Kurzskript zur Vorlesung
Mathematik I und II
für Maschinenbau und Bauingenieurwesen

Prof. Dr. Ulrich Reif
Prof. Dr. Priska Jahnke
PD. Dr. Robert Haller-Dintelmann

Vorbemerkung:

Im vorliegenden Kurzskript werden wesentliche Begriffe, Resultate und Methoden zu den Vorlesungen Mathematik I und II zusammen gestellt. Aufgrund des skizzenhaften Charakters kann es weder den Besuch der Vorlesung noch der Übungen ersetzen.

Korrekturen senden Sie bitte per Email an `reif@mathematik.tu-darmstadt.de`.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe und Bezeichnungen

1.1 Mengen: Die mathematisch korrekte Definition des Mengenbegriffs ist eine überraschend komplizierte Angelegenheit. Für unsere Zwecke genügt aber eine „naive“ Beschreibung, die auf Georg Cantor zurückgeht. Demnach ist eine *Menge* eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte der Menge heißen *Elemente* der Menge. Wenn m ein Element der Menge M ist, dann schreiben wir $m \in M$ und anderenfalls $m \notin M$. Mengen können auf unterschiedliche Weise angegeben werden:

- vollständige Aufzählung, z.B. $P = \{\text{Hund, Biene, Spinne}\}$
- unvollständige Aufzählung, z.B. $Q = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$
- Angabe von Eigenschaften, z.B. $R = \{x \in \mathbb{N} : |x - 5| < 3\}$, lies *„$R$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen x mit der Eigenschaft, dass sich x von der Zahl 5 um weniger als 3 unterscheidet“.*

Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ bezeichnet. Zur Abkürzung verwenden wir folgende Pfeile:

$\Rightarrow$ lies: *daraus folgt,* $\Leftrightarrow$ lies: *genau dann wenn*

1.2 Mengen von Zahlen: Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	natürliche Zahlen mit 0
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N}\}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R} =$ Menge aller Dezimalzahlen	reelle Zahlen
$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$	positive reelle Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$	nichtnegative reelle Zahlen
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	offenes Intervall
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	halboffenes Intervall
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	halboffenes Intervall
$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$	Menge der komplexen Zahlen

1.3 Beziehungen zwischen Mengen:

- *Gleichheit:* Zwei Mengen stimmen genau dann überein, wenn Sie dieselben Elemente haben. Dabei ist die Reihenfolge unerheblich, z.B. gilt im Beispiel oben $R = \{7, 4, 3, 6, 5\} = \{3, 4, 5, 7, 6\}$.
- *Teilmenge:* Wenn jedes Element einer Menge A auch in der Menge B enthalten ist, dann heißt A *Teilmenge von* B und B heißt *Obermenge* von A. Wir schreiben dann
$$A \subset B \quad \text{oder auch} \quad B \supset A.$$

1.4 Mengenoperationen: Seien A und B zwei Mengen, dann definieren wir:

- *Vereinigung:* Die Vereinigung von A und B enthält alle Elemente, die in A oder B enthalten sind,
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$
- *Schnitt:* Der Schnitt von A und B enthält alle Elemente, die in A und B enthalten sind,
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}.$$
- *Differenz:* Die Differenz von A und B enthält alle Elemente, die in A, aber nicht in B enthalten sind,
$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$
- *Kartesisches Produkt:* Das kartesische Produkt von A und B ist die Menge aller geordneten Paare, deren erstes Element in A und deren zweites Element in B liegt,
$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ und } y \in B\}.$$
Für das kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst schreibt man auch $A^2 = A \times A$.

1.5 Beispiel: Sei $A = [-2, 4]$ und $B = (1, 5]$. Dann gilt
$$A \cup B = [-2, 5], \quad A \cap B = (1, 4], \quad A \setminus B = [-2, 1].$$
Das kartesische Produkt $A \times B$ bildet ein Rechteck in der Ebene.

1.6 Funktionen: Eine Vorschrift f, die *jedem* Element x einer Menge D genau ein Element y einer anderen Menge Z zuordnet, heißt *Funktion*. Wir schreiben dann
$$f : D \to Z, \quad f(x) = y.$$
Die Menge D heißt *Definitionsmenge* von f, die Menge Z heißt *Zielmenge* von f. Es heißt x *Argument von* f oder *Urbild von* y, y *Bild* von x. Die *Bildmenge* von f ist $B = \{f(x) : x \in D\}$; das ist eine Teilmenge von Z, also $B \subset Z$.

1.7 Beispiel:

- Seien P und Q die Mengen aus Abschnitt 1.1 und $f : P \to Q^2$ die Funktion, die jedem Tier die Zahl seiner Beine und die Zahl seiner Augen zuordnet. Dann ist
$$f(\text{Hund}) = (4, 2), \quad f(\text{Biene}) = (6, 2), \quad f(\text{Spinne}) = (8, 8),$$
und die Bildmenge ist $B = \{(4, 2), (6, 2), (8, 8)\}$.
- Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion, die jedem Punkt der Ebene seinen Abstand zum Ursprung zuordnet, dann ist
$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
und die Bildmenge ist $B = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

- Die Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl ihre Teiler zuweist, ist keine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, da es Argumente gibt, denen mehr als ein Element der Zielmenge zugewiesen wird.

- Die Vorschrift, die jeder reellen Zahl ihren Kehrwert zuweist, ist keine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, da der Kehrwert von 0 nicht definiert ist.

1.8 Eigenschaften von Funktionen: Eine Funktion $f : D \to Z$ heißt

- *injektiv*, wenn voneinander verschiedene Argumente auch voneinenader verschiedene Bilder besitzen,
$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2),$$

- *bijektiv*, wenn sie injektiv ist und die Bildmenge mit der Zielmenge übereinstimmt.

1.9 Beispiel:

- Die Funktion $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = x^2$ ist weder injektiv noch bijektiv (nicht injektiv, da z.B. $f_1(1) = f_1(-1)$).

- Die Funktion $f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, f_2(x) = x^2$ ist injektiv, aber nicht bijektiv (Bildmenge ist $B = \mathbb{R}_{\geq 0}$, Zielmenge ist $\mathbb{R}$).

- Die Funktion $f_3 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f_3(x) = x^2$ ist bijektiv.

Man beachte, dass alle drei Funktion trotz der übereinstimmenden Funkionsvorschrift voneinander verschieden sind, da die Definitions- und Zielmengen nicht gleich sind.

1.10 Umkehrfunktion: Sei $f : D \to B$ eine bijektive Funktion, dann gibt es zu jedem Element der Menge B genau ein Urbild in D. Die Vorschrift, die jedem $y \in B$ das Urbild $x \in D$ zuweist, ist eine Funktion von B nach D und wird als *Umkehrfunktion* bezeichnet,

$$f^{-1} : B \to D, \quad f^{-1}(y) = x \ \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Es gilt dann
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$
für alle $x \in D$ und alle $y \in B$.

