Einführung in die Finanzmathematik

Skript[1] zur Vorlesung von

Prof. Dr. Michael Kohler

Fachbereich Mathematik

Technische Universität Darmstadt

Sommersemester 2010

[1]Dieses Skript basiert auf Skripten von Prof. Dr. Klaus Ritter (TU Darmstadt) und Dr. Nebojsa Todorovic (Universität des Saarlandes).

1 Einführung

Zentraler Begriff dieser Vorlesung: **Option**

Definition 1 (vorläufig): Eine **Option** gibt dem Käufer das Recht, ein bestimmtes Finanzgut (Basiswert, underlying) bis zu einem zukünftigen Verfallszeitpunkt T (maturity) zu einem vereinbarten Ausübungspreis (AÜP) K (strike price) zu kaufen oder verkaufen.

Fragestellungen:

1. "fairer Optionspreis" (*Bewertung, Valuation*)
2. Absicherung des Verkäufers der Options (sog. Stillhalters) (*hedging*)
3. Ausübungsstrategien des Käufers, sofern mehr als ein Ausübungszeitpunkt möglich ist

Geschichtliches

- Anfang 17. Jhd. in Holland: Optionen auf Tulpen
- 1637: Zusammenbruch des Tulpenmarktes, Optionen geraten in Verruf
- 18. Jhd. in London: Organisierter Handel mit Optionen
- 1973: Gründung der Chicago Board Options Exchange
  $\rightsquigarrow$ Black-Scholes-Formel (explizite Formel zur Optionsbewertung)
- 1990 in Frankfurt: Eröffnung der deutschen Terminbörse (DTB)
- 1997: Ökonomie-Nobelpreis für Scholes und Merton (Black 1995 †)
- 1998: Fusion der DTB mit der SOFFEX (Schweizer Terminbörse) zur EUREX

Optionen gehören zu den sogenannten **Termingeschäften**.
Kennzeichnend für Termingeschäfte: Zwischen Vertragsabschluss und -erfüllung liegt eine größere Zeitspanne als zur technischen Abwicklung nötig.

Termingeschäfte beziehen sich auf *Basisgüter (underlying assets)* wie z.B.: Waren (agraische und industrielle Rohstoffe), Edelmetalle, Devisen, Wertpapiere, ...

Termingeschäfte unterscheiden sich hinsichtlich ihres Verpflichtungsgrades:

- unbedingt (*Fixgeschäfte*)
- bedingt (*Optionsgeschäft*): Hier hat einer der beiden Vertragspartner ein Wahlrecht.

Arten der Erfüllung: effektive Lieferung oder Differenzzahlung.

Gründe für Termingeschäfte:

- Absicherung anderer Basisgeschäfte vor Preisschwankungen
- Spekulation ohne zugrunde liegendes Basisgeschäft

Als *Derivate* bezeichnet man "abgeleitete Finanzinstrumente".

Beispiele für Fixgeschäfte:

- *Forwards:* individuelle Verträge, in der Regel effektive Lieferung, kein Börsenhandel, Erfüllungsrisiko.
- *Futures:* standardisiert, börsengehandelt, reduziertes Erfüllungsrisiko.

Beispiele für Optionen:

Definition 1 (endgültig):

a) Eine **Option** gibt dem Käufer das Recht, ein bestimmtes Finanzgut (Basiswert, underlying) bis zu einem zukünftigen Verfallszeitpunkt T (maturity) zu einem vereinbarten Ausübungspreis (AÜP) K (strike price) zu kaufen oder verkaufen.

b) Beim Kaufrecht bzw. Verkaufsrecht wird die Option als **Call** bzw. **Put** bezeichnet.

c) Bei einer **europäischen** bzw. **amerikanischen Option** ist die Ausübung der Option nur zum Zeitpunkt T bzw. jederzeit bis einschließlich zum Zeitpunkt T möglich.

d) Der Käufer einer Option befindet sich in einer **long position**, der Verkäufer in einer **short position**.

Bezeichnung: $S_t = S(t)$ sei Wert des Basiswertes zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$.

