebenem $x \in U$.
Nun hätte man g natürlich gerne konkret, das ist aber, wie schon erwähnt im Allgemeinen ein hoffnungsloses Unterfangen, mit dem wir uns hier auch nicht herumplagen wollen. Trotzdem können wir mit wenig Aufwand noch einiges über g herausbringen, denn der Satz über implizite Funktionen macht ja noch eine Aussage über die Ableitung von g. Diese liefert

$$\begin{aligned} g'(2) = \begin{pmatrix} g_1'(2) \\ g_2'(2) \end{pmatrix} &= -\big(D_y f(2, -1, 0)\big)^{-1} D_x f(2, -1, 0) \\ &= -\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3x^2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\Big|_{(x,y_1,y_2)=(2,-1,0)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition 15.4. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^p)$ und $c \in \mathbb{R}^p$. Dann heißt*

$$N_f(c) := \{x \in G : f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\})$$

Niveaumenge *von f zur Höhe c. Im Fall von $d = 2$ und $p = 1$ sagt man auch* Niveaulinie *oder* Höhenlinie.

Bemerkung 15.5. (a) Mit dem Begriff Höhenlinie ist ein bisschen Vorsicht angeraten, denn im Allgemeinen ist diese Menge nicht unbedingt eine Linie. Ein krasses Beispiel ist die Funktion, die konstant c ist, für die dann die Niveaumenge zur Höhe c ganz G ist und alle Niveaumengen zu anderen Höhen einfach leer sind.

Aber es gibt auch weniger banale Beispiele. So ergibt sich für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 - y^2$ für die Höhenlinie zur Höhe Null, dass diese wegen

$$N_f(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$$

die Vereinigung der beiden Winkelhalbierenden mit $x = y$ und $x = -y$ ist.

(b) Der Satz über implizite Funktionen 15.2 hilft uns Situationen zu beschreiben, in denen die Höhenlinie wirklich eine Linie ist. Es sei dazu $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C^1(G, \mathbb{R})$. Nehmen wir nun ein $c \in \mathbb{R}$, für das $N_f(c) \neq \emptyset$ gilt und ist $(a, b) \in N_f(c)$, so ist die Frage ob $N_f(c)$, also die Menge aller (x, y) mit $f(x, y) = c$, sich lokal um (a, b) als Linie, d. h. als Graph einer ausreichend glatten Funktion beschreiben lässt, genau die Sorte Frage, für die der Satz über implizite Funktionen gemacht ist.

Dieser sagt nun: Ist $D_y(f(a, b) - c) = \partial_2 f(a, b) \neq 0$, so existieren Umgebungen U von a und V von b, so dass

$$\begin{aligned} N_f(c) \cap (U \times V) &= \{(x, y) \in U \times V : f(x, y) - c = 0\} \\ &= \{(x, g(x)) : x \in U\} \end{aligned}$$

ist mit einer stetig differenzierbaren Funktion $g : U \to V$. D. h. aber gerade, dass in $U \times V$, also nahe bei (a, b) die Höhenlinie von f durch den Graph einer stetig differenzierbaren reellwertigen Funktion in einer Variablen gegeben ist, er ist also eine Linie.

Gleiches gilt im Falle von $\partial_1 f(a, b) \neq 0$, denn dann kann man in obiger Überlegung die Rollen von x und y vertauschen und bekommt eine Auflösung der Höhenlinie mit $x = \hat{g}(y)$ in einer Umgebung von b.

Zusammen bekommen wir, dass die Höhenlinie einer stetig differenzierbaren Funktion in der Nähe jedes Punktes (a, b) mit $\nabla f(a, b) \neq 0$ eine Linie ist.

Tatsächlich ist bei den Beispielen in Teil (a), in denen wir lokal keine Linie haben, der Gradient der entsprechenden Funktion an dieser Stelle jeweils Null.

16. Untermannigfaltigkeiten

In Bemerkung 15.5 haben wir uns mit „schönen“ und „unschönen“ Höhenlinien in $\mathbb{R}^2$ beschäftigt. Wir wollen diese Betrachtungen nun ausweiten und in beliebiger Dimension d gebogene Linien, Flächen, Hyperflächen u.ä. anschauen. Dabei wollen wir weiterhin nur solche Gebilde zulassen, die lokal wie ein Stückchen verbogener $\mathbb{R}^k$ für ein $k \leq d$ aussehen. Das führt auf den folgenden Begriff.

Definition 16.1. *Es seien $d, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq d$. Ein $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^d$ ist eine* k-dimensionale (differenzierbare) Untermannigfaltigkeit *des $\mathbb{R}^d$, wenn es für jedes $a \in M$ eine offene Umgebung U von a in $\mathbb{R}^d$ und eine offene Teilmenge V von $\mathbb{R}^d$ gibt, sowie einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ mit*

$$\varphi(M \cap U) = V \cap \big(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\}\big).$$

Flapsig gesprochen ist eine k-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ also eine Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, die in einer Umgebung jeder ihrer Punkte diffeomorph so glattgezogen werden kann, dass sie dort wie ein Stückchen k-dimensionaler Raum aussieht. Damit sind 1-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeiten schöne Kurven, 2-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeiten schöne Flächen und $(d-1)$-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeiten schöne Hyperflächen in $\mathbb{R}^d$. Eine Visualisierung der Definition gibt Abbildung 16.1, vgl. auch Abbildung 16.2.
Dreht man in obiger Definition an der Glattheitsanforderung an φ, so kann man verschieden edle Formen von Untermannigfaltigkeiten unterscheiden. In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns ausschließlich mit dem oben definierten Fall und lassen deshalb den Zusatz „differenzierbar“ üblicherweise weg. Es ist aber immer eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit gemeint, wenn in diesem Skript nur Untermannigfaltigkeit steht.
Eine Untermannigfaltigkeit erhält man z.B., wenn man den Graph einer stetig differenzierbaren Funktion von $G \subseteq \mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^m$ anschaut. Diese ist d-dimensional und liegt in $\mathbb{R}^{d+m}$ In diesem Fall kann man sogar einen globalen Diffeomorphismus φ konstruieren, der für jedes a im Graph die Voraussetzungen von Definition 16.1 erfüllt. Das wollen wir im folgenden Satz zeigen.

Satz 16.2. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$ und*

$$\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in G\} \subseteq \mathbb{R}^{d+m}.$$

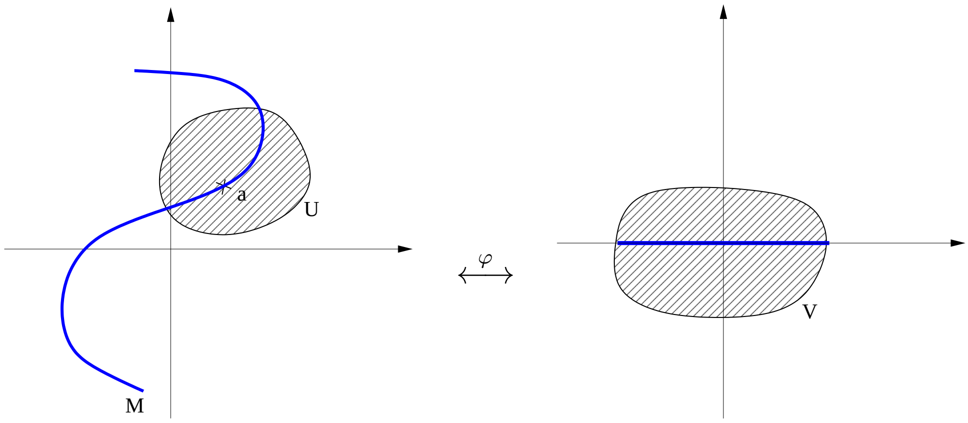

Abbildung 16.1.: Definition einer Untermannigfaltigkeit: In einer Umgebung von a lässt sich die eindimensionale Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^2$ zu einem geraden Stück $\mathbb{R}$ diffeomorph glattziehen.

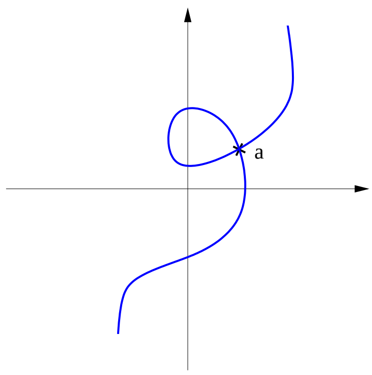

Abbildung 16.2.: Dies ist *keine* Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, denn diese Menge lässt sich in keiner Umgebung von a diffeomorph auf eine Strecke abbilden.

Dann gibt es für $U := G \times \mathbb{R}^m$ *einen Diffeomorphismus* $\varphi : U \to U$ *mit*

$$\varphi(\operatorname{graph}(f)) = U \cap \left(\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^m}\}\right).$$

Insbesondere ist $\operatorname{graph}(f)$ *eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^{d+m}$.

Beweis. Wir definieren $\varphi : U \to \mathbb{R}^{d+m}$ für $(x, y) \in U$ als $\varphi(x, y) = (x, y - f(x))$. Diese Funktion ist stetig differenzierbar auf U und es gilt $\varphi(U) \subseteq U$, denn für alle $(x, y) \in U = G \times \mathbb{R}^m$ ist

$$\varphi(x, y) = (x, y - f(x)) \in G \times \mathbb{R}^m = U.$$

Den Nachweis, dass $\varphi : U \to U$ bijektiv ist, führen wir nun, indem wir die Umkehrfunktion einfach angeben. Dazu definieren wir $\psi : U \to \mathbb{R}^{d+m}$ durch

$\psi(v,z) = (v, z+f(v))$. Mit dieser Wahl gilt für alle $(x,y),(v,z) \in U$

$$\begin{aligned}\psi\big(\varphi(x,y)\big) &= \psi\big(x, y-f(x)\big) = \big(x, y-f(x)+f(x)\big) = (x,y),\\ \varphi\big(\psi(v,z)\big) &= \varphi\big(v, z+f(v)\big) = \big(v, z+f(v)-f(v)\big) = (v,z).\end{aligned}$$

Schließlich sieht man an der Definition von $\varphi^{-1} = \psi$ sofort, dass auch diese Funktion stetig differenzierbar ist. Zusammen ist also $\varphi : U \to U$ ein Diffeomorphismus und es gilt

$$\begin{aligned}\varphi\big(\mathrm{graph}(f)\big) &= \big\{\varphi(x,y) : (x,y) \in \mathrm{graph}(f)\big\} = \big\{\varphi(x,y) : x \in G \text{ und } y = f(x)\big\}\\ &= \big\{\big(x, y-f(x)\big) : x \in G \text{ und } y = f(x)\big\} = \big\{(x,0) : x \in G\big\}\\ &= G \times \{0_{\mathbb{R}^m}\} = (G \times \mathbb{R}^m) \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^m}\}\big) = U \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^m}\}\big).\end{aligned}$$

Insbesondere gibt es damit für jedes $a \in \mathrm{graph}(f)$ eine offene Umgebung (nämlich U) und einen Diffeomorphismus auf U (nämlich φ) mit

$$\varphi\big(\mathrm{graph}(f) \cap U\big) = \varphi\big(\mathrm{graph}(f)\big) = U \cap \big(\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^m}\}\big).$$

Damit ist $\mathrm{graph}(f)$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{d+m}$. $\square$

Übungsaufgabe 16.3. (a) Zeigen Sie, dass jeder k-dimensionale affine Teilraum des $\mathbb{R}^d$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ ist.