1.11 Beispiel [$\to$ 1.9]: Die Funktion f_3 ist bijektiv und ihre Umkehrfunktion hat die Form
$$f_3^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f_3^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

1.12 Verkettung: Seien $f : D_f \to Z_f$ und $g : D_g \to Z_g$ zwei Funktionen. Wenn $B_f \subset D_g$ gilt, dann ist die *Verkettung* $h = g \circ f$ (lies "g nach f") definiert durch

$$h : D_f \to Z_g, \quad h(x) = g(f(x)).$$

1.13 Beispiel [$\to$ 1.7]: Die Verkettung $h = g \circ f$ ist definiert, da die Bildmenge Q^2 von f eine Teilmenge der Definitionsmenge $\mathbb{R}^2$ von g ist. h ist eine Funktion von P nach $\mathbb{R}$ mit
$$h(\text{Hund}) = 2\sqrt{5}, \quad h(\text{Biene}) = 2\sqrt{10}, \quad h(\text{Spinne}) = 8\sqrt{2}.$$

1.14 Summenzeichen: Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

1.15 Beispiel:

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{j=1}^{n} j \quad (= \frac{n(n+1)}{2})$
- $\sum_{j=3}^{7} j^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 (= 135)$
- $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} (\frac{3}{2})$

1.16 Rechenregeln: Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

- Ausklammern/Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} c \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} c a_k \\ (c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) &= c a_1 + c a_2 + \cdots + c a_n) \end{aligned}$$

- Summe zweier Summen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$$

- Für $m < n$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

- Indexverschiebung:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{l=18}^{n+17} a_{l-17}$$

2 Vektorrechnung

2.1 Vektoren in $\mathbb{R}^n$: Die Menge aller *Vektoren*

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$$

mit *Koordinaten* $x_i \in \mathbb{R}$ wird mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Speziell erhält man für $n = 1$ die Zahlengerade $\mathbb{R}$, für $n = 2$ die Ebene $\mathbb{R}^2$ und für $n = 3$ den Raum $\mathbb{R}^3$.
Vektoren wie oben werden auch als *Punkte* im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Wir identifizieren beide Begriffe und verstehen unter einem Vektor $\vec{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ sowohl die Verbindungsstrecke von $\vec{0} = [0, \ldots, 0]^T$ nach $[x_1, \ldots, x_n]^T$, als auch den Endpunkt der Verbindungsstrecke mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$.

2.2 Rechnen mit Vektoren: Sei $\vec{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ und $\vec{y} = [y_1, \ldots, y_n]^T$, dann gilt

- *Addition, Subtraktion:*

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \quad \vec{x} - \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{bmatrix}$$

- *Skalarmultiplikation:*

$$\alpha\vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

  Insbesondere ist $1\vec{x} = \vec{x}$, $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$ und $0\vec{x} = \vec{0}$.

- *Distributivgesetze:*

$$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}, \quad \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2.3 Norm eines Vektors: Die *euklidische Norm* des Vektors $\vec{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ ist durch

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

definiert. Sie gibt die Länge des Vektors im geometrischen Sinne an und hat folgende Eigenschaften:

- *Positive Definitheit:*

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\| &> 0 \quad \text{für} \quad \vec{x} \neq \vec{0} \\ \|\vec{x}\| &= 0 \quad \text{für} \quad \vec{x} = \vec{0} \end{aligned}$$

- *Homogenität:*

$$\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\,\|\vec{x}\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- *Dreiecksungleichung:*

$$\begin{aligned} \|\vec{x}+\vec{y}\| &\leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \\ \|\vec{x}-\vec{y}\| &\geq |\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| \end{aligned}$$

2.4 Normierung: Sei $\vec{x} \neq \vec{0}$ ein Vektor, dann erhält man durch die *Normierung*

$$\vec{x}_0 := \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

einen Vektor $\vec{x}_0$ der Länge 1, der dieselbe Richtung wie $\vec{x}$ besitzt.

2.5 Skalarprodukt: Das *Skalarprodukt* zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ heißen *orthogonal*, wenn

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0.$$

Die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ stehen dann im geometrischen Sinne senkrecht aufeinander. Der Nullvektor ist orthogonal zu allen anderen Vektoren. Skalarprodukt und Norm sind durch die Formeln

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|^2 &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \frac{1}{4}\big(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\big) \end{aligned}$$

verknüpft.

2.6 Eigenschaften:

- *Symmetrie:*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$$

- *Linearität*

$$\begin{aligned} \alpha\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \langle \alpha\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \alpha\vec{y} \rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle &= \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle \\ \langle \vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle \end{aligned}$$

- *Binomische Formel:*

$$\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

- Sei φ der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$, dann gilt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos\varphi.$$

- *Cauchy-Schwarz-Ungleichung:*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

2.7 Vektorprodukt: Das *Vektorprodukt* (auch Kreuzprodukt genannt) zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}.$$

Das Ergebnis $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ ist also wieder ein Vektor in $\mathbb{R}^3$.

2.8 Eigenschaften:

- *Antisymmetrie:*
$$\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$$
  Daraus folgt insbesondere
$$\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}.$$

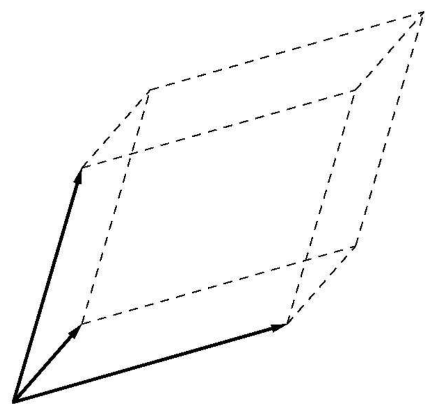
- *Linearität:*
$$\begin{aligned} \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) &= (\alpha\vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (\alpha\vec{y}), \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \times \vec{y} &= \vec{x}_1 \times \vec{y} + \vec{x}_2 \times \vec{y} \\ \vec{x} \times (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) &= \vec{x} \times \vec{y}_1 + \vec{x} \times \vec{y}_2 \end{aligned}$$

- *Orthogonalität:*
$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0$$

- Sei φ der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$, dann gilt
$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot |\sin\varphi|.$$
  $\vec{x} \times \vec{y}$ ist also ein Vektor, der senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$ steht und als Länge den Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms besitzt.

- Die drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}$ bilden in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem*. Das heißt anschaulich gesprochen folgendes: Wenn der Daumen und der Zeigefinger der rechten Hand in Richtung $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zeigen, dann zeigt der Mittelfinger in Richtung $\vec{x} \times \vec{y}$.

- *Spatprodukt:* Ist $\vec{w}$ ein weiterer Vektor im $\mathbb{R}^3$, so beschreibt der Betrag von $\langle \vec{w}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle$ das Volumen des durch $\vec{w}, \vec{x}, \vec{y}$ aufgespannten *Parallelepipeds* (oder *Spat*).



Das Vorzeichen von $\langle \vec{w}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle$ gibt an, ob $\vec{w}, \vec{x}, \vec{y}$ ein Rechtssystem (positiv) oder ein Linkssystem (negativ) ist. Es gilt:

$$\langle \vec{w}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{w} \times \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{w} \rangle.$$

2.9 Geraden in $\mathbb{R}^n$: Seien $\vec{p}$ und $\vec{r}$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und $\vec{r} \neq 0$. Die Gleichung

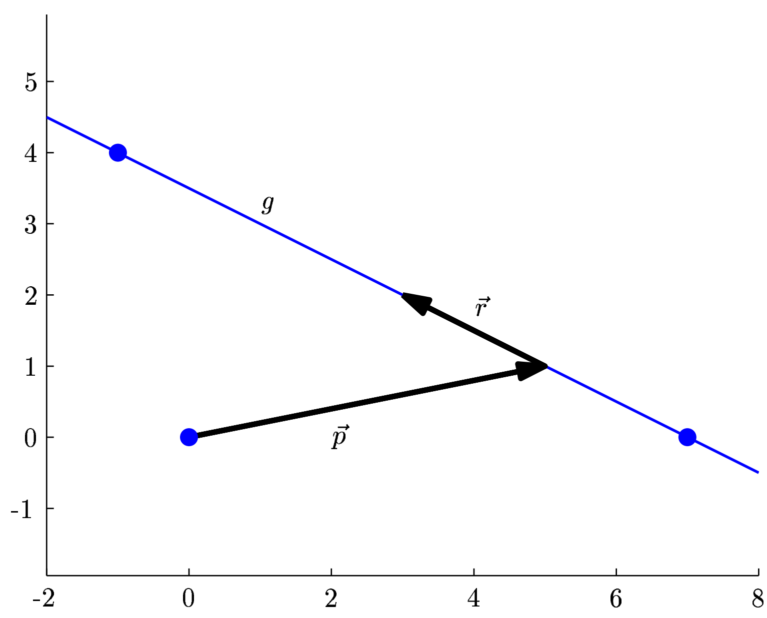
$$g \;:\; \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

beschreibt eine *Gerade in $\mathbb{R}^n$ in parametrisierter Form*. Man bezeichnet $\vec{p}$ als *Aufpunkt*, $\vec{r}$ als *Richtungsvektor* und λ als *Parameter* der Geraden g.