Vorgehen bei einem europäischen Call

1. Fall: $S_T > K$: Kaufe Basiswert und verkaufe ihn sofort am Markt.
$\Rightarrow$ Realisierter Gewinn: $S_T - K$
2. Fall: $S_T \leq K$: Lasse die Option verfallen.
$\Rightarrow$ Realisierter Gewinn: 0

Auszahlungsfunktion zum Zeitpunkt T:
$C_T = \max\{0, S_T - K\} =: (S_T - K)^+ \quad (= \max\{S_T, K\} - K)$

Vorgeben bei einem europäischen Put

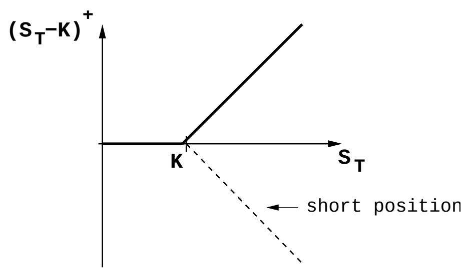
1. Fall: $S_T > K$: $\rightsquigarrow$ Realisierter Gewinn: 0
2. Fall: $S_T \leq K$: $\rightsquigarrow$ Realisierter Gewinn: $K - S_T$

Auszahlungsfunktion zum Zeitpunkt T:
$P_T = (K - S_T)^+$

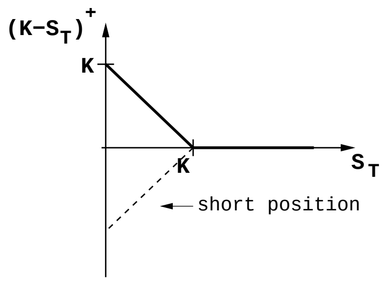
Bezeichnungen: C_T bzw. P_T ist payoff-Funktion (kurz: payoff) von europäischem Call bzw. Put.

Payoff-Funktionen

a) Europäischer Call:

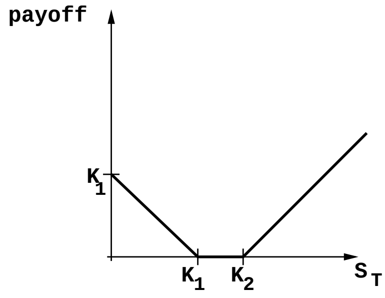


b) Europäischer Put:



Weitere Beispiele von Optionstypen

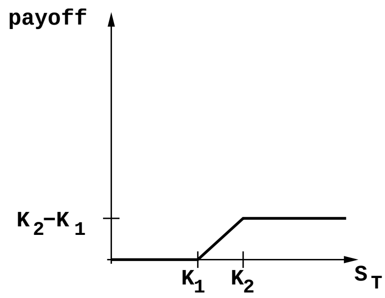
1. **Strangle:** Kaufe Put und Call mit gleichem Verfallszeitpunkt T und AÜP K_1 und $K_2, K_2 > K_1$.
   Wert von Strangle zum Zeitpunkt T: $(K_1 - S_T)^+ + (S_T - K_2)^+$

   $\rightsquigarrow$ Käufer eines Strangles erwartet sehr große Kursschwankungen.

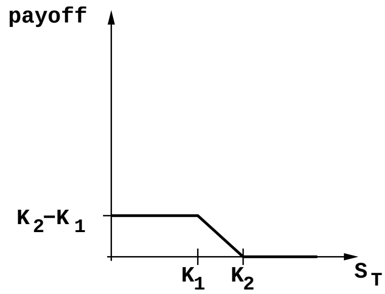
2. **Straddle:** Strangle mit $K_1 = K_2$.

3. **Bull-Spread:**

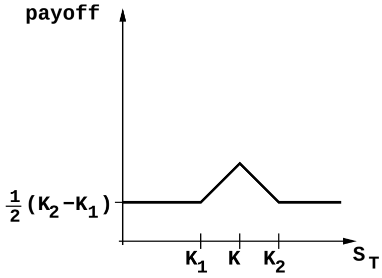
   

   $\rightsquigarrow$ Käufer erwartet steigende Kurse des underlyings.

4. **Bear-Spread:**

   $\rightsquigarrow$ Käufer erwartet fallende Kurse des underlyings.