(b) Es sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ und $O \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $M \cap O \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass dann auch $M \cap O$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ ist.

Für unsere angestrebten Betrachtungen, wann die Niveaumengen einer stetig differenzierbaren Funktion schöne Untermannigfaltigkeiten sind, ist es lohnend sich den einfachen Fall einer linearen Abbildung $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ anzuschauen. Die Niveaumenge $N_T(c) = T^{-1}(\{c\})$ für ein $c \in \mathbb{R}^m$ ist dann die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Tx = c$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass diese für surjektives T ein affiner Teilraum des $\mathbb{R}^d$ der Dimension $d-m$ ist.
Unser Ziel ist nun, wie oben schon angedeutet, eine Beschreibung dieser Niveaumengen für allgemeinere Funktionen. Dabei werden natürlich keine affinen Teilräume mehr herauskommen, aber wir können hoffen, dass für ein stetig differenzierbares $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ und geeignete $c \in \mathbb{R}^m$ die Menge $N_f(c) = f^{-1}(\{c\}) = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = c\}$ eine $(d-m)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ ist. Wir brauchen allerdings eine Bedingung an c, die die im Falle der linearen Abbildung gemachte Surjektivitätsvoraussetzung verallgemeinert. Diese wird uns das folgende Begriffspaar liefern.

Definition 16.4. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$.*

(a) Ein $x \in G$ wird regulärer Punkt *von f genannt, falls die lineare Abbildung $Df(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist.*

(b) *Ein $y \in \mathbb{R}^m$ heißt* regulärer Wert *von f, wenn jedes $x \in f^{-1}(\{y\})$ ein regulärer Punkt von f ist.*

Bemerkung 16.5. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Für die regulären Punkte und Werte von $f \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$ ergeben sich die folgenden Zusammenhänge direkt aus der Definition.

(a) Ist $y \in \mathbb{R}^m$ nicht im Bild von f enthalten, so ist y ein regulärer Wert, aber kein besonders spannender.

(b) Gilt $d < m$, so kann f keine regulären Punkte haben.

(c) Da man die Surjektivität einer linearen Abbildung am Rang erkennen kann, ist $x \in G$ genau dann ein regulärer Punkt von f, wenn $\operatorname{rang}(Df(x)) = m$ gilt.

    Für $m = 1$ bedeutet das gerade, dass $\nabla f(x) \neq 0$ sein muss.

(d) Aus dem letzten Punkt ergibt sich, dass y genau dann ein regulärer Wert von f ist, wenn $\operatorname{rang}(Df(x)) = m$ für jedes $x \in f^{-1}(\{y\})$ gilt.

    Im Fall $m = 1$ reduziert sich die Bedingung wieder darauf, dass $\nabla f(x) \neq 0$ für jedes $x \in f^{-1}(\{y\})$ gelten muss.

Wir können nun zeigen, dass die Niveaumengen zu Höhen, die einen regulären Wert der betrachteten Funktion darstellen, tatsächlich Untermannigfaltigkeiten sind.

Satz 16.6 (Satz vom regulären Wert)**.** *Es seien $d, m \in \mathbb{N}$ mit $d \geq m$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$. Ist $c \in f(G)$ ein regulärer Wert von f, so bildet $N_f(c) = f^{-1}(\{c\})$ eine $(d-m)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$.*

Beweis. Sei $a \in N_f(c)$. Nun ist nach der Definition einer Untermannigfaltigkeit unsere Aufgabe eine Umgebung U von a und einen Diffeomorphismus auf U zu finden, der $N_f(c) \cap U$ glattzieht.
Nach Voraussetzung ist a ein regulärer Punkt von f, womit wir wissen, dass die $\mathbb{R}^{m \times d}$-Matrix $Df(a)$ Rang m und damit m linear unabhängige Spalten hat. Wir bennenen die Koordinaten zu diesen m linear unabhängigen Spalten $y_1, y_2, \dots, y_m$ und die restlichen $x_1, x_2, \dots, x_{d-m}$.
Damit können wir nun die Funktion $\hat{f}(x, y) = f(x, y) - c$ für $(x, y) \in G$ betrachten und unser Ziel wird es sein, den Satz über implizite Funktionen 15.2 auf $\hat{f}$ anzuwenden. Dazu beobachten wir zunächst, das mit $(x_0, y_0) := a$ gilt $\hat{f}(x_0, y_0) = f(a) - c = 0$. Desweiteren hat nach der obigen Koordinatenwahl die $(m \times m)$-Matrix $D_y\hat{f}(a) = D_y f(a)$ Rang m, ist also invertierbar.
Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren damit offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^{d-m}$ von x_0 und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ von y_0 mit $U \times V \subseteq G$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$, so dass für alle $(x, y) \in U \times V$ gilt

$$\hat{f}(x, y) = 0 \iff y = g(x), \quad \text{d. h.} \quad f(x, y) = c \iff y = g(x).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{c\}) \cap (U \times V) &= \big\{(x,y) \in U \times V : f(x,y) = c\big\} \\ &= \big\{(x,y) \in U \times V : y = g(x)\big\} \\ &= \big\{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^{d-m} \times \mathbb{R}^m : x \in U\big\} = \operatorname{graph}(g). \end{aligned}$$

Nach Satz 16.2 gibt es nun zu der offenen Umgebung $W := U \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^d$ von a einen Diffeomorphismus $\hat{\varphi} : W \to W$ mit

$$\hat{\varphi}(\operatorname{graph}(g)) = W \cap \big(\mathbb{R}^{d-m} \times \{0_{\mathbb{R}^m}\}\big).$$

Damit ist schließlich $\varphi := \hat{\varphi}|_{U \times V} : U \times V \to \hat{\varphi}(U \times V)$ ein Diffeomorphismus auf einer Umgebung von a, und da $\operatorname{graph}(g) \subseteq U \times V$ gilt, haben wir

$$\begin{aligned} \varphi\big(f^{-1}(\{c\}) \cap (U \times V)\big) &= \varphi(\operatorname{graph}(g)) = \varphi\big(\operatorname{graph}(g) \cap (U \times V)\big) \\ &= \hat{\varphi}\big(\operatorname{graph}(g) \cap (U \times V)\big) = \hat{\varphi}(\operatorname{graph}(g)) \cap \hat{\varphi}(U \times V) \\ &= W \cap \big(\mathbb{R}^{d-m} \times \{0_{\mathbb{R}^m}\}\big) \cap \hat{\varphi}(U \times V) \\ &= \hat{\varphi}(U \times V) \cap \big(\mathbb{R}^{d-m} \times \{0_{\mathbb{R}^m}\}\big). \end{aligned}$$

Das ist nun genau die nach Definition 16.1 nötige Bedingung dafür, dass $N_f(c)$ eine $(d-m)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ ist. □

Beispiel 16.7. (a) Wir betrachten in $\mathbb{R}^d$ die *Euklidische d-Sphäre*

$$S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}$$

und zeigen, dass diese eine $(d-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ ist. Dazu betrachten wir die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \|x\|_2^2$. Für diese gilt $S^{d-1} = f^{-1}(\{1\})$. Nach dem Satz vom regulären Wert 16.6 müssen wir also nur noch sicherstellen, dass 1 ein regulärer Wert von f ist.

Für $x \in f^{-1}(\{1\})$ gilt $\|x\|_2^2 = 1$, also $\|x\|_2 = 1$ und damit insbesondere $x \neq 0$. Weiter ist damit, vgl. Beispiel 10.4(b),

$$\nabla f(x) = \nabla\big(x \mapsto \langle x, x\rangle\big) = 2x \neq 0,$$

d. h. 1 ist ein regulärer Wert von f nach Bemerkung 16.5(d).

(b) Für eine gegebene symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mit $\det(A) \neq 0$ betrachten wir

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^d : x^T A x = 1\}.$$

Eine solche Menge wird *Kegelschnitt* oder *Quadrik* genannt. Sie ist eine $(d-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$, denn für die Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^T A x$ ist $Q = f^{-1}(\{1\})$ und da dank der Invertierbarkeit von A für alle $x \neq 0$ auch $\nabla f(x) = 2x^T A \neq 0$ ist, ist 1 ein regulärer Wert von f.

Definition 16.8. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$ und $x_0 \in M$. Dann heißt $v \in \mathbb{R}^d$* Tangentialvektor *von M in x_0, falls es ein $\varepsilon > 0$ und eine differenzierbare Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ gibt mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = v$.*
Die Menge

$$T_{x_0}M := \{v \in \mathbb{R}^d : v \text{ Tangentialvektor von } M \text{ in } x_0\}$$

heißt Tangentialraum *von M in x_0.*

Beispiel 16.9. Das einfachste Beispiel einer Untermannigfaltigkeit ist ein affiner Raum und anschaulich erwarten wir, dass der zugehörige Tangentialraum der den affinen Raum aufspannende Untervektorraum ist. Das wollen wir nun sauber nach Definition nachweisen. Für einen Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^d$ des $\mathbb{R}^d$, $p \in \mathbb{R}^d$ und $M := \{p + u : u \in U\}$ ist also zu zeigen, dass $T_{x_0}M = U$ für alle $x_0 \in M$ gilt. Für die Inklusion „$\subseteq$“ sei dazu $v \in T_{x_0}M$. Dann gibt es nach Definition ein $\varepsilon > 0$ und eine differenzierbare Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = v$. Da γ eine Kurve in M ist, gilt $\gamma = p + \nu$ mit einer differenzierbaren Kurve $\nu : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$. Nun ist U ein Untervektorraum, weshalb für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ der Differenzenquotient $(\nu(t) - \nu(0))/t$ in U liegt. Schließlich ist U abgeschlossen in $\mathbb{R}^d$, also gilt

$$v = \gamma'(0) = \nu'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\nu(t) - \nu(0)}{t} \in U.$$

Wir zeigen noch die Inklusion „$\supseteq$“ und wählen dazu ein $v \in U$. Dann ist durch $\gamma : (-1, 1) \to M$ mit $\gamma(t) = x_0 + tv$ eine differenzierbare Kurve in M gegeben, für die $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = v$ gilt, also ist $v \in T_{x_0}M$ und wir sind fertig.