2.10 Beispiel: Im Bild ist $\vec{p} = [5, 1]^T$ und $\vec{r} = [-2, 1]^T$, also

$$g \;:\; \vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Für $\lambda = 3$ erhält man den Punkt $\vec{x} = [-1, 4]^T$ und für $\lambda = -1$ den Punkt $\vec{x} = [7, 0]^T$.



2.11 Abstand Punkt-Gerade: Der *Abstand* $d(\vec{q}, g)$ eines Punktes $\vec{q}$ von der Geraden $g : \vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{r}$ ist definiert als

$$d(\vec{q}, g) := \min_{\vec{x} \in g} \|\vec{x} - \vec{q}\|.$$

Dies ist also der kleinste Abstand, den ein Punkt auf der Geraden von $\vec{q}$ haben kann. Der Punkt $\vec{x}^* = \vec{p} + \lambda^*\vec{r}$, für den dieses Minimum angenommen wird, ist dadurch gekennzeichnet, dass der Verbindungsvektor zum Punkt $\vec{q}$ senkrecht zum Richtungsvektor $\vec{r}$ der Geraden ist,

$$\langle \vec{x}^* - \vec{q}, \vec{r} \rangle = \langle \vec{p} - \vec{q} + \lambda^*\vec{r}, \vec{r} \rangle = 0.$$

Löst man diese Gleichung nach λ^* auf, so erhält man

$$\lambda^* = \frac{\langle \vec{q} - \vec{p}, \vec{r} \rangle}{\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle}$$

und damit $\vec{x}^*$. Schließlich ist

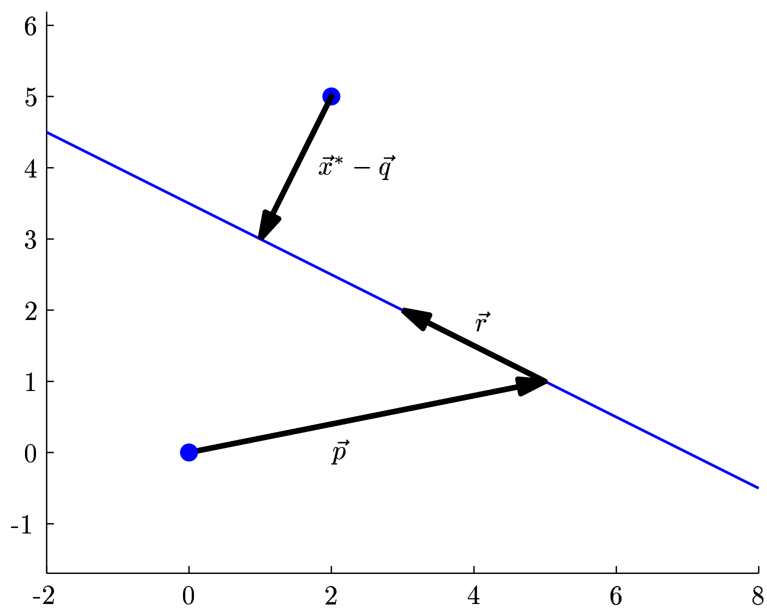
$$d(\vec{q}, g) = \|\vec{x}^* - \vec{q}\|.$$

2.12 Beispiel [→ 2.10]: Für $g : \vec{x} = [5, 1]^T + \lambda[-2, 1]^T$ und $\vec{q} = [2, 5]^T$ ist

$$\lambda^* = 2 \quad \text{und} \quad \vec{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Damit erhält man

$$d(\vec{q}, g) = \|\vec{x}^* - \vec{q}\| = \sqrt{5}.$$



2.13 Implizite Form von Geraden in $\mathbb{R}^2$: Sei

$$g \;:\; \vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{r}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ und $\vec{n} \neq \vec{0}$ ein *Normalenvektor*. Dies ist ein Vektor, der senkrecht auf $\vec{r}$ steht, also $\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = 0$. Multipliziert man die Gleichung der Geraden skalar mit $\vec{n}$, dann erhält man die *implizite Form*

$$g \; : \; \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle.$$

Die Gerade g ist also die Menge aller Punkte $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, die diese Gleichung erfüllen. Auf der linken Seite steht eine Linearkombination der Komponenten von $\vec{x}$, und auf der rechten Seite steht die Konstante $d := \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle \in \mathbb{R}$. Einen Normalenvektor $\vec{n}$ erhält man beispielsweise gemäß

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} := \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}.$$

Damit lautet die implizite Form

$$g \; : \; bx - ay = d.$$

2.14 Hessesche Normalform: Normiert man speziell den Normalenvektor $\vec{n}$ auf Länge 1 [$\rightarrow$ 2.4], das heißt

$$\vec{n}_0 := \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|},$$

dann lautet die implizite Form einer Geraden g in $\mathbb{R}^2$

$$g \; : \; \langle \vec{x}, \vec{n}_0 \rangle = d_0, \quad \text{wobei} \quad d_0 := \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{d}{\|\vec{n}\|}.$$

Diese bezeichnet man als die *Hessesche Normalform* der Geraden g. Sie ist dadurch ausgezeichnet, dass der Betrag der Konstanten d_0 den Abstand der Geraden vom Ursprung angibt, also

$$d(\vec{0}, g) = |d_0|.$$

Der Abstand eines beliebigen Punktes $\vec{q} \in \mathbb{R}^2$ von der Geraden ist durch

$$d(\vec{q}, g) = |d_0 - \langle \vec{q}, \vec{n}_0 \rangle|$$

gegeben.

2.15 Beispiel [$\rightarrow$ 2.12]: Sei $g : \vec{x} = [5, 1]^T + \lambda[-2, 1]^T$ und $\vec{q} = [2, 5]^T$. Man erhält

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad d = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = 7$$

und damit die implizite Form

$$g \; : \; x + 2y = 7.$$

Beispielsweise erfüllen die Punkte $x = 7, y = 0$ und $x = -1, y = 4$ diese Gleichung [$\rightarrow$ 2.10]. Die Normierung

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad d_0 = \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

liefert die Hessesche Normalform

$$g \; : \; \frac{1}{\sqrt{5}}\, x + \frac{2}{\sqrt{5}}\, y = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Der Abstand der Geraden vom Ursprung ist also $d_0 = 7/\sqrt{5}$. Der Abstand des Punktes $\vec{q} = [2, 5]^T$ ist wie zuvor

$$d(\vec{q}, g) = |7/\sqrt{5} - \langle [2, 5]^T, [1, 2]^T \rangle / \sqrt{5}| = \sqrt{5}.$$

2.16 Ebenen in $\mathbb{R}^3$: Seien $\vec{p}, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$ und $\vec{n} := \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \neq \vec{0}$. Die Gleichung

$$E \;:\; \vec{x} = \vec{p} + \lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

beschreibt eine *Ebene in* $\mathbb{R}^3$ *in parametrisierter Form.* Man bezeichnet $\vec{p}$ als *Aufpunkt*, $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ als *Richtungsvektoren*, $\vec{n}$ als *Normalenvektor* und λ_1, λ_2 als *Parameter* der Ebene.