5. **Butterfly Spread:** Kaufe Call C_1 und Put P_1 mit AÜP K_1 und K_2; Verkaufe Call C_2 und Put P_2 jeweils mit AÜP K und $K_1 < K < K_2$.

   payoff$= C_1 + P_1 - C_2 - P_2 = (S_T - K_1)^+ + (K_2 - S_T)^+ - (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+$

   $\rightsquigarrow$ Käufer erwartet stagnierende Kurse um K und nur geringe Schwankungen.

Bemerkungen:

i) Einfache Calls oder Puts werden auch als Plain Vanilla Optionen bezeichnet.

ii) Beispiele 1 - 5 entsprechen einer Linearkombination von Plain Vanillas.

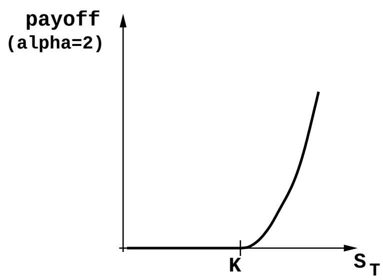
iii) Optionen, die keine Plain Vanillas sind, werden als exotische Optionen bezeichnet.

iv) Bei den exotischen Optionen unterscheidet man pfadabhängige und pfadunabhängige Optionen.

Beispiele für exotische Optionen

1. **Power Optionen**, z. B. europäischer Power-Call

$$\text{payoff} = \begin{cases} 0, S_T \leq K \\ (S_T - K)^\alpha, \text{ für } S_T > K \end{cases}$$



$$\begin{array}{llll} \rightsquigarrow & \alpha = 0: & \Rightarrow & \text{Cash-or-Nothing-Option} \\ & \alpha = 1: & \Rightarrow & \text{Europäischer Call} \end{array}$$

In der Regel ist $\alpha = 2$ und die Auszahlung limitiert, z. B.

$$\text{payoff} = \begin{cases} 0 & , S_T \leq K \\ (S_T - K)^2 & , K < S_T \leq K + M \\ M^2 & , K + M < S_T \end{cases}$$

2. **Asiatische Optionen oder Average-Optionen**

$$\text{payoff} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_\tau d\tau - K \right)^+$$

Vorteil: Schutz des Käufers vor Manipulationen des Kurses kurz vor dem Verfallstag.

2 Modellierung von Bondpreisen / Zinsrechnung

Definition 2: Ein **Bond** ist ein risikoloses, festverzinsliches Wertpapier mit Preis $b_0 = B(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ und deterministischem Preis $B(t)$ für alle Zeiten $t \geq 0$.

Sei $r > 0$ die Zinsrate pro Zeiteinheit für eine Spareinlage der Größe K. Dann gilt:
Guthaben zum Zeitpunkt $t = 1: \quad K + rK = K \cdot (1 + r)$.

Werden bereits in $t = 1/2$ Zinsen der Höhe $r/2$ gutgeschrieben, so werden diese in der Zeitspanne $[1/2, 1]$ mitverzinst $\Rightarrow$
Guthaben zum Zeitpunkt $t = 1: \quad \left(K + \frac{r}{2}K\right) + \left(K + \frac{r}{2}K\right) \cdot \frac{r}{2} = K \cdot (1 + \frac{r}{2})^2$.

Analog: Zinszahlungen in $t = \frac{i}{n},\ i = 1, \ldots, n \quad (n \in \mathbb{N})$ führen zu einem Guthaben von $K(1 + \frac{r}{n})^n$ in $t = 1$.

Interpretiere Grenzübergang $n \to \infty$ als Zinszahlung in stetiger Zeit, so ist Guthaben in $t = 1: \quad \lim\limits_{n \to \infty} K(1 + \frac{r}{n})^n = K \cdot e^{r \cdot 1}$ $(= B(1)) \rightsquigarrow$ allgemein: $B(t) = K \cdot e^{rt}, t \geq 0$.