Übungsaufgabe 16.10. Ist M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$, $x_0 \in M$ und $O \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Umgebung von x_0, so gilt $T_{x_0}M = T_{x_0}(M \cap O)$.

Wir können nun zeigen, dass der Tangential*raum* seinen Namen zurecht trägt.

Satz 16.11. *Ist M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$, so ist für jedes $x_0 \in M$ der Tangentialraum $T_{x_0}M$ ein k-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^d$.*

Beweis. Sei $x_0 \in M$. Dann gibt es nach der Definition einer Untermannigfaltigkeit eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^d$ von x_0 und eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^d$, sowie einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ mit

$$\varphi(M \cap U) = V \cap \big(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\}\big).$$

Die Arbeit in diesem Beweis besteht darin zu zeigen, dass

$$T_{x_0}(M \cap U) = \big(Df(x_0)\big)^{-1}\big(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\}\big) \tag{16.1}$$

ist. Denn die rechte Seite in dieser Gleichung ist als isomorphes Bild eines k-dimensionalen Untervektorraums ein k-dimensionaler Untervektorraum und dank Übungsaufgabe 16.10 gilt $T_{x_0}M = T_{x_0}(M \cap U)$.
Zum Nachweis von (16.1) zeigen wir zunächst „$\subseteq$". Sei dazu $v \in T_{x_0}(M \cap U)$. Dann gibt es nach Definition des Tangentialraums ein $\varepsilon > 0$ und eine differenzierbare Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \cap U$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = v$. Wir betrachten nun die Kurve $\hat{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\})$ mit $\hat{\gamma} = \varphi \circ \gamma$. Auch diese ist differenzierbar und es gilt

$$\hat{\gamma}(0) = \varphi(\gamma(0)) = \varphi(x_0) \quad \text{und} \quad \hat{\gamma}'(0) = D\varphi(\gamma(0))\gamma'(0) = D\varphi(x_0)v.$$

Damit liegt $D\varphi(x_0)v = \hat{\gamma}'(0)$ im Tangentialraum in x_0 der Untermannigfaltigkeit $V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\})$ und dieser stimmt nach Übungsaufgabe 16.10 mit dem Tangentialraum von $\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\}$ überein. Die Untermannigfaltigkeit $\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\}$ ist aber einfach ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^d$ und damit ihr eigener Tangentialraum nach Beispiel 16.9. Wir haben damit also

$$D\varphi(x_0)v \in T_{x_0}\big(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\}\big) = \mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\}$$

und das liefert $v \in (D\varphi(x_0))^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\})$ wie gewünscht.
Wir wenden uns der Inklusion „$\supseteq$" zu. Dazu sei

$$v \in (D\varphi(x_0))^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\}), \text{ d. h. } \quad D\varphi(x_0)v \in \mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\}.$$

Der Punkt $\varphi(x_0)$ liegt in $V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\})$ und V ist offen, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(x_0) + tD\varphi(x_0)v \in V$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Desweiteren ist $\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^d$, was uns sogar $\varphi(x_0) + tD\varphi(x_0)v \in V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{d-k}}\})$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ einbringt.
Wir können nun dank der Abbildungseigenschaften von φ folgern, dass für jedes $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ der Punkt $\varphi^{-1}(\varphi(x_0) + tD\varphi(x_0)v)$ in $M \cap U$ liegt und betrachten damit nun die differenzierbare Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \cap U$ mit

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}\big(\varphi(x_0) + tD\varphi(x_0)v\big).$$

Für diese gilt $\gamma(0) = \varphi^{-1}(\varphi(x_0)) = x_0$ und dank Satz 14.3 über die Ableitung der Umkehrfunktion eines Diffeomorphismus gilt

$$\gamma'(0) = D\varphi^{-1}\big(\varphi(x_0)\big) \cdot D\varphi(x_0)v = \big(D\varphi(x_0)\big)^{-1} D\varphi(x_0)v = v.$$

Also ist $v \in T_{x_0}(M \cap U)$. $\square$

Ist die Untermannigfaltigkeit als Niveaufläche einer Funktion in einem regulären Wert gegeben, vgl. den Satz vom regulären Wert 16.6, so können wir den Tangentialraum durch die Ableitung dieser Funktion genauer beschreiben.

Satz 16.12. *Es seien $d, m \in \mathbb{N}$ mit $d \geq m$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(G; \mathbb{R}^m)$. Ist $c \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von f, so gilt für $M := f^{-1}(\{c\})$ in jedem $x_0 \in M$*

$$T_{x_0}M = \ker(Df(x_0)) = \big\{v \in \mathbb{R}^d : Df(x_0)v = 0\big\}.$$

Beweis. **„$\subseteq$"** Sei $v \in T_{x_0}M$ und $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine zugehörige differenzierbare Kurve mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = v$. Dann ist $\gamma(t) \in M = N_f(c)$ für jedes $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, es ist also $f(\gamma(t)) = c$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Differenzieren wir diese Gleichung, so erhalten wir $Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und damit insbesondere für $t = 0$

$$Df(x_0)v = Df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0,$$

d. h. $v \in \ker(Df(x_0))$.

„$\supseteq$" Wir wissen nach Satz 16.11 und dem eben gezeigten, dass $T_{x_0}M$ ein $(d-m)$-dimensionaler Untervektorraum von $\ker(Df(x_0))$ ist. Da x_0 nach Voraussetzung ein regulärer Punkt von f ist, ist $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ surjektiv. Nach der Dimensionsformel gilt also

$$\dim(\ker(Df(x_0))) = d - \operatorname{rang}(Df(x_0)) = d - m = \dim(T_{x_0}M).$$

Das liefert $T_{x_0}M = \ker(Df(x_0))$. □

Nun da wir den Tangentialraum im Griff haben, können wir uns den auf einer Untermannigfaltigkeit senkrecht stehenden Vektoren, den Normalenvektoren zuwenden.

Definition 16.13. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Untermannigfaltigkeit und $x_0 \in M$. Der Untervektorraum von $\mathbb{R}^d$*

$$N_{x_0}M := \big(T_{x_0}M\big)^{\perp} = \big\{v \in \mathbb{R}^d : \langle v, w\rangle = 0 \text{ für alle } w \in T_{x_0}M\big\}$$

heißt Normalenraum *von M in x_0 und jedes $v \in N_{x_0}M$ heißt* Normalenvektor *an M in x_0.*

Im Fall, dass die Untermannigfaltigkeit als reguläre Niveaufläche einer Funktion gegeben ist, können wir auch den Normalenraum mit Hilfe dieser Funktion beschreiben.

Satz 16.14. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^1(G; \mathbb{R}^m)$, $c \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von f und $M = f^{-1}(\{c\})$. Dann gilt für jedes $x_0 \in M$*

$$N_{x_0}M = \operatorname{span}\big\{\nabla f_1(x_0), \nabla f_2(x_0), \dots, \nabla f_m(x_0)\big\}.$$

Beweis. Sei $x_0 \in M$. Da Normalen- und Tangentialraum in x_0 zueinander komplementäre Untervektorräume sind, gilt

$$\dim(N_{x_0}M) = d - \dim(T_{x_0}M) = d - (d - m) = m.$$

Weiter ist x_0 nach Voraussetzung ein regulärer Punkt von f, womit der Rang von $Df(x_0)$ gerade m ist. Also müssen $\nabla f_1(x_0), \nabla f_2(x_0), \dots, \nabla f_m(x_0)$ als die m Zeilen der zugehörigen Jacobimatrix linear unabhängig sein. Wir können also den Satz beweisen, indem wir zeigen, dass diese m Vektoren alle in $N_{x_0}M$ liegen und damit sogar eine Basis von $N_{x_0}M$ bilden.
Nach Satz 16.12 ist $T_{x_0}M = \ker(Df(x_0))$. Also gilt für jedes $w \in T_{x_0}M$

$$0 = Df(x_0)w = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \nabla f_2(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1(x_0), w \rangle \\ \langle \nabla f_2(x_0), w \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_m(x_0), w \rangle \end{pmatrix}$$

und das liefert $\langle \nabla f_k(x_0), w \rangle = 0$ für jedes $k = 1, 2, \dots, m$ und jedes $w \in T_{x_0}M$, d. h. $\nabla f_k(x_0) \in N_{x_0}M$ für jedes $k = 1, 2, \dots, m$. $\square$

Beispiel 16.15. Wir nehmen das Beispiel der Euklidischen d-Sphäre S^{d-1} in $\mathbb{R}^d$ aus 16.7(a) wieder auf und bestimmen den Normalenraum. Wir hatten bereits gesehen, dass $S^{d-1} = f^{-1}(\{1\})$ gilt, wobei 1 ein regulärer Wert der Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \|x\|_2^2$ ist.
Nach Satz 16.14 ist der Normalenraum durch den Aufspann der Gradienten der Koordinatenfunktionen von f gegeben. Das ist hier nur eine, es gilt also für jedes $x_0 \in S^{d-1}$

$$N_{x_0}S^{d-1} = \operatorname{span}\{\nabla f(x_0)\} = \operatorname{span}\{2x_0\} = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Der Tangentialraum $T_{x_0}S^{d-1}$ ist dann das orthogonale Komplement davon.