2.17 Abstand Punkt-Ebene: Der *Abstand* $d(\vec{q}, E)$ eines Punktes $\vec{q}$ von der Ebene $\vec{x} = \vec{p} + \lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2$ ist definiert als

$$d(\vec{q}, E) := \min_{\vec{x} \in E} \|\vec{x} - \vec{q}\|.$$

Dies ist also der kleinste Abstand, den ein Punkt auf der Ebene von $\vec{q}$ haben kann. Der Punkt $\vec{x}^* = \vec{p} + \lambda_1^* \vec{r}_1 + \lambda_2^* \vec{r}_2$, für den dieses Minimum angenommen wird, ist dadurch gekennzeichnet, dass der Verbindungsvektor zum Punkt $\vec{q}$ senkrecht zu beiden Richtungsvektoren $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ der Ebene ist, d.h.,

$$\vec{x}^* - \vec{q} = \mu \vec{n}.$$

Multipliziert man diese Gleichung skalar mit $\vec{n}$, dann erhält man

$$\langle \vec{p} - \vec{q}, \vec{n} \rangle = \mu \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\langle \vec{p} - \vec{q}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2},$$

da $\langle \vec{r}_1, \vec{n} \rangle = \langle \vec{r}_2, \vec{n} \rangle = 0$. Der Abstand ist also

$$d(\vec{q}, E) = \|\mu \vec{n}\| = |\mu| \cdot \|\vec{n}\| = \frac{|\langle \vec{p} - \vec{q}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|}.$$

Man beachte die Analogie zur Berechnung des Abstands Gerade-Gerade.

2.18 Beispiel: Sei $\vec{p} = [1, 1, 5]^T$, $\vec{r}_1 = [3, 0, 1]^T$ und $\vec{r}_2 = [1, 2, -1]^T$, also

$$E \;:\; \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Dann ist der Normalenvektor gegeben durch

$$\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{56}.$$

Der Abstand des Punktes $\vec{q} = [1, 0, 7]^T$ von der Ebene ist

$$d(\vec{q}, E) = \frac{|-8|}{\sqrt{56}} = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

Dabei ist $\mu = -1/7$ und $\vec{x}^* = [9/7, -4/7, 43/7]^T$.

2.19 Implizite Form von Ebenen in $\mathbb{R}^3$: Sei

$$E \ : \ \vec{x} = \vec{p} + \lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ mit Normalenvektor $\vec{n}$. Multipliziert man die Gleichung der Ebene skalar mit $\vec{n}$, dann erhält man die *implizite Form*

$$E \ : \ \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle.$$

Die Ebene E ist also die Menge aller Punkte $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, die diese Gleichung erfüllen. Auf der linken Seite steht eine Linearkombination der Komponenten von $\vec{x}$, und auf der rechten Seite steht die Konstante $d := \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle \in \mathbb{R}$.

2.20 Hessesche Normalform: Normiert man speziell den Normalenvektor $\vec{n}$ auf Länge 1, d.h.,

$$\vec{n}_0 := \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|},$$

dann lautet die implizite Form

$$E \ : \ \langle \vec{x}, \vec{n}_0 \rangle = d_0, \quad \text{wobei} \quad d_0 := \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{d}{\|\vec{n}\|}.$$

Diese bezeichnet man als die *Hessesche Normalform* der Ebene E. Sie ist dadurch ausgezeichnet, dass der Betrag der Konstanten d_0 den Abstand der Ebene vom Ursprung angibt, also

$$d(\vec{0}, E) = |d_0|.$$

Der Abstand eines beliebigen Punktes $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$ von der Ebene ist durch

$$d(\vec{q}, E) = |d_0 - \langle \vec{q}, \vec{n}_0 \rangle|$$

gegeben.

2.21 Beispiel [$\to$ 2.18]: Mit $\vec{p} = [1, 1, 5]^T$, $\vec{n} = [-2, 4, 6]^T$ und $\vec{x} = [x, y, z]^T$ erhält man $d = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = 32$ und damit die implizite Form

$$E \ : \ -2x + 4y + 6z = 32.$$

Die Normierung

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad d_0 = \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{16}{\sqrt{14}}$$

liefert die Hessesche Normalform

$$E \ : \ \frac{-1}{\sqrt{14}} x + \frac{2}{\sqrt{14}} y + \frac{3}{\sqrt{14}} z = \frac{16}{\sqrt{14}}.$$

Der Abstand der Ebene vom Ursprung ist also $d_0 = 16/\sqrt{14}$, und der Abstand des Punktes $\vec{q} = [1, 0, 7]^T$ von der Ebene ist wie zuvor

$$d(\vec{q}, E) = \left|16/\sqrt{14} - 20/\sqrt{14}\right| = 4/\sqrt{14}.$$

2.22 Schnitt Ebene-Gerade: Zur Berechnung des Schnittpunkts $\vec{x}^*$ einer Ebene E mit einer Geraden g in $\mathbb{R}^3$ verwendet man zweckmäßigerweise für die Ebene die implizite und für die Gerade die parametrische Form,

$$\begin{aligned} E \ &: \ \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = d \\ g \ &: \ \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Setzt man die Geradengleichung in die Ebenengleichung ein, so erhält man die Bedingung

$$\langle \vec{p}, \vec{n} \rangle + \lambda^* \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = d \tag{2.1}$$

für den Parameter λ^* des Schnittpunkts. Nun sind folgende Fälle zu unterscheiden:

- Falls $\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle \neq 0$, dann ist der Schnittpunkt eindeutig bestimmt und durch

  $$\vec{x}^* = \vec{p} + \frac{d - \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle} \vec{r}$$

  gegeben.

- Falls $\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = 0$ und $\langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = d$, dann ist Gleichung (2.1) für alle $\lambda^* \in \mathbb{R}$ erfüllt; es gibt also unendlich viele Lösungen. Dies bedeutet, dass die Gerade parallel zur Ebene ist und vollständig in dieser liegt.

- Falls $\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = 0$ und $\langle \vec{p}, \vec{n} \rangle \neq d$, dann ist Gleichung (2.1) für kein $\lambda^* \in \mathbb{R}$ erfüllt; es gibt also keinen Schnittpunkt. Dies bedeutet, dass die Gerade parallel zur Ebene ist und nicht in dieser liegt.

2.23 Lineare Teilräume: Eine nichtleere Teilmenge $L \subset \mathbb{R}^n$ heißt *linearer Teilraum*, wenn für $\vec{x}, \vec{y} \in L$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ stets auch

$$\vec{x} + \vec{y} \in L, \qquad \alpha \vec{x} \in L.$$

Ein linearer Teilraum muss also mit zwei Vektoren stets deren Summe und mit jedem Vektor dessen Vielfache enthalten. Wegen $L \neq \emptyset$ ist stets $\vec{0} = 0\vec{x} \in L$.

2.24 Beispiel:

- $\mathbb{R}^n$ und $\{\vec{0}\}$ sind lineare Teilräume von $\mathbb{R}^n$.

- $L_1 = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_2 = 0\}$ ist ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^2$.

- $L_2 = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_2 > 0\}$ ist kein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^2$, da zum Beispiel $\vec{0} \notin U_2$.

- Die liearen Teilräume der Ebene $\mathbb{R}^2$ sind Ursprungsgeraden, $\mathbb{R}^2$ und $\{\vec{0}\}$. Die linearen Teilräume von $\mathbb{R}^3$ sind Ursprungsgeraden, Ursprungsebenen, $\mathbb{R}^3$ und $\{\vec{0}\}$.