Es gilt: Bondpreis $B(t)$ bei stetiger Verzinsung mit konstanter Zinsrate r:

$$\boxed{B(t) = b_0 \cdot e^{rt} \text{ für } t \in [0, T]} \tag{2.1}$$

Bemerkungen:

- Verallgemeinerung von (2.1) durch nicht-konstante, zeitabhängige, integrierbare Zinsrate $r(t)$
$\Rightarrow B(t) = b_0 \cdot e^{\int_0^t r(s) ds}$ für $t \in [0, T]$. $\quad (*)$

- $(*)$ löst DGL $B'(t) = B(t) \cdot r(t)$ für $t \in [0,T]$ mit Anfangsbedingung $B(0) = b_0$.
- DGL kann als Integralgleichung geschrieben werden:
  $B(t) = b_0 + \int\limits_0^t B(s)r(s)ds,\ t \in [0,T]$.

Diskontierung (Abzinsung): Aktueller (d.h. heutiger) Wert eines Kapitals $S(t)$ zur Zeit $t > 0$. Bei stetiger Verzinsung mit konstantem Zinssatz r wird dafür das Kapital angesetzt, dass zur heutigen Zeit (d.h. zur Zeit 0) in den Bond investiert werden muss, um zur Zeit t das Kapital $S(t)$ zu erhalten:

$$S(0) = e^{-r \cdot t} \cdot S(t).$$

Diesen Vorgang nennt man (Ab-)**Diskontierung** und e^{-rT} ist der so genannte **Diskontierungsfaktor** (zum Zeitpunkt 0).

3 Arbitragegrenzen

Arbitrage: Möglichkeit, ohne Kapiteleinsatz risikolosen Profit zu erzielen.

Beispiel: Aktie S kostet an Frankfurter Börse 110 EURO und in New York 100 \$.
Wechselkurs sei: 1 \$ $\widehat{=}$ 1.02 EURO

Arbitrage-Strategie: Kaufe Aktie S in New York und verkaufe sie in Frankfurt:

$$110 - 100 \cdot 1.02 = \underbrace{8 \text{ EURO}}_{\text{Arbitrage}-\text{Gewinn!}}$$

Ziel: Schranken für europäische und amerikanische Optionen unter Annahme der Arbitragefreiheit.

Annahmen:

- r konstant
- zum gleichen Zinssatz kann Geld geliehen sowie angelegt werden (zu jedem Zeitpunkt $t \in [0,T]$)
- Aktie kann ohne Gebühren und in beliebiger Stückelung gekauft und verkauft werden, sowie für jeden beliebigen Zeitraum geliehen werden (was einem **Aktienleerverkauf** entspricht).
- Arbitragefreiheit

Satz 1: Sei $C_A(t)$ bzw. $P_A(t)$ der Preis eines amerikanischen Calls bzw. Puts auf Aktie S mit AÜP $K \geq 0$. Für $t \in [0,T]$ gilt:

a) $(S_t - K)^+ \leq C_A(t) \leq S_t$ (3.1)

b) $(K - S_t)^+ \leq P_A(t) \leq K$ (3.2)

Beweis: Offensichtliche Schranken: $C_A(t), P_A(t) \geq 0$.

a) a_1) Zeige: $(S_t - K)^+ \leq C_A(t)$.
Angenommen, es gelte: $(S_t - K)^+ > C_A(t)$.
$\rightsquigarrow$ Strategie: Kaufe Option und übe sie sofort aus.
Vermögen zum Zeitpunkt $t : -C_A(t) + S_t - K > 0$ ↯ Arbitragefreiheit

a_2) Zeige: $C_A(t) \leq S_t$.
Angenommen, es gelte $C_A(t) > S_t$.
$\rightsquigarrow$ Strategie: Verkaufe Call für $C_A(t)$, kaufe Aktie für S_t, lege $C_A(t) - S_t > 0$ an zum risikolosen Zinssatz r.

1. Fall: Käufer des Calls übt Option nicht aus.
$\Rightarrow$ Vermögen zum Zeitpunkt T: $(C_A(t) - S_t) \cdot e^{r(T-t)} + \underbrace{S_T}_{\geq 0} > 0$ ↯ Arbitragefreiheit

2. Fall: Käufer übt Option aus.
$\Rightarrow$ Vermögen zum Zeitpunkt T: $(C_A(t) - S_t) \cdot e^{r(T-t)} + \underbrace{K}_{\geq 0} > 0$ ↯ Arbitragefreiheit

b) analog □

Anmerkung: Für die Preise von amerikanischen und europäischen Optionen auf den gleichen Basiswert mit gleicher Laufzeit und gleichem AÜP gilt:

$$C_A(t) \geq C_E(t) \text{ und } P_A(t) \geq P_E(t), \tag{3.3}$$

nach der Definition dieser Optionen, wobei $C_E(t)$ bzw. $P_E(t)$ Preis des europäischen Calls bzw. Puts sind.