17. Extrema unter Nebenbedingungen

Mit dem Auffinden von Extrema von Funktionen haben wir uns bereits in Abschnitt 13 beschäftigt. In vielen Problemen, vor allem auch in solchen die aus Anwendungen kommen, ist die Auswahl der erlaubten Konfigurationen aber eingeschränkt, was sich mathematisch darin ausdrückt, dass man die Extrema einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nicht in ganz $\mathbb{R}^d$ oder in einer offenen Teilmenge davon sucht, sondern nur auf einer Untermannigfaltigkeit von kleinerer Dimension.
Ein übersichtliches konkretes Beispiel wäre die Frage nach Maximalwerten der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 - y^3$ auf $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

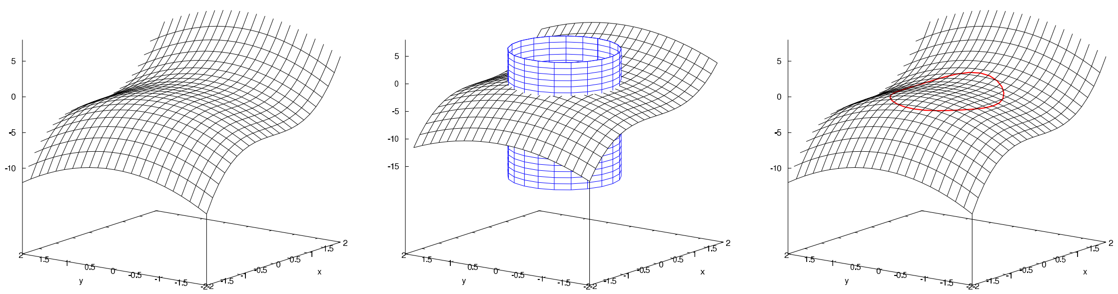

Abbildung 17.1.: Links der Graph der Funktion $h(x, y) = x^3 - y^2$, in der Mitte der selbe Graph mit dem Zylinder, dessen Rand genau S^1 ist. Rechts die Schnittlinie des Zylinders mit dem Graphen. Der Maximalwert von h auf S^1 entspricht dem höchsten Punkt auf dieser roten Linie.

Unsere Ergebnisse aus Kapitel 13 helfen hier nicht weiter, denn an diesen Maximalstellen wird der Gradient von f im Allgemeinen nicht Null, wie man auch in Abbildung 17.1 erkennt.
Zur Lösung des Problems wollen wir uns die Sache von der Anschauung her betrachten. Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so können wir uns diese durch ihr

Höhenlinienbild veranschaulichen. Denken Sie z.B. an eine Landkarte. Eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ erzeugt nun so wie in Abbildung 17.1 einen Weg in dieser Landschaft. Woran erkennt man nun einen Punkt, an dem dieser Weg auf maximaler Höhe liegt? Bis zum Scheitelpunkt des Weges schneiden wir im Laufen die Höhenlinien nach oben und am Scheitelpunkt erreichen wir genau eine Höhenlinie ohne diese zu überqueren und steigen dann wieder ab. Wir berühren die maximale Höhenlinie also *tangential*, d. h. am Scheitelpunkt muss die Höhenlinie genau dem Tangentialraum der Mannigfaltigkeit parallel sein.
In Übungsaufgabe (H2) von Blatt 7 haben Sie gezeigt, dass der Gradient von f immer senkrecht auf der Höhenlinie steht, wir würden also vermuten, dass die Extremalstellen von f auf M dadurch ausgezeichnet sind, dass der Gradient im Normalenraum von M liegt. Tatsächlich ergibt das ein notwendiges Kriterium für Extrema auf M.

Satz 17.1. *Sei M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $M \subseteq G$ und $f \in C^1(G, \mathbb{R})$. Hat f in $x_0 \in M$ ein Extremum auf M, so ist $\nabla f(x_0) \in N_{x_0}M$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass wenn $x_0 \in M$ eine Extremalstelle von f ist, immer $\langle \nabla f(x_0)^T, v\rangle = 0$ für jedes $v \in T_{x_0}M$ gilt.
Sei also $v \in T_{x_0}M$. Dann gibt es nach Definition eine differenzierbare Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = v$. Da γ nach M abbildet und $\gamma(0) = x_0$ eine Extremalstelle von f auf M ist, hat $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ ein Extremum an der Stelle $t = 0$. Nach dem bekannten notwendigen Kriterium aus der Analysis I gilt dann

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

und wir sind fertig. □

Bemerkung 17.2. Richtig interpretiert ist obiger Satz auch ein Kriterium, in dem so etwas wie ein Gradient Null sein muss. Da $\mathbb{R}^d = N_{x_0}M \oplus T_{x_0}M$ gilt, können wir den Gradienten von f in x_0 in seine jeweiligen Anteile normal und tangential zu M zerlegen. Das Kriterium $\nabla f(x_0) \in N_{x_0}M$ bedeutet dann, dass der tangentiale Anteil von ∇f in x_0 Null sein muss, damit dort eine Extremalstelle auf M vorliegen kann.

In Satz 16.14 haben wir den Normalenraum für eine Untermannigkfaltigkeit, die als reguläre Niveaufläche einer Funktion entsteht, genauer beschreiben können. Dieses gibt zusammen mit obigem Satz ein starkes Hilfsmittel zur Bestimmung von Extrema unter Nebenbedingungen.

Satz 17.3 (Methode von Lagrange)**.** *Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R})$ sowie $g \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$, $c \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von g und $M := g^{-1}(\{c\}) \neq \emptyset$. Hat dann f in $x_0 \in M$ ein Extremum auf M, so gibt es $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (sogenannte*

Lagrange-Multiplikatoren*) mit*

$$\nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x_0).$$

Beweis. Wir müssen nur noch alles zusammensetzen. Hat f in $x_0 \in M$ ein Extremum, so muss nach Satz 17.1 der Vektor $\nabla f(x_0)$ in $N_{x_0}M$ liegen. Nach Satz 16.14 ist also

$$\nabla f(x_0) \in N_{x_0}M = \operatorname{span}\{\nabla g_1(x_0), \nabla g_2(x_0), \ldots, \nabla g_m(x_0)\},$$

was uns genau die gesuchten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ liefert. □

Wir kehren nun zum Beispiel vom Beginn des Kapitels zurück.

Beispiel 17.4. Wir suchen die Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^3 - y^3$ auf

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = g^{-1}(\{1\}) \quad \text{für} \quad g(x,y) = x^2 + y^2.$$

Man sagt dann auch: Wir suchen die Extrema von f unter der *Nebenbedingung* $x^2 + y^2 = 1$.
Wir haben es hier nur mit einer Nebenbedingung zu tun und in Satz 17.3 ist $m = 1$. Wir wissen schon aus Beispiel 16.7(a), dass 1 ein regulärer Wert von g ist, und können damit Satz 17.3 anwenden. Die Extremstellen von f können also nur an den Stellen $x_0 \in M$ liegen, für die es jeweils ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$. Das führt auf

$$(3x^2, -3y^2) = \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) = \lambda(2x, 2y).$$

Löst man das resultierende Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x^2 & = & 2\lambda x \\ -3y^2 & = & 2\lambda y \\ x^2 + y^2 & = & 1, \end{array} \right.$$

so erhält man die sechs kritischen Punkte

$$(1,0),\ (-1,0),\ (0,1),\ (0,-1),\ (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \text{ und } (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}).$$

Nicht alle diese kritischen Punkte müssen nun Extremstellen sein. Hier kommt uns zugute, dass die Mannigfaltigkeit M kompakt und f stetig ist. Nach Satz 6.1 muss f also auf M mal mindestens eine Maximal- und eine Minimalstelle haben. Setzen wir die kritischen Stellen in f ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f(1,0) = f(0,-1) &= 1, \\ f(-1,0) = f(0,1) &= -1, \\ f(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) &= 1/\sqrt{2}, \\ f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) &= -1/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Also sind $(1, 0)$ und $(0, -1)$ die Maximalstellen von f auf S^1 mit Funktionswert 1 und $(-1, 0)$ sowie $(0, 1)$ die Minimalstellen auf S^1 mit Funktionswert -1.

Die Lagrange-Methode dient aber nicht nur zur Lösung konkreter Optimierungsprobleme, sondern kann auch theoretisch mit Gewinn eingesetzt werden. Zur Demonstration wollen wir hier mit ihrer Hilfe einen wichtigen Satz der linearen Algebra noch einmal analytisch beweisen. Das Kernargument wird dabei im Beweis des folgenden Lemmas schon deutlich.

Lemma 17.5. *Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine symmetrische Matrix. Dann ist*

$$\lambda := \max_{x\in S^{d-1}} \langle x, Ax\rangle$$

ein Eigenwert von A und jedes $x_0 \in S^{d-1}$ mit $\langle x_0, Ax_0\rangle = \lambda$ ist ein zugehöriger Eigenvektor.

Beweis. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \langle x, Ax\rangle$ auf der Untermannigfaltigkeit S^{d-1}. Da S^{d-1} kompakt und f stetig ist, muss f auf S^{d-1} eine Maximalstelle $x_0 \in S^{d-1}$ haben. Nach dem Satz von Lagrange in der Formulierung aus Satz 17.1 und Beispiel 16.15 gilt für jede solche Maximalstelle

$$\nabla f(x_0) \in N_{x_0}S^{d-1} = \{\mu x_0 : \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Also gibt es jeweils ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\mu x_0 = \nabla f(x_0) = 2Ax_0.$$

Weiter ist

$$\lambda = \max_{x\in S^{d-1}} f(x) = f(x_0) = \langle x_0, Ax_0\rangle = \frac{\mu}{2}\langle x_0, x_0\rangle = \frac{\mu}{2}\|x_0\|_2^2 = \frac{\mu}{2}.$$

Das ergibt schließlich $Ax_0 = \frac{\mu}{2}x_0 = \lambda x_0$ und wir sind fertig. □

Satz 17.6 (Spektralsatz für symmetrische Matrizen). *Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch. Dann existieren $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_d \in \mathbb{R}$ und eine Orthonormalbasis $x_1, x_2, \ldots, x_d$ des $\mathbb{R}^d$ mit $Ax_j = \lambda_j x_j$ für jedes $j = 1, 2, \ldots, d$.*

Beweis. Nach Lemma 17.5 existiert auf jeden Fall $x_1 \in S^{d-1}$ und $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ mit $Ax_1 = \lambda_1 x_1$. Wir gehen nun davon aus, dass wir für ein $k \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$ bereits $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$ und paarweise orthogonale $x_1, x_2, \ldots, x_k \in S^{d-1}$ mit $Ax_j = \lambda_j x_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$ gefunden haben. Dann bekommen wir λ_{k+1} und x_{k+1} folgendermaßen.
Wir betrachten $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{k+1}$ mit

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_0(x) \\ g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x\|_2^2 \\ 2\langle x_1, x\rangle \\ 2\langle x_2, x\rangle \\ \vdots \\ 2\langle x_k, x\rangle \end{pmatrix}$$

und $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \langle x, Ax\rangle$ und wir maximieren f auf

$$M_k := S^{d-1} \cap \big(\operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}\big)^{\perp} = g^{-1}\big(\{(1, 0, 0, \ldots, 0)^T\}\big).$$