2.25 Linearkombination und linearer Spann: Seien $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ reelle Zahlen. Dann nennt man den Vektor

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{p}_1 + \cdots + \lambda_m \vec{p}_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{p}_i$$

eine *Linearkombination* der Vektoren $\vec{p}_i$ mit Koeffizienten λ_i.
Betrachtet man alle möglichen Linearkombinationen von $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$ zugleich, so erhält man einen linearen Teilraum von $\mathbb{R}^n$, der mit $Lin(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m)$ bezeichnet wird:

$$Lin(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m) = \{\lambda_1 \vec{p}_1 + \cdots + \lambda_m \vec{p}_m : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\}.$$

Ist $\vec{p}_1 \neq \vec{0}$, so ist $Lin(\vec{p}_1)$ die Gerade in Richtung $\vec{p}_1$ durch den Ursprung. Sind $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ keine Vielfachen voneinander, insbesondere also keiner $= \vec{0}$, so ist $Lin(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ die durch $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ aufgespannte Ebene durch den Ursprung.

2.26 Lineare Unabhängigkeit: Die Vekoren $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$ heißen *linear unabhängig*, wenn man den Nullvektor nur dann als Linearkombination erhält, wenn alle Koeffizienten Null sind. Es muss also gelten:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{p}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$$

Kann der Nullvektor auch anders gebildet werden, also mit mindestens einem $\lambda_i \neq 0$, so heißen $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$ *linear abhängig*.

2.27 Beispiel:

- Die *Einheitsvektoren*

$$\vec{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \; \dots \;, \vec{e}_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

  sind linear unabhängig, denn aus

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \vec{0}$$

  folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

- Ebenfalls linear unabhängig sind

$$\vec{x}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

  Dagegen sind

$$\vec{y}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{y}_2 := \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

  linear abhängig, denn $2\vec{y}_1 + \vec{y}_2 = \vec{0}$.

2.28 Basis und Dimension: Sei $L \subset \mathbb{R}^n$ ein linearer Teilraum und $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m \in L$. Wenn $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m$ linear unabhängig sind und $L = Lin(\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m)$ gilt, so heißen $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m$ eine *Basis von* L, und wir sagen L *hat Dimension* m oder kurz $\dim L = m$.

2.29 Beispiel [$\rightarrow$ **2.27**]:

- Die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Insbesondere ist

  $$\dim \mathbb{R}^n = n.$$

  Dagegen ist $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ keine Basis des $\mathbb{R}^n$, denn $\vec{e}_1 \notin Lin(\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$.

- Die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$, die Vektoren $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ aber nicht.

- Ist $g : \vec{x} = \lambda \vec{r}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Ursprungsgerade, so ist $\dim(g) = 1$; die Dimension einer Ebene $E : \vec{x} = \lambda_1 \vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ist zwei.

2.30 Eigenschaften: Ist L ein linearer Teilrraum von $\mathbb{R}^n$, so gilt:

- Es gibt eine Basis von L.

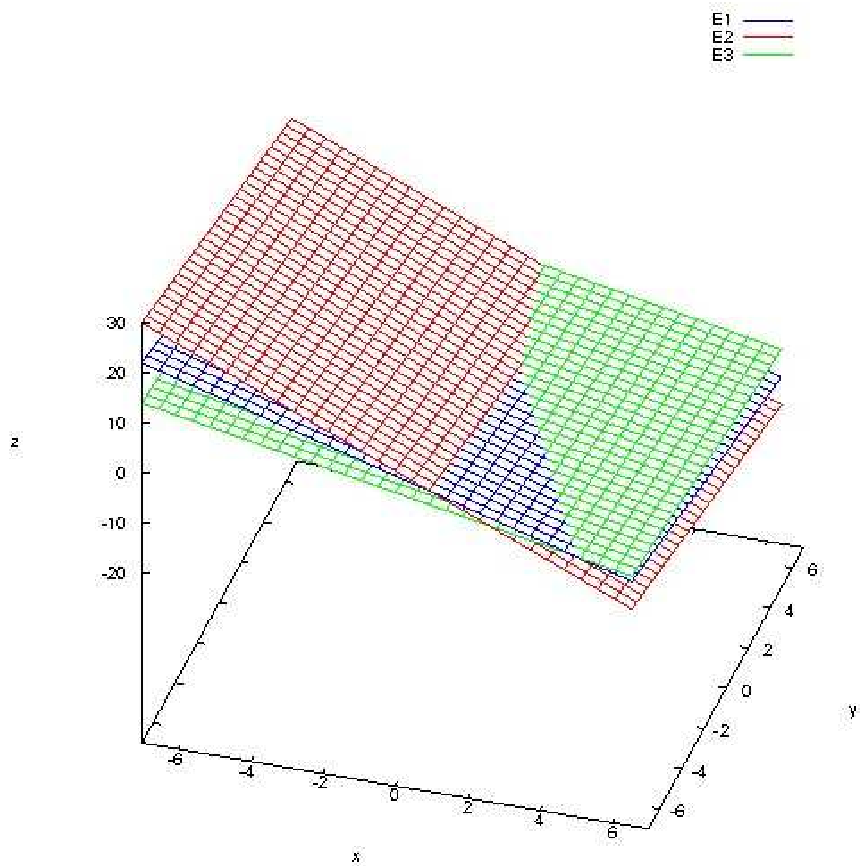
- Zwei verschiedene Basen von L bestehen immer aus gleich vielen Vektoren.

- $\dim L \leq n$.

3 Lineare Gleichungssysteme

3.1 Beispiel: Man berechne den Schnittpunkt der drei Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 &: 2x + y + z = 1 \\ E_2 &: 3x + y + z = 2 \\ E_3 &: 4x + 2y + 3z = 0 \end{aligned}$$



Subtrahiert man das dreifache der ersten Zeile vom doppelten der zweiten Zeile, so erhält man die Bedingung

$$-y - z = 1.$$

Subtrahiert man das doppelte der ersten Zeile von der dritten Zeile, so erhält man die Bedingung

$$z = -2.$$

Setzt man dies in die vorherige Gleichung ein, so erhält man die Bedingung

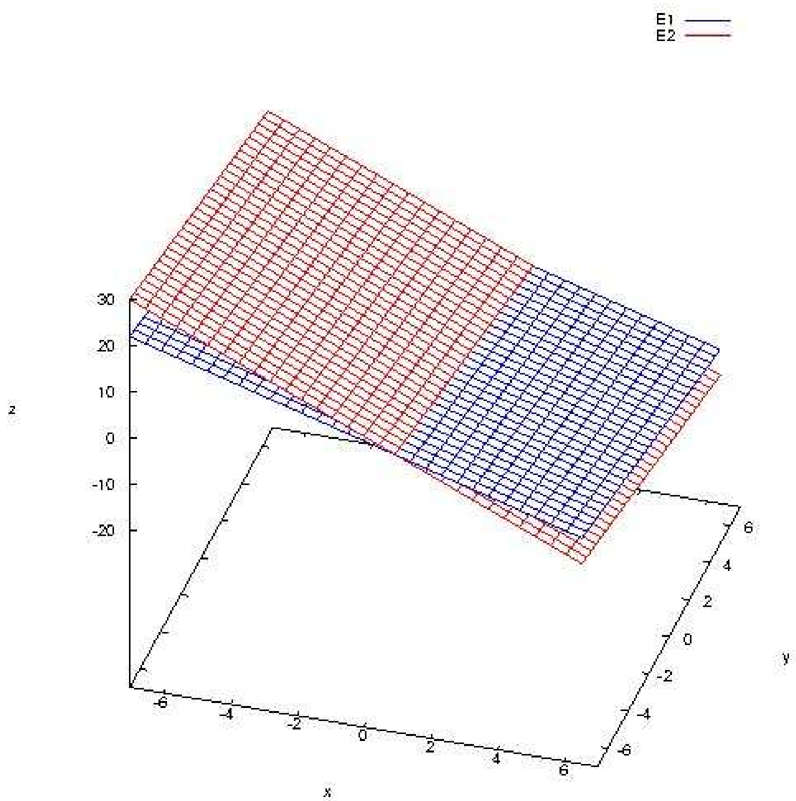
$$-y + 2 = 1$$

und damit den Wert $y = 1$. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so erhält man die Bedingung

$$2x + 1 - 2 = 1$$

und damit den Wert $x = 1$. Der Schnittpunkt ist also $\vec{x} = [1, 1, -2]^T$.