Satz 2: Sei $C_E(t)$ bzw. $P_E(t)$ der Preis eines europäischen Calls bzw. Puts auf Aktie S mit AÜP $K \geq 0$ und Verfallszeitpunkt T. Wird auf den Basiswert keine Dividende gezahlt, dann gilt für $t \in [0,T]$:

a) $(S_t - e^{-r(T-t)} \cdot K)^+ \leq C_E(t) \leq S_t$ (3.4)

b) $(e^{-r(T-t)}K - S_t)^+ \leq P_E(t) \leq K$ (3.5)

Beweis: Offensichtliche Schranken: $C_E(t), P_E(t) \geq 0$.

a) a_1) Zeige: $C_E(t) \leq S_t$.
$\rightsquigarrow$ Folgt aus (3.3) und (3.1).

a_2) Zeige: $(S_t - e^{-r(T-t)}K)^+ \leq C_E(t)$.
Angenommen, es gelte: $C_E(t) < \underbrace{(S_t - e^{-r(T-t)}K)^+}_{>0}$

$\rightsquigarrow$ Strategie: Kaufe Call für $C_E(t)$, führe **Aktienleerverkauf** zum Preis S_t durch (d. h. leihe Aktie von einem Partner für eine gewisse Zeit aus, verkaufe sie, kaufe sie später wieder zurück und gebe sie dann an Partner zurück), lege $S_t - C_E(t) \geq S_t - C_E(t) - e^{-r(T-t)} \cdot K > 0$ an zum risikolosen Zinssatz r.

$\rightsquigarrow$ Verzinstes Vermögen in $t = T : (S_t - C_E(t))e^{r(T-t)} > K$ (folgt mit Annahme)

1. Fall: $S_T > K$ $(t = T)$

Übe Call aus (zum Zeitpunkt T), kaufe Aktie für K, gleiche (den in t getätigten) Leerverkauf aus.

Insgesamt: $(S_t - C_E(t))e^{r(T-t)} - K > 0$ ↯ Arbitragefreiheit

2. Fall: $S_T \leq K$ $(t = T)$

Option nicht ausüben, kaufe Aktie für $S_T \leq K$, gleiche Leerverkauf aus.

Insgesamt: $(S_t - C_E(t))e^{r(T-t)} - S_T > K - \underbrace{S_T}_{\leq K} > K - K = 0$ ↯ Arbitragefreiheit

b) analog □

Bemerkung: Mit (3.1), (3.3) und Satz 2 a) folgt

$$(S_t - e^{-r(T-t)}K)^+ \leq C_A(t) \leq S_t \ .$$

Satz 3: Sei $C_A(t)$ bzw. $C_E(t)$ der Preis eines amerikanischen bzw. europäischen Calls auf Aktie S mit gleichem AÜP $K > 0$, gleichem Verfallszeitpunkt T und gleicher Zinsrate $r > 0$. Wird auf die Aktie keine Dividende gezahlt, dann ist es nicht sinnvoll, die amerikanische Call Option vor ihrem Verfallszeitpunkt T auszuüben, da

$$C_A(t) = C_E(t) \text{ für alle } t \in [0, T] \ . \tag{3.6}$$

Beweis: Mit (3.3) und (3.4) folgt

$$C_A(t) \geq C_E(t) \geq (S_t - e^{-r(T-t)} \cdot K)^+ \ . \tag{3.7}$$

Es ist nur vorteilhaft amerikanischen Call auszuüben, wenn $S_t > K$. In diesem Falle sowie mit (3.7) und $r > 0$ folgt (für $t < T$):

$$C_A(t) \geq (S_t - e^{-r(T-t)}K)^+ > (S_t - K)^+ = S_t - K \tag{3.8}$$

$\rightsquigarrow$ Preis der Option ist bis Zeitpunkt T immer größer als die Auszahlung $S_t - K$.
$\Rightarrow$ Ausüben des amerikanischen Calls kann nur im Zeitpunkt T vorteilhaft sein.
$\Rightarrow$ Zahlungen in T sind beim amerikanischen bzw. europäischen Call gleich.
$\rightsquigarrow$ Wegen Voraussetzung der Arbitragefreiheit folgt (3.6). $\square$