D. h. wir suchen den Maximalwert von f unter allen $x \in S^{d-1}$ (erste Nebenbedingung), die zu allen bisher gefundenen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ senkrecht stehen (zweite bis $(k+1)$-te Nebenbedingung). Eine solche Maximalstelle $x_{k+1} \in M_k$ existiert auf jeden Fall, denn f ist stetig und M_k ist als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt. Zu zeigen bleibt damit noch, dass x_{k+1} ein Eigenvektor von A mit einem Eigenwet $\lambda_{k+1} \le \lambda_k$ ist. (Dass x_{k+1} Länge Eins hat und zu den bisherigen Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_k$ paarweise orthogonal ist, ergibt sich direkt aus $x_{k+1} \in M_k$.)
Es ist

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} \nabla g_0(x) \\ \nabla g_1(x) \\ \nabla g_2(x) \\ \vdots \\ \nabla g_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ 2x_k \end{pmatrix}$$

und $x \in g^{-1}(\{(1, 0, 0, \ldots, 0)^T\})$ ist im orthogonalen Komplement des Aufspanns der Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Damit sind die Zeilen von $J_g(x)$ linear unabhängig, d. h. x ist ein regulärer Punkt von g, so dass wir gezeigt haben, dass $(1, 0, 0, \ldots, 0)^T$ ein regulärer Wert von g ist.
Nach dem Satz von Lagrange 17.3 existieren nun $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k$ mit

$$2Ax_{k+1} = \nabla f(x_{k+1}) = \sum_{j=0}^{k} \mu_j \nabla g_j(x_{k+1}) = 2\mu_0 x_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} 2\mu_j x_j. \tag{17.1}$$

Dank der Symmetrie von A und unserer Orthogonalitätseigenschaften gilt für alle $m = 1, 2, \ldots, k$

$$\langle Ax_{k+1}, x_m\rangle = \langle x_{k+1}, Ax_m\rangle = \langle x_{k+1}\lambda_m x_m\rangle = \lambda_m\langle x_{k+1}, x_m\rangle = 0$$

und wir bekommen mit Hilfe von (17.1) für jedes $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$

$$\begin{aligned} 0 = \langle Ax_{k+1}, x_m\rangle &= \left\langle \left(\mu_0 x_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \mu_j x_j\right), x_m \right\rangle \\ &= \mu_0\langle x_{x+1}, x_m\rangle + \sum_{j=1}^{k} \mu_j\langle x_j, x_m\rangle = \mu_m\langle x_m, x_m\rangle = \mu_m. \end{aligned}$$

Also schnurrt (17.1) zusammen zu $Ax_{k+1} = \mu_0 x_{k+1}$, d. h. x_{k+1} ist tatsächlich ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_{k+1} := \mu_0$. Schließlich ist wegen $M_k \subseteq M_{k-1}$

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} = \mu_0 = \mu_0\langle x_{k+1}, x_{k+1}\rangle = \langle x_{k+1}, Ax_{k+1}\rangle = f(x_{k+1}) = \max_{x \in M_k} f(x) \\ \le \max_{x \in M_{k-1}} f(x) = \lambda_k. \end{aligned}$$ □

Teil III.

Integration

18. Parameterintegrale

Dieser erste Abschnitt im Integrationsteil ist wieder einer zum Aufwärmen, denn wir beschäftigen uns noch mit ganz gewöhnlichen eindimensionalen Integralen, allerdings lassen wir sie nun von einem (oder mehreren) Parametern abhängen und interessieren uns für die Abhängigkeit des Integrals von diesem Parameter. Dabei werden uns dann unsere Erkenntnisse über die Differentiation von Funktionen in mehreren Variablen helfen. Die betrachteten Fragestellungn ersieht man aus folgendem Beispiel.

Beispiel 18.1. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$g(x) := \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{xy} - \mathrm{e}^y}{y} \, \mathrm{d}y.$$

Für das Integral ist x ein Parameter, deshalb nennt man ein solches *Parameterintegral*. Wir interessieren uns nun für die Abhängigkeit des Integralwerts von diesem Parameter, also für die Funktion g. Ist diese stetig, wenn der Integrand stetig ist? Unter welchen Voraussetzungen ist sie differenzierbar?

Für die erste Frage im obigen Beispiel gibt es eine positive Antwort.

Satz 18.2. *Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ offen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist $g : X \to \mathbb{R}$ mit*

$$g(x) = \int_a^b f(x, y) \, \mathrm{d}y, \qquad x \in X,$$

stetig.

Beweis. Wir verwenden in diesem Beweis die ∞-Norm.
Es sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$. Da X offen ist, können wir ein $\varrho > 0$ finden, für das $U_{2\varrho}(x_0) \subseteq X$ gilt. Dann ist für $K_\varrho(x_0) = \overline{U_\varrho(x_0)}$ die Menge $K_\varrho(x_0) \times [a, b]$ in $X \times [a, b]$ enthalten und kompakt. Wir bekommen also aus Satz 6.10, dass f auf $K_\varrho(x_0) \times [a, b]$ sogar gleichmäßig stetig ist.
Folglich existiert ein $\delta \in (0, \varrho)$, so dass für alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K_\varrho(x_0) \times [a, b]$ gilt

$$\big\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\big\|_\infty < \delta \Longrightarrow \big\|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\big\|_\infty < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Insbesondere gilt für alle $x \in U_\delta(x_0)$ und alle $y \in [a, b]$

$$\big\|(x, y) - (x_0, y)\big\|_\infty = \|x - x_0\|_\infty < \delta,$$

und damit ist für alle $x \in U_\delta(x_0)$ nach der Standardabschätzung für Integrale

$$\begin{aligned}
\big|g(x) - g(x_0)\big| &= \Big|\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y - \int_a^b f(x_0,y)\,\mathrm{d}y\Big| \\
&= \Big|\int_a^b \big(f(x,y) - f(x_0,y)\big)\,\mathrm{d}y\Big| \\
&\le \int_a^b \big|f(x,y) - f(x_0,y)\big|\,\mathrm{d}y < (b-a)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 18.3. Obiger Satz gilt auch falls X statt als offen als kompakt vorausgesetzt wird. Sehen Sie warum?

Wir wollen uns nun der zweiten Frage zuwenden, also unter welchen Umständen die Funktion g sogar differenzierbar ist. Damit das funktionieren kann, sollte natürlich zumindest einmal die Funktion f nach x differenzierbar sein. Aber selbst dann ist es kein Selbstläufer, denn um das auszunutzen müssten wir ja die Differentiation, die wir ausführen wollen, unter das Integralzeichen schieben, d. h. wir müssen dazu zwei Grenzwerte vertauschen, was bekanntlich immer eine delikate Angelegenheit ist. Tatsächlich haben wir hier Glück und das Differenzieren unter dem Integral ist unter sehr schwachen Voraussetzungen erlaubt.

Satz 18.4 (Differentiation unter dem Integral). *Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, $[a,b] \times [c,d] \subseteq G$, $f : G \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Existiert $\partial_1 f : G \to \mathbb{R}$ und ist stetig, so ist g stetig differenzierbar auf $[a,b]$ und es gilt

$$g'(x) = \int_c^d \partial_1 f(x,y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in [a,b].$$

Beweis. Über den Differenzenquotienten ist

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\int_c^d f(x+h,y)\,\mathrm{d}y - \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big) \\
&= \lim_{h\to 0} \int_c^d \frac{f(x+h,y) - f(x,h)}{h}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Daran sieht man nun deutlich, dass unser einziges Problem ist, den Limes unter das Integral zu bekommen. Gelingt uns dieses, so erhalten wir im Integranden genau $\partial_1 f(x)$ und die resultierende Ableitungsfunktion g' ist nach Satz 18.2 auch stetig, den $\partial_1 f$ ist ja stetig vorausgesetzt.

Im letzten Semester haben wir in Satz I.26.12 festgestellt, dass wir den Grenzwert in das Integral holen können, wenn die Konvergenz im Integranden gleichmäßig ist. Das müssen wir nun nachweisen. Dazu sei also $\varepsilon > 0$.
Nach Voraussetzung ist $\partial_1 f$ auf der kompakten Menge $[a,b] \times [c,d]$ stetig, also ist wieder mit Satz 6.10 diese Funktion dort sogar gleichmäßig stetig. Das liefert uns auf die gleiche Weise wie im Beweis von Satz 18.2 ein $\delta > 0$, so dass für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ und alle $y \in [c,d]$ gilt

$$|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow \big|\partial_1 f(x_1, y) - \partial_1 f(x_2, y)\big| < \varepsilon.$$

Es sei nun $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$ und $h \in \mathbb{R}$ sei so, dass zum Einen $x + h \in [a,b]$ gilt und zum Anderen $|h| < \delta$ ist. Dann bekommen wir aus dem Mittelwertsatz ein $\tau \in (0,1)$ mit

$$\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \partial_1 f(x + \tau h, y)$$

und wegen $|(x + \tau h) - x| = |\tau h| = \tau |h| < |h| < \delta$ ist dann

$$\Big|\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} - \partial_1 f(x,y)\Big| = \big|\partial_1 f(x + \tau h, y) - \partial_1 f(x,y)\big| < \varepsilon.$$

Dabei ist die Wahl unseres δ nur von ε und nicht von h abhängig, wir haben also gleichmäßige Konvergenz nachgewiesen und sind damit nach den obigen Überlegungen fertig. □

Beispiel 18.5. (a) Wir kehren zum Ausgangsbeispiel 18.1 zurück und betrachten das Parameterintegral

$$g(x) = \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{xy} - \mathrm{e}^y}{y} \,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hier ist der Integrand $f(x,y) = (\mathrm{e}^{xy} - \mathrm{e}^y)/y$ für $y \in [1,2]$ offensichtlich nach x stetig partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{y\mathrm{e}^{xy}}{y} = \mathrm{e}^{xy}, \qquad x \in \mathbb{R},\ y \in [1,2].$$

Wir können also Satz 18.4 anwenden und erhalten, dass g auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist mit

$$g'(x) = \int_1^2 \partial_1 f(x,y) \,\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{e}^{xy} \,\mathrm{d}y.$$

Für $x = 0$ ist damit

$$g'(0) = \int_1^2 1 \,\mathrm{d}y = (2-1) = 1$$

und für $x \neq 0$ finden wir

$$g'(x) = \frac{1}{x} e^{xy} \Big|_{y=1}^{y=2} = \frac{e^{2x} - e^x}{x}.$$

Man beachte, dass wir damit g' explizit bestimmen konnten, während das g definierende Integral nicht elementar integrierbar ist.