3.2 Beispiel [→ 3.1]: Es soll die Schnittmenge der Ebenen E_1 und E_2 berechnet werden.



Wie zuvor erhält man aus E_1 und E_2 die Bedingung

$$-y - z = 1.$$

Da keine weiteren Bedingungen vorhanden sind, kann man beispielsweise der Variablen z einen beliebigen Wert zuordnen, sagen wir

$$z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Damit ergibt sich

$$-y - t = 1 \quad \Rightarrow \quad y = -1 - t.$$

Setzt man dies in die Gleichung von E_1 ein, so erhält man die Bedingung

$$2x + (-t - 1) + t = 1$$

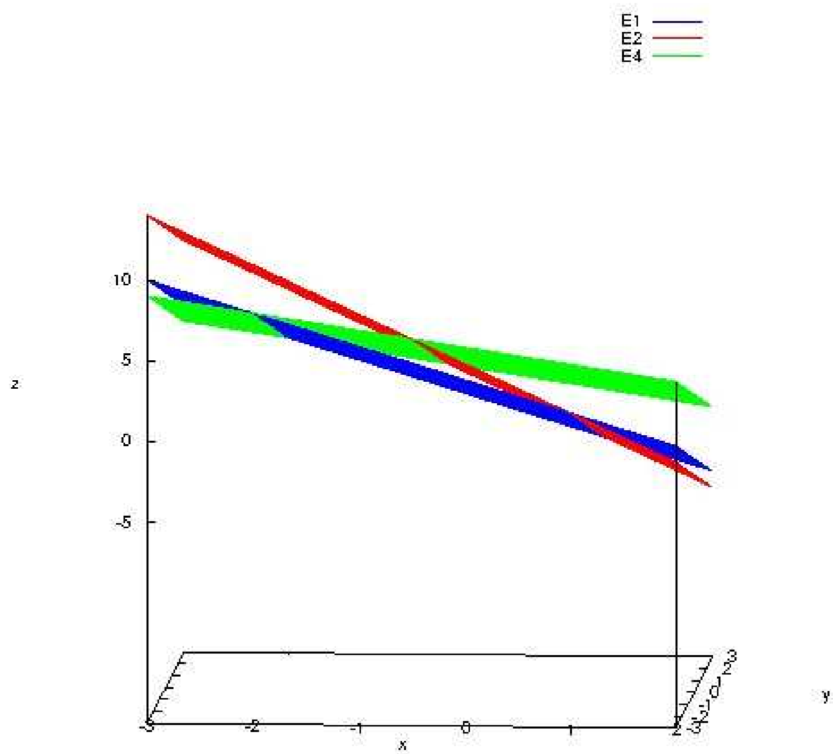
und damit $x = 1$. Die Menge aller Schnittpunkte ist also gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -t-1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungsmenge ist also eine Gerade.

3.3 Beispiel [$\rightarrow$ 3.1]: Gesucht ist der Schnittpunkt der Ebenen E_1, E_2 und E_4, wobei

$$E_4 \ : \ x + y + z = 3.$$



Subtrahiert man vom doppelten dieser Gleichung die Gleichung von E_1, so erhält man die Bedingung

$$y + z = 5.$$

Außerdem folgt aus den Gleichungen für E_1 und E_2 wie zuvor

$$-y - z = 1.$$

Addiert man die beiden letzten Gleichungen, so erhält man den Widerspruch

$$0 = 6.$$

Es gibt also keinen Schnittpunkt.

3.4 Lineares Gleichungssystem: Ein *lineares Gleichungssystem (LGS)* mit m Gleichungen für den Vektor $\vec{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ der Unbekannten hat die Form

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten $a_{i,j}$ und die Werte b_i vorgegebene reelle Zahlen sind. Gesucht ist die Menge aller Vektoren $\vec{x}$, für die alle Gleichungen erfüllt sind. Die Koeffizienten $a_{i,j}$

auf der linken Seite kann man zu einem Zahlenschema der Form

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

zusammenfassen. Man nennt A die *Matrix* des Gleichungssystems. Die Werte $b_1, b_2, \ldots, b_m$ auf der rechten Seite kann man zu einem Vektor $\vec{b} = [b_1, \ldots, b_m]^T$ zusammenfassen und man schreibt für das LGS dann auch kurz

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Man nennt das LGS

- *unterbestimmt*, falls $m < n$,
- *quadratisch*, falls $m = n$,
- *überbestimmt*, falls $m > n$.

3.5 Beispiel:

- In Bsp. 3.1 ergibt sich ein quadratisches Gleichungssystem mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- In Bsp. 3.2 ergibt sich ein unterbestimmtes Gleichungssystem mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3.6 Elementare Umformungen: Es ist zweckmäßig, das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ in folgendem Schema zu notieren:

$$\begin{array}{rcccc|c} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \vec{b} \\ \hline \boxed{1}: & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \boxed{2}: & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boxed{m}: & a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}$$

Die Zahlen in den Kästchen enthalten fortlaufende Zeilennummern, die nur der Kennzeichnung dienen. In dem Schema sind die folgenden *elementaren Umformungen* erlaubt:

- *Zeilenvertauschung:* Zwei Zeilen

$$\boxed{i} \leftrightarrow \boxed{j}$$

dürfen vertauscht werden.

- *Spaltenvertauschung:* Zwei Spalten

$$x_i \quad \leftrightarrow \quad x_j$$

  dürfen vertauscht werden. Dabei ist zu beachten, dass auch die Einträge in der Kopfzeile vertauscht werden.

- *Linearkombination:* Die i-te Zeile darf durch die Linearkombination

$$\boxed{i} \quad \leftarrow \quad p \times \boxed{i} - q \times \boxed{j}$$

  ersetzt werden, sofern $p \neq 0$. Insbesondere kann man $q = 0$ wählen und so eine Skalierung der i-ten Zeile erreichen.

Durch geeignete elementare Umformungen kann man ein gegebenes LGS in eine einfachere Form überführen, deren Lösung sich unmittelbar ablesen lässt.

3.7 Beispiel [→ 3.1]: Das Schema zu dem angegebenen LGS hat die Form

$$\begin{array}{r|ccc|c} & x & y & z & \vec{b} \\ \hline \boxed{1}: & 2 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{2}: & 3 & 1 & 1 & 2 \\ \boxed{3}: & 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

Durch Linearkombination können die jeweils ersten Koeffizienten der zweiten und der dritten Zeile zu Null gemacht werden:

$$\begin{array}{r|ccc|c} & x & y & z & \vec{b} \\ \hline \boxed{1}: & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 \times \boxed{2} - 3 \times \boxed{1} = \boxed{4}: & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 \times \boxed{3} - 2 \times \boxed{1} = \boxed{5}: & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

Das Schema hat nun gestaffelte Form und kann schrittweise aufgelöst werden:

$$\begin{array}{lllll} \boxed{5}: & z = -2 & & & \\ \boxed{4}: & -y - z = 1 & \Rightarrow \quad -y + 2 = 1 & \Rightarrow & y = 1 \\ \boxed{1}: & 2x + y + z = 1 & \Rightarrow \quad 2x + 1 - 2 = 1 & \Rightarrow & x = 1 \end{array}$$

Die Lösung ist also $\vec{x} = [1, 1, -2]^T$.