Satz 4 (Put-Call-Parität für europäische Optionen):
Sei $C_E(t)$ bzw. $P_E(t)$ der Preis eines europäischen Calls bzw. Puts auf Aktie S mit gleichem AÜP K und gleichem Verfallszeitpunkt T. Wird auf Aktie S keine Dividende gezahlt, dann gilt:

$$C_E(t) + Ke^{-r(T-t)} = P_E(t) + S_t \ .$$

Beweis: Strategie linke Seite: Kaufe Call und lege $Ke^{-r(T-t)}$ Geldeinheiten in Bond an.
$\rightsquigarrow$ Vermögen in $t = T$:

$$(S_T - K)^+ + K = \begin{cases} K, & S_T < K \\ S_T, & S_T \geq K \end{cases}$$

Strategie rechte Seite: Kaufe Put und kaufe Aktie.
$\rightsquigarrow$ Vermögen in $t = T$:

$$(K - S_T)^+ + S_T = \begin{cases} K, & S_T < K \\ S_T, & S_T \geq K \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Strategien haben in $t = T$ gleiches Vermögen.
$\Rightarrow$ Strategien müssen in $t \in [0, T]$ gleiches Vermögen besitzen, da sonst Arbitragestrategie möglich wäre ($\rightsquigarrow$ "Verkaufe" teurere und kaufe günstigere Strategie, lege positive Differenz an). $\square$

Satz 5 (Put-Call Beziehung für amerikanische Optionen):
Sei $C_A(t)$ bzw. $P_A(t)$ der Preis eines amerikanischen Calls bzw. Puts auf Aktie S mit gleichem AÜP $K > 0$, gleicher Zinsrate $r > 0$ und gleichem Verfallszeitpunkt T. Wird auf Aktie keine Dividende gezahlt, dann gilt für $t \in [0, T]$:

$$S_t - K \leq C_A(t) - P_A(t) \leq S_t - Ke^{-r(T-t)} \ .$$

Beweis: Siehe übungen $\square$

Bemerkung: Schranken für Preis von europäischer bzw. amerikanischer Option wurde unabhängig von mathematischer Modellierung des Aktienkurses hergeleitet.

4 Das Ein-Perioden-Modell

Im Folgenden werden einige grundlegenden Eigenschaften stochastischer Finanzmarktmodelle im einfachst möglichen Modell erläutert.

Definition 3. Im *Ein-Perioden-Modell* sind die Preise

$$S_{j,t} \quad (j \in \{1, \ldots, g\}, t \in \{0, 1\})$$

von g Basisgütern zu zwei Handleszeitpunkten gegeben, wobei die Preise zur Zeit 0 fest und bekannt sind, d.h.

$$S_{j,0} \in \mathbb{R} \quad (j \in \{1, \ldots, g\}),$$

während die Preise

$$S_{j,1} \quad (j \in \{1, \ldots, g\})$$

zur Zeit 1 relle Zufallsvariablen definiert auf einem gemeinsamen W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sind. Wir setzen

$$S_0 = \begin{pmatrix} S_{1,0} \\ \vdots \\ S_{g,0} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_1 = \begin{pmatrix} S_{1,1} \\ \vdots \\ S_{g,1} \end{pmatrix}.$$

Definition 4. Ein *Portfolio* ist ein Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(g)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^g.$$

Hierbei beschreibt die i-te Komponente die (eventuelle nicht ganze bzw. eventuell auch negative) Anzahl vom Basisgut i im Portfolio.
Der Wert des Portfolios zur Zeit t ist

$$x^T S_t = \sum_{i=1}^{g} x^{(i)} \cdot S_{i,t},$$

dabei ist $x^T S_0$ der deterministische Wert des Portfolios zu Beginn der Handelsperiode und $x^T S_1$ der zufällige Wert am Ende der Handelsperiode.