(b) Wir können nun den Schwierigkeitsgrad etwas erhöhen. Für $x > 0$ betrachten wir

$$h(x) := \int_{x+1}^{x^2} f(x,y) \, dy = \int_{x+1}^{x^2} \frac{e^{xy} - e^x}{y} \, dy$$

und suchen auch hier die Ableitung. Das Problem ist dabei, dass nun auch die Integralgrenzen von x abhängen und man gar nicht weiß, wo man anfangen soll abzuleiten. Hier kann uns, vielleicht etwas unerwartet, die mehrdimensionale Differentialrechnung helfen. Wir betrachten als Hilfsfunktion $\varphi : (0, \infty)^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x, u, v) = \int_u^v \frac{e^{xy} - e^y}{y} \, dy.$$

Wir haben damit die drei Aufkommen von x in h voneinander entkoppelt, bekommen aber h zurück durch $h(x) = \varphi(x, x+1, x^2)$ für $x > 0$. Nun bekommen wir mit der Kettenregel

$$h'(x) = \nabla\varphi(x, x+1, x^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen von φ bekommen wir zum Einen aus Satz 18.4, vgl. auch Teil (a), zu

$$\partial_1\varphi(x, u, v) = \int_u^v \partial_1 f(x,y) \, dy = \int_u^v e^{xy} \, dy = \frac{e^{xy}}{x} \Big|_{y=u}^{y=v} = \frac{e^{vx} - e^{ux}}{x}.$$

Zum Anderen haben wir die Unbekannte in der Integralgrenze stehen. Hier bekommen wir mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\partial_2\varphi(x, u, v) = -\frac{e^{xu} - e^u}{u} \quad \text{und} \quad \partial_3\varphi(x, u, v) = \frac{e^{xv} - e^v}{v}.$$

Nun müssen wir nur noch alles zusammensetzen:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \big(\partial_1\varphi(x, x+1, x^2),\ \partial_2\varphi(x, x+1, x^2),\ \partial_3\varphi(x, x+1, x^2)\big) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2x \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{e^{x^2 \cdot x} - e^{(x+1)x}}{x},\ -\frac{e^{x(x+1)} - e^{x+1}}{x+1},\ \frac{e^{x \cdot x^2} - e^{x^2}}{x^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x}\big(\mathrm{e}^{x^3} - \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{x}\big) - \frac{1}{x+1}\big(\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}\big) + \frac{2x}{x^2}\big(\mathrm{e}^{x^3} - \mathrm{e}^{x^2}\big)$$
$$= \frac{1}{x}\big(3\mathrm{e}^{x^3} - \mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{x} + 2)\big) - \frac{\mathrm{e}^{x}}{x+1}\big(\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}\big).$$

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir uns noch Integrale von Parameterintegralen anschauen. Wir berachten dazu für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$ eine stetige Funktion $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ und wieder wie oben $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in [a, b].$$

Nach Satz 18.2 zusammen mit Bemerkung 18.3 ist dann auch g stetig und wir können das Integral von g über $[a, b]$ anschauen. Natürlich kann man das auch in der umgekehrten Reihenfolge der Variablen machen und die natürliche Frage, die sich daraus ergibt, ist, ob

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y$$

gilt? Da hier mal wieder zwei Grenzwerte vertauscht werden, ist das eine interessante Frage, deren Antwort der folgende Satz gibt.

Satz 18.6 (Satz von Fubini)**.** *Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$. Ist $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt*

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y.$$

Beweis. Für $t \in [c, d]$ betrachten wir die Funktion $h : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x, t) = \int_c^t f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Diese ist nach dem Hauptsatz und Satz 18.2 stetig, also können wir sie von a bis b über x integrieren und erhalten die ebenfalls stetige Funktion

$$F(t) := \int_a^b h(x, t)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(\int_c^t f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x, \quad t \in [c, d].$$

Es gilt sogar noch mehr, denn h ist nach dem Hauptsatz in der zweiten Koordinaten differenzierbar mit $\partial_2 h(x, t) = f(x, t)$ und diese Ableitungsfunktion ist stetig. Also ist nach Satz 18.4 die Funktion F stetig differenzierbar mit

$$F'(t) = \int_a^b \partial_2 h(x, t)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}x.$$

Da $F(c) = 0$ ist, haben wir mit nochmaliger Unterstützung durch den Hauptsatz

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = F(d) = F(c) + \int_c^d F'(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y.$$

□

19. Kurvenintegrale

Arbeit ist Kraft mal Weg, oder, wenn die Kraft über die zurückgelegte Strecke nicht konstant, sondern eine Funktion $f(x)$ mit $x \in [a,b]$, ist, so bekommt man die Arbeit als das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Heuristisch „summiert“ man dabei das Produkt der an der Stelle $x \in [a,b]$ wirkenden Kraft $f(x)$ mit dem infinitesimalen Wegstück $\mathrm{d}x$.
Was machen wir nun, wenn die Kraft auf einen Gegenstand wirkt, der sich entlang einer gebogenen Linie bewegt? Zunächst mal wissen wir, wie wir die Linie beschreiben können, denn im Kapitel 8 haben wir uns ja schon mit Kurven beschäftigt. Wir wollen nun in diesem Abschnitt klären, wie wir eine Funktion entlang einer Kurve integrieren können.
Dabei müssen wir ein wenig aufpassen, denn wir haben ja schon festgestellt, dass wir ein und dieselbe Linie durch viele verschiedene Kurven beschreiben können und es sollte für den Wert der Arbeit, die anfällt um einen Gegenstand entlang eines vorgegebenen Weges von A nach B zu bringen, unerheblich sein, welche spezielle Parametrisierung des Weges wir nutzen. Wir brauchen also einen Integralbegriff, der unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen invariant ist. (Bei orientierungsumkehrenden Umparametrisierungen sollte der Wert des Integrals das Vorzeichen wechseln.)

Definition 19.1. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^d$ stetig. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\gamma : [a,b] \to G$ eine stetig differenzierbare Kurve, so heißt*

$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b \big\langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \big\rangle\,\mathrm{d}t$$

Kurvenintegral *von f längs γ.*

Bemerkung 19.2. Eine stetige Funktion von (einer Teilmenge des) $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^d$ selbst wird auch oft *Vektorfeld* genannt.

Diese Definition des Kurvenintegrals führt tatsächlich auf das korrekte Verhalten unter Umparametrisierungen, wie wir nun zeigen werden.

Satz 19.3. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^d$ stetig und $\gamma : [a,b] \to G$ eine stetig differenzierbare Kurve. Ist $[\alpha, \beta]$ ein weiteres Intervall in $\mathbb{R}$ und $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung, d. h. φ ist ein streng monoton wachsender Diffeomorphismus, so gilt*

$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\gamma\circ\varphi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist φ orientierungsumkehrend, so gilt

$$\int_\gamma f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_{\gamma\circ\varphi} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\varphi} f(x)\ \mathrm{d}x &= \int_\alpha^\beta \big\langle f((\gamma\circ\varphi)(s)), (\gamma\circ\varphi)'(s)\big\rangle\ \mathrm{d}s\\ &= \int_\alpha^\beta \big\langle f(\gamma(\varphi(s))), \gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)\big\rangle\ \mathrm{d}s\\ &= \int_\alpha^\beta \big\langle f(\gamma(\varphi(s))), \gamma'(\varphi(s))\big\rangle\varphi'(s)\ \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Mit der Substitution $t = \varphi(s)$ gilt $\varphi'(s)\mathrm{d}s = \mathrm{d}t$ und, wenn φ orientierungserhaltend ist, haben wir $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$. Das liefert

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \big\langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\big\rangle\ \mathrm{d}t = \int_\gamma f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Ist hingegegend φ orientierungsumkehrend, so gilt $\varphi(\alpha) = b$ und $\varphi(\beta) = a$ und wir erhalten

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_b^a \big\langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\big\rangle\ \mathrm{d}t = -\int_a^b \big\langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\big\rangle\ \mathrm{d}t = -\int_\gamma f(x)\ \mathrm{d}x.$$

□

Beispiel 19.4. Wir betrachten das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{-v}{u^2+v^2} \\ \dfrac{u}{u^2+v^2}\end{pmatrix}.$$

und die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x)\ \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \big\langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\big\rangle\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{-\sin(t)}{1} \\ \frac{\cos(t)}{1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t)\end{pmatrix}\right\rangle\ \mathrm{d}t\\ &= \int_0^{2\pi} \big(\sin^2(t) + \cos^2(t)\big)\ \mathrm{d}t = 2\pi.\end{aligned}$$

Auch reellwertige Funktionen wollen zuweilen entlang von Kurven integriert werden. Das führt auf einen zweiten Typ von Kurvenintegralen, den man sich anhand eines Vorhangs veranschaulichen kann: Stellen Sie sich einen Vorhang von variabler Länge vor, der entlang einer Kurve aufgehängt ist. Die Gesamtfläche des Vorhangs bekommt man dann anschaulich, wenn man die Längenfunktion entlang der Kurve integriert. Auch hier müssen wir wieder darauf achten, dass wir einen Wert des Integrals bekommen, der sich durch Umparametrisierung der Kurve nicht verändert. Das gewährleistet die folgende Definition.

Definition 19.5. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : G \to \mathbb{R}$ stetig, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\gamma : [a, b] \to G$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt*

$$\int_\gamma f(x)\, \mathrm{d}s := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, \mathrm{d}t$$

Kurvenintegral *von f längs γ.*

Bemerkung 19.6. Die Schreibweise „$\mathrm{d}s$" im Kurvenintegral aus Definition 19.5 ist eine rein formale und hat nichts mit einer Variablen s zu tun. Sie dient hier im Wesentlichen dazu die beiden Typen der Kurvenintegrale zu unterscheiden.

Übungsaufgabe 19.7. Das Kurvenintegral aus Definition 19.5 ist invariant unter Umparametrisierung, d. h. sind f und γ wie dort und ist $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ ein monotoner Diffeomorphismus für ein Intervall $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$, so gilt

$$\int_\gamma f(x)\, \mathrm{d}s = \int_{\gamma\circ\varphi} f(x)\, \mathrm{d}s.$$

Man beachte, dass in diesem Fall auch bei einer orientierungsumkehrenden Umparametrisierung der Wert derselbe bleibt und nicht das Vorzeichen wechselt!