3.8 Beispiel [→ 3.2]: Das Schema zu dem angegebenen LGS hat die Form

$$\begin{array}{r|ccc|c} & x & y & z & \vec{b} \\ \hline \boxed{1}: & 2 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{2}: & 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

Durch Linearkombination kann der erste Koeffizient der zweiten Zeile zu Null gemacht werden:

$$\begin{array}{r|rrr|l} & x & y & z & \vec{b} \\ \hline \boxed{1}: & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2\times\boxed{2}-3\times\boxed{1}=\boxed{3}: & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

In der letzten Zeile kann entweder der Wert von y oder der Wert von z frei gewählt werden. Wir setzen z.B. $z = t$ für eine beliebige Zahl $t \in \mathbb{R}$ und erhalten damit

$$\begin{array}{lllllll} \boxed{3} & : & -y-z=1 & \Rightarrow & -y-t=1 & \Rightarrow & y=-1-t \\ \boxed{1} & : & 2x+y+z=1 & \Rightarrow & 2x+(-1-t)+t=1 & \Rightarrow & x=1 \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist also die Gerade

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3.9 Beispiel [$\rightarrow$ **3.3**]**:** Das LGS hat hier die Form

$$\begin{array}{r|rrr|l} & x & y & z & \vec{b} \\ \hline \boxed{1}: & 2 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{2}: & 3 & 1 & 1 & 2 \\ \boxed{3}: & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

Elimination der Einträge in der ersten Spalte mittels Linearkombination ergibt

$$\begin{array}{r|rrr|l} & x & y & z & \vec{b} \\ \hline \boxed{1}: & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2\times\boxed{2}-3\times\boxed{1}=\boxed{4}: & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2\times\boxed{3}-1\times\boxed{1}=\boxed{5}: & 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

Elimination in der zweiten Spalte ergibt die gestaffelte Form

$$\begin{array}{r|rrr|l} & x & y & z & \vec{b} \\ \hline \boxed{1}: & 2 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{4}: & 0 & -1 & -1 & 1 \\ \boxed{5}+\boxed{4}=\boxed{6}: & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}$$

Aus der letzten Zeile ergibt sich der Widerspurch

$$0x + 0y + 0z = 6.$$

Es existiert also keine Lösung.

3.10 Gestaffelte Form: Wie in den Beispielen zuvor gesehen, lässt sich die Lösung eines LGS einfach bestimmen, indem man es durch elementare Umformungen auf *gestaffelte Form* bringt:

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
\tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \cdots & \tilde{x}_r & \tilde{x}_{r+1} & \cdots & \tilde{x}_n & & \vec{b} \\
\hline
\bullet & * & \cdots & * & * & \cdots & * & & * \\
0 & \bullet & \cdots & * & * & \cdots & * & & * \\
0 & 0 & \cdots & * & * & \cdots & * & & * \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \bullet & * & \cdots & * & & * \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \times \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \times
\end{array}
$$

Dabei sind

- $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ eine Umordnung der gesuchten Komponenten $x_1, \ldots, x_n$, die durch Spaltenvertauschungen entsteht,
- alle mit $\bullet$ markierten Einträge von Null verschieden,
- alle mit $*$ markierten Einträge beliebig,
- alle mit $\times$ markierten Einträge beliebig.

Die Existenz von Lösungen hängt von den mit $\times$ markierten Einträgen ab:

- Wenn ein einziger dieser Einträge von Null verschieden ist, dann besitzt das LGS keine Lösung.
- Wenn es keine Nullzeilen und damit keine derartigen Einträge gibt oder wenn alle diese Einträge gleich Null sind, dann exisitieren Lösungen. Diese sind wie folgt gegegeben: Die Werte von $\tilde{x}_{r+1}, \ldots, \tilde{x}_n$ können beliebig vorgegeben werden,

  $$\tilde{x}_{r+1} = t_1, \quad \ldots, \quad \tilde{x}_n = t_{n-r}, \quad t_1, \ldots, t_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

  Davon ausgehend können der Reihe nach die Werte von $\tilde{x}_r, \tilde{x}_{r-1}, \ldots, \tilde{x}_1$ bestimmt werden.

3.11 Gauss-Algorithmus: Der *Gauss-Algorithmus* gibt Regeln an, mit denen ein LGS auf gestaffelte Form gebracht werden kann:

1. Suche ein Element $a_{i,j} \neq 0$. Vertausche die erste mit der j-ten Spalte und vertausche die erste mit der i-ten Zeile.
2. Ersetze alle Zeilen mit Index $i \geq 2$ durch die Linearkombination

   $$a_{1,1} \times \boxed{i} - a_{i,1} \times \boxed{1}.$$

Damit haben die erste Zeile und die erste Spalte die gewünschte Form. Sie werden im weiteren Verlauf des Algorithmus nicht mehr verändert. Nun wendet man das Verfahren analog auf die zweite Zeile und die zweite Spalte an, wobei zu beachten ist, dass die erste Zeile nicht mehr für Zeilenvertauschungen verwendet werden darf. So verfährt man weiter, bis die gestaffelte Form erreicht ist.

3.12 Beispiel: Für einen reellen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das folgende LGS gegeben:

$$
\begin{array}{rr|rrrrr|r}
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \vec{b} \\ \hline
\boxed{1} & : & 1 & 1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\
\boxed{2} & : & -1 & -1 & -3 & 2 & -4 & \alpha \\
\boxed{3} & : & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 3 \\
\boxed{4} & : & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -6
\end{array}
$$

Elimination der Einträge in der ersten Spalte mittels Linearkombination ergibt

$$
\begin{array}{rr|rrrrr|r}
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \vec{b} \\ \hline
\boxed{1} & : & 1 & 1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\
\boxed{5} & : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \\
\boxed{3} & : & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 3 \\
\boxed{4} & : & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -6
\end{array}
$$

Um die zweite Zeile in die gewünschte Form zu bringen, wird in den Zeilen $\boxed{5}, \boxed{3}, \boxed{4}$ ein von Null verschiedener Eintrag gesucht. Wir wählen z.B. den Eintrag $a_{3,4} = 1$. Vertauschung der zweiten und der vierten Spalte sowie der Zeilen $\boxed{5}$ und $\boxed{3}$ ergibt

$$
\begin{array}{rr|rrrrr|r}
 & & x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 & \vec{b} \\ \hline
\boxed{1} & : & 1 & -2 & 3 & 1 & 4 & -1 \\
\boxed{3} & : & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\
\boxed{5} & : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \\
\boxed{4} & : & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -6
\end{array}
$$