Beispiel 19.8. Wir berechnen das Kurvenintegral von $f(x, y) = \sqrt[5]{xy}$ längs $\gamma(t) = (t^2, t^3)^T$, $t \in [0, \sqrt{3}]$ in Euklidischer Länge. Es ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x)\, \mathrm{d}s &= \int_0^{\sqrt{3}} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|_2\, \mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt[5]{t^2 \cdot t^3} \cdot \sqrt{t^4 + t^6}\, \mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\sqrt{3}} t\sqrt{t^4(1 + t^2)}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{3}} t^3\sqrt{1 + t^2}\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Die Substitution $u = 1 + t^2$ liefert $\mathrm{d}u = 2t\, \mathrm{d}t$ und $t^2 = u - 1$. Also gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x)\, \mathrm{d}s &= \int_0^{\sqrt{3}} t^2\sqrt{1 + t^2}\; t\, \mathrm{d}t = \int_1^4 (u - 1)\sqrt{u}\frac{1}{2}\, \mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_1^4 u^{3/2}\, \mathrm{d}u - \int_1^4 u^{1/2}\, \mathrm{d}u\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{5}u^{5/2}\Big|_1^4 - \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^4\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{5}(2^5 - 1) - \frac{2}{3}(2^3 - 1)\Big) = \frac{58}{15}.\end{aligned}$$

Bemerkung 19.9. In den Definitionen 19.1 und 19.5 ist für die Kurve γ jeweils stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt. Das kann jeweils zu „stückweise stetig differenzierbar“ abgeschwächt werden. Damit ist gemeint, dass es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < t_2 < t_{n-1} < t_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ gibt, so dass $\gamma|_{(t_{j-1},t_j)}$ für jedes $j = 1, 2, \ldots, n$ stetig differenzierbar ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big\langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \big\rangle\,\mathrm{d}t, \quad \text{bzw.}$$

$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}s := \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Man beachte dabei, dass jede Kurve nach Definition eine stetige Abbildung ist.

Für praktische Berechnungen führt sogar die Verallgemeinerung auf stückweise stetig differenzierbare Kurven oft noch zu einem sehr unhandlichen Kalkül. Durch Umparametrisierung der Kurve auf einzelnen Teilintervallen kann man auch noch zulassen, dass die einzelnen Stücke auf voneinander unabhängigen Intervallen definiert werden. Das soll im Folgenden an einem Beispiel illustriert werden.

Beispiel 19.10. Wir wollen das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ y \end{pmatrix}$$

entlang des in Abbildung 19.1 skizzierten einmal durchlaufenen Weges integrie-

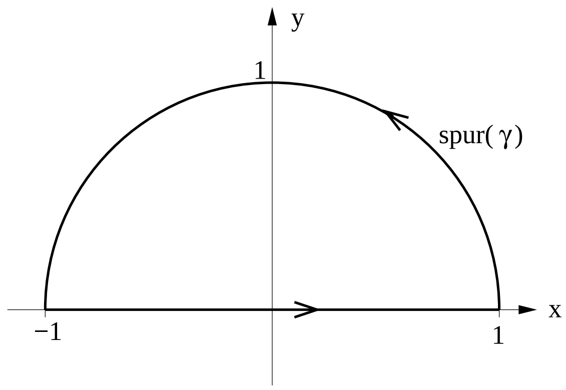

Abbildung 19.1.: Der Weg γ aus Beispiel 19.10

ren. Dies ist ein geschlossener Weg, den wir gut in zwei Stücken definieren können. Für das gerade Stück betrachten wir

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1, 1] \quad \text{und für den Kreisbogen}$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi].$$

Dann ist $\gamma_1(1) = (1,0)^T = \gamma_2(0)$ und $\gamma_2(\pi) = (-1,0)^T = \gamma_1(-1)$, die Wege „passen also richtig zusammen“, aber natürlich passen Sie so nicht zu einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve zusammen. Man könnte nun einen der beiden mühsam so umparametrisieren, dass es passt. Aber, da das Umparametrisieren sowieso nichts am Kurvenintegral ändert, kann man auch gleich mit diesen Kurven rechnen und erhält

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 \big\langle f(\gamma_1(t)), \gamma_1'(t)\big\rangle\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \big\langle f(\gamma_2(t)), \gamma_2'(t)\big\rangle\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \begin{pmatrix} \cos^2(t) + \sin^2(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^1 t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \big(-\sin(t) + \sin(t)\cos(t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}t^3\Big|_{-1}^1 + \cos(t)\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\sin^2(t)\Big|_0^\pi = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + (-1) - 1 + 0 - 0 = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Wir wenden uns nun einer speziellen Klasse von Vektorfeldern f zu, nämlich den sogenannten Gradientenfeldern, die sich dadurch auszeichnen, dass $f = \nabla\varphi$ für eine geeigente Funktion φ ist. Für solche Gradientenfelder vereinfacht sich die Berechnung von Kurvenintegralen erheblich, denn es ist dann mit dem Hauptsatz

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \big\langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\big\rangle\,\mathrm{d}t = \int_a^b \nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).
\end{aligned}$$

Das bedeutet zunächst einmal ganz praktisch, dass wir zur Berechnung des Kurvenintegrals über f längs γ nur die Funktion φ am Anfangs- und am Endpunkt der Kurve auswerten müssen, hat aber noch viel weitreichendere Konsequenzen. Zunächst einmal bedeutet das umgekehrt gedacht, dass es für die Berechnung des Kurvenintegrals überhaupt nicht darauf ankommt wie der Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ kommt. Man kann also in diesem Fall den Weg dazwischen sogar beliebig verändern ohne den Wert des Kurvenintegrals zu beeinflussen. Man sagt dazu, dass das Kurvenintegral in diesem Fall *wegunabhängig* ist.
Schließlich zeigt obige Rechnung sofort, dass für einen geschlossenen Weg, d. h. für $\gamma(a) = \gamma(b)$, das Kurvenintegral über jedes Gradientenfeld verschwindet.

Definition 19.11. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^d$ stetig. Existiert eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : G \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \nabla\varphi(x)$ für alle $x \in G$, so nennt man φ ein* Potenzial *oder auch eine* Stammfunktion *von f und f wird in diesem Fall* Gradientenfeld *genannt.*

Der folgende Satz fasst unsere bisherigen Überlegungen zusammen.

Satz 19.12. *Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^d$ ein Gradientenfeld mit Potenzial $\varphi : G \to \mathbb{R}$. Dann gilt für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to G$*

$$\int_\gamma f(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

Insbesondere ist, falls γ zusätzlich geschlossen ist, dieses Integral Null.

Tatsächlich gilt für zusammenhängende Mengen G auch so etwas wie die Umkehrung dieses Satzes. Wir wollen das hier allerdings nur unter einer deutlich stärkeren geometrischen Bedingung beweisen.

Satz 19.13. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und* konvex*, d. h. für alle $x, y \in G$ ist $\overline{xy} \subseteq G$. Eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{R}^d$ ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn für jeden geschlossenen stückweise differenzierbaren Weg γ in G gilt $\int_\gamma f(x)\, \mathrm{d}x = 0$.*

Beweis. Wir müssen nur noch zeigen, dass f ein Gradientenfeld ist, wenn jedes Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve Null ist.
Wir betrachten für jede Wahl von $y, z \in G$ jeweils die Kurve $\gamma_{y,z} : [0,1] \to G$ mit $\gamma_{y,z}(t) = y + t(z - y)$, die die gleichförmige Bewegung entlang der Verbindungsstrecke von y und z beschreibt. Man beachte, dass dank der vorausgesetzten Konvexität von G alle diese Kurven nach G abbilden.
Nun wählen wir für den Rest des Beweises ein $y_0 \in G$ fest und setzen

$$\varphi(y) := \int_{\gamma_{y_0,y}} f(x)\, \mathrm{d}x, \qquad y \in G.$$

Dann ist φ eine Funktion von G nach $\mathbb{R}$, von der wir nun zeigen wollen, dass sie stetig differenzierbar mit $\nabla\varphi = f$ und damit ein Potenzial von f ist.
Seien also $y \in G$ und $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(y) \subseteq G$ gilt. Dann ist für alle $h \in U_\varepsilon(0)$ auch $y + h \in G$ und wir erhalten

$$\int_{\gamma_{y_0,y}} f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\gamma_{y,y+h}} f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\gamma_{y+h,y_0}} f(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

nach Voraussetzung, denn der Weg von y_0 über y und $y + h$ zurück zu y_0 ist geschlossen. Weiter ist der erste Summand auf der linken Seite genau $\varphi(y)$ und für den dritten ergibt sich

$$\varphi(y+h) = \int_{\gamma_{y_0,y+h}} f(x)\, \mathrm{d}x = -\int_{\gamma_{y+h,y_0}} f(x)\, \mathrm{d}x,$$

da der Weg γ_{y+h,y_0} aus dem Weg $\gamma_{y_0,y+h}$ durch die orientierungsumkehrende Umparametrisierung $\psi(t) = 1 - t$ entsteht (nachrechnen!), vgl. Satz 19.3. Zusammengenommen haben wir also

$$\varphi(y+h) - \varphi(y) = \int_{\gamma_{y,y+h}} f(x)\, \mathrm{d}x,$$

womit wir schon fast beim Differenzenquotienten für φ sind. Um die partiellen Ableitungen von φ auszurechnen, sei $j \in \{1, 2, \dots, d\}$, e_j der j-te Standardbasisvektor und $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(y + se_j) - \varphi(y)}{s} &= \frac{1}{s} \int_{\gamma_{y,y+se_j}} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{s} \int_0^1 \left\langle f(\gamma_{y,y+se_j}(t)), \gamma'_{y,y+se_j}(t) \right\rangle \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s} \int_0^1 \left\langle f\big(y + t(y + se_j - y)\big), (y + se_j - y) \right\rangle \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s} \int_0^1 \left\langle f(y + tse_j), se_j \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 f_j(y + tse_j) \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Nach Satz 18.2 hängt nun der Wert dieses Integrals stetig vom Parameter s ab, es ist also dank der Stetigkeit von f

$$\partial_j \varphi(y) = \lim_{s \to 0} \frac{\varphi(y + se_j) - \varphi(y)}{s} = \int_0^1 \lim_{s \to 0} f_j(y + tse_j) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 f_j(y) \, \mathrm{d}t = f_j(y).$$

Nimmt man die partiellen Ableitungen von φ zum Gradienten zusammen, folgt $\nabla \varphi = f$ wie gewünscht. $\square$

Bemerkung 19.14. Für reelle Funktionen hatten wir in Analysis I festgestellt, dass jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt. Das ist in mehreren Variablen leider fundamental anders, hier sind Potenziale etwas höchst seltenes und damit kostbares. Zum Beispiel hat schon das äußerst einfache Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

kein Potenzial. Der Grund: Gäbe es ein Potenzial $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so wäre dieses, da f stetig differenzierbar ist, sogar zweimal stetig differenzierbar. Das führt aber auf einen Widerspruch zum Satz von Schwarz 9.16, denn es gilt dann

$$\begin{aligned}
\partial_2 \partial_1 \varphi(x, y) &= \partial_2 f_1(x, y) = 1 \quad \text{und} \\
\partial_1 \partial_2 \varphi(x, y) &= \partial_1 f_2(x, y) = -1.
\end{aligned}$$

Anders formuliert bedeutet das, dass es keine Hoffnung gibt, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in mehrere Variablen herüberzuretten. Darüber wird vor allem in der Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ zu jammern sein.
Allgemein ergibt sich mit der selben Argumentation wie oben aus dem Satz von Schwarz die folgende notwendige Bedingung dafür, dass eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{R}^d$ ein Potenzial besitzt:

$$\forall j, k \in \{1, 2, \dots, d\} \; \forall x \in G : \partial_j f_k(x) = \partial_k f_j(x) \qquad (\textit{Integrabilitätsbedingung}). \tag{19.1}$$

Eine naheliegende Frage ist nun, ob diese Bedingung auch hinreichend ist, ob wir damit also auch die Existenz eines Potenzials überprüfen können. Die Antwort ist im Allgemeinen leider negativ, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 19.15. Wir nehmen Beispiel 19.4 wieder auf. Dort hatten wir das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{-v}{u^2+v^2} \\ \dfrac{u}{u^2+v^2} \end{pmatrix}.$$

und die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$ betrachtet und gefunden, dass das Kurvenintegral von f längs γ den Wert 2π hat und das, obwohl der Weg γ geschlossen ist und f die Integrabilitätsbedingung erfüllt, denn es ist

$$\begin{aligned} \partial_1 f_2(u,v) &= \frac{1 \cdot (u^2+v^2) - 2u \cdot u}{(u^2+v^2)^2} = \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} \quad \text{und} \\ \partial_2 f_1(u,v) &= \frac{(-1) \cdot (u^2+v^2) + 2v \cdot v}{(u^2+v^2)^2} = \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}. \end{aligned}$$

Was hier passiert, sieht man, wenn man versucht ein Potenzial φ von f auszurechnen. Ein solches müsste zunächst mal $f_2(u,v) = \partial_2 \varphi(u,v)$ erfüllen, also wäre mit einer u. U. von u abhängigen Integrationskonstanten $c(u)$

$$\begin{aligned} \varphi(u,v) &= \int f_2(u,v) \,\mathrm{d}v + c(u) = \int \frac{u}{u^2+v^2} \,\mathrm{d}v + c(u) \\ &= \frac{u}{u^2} \int \frac{1}{1+(\frac{v}{u})^2} \,\mathrm{d}v + c(u) \end{aligned}$$

und mit der Substitution $y = v/u$ bekommen wir

$$= \frac{1}{u} \int \frac{1}{1+y^2} u \,\mathrm{d}y + c(u) = \arctan(y) + c(u) = \arctan(v/u) + c(u).$$

Wie sieht es dann mit $\partial_1 \varphi(u,v) = f_1(u,v)$ aus? Wir berechnen

$$\partial_1 \varphi(u,v) = \arctan'(v/u)\Big(-\frac{v}{u^2}\Big) + c'(u) = -\frac{1}{1+(\frac{v}{u})^2} \frac{v}{u^2} + c'(u) = \frac{-v}{u^2+v^2} + c'(u).$$

Das geht alles wunderbar auf, wir können also $c(u) = 0$ setzen und erhalten mit $\varphi(u,v) = \arctan(v/u)$ tatsächlich ein Potenzial φ von f.
Aber das kann doch nicht sein! Schließlich ist obiges Kurvenintegral nicht Null und das müsste ja nach Satz 19.13 dann gelten. Des Rätsels Lösung ist, dass wir ein bisschen zu forsch gerechnet haben. Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definiert, aber im Potenzial φ wird durch u geteilt, hier ist der maximale Definitionsbereich also $\mathbb{R}^2$ ohne die u-Achse. Die entstehende Unstetigkeit von φ sieht man auch

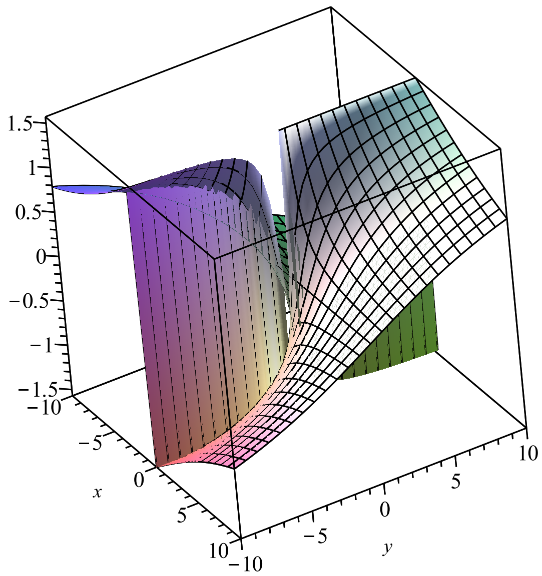

Abbildung 19.2.: Der Graph der Funktion $\varphi(x, y) = \arctan(y/x)$ ist entlang der gesamten x-Achse unstetig.

schön in Abbildung 19.2. Damit existiert das Potenzial überhaupt nicht entlang der ganzen Kurve γ und das Kurvenintegral verschwindet nicht, obwohl f entlang der ganzen Kurve definiert ist. Die Singularität von f im Nullpunkt „strahlt aus“.

Die Integrabilitätsbedingung scheint also doch recht nahe daran zu sein, eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Potenzials zu sein. Das Problem liegt in der Geometrie des Definitionsbereichs von f. Das wollen wir jetzt angehen.

Definition 19.16. *eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt* sternförmig*, falls es ein $x_0 \in G$ gibt, so dass für alle $x \in G$ gilt $\overline{xx_0} \subseteq G$.*

Beispiel 19.17. (a) Beispiele für sternförmige Mengen sind:

- Konvexe Mengen. Dann kann jeder Punkt der Menge als x_0 gewählt werden.
- Sterne.
- Die geschlitzte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x < 0\}$. Hier erfüllt z.B. der Punkt $x_0 = (1, 0)$ die Bedingung aus der Definition.

(b) Nicht sternförmig sind z.B. Hanteln und Monde, sowie $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Wir können nun zeigen, dass für Funktionen, deren Definitionsbereich sternförmig ist, das Problem aus Beispiel 19.15 nicht auftreten kann und die Integrabilitätsbedingung tatsächlich auch hinreichend für die Existenz eines Potenzials ist.

Satz 19.18. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und sternförmig und $f \in C^1(G;\mathbb{R}^d)$ erfülle die Integrabilitätsbedingung, d. h. für alle Wahlen von $j,k \in \{1,2,\ldots,d\}$ haben wir $\partial_j f_k = \partial_k f_j$. Dann besitzt f ein Potenzial auf G.*

Beweis. Sei $x_0 \in G$ ein Punkt, so dass $\overline{xx_0} \subseteq G$ für alle $x \in G$ gilt. Dann können wir für jedes $x \in G$ wieder die Kurven $\gamma_{x_0,x}$ wie im Beweis von Satz 19.13 betrachten und diese haben Ihre Spur wieder alle innerhalb G. Unser Kandidat für das Potenzial von f ist dann wieder $\varphi : G \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_{x_0,x}} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 f(\gamma_{x_0,x}(t))\gamma'_{x_0,x}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x-x_0)\,\mathrm{d}t.$$

Nach Satz 18.4 ist diese Funktion nach jedem x_j differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}\partial_j\varphi(x) &= \int_0^1 \partial_j\big[f\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x-x_0)\big]\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \big[\partial_j f\big(x_0+t(x-x_0)\big)t(x-x_0) + f\big(x_0+t(x-x_0)\big)e_j\big]\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \big[t\partial_j f\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x-x_0) + f_j\big(x_0+t(x-x_0)\big)\big]\,\mathrm{d}t. \qquad (19.2)\end{aligned}$$

Andererseits ist mit Hilfe der vorausgesetzten Integrabilitätsbedingung

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[tf_j\big(x_0+t(x-x_0)\big)\big]\\ &= f_j\big(x_0+t(x-x_0)\big) + t\nabla f_j\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x-x_0)\\ &= f_j\big(x_0+t(x-x_0)\big) + t\sum_{k=1}^d \partial_k f_j\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x_k-x_{0,k})\\ &= f_j\big(x_0+t(x-x_0)\big) + t\sum_{k=1}^d \partial_j f_k\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x_k-x_{0,k})\\ &= f_j\big(x_0+t(x-x_0)\big) + t\partial_j f\big(x_0+t(x-x_0)\big)(x-x_0)\end{aligned}$$

und der letzte Ausdruck stimmt genau mit dem Integranden aus (19.2) überein. Zusammen haben wir also

$$\partial_j\varphi(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[tf_j\big(x_0+t(x-x_0)\big)\big]\,\mathrm{d}t$$

und mit dem Hauptsatz folgt

$$\partial_j\varphi(x) = tf_j\big(x_0+t(x-x_0)\big)\Big|_{t=0}^{t=1} = f_j(x_0+x-x_0) = f_j(x).$$

Also ist φ ein Potenzial von f auf G. ☐

Im $\mathbb{R}^3$ kann die Integrabilitätsbedingung schön mit Hilfe der sogenannten Rotation eines Vektorfeldes geschrieben werden.

Definition 19.19. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $f \in C^1(G;\mathbb{R}^3)$. Dann ist die* Rotation *von f gegeben durch*

$$\mathrm{rot} f(x) := \begin{pmatrix} \partial_2 f_3(x) - \partial_3 f_2(x) \\ \partial_3 f_1(x) - \partial_1 f_3(x) \\ \partial_1 f_2(x) - \partial_2 f_1(x) \end{pmatrix}, \qquad x \in G.$$

Bemerkung 19.20. Ein optischer Abgleich mit der Integrabilitätsbedingung aus (19.1) zeigt, dass eine Funktion $f \in C^1(G,\mathbb{R}^3)$ mit $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen die Integrabilitätsbdingung genau dann erfüllt, wenn $\mathrm{rot} f = 0$ auf G ist.

Tabelle der griechischen Buchstaben

groß	klein	Name
A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ϵ, ε	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	θ, ϑ	Theta
I	ι	Iota
K	κ, $\varkappa$	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	My
N	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omikron
Π	π, ϖ	Pi
P	ρ, ϱ	Rho
Σ	σ, ς	Sigma
T	τ	Tau
Y	υ	Ypsilon
Φ	ϕ, φ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

Index