Nun werden die Einträge der Zeilen $\boxed{5}, \boxed{4}$ in der zweiten Spalte zu Null gemacht:

$$
\begin{array}{rr|rrrrr|r}
 & & x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 & \vec{b} \\ \hline
\boxed{1} & : & 1 & -2 & 3 & 1 & 4 & -1 \\
\boxed{3} & : & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\
\boxed{5} & : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \\
\boxed{6} & : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Damit ist die gestaffelte Form erreicht. Es ist $r = 2$, und die Umordnung der Lösungskomponenten ist hier

$$\tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_2 = x_4, \quad \tilde{x}_3 = x_3, \quad \tilde{x}_4 = x_2, \quad \tilde{x}_5 = x_5.$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Wenn $\alpha \neq 1$, dann gibt es keine Lösung.
- Wenn $\alpha = 1$, dann gibt es einen Lösungsraum mit $n - r = 3$ freien Parametern,

  $$x_3 = t_1, \quad x_2 = t_2, \quad x_5 = t_3.$$

  Durch Einsetzen in die Zeilen $\boxed{3}$ und $\boxed{1}$ erhält man schließlich die Lösung

  $$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}.$$

3.13 Homogene LGS: Ein LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ heißt *homogen*, wenn die rechte Seite der Nullvektor ist und anderenfalls *inhomogen*. Ein homogenes LGS besitzt stets mindestens eine Lösung, nämlich den Nullvektor. Betrachtet man die gestaffelte Form, dann sind alle mit $\times$ markierten Einträge Null. Man kann also die Werte

$$\tilde{x}_{r+1} = t_1, \quad ,\dots, \quad \tilde{x}_n = t_{n-r}, \quad t_1,\dots,t_{n-r} \in \mathbb{R}$$

beliebig vorgeben und erhält somit eine Lösungsmenge mit $(n-r)$ freien Parametern. Diese entsprechen $(n-r)$ genau linear unabhängigen Lösungen. Die Lösungsmenge bezeichnet man als *Kern von* A und schreibt dafür

$$\ker A := \{\vec{x} : A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Der Kern von A ist ein linearer Teilraum des $\mathbb{R}^n$ mit $\dim\ker A := n - r$ (vgl. 4.9 im nächsten Kapitel). Die Zahl r, also die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen in der gestaffelten Form wird als *Rang* von A bezeichnet und man schreibt $\operatorname{rang} A := r$. Es gilt also

$$\dim\ker A + \operatorname{rang} A = n,$$

d.h., die Dimension des Kerns und der Rang der Matrix ergeben zusammen die Spaltenzahl (*Dimensionsformel*).

3.14 Beispiel [$\to$ **3.12**]**:** Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

dann erhält man für das homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ die gestaffelte Form

$$\begin{array}{rc|rrrrr|l} & & x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 & \vec{b} \\ \hline \boxed{1} & : & 1 & -2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ \boxed{3} & : & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{5} & : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{6} & : & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Hier ist wir zuvor $r = 2$ und damit

$$\operatorname{rang} A = 2 \quad \text{und} \quad \dim\ker A = 3.$$

Mit

$$\vec{x}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_3 := \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ist der Kern von A gegeben durch

$$\ker A = \{t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + t_3\vec{x}_3,\ t_1,t_2,t_3 \in \mathbb{R}\} = Lin(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3).$$

Es ist also $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3$ eine Basis von $\ker A$.

3.15 Inhomogene LGS: Sei $\vec{x}_s$ eine Lösung des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ und $\vec{x}_h \in \ker A$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems, dann ist auch $\vec{x} := \vec{x}_s + \vec{x}_h$ eine Lösung. Sind umgekert $\vec{x}$ und $\vec{x}_s$ Lösungen von $A\vec{x} = \vec{b}$, dann ist $\vec{x}_h := \vec{x} - \vec{x}_s \in \ker A$ eine Lösung des homogenen Systsms. Man kann also jede Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ in der Form

$$\vec{x} = \vec{x}_s + \vec{x}_h, \quad \vec{x}_h \in \ker A,$$

darstellen. Mit anderen Worten gilt: Die allgemeine Lösung eines inhomogenen Systems erhält man als Summe einer speziellen Lösung dieses Systems und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Dieser grundlegende Sachverhalt wird als *Superpositionsprinzip* bezeichnet.
Für $\vec{b} \neq \vec{0}$ ist der Lösungsraum des inhomogenen Systems $A\vec{x} = \vec{b}$ kein linearer Teilraum, da Null keine Lösung liefert.

3.16 Beispiel [$\rightarrow$ **3.12**]**:** Sei speziell $\alpha = 1$. Man rechnet leicht nach, dass z.B.

$$\vec{x}_s := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

das gegebene inhomogene LGS

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

löst. Zusammen mit dem in Beispiel 3.14 bestimmten Kern von A erhält man somit die Lösungsmenge

$$\vec{x} = \vec{x}_s + t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + t_3\vec{x}_3, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}.$$

Diese Darstellung unterscheidet sich von der in Beispiel 3.12 angegeben Form. Die Gesamtheit der Lösungen ist aber in beiden Fällen genau dieselbe. Dies sieht man, indem man in der hier angegebenen Lösung den freien Parameter t_1 durch $t_1 + 5$ ersetzt.

3.17 Determinante: Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. Dann kann man die eindeutige Lösbarkeit des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe der *Determinante* von A entscheiden. Die Determinante ist eine reelle Zahl, die wie folgt definiert ist: Wenn A eine (1×1)-Matrix ist, dann ist $\det A := a_{1,1}$. Anderenfalls gilt

$$\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}.$$

Dabei ist i ein beliebiger Zeilenindex und $A_{i,j}$ eine $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht. Damit ist die Berechnung der Determinante auf ein Problem niedrigerer Dimension zurückgeführt und wiederholte Anwendung führt schließlich auf Determinanten von Matrizen der Dimension (1×1).

Anstelle der oben angebenen Formel, die man auch *Entwicklung nach der i-ten Zeile* nennt, kann man auch nach der j-ten Spalte entwickeln,

$$\det A := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}.$$

Es gilt: Das quadratische *LGS* $A\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det A \neq 0$. Äquivalent hierzu sind die Aussagen

$$\det A \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \dim \ker A = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rang} A = n.$$

3.18 Spezialfälle:

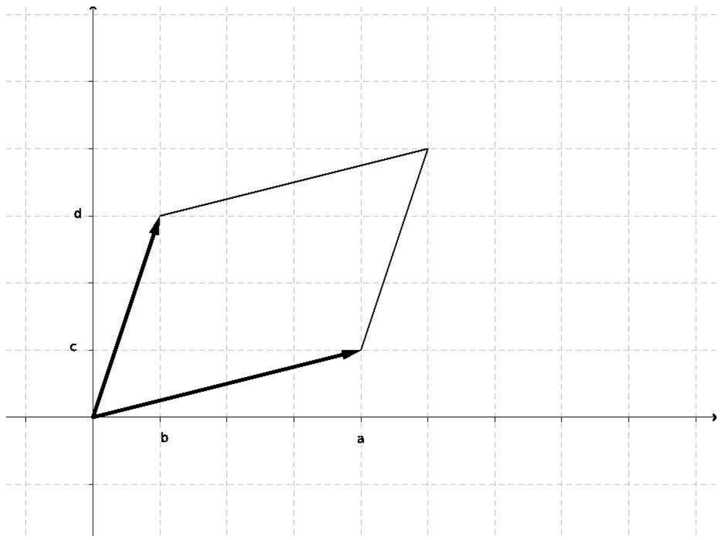
- $n = 2$:
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det A = ad - bc.$$
- $n = 3$: Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad \det A = a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge).$$
Alternativ verwendet man die *Regel von Sarrus*. Achtung, diese Regel ist nicht für höherdimensionale Matrizen gültig.
- Wenn A eine obere oder untere *Dreiecksmatrix* ist, also
$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix},$$
dann ist $\det A$ das Produkt der Diagonalelemente,
$$\det A = a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n}.$$

3.19 Beispiel:

- $$\det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 2$$
- $$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 9$$
- $$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

3.20 Geometrische Bedeutung:

- Für $n = 2$ ist der Betrag von $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms:



- Für $n = 3$ gilt:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \det(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle.$$

Der Betrag ist nach 2.8 das Volumen des Spats, das von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannt wird.