Definition 5. Ein Portfolio x heißt *risikofrei*, falls falls für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x^T S_1 = c,$$

d.h. der Wert des Portfolios am Ende der Handelsperiode hängt nicht vom Zufall ab.
Ist x ein risikofreies Portfolio mit $x^T S_0 > 0$ und $x^T S_1 = 1$, so heißt

$$B_1 = x^T S_0$$

Diskontierungsfaktor im Ein-Perioden-Modell (mit zugehörigem Portfolio x).

Beispiel: Wir betrachten einen Finanzmarkt, an dem es eine festverzinsliche Anlage und eine Aktie gibt. Die festverzinsliche Anlage wird mit Zinssatz $\rho > 0$ verzinst. Die Aktie hat zur Zeit $t = 0$ den Kurs $A_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ sowie zur Zeit $t = 1$ den Kurs

$$A_1 = \begin{cases} u \cdot A_0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p, \\ d \cdot A_0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p, \end{cases}$$

wobei $p \in (0,1)$ und $0 < d < u$.

Im Ein-Perioden-Modell beschreiben wir diesen Markt, indem wir einen W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mit

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \text{ und } \mathbf{P}(\{\omega_1\}) = 1 - \mathbf{P}(\{\omega_2\}) = p$$

wählen. Sodann definieren wir $A_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$A_1(\omega_1) = u \cdot A_0 \text{ und } A_1(\omega_2) = d \cdot A_0$$

und setzen

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ A_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1+\rho \\ A_1 \end{pmatrix}.$$

Hier ist

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\rho} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein risikoloses Portfolio mit $x^T S_0 > 0$ und $x^T S_1 = 1$, und der zugehörige Diskontierungsfaktor ist $B_1 = 1/(1+\rho)$.

Definition 6. Ein Portfolio x heißt *Arbitrage* (risikoloser Profit), falls

$$x^T S_0 = 0, \quad x^T S_1 \geq 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{P}[x^T S_1 > 0] > 0.$$

Ein Modell heißt *arbitragefrei*, falls keine Arbitrage existiert.

Bemerkung: Diese Annahme ist in der Praxis plausibel, weil die Existenz einer Arbitrage sofort zu Geldanlagen führen würde, die diese Arbitrage solange ausnützen, bis sich die Preise verändert haben.

Fortan vorausgesetzt: Existenz eines risikolosen Portfolios mit $B_1 = x^T S_0 > 0$ und $x^T S_1 = 1$.

Lemma 1: Ein Modell ist genau dann arbitragefrei, falls kein Portfolio x existiert mit

$$x^T S_0 \leq 0, \quad x^T S_1 \geq 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{P}[x^T S_1 > x^T S_0] > 0.$$

Beweis: Siehe Übungen. □

Lemma 2: Der Diskontierungsfaktor eines arbitragefreien Modells ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien x_1 und x_2 zwei risikofreies Portfolio mit $x_i^T S_0 > 0$ und $x_i^T S_1 = 1$ $(i \in \{1, 2\})$ und

$$0 < x_1^T S_0 < x_2^T S_0.$$

Dann gilt für $z = x_1 - \frac{x_1^T S_0}{x_2^T S_0} x_2$:

$$z^T S_0 = 0 \quad \text{und} \quad z^T S_1 = 1 - \frac{x_1^T S_0}{x_2^T S_0} > 0.$$

□

Beispiel (Fortsetzung): Im obigem Beispiel zum Ein-Perioden-Modell gilt:

$$\text{Modell arbitragefrei} \quad \Leftrightarrow \quad d < 1 + \rho < u$$

Begründung: "$\Rightarrow$" Im Falle $d \geq 1 + \rho$ bekommen wir eine Arbitrage, indem wir Geld zum Aktienkauf leihen. Denn dann ist

$$x = (-A_0, 1)^T$$

wegen

$$x^T S_0 = -A_0 + A_0 = 0, x^T S_1 = -A_0 \cdot (1 + \rho) + A_1 \geq -A_0 \cdot (1 + \rho) + d \cdot A_0 \geq 0$$

und

$$\mathbf{P}[x^T S_1 > 0] \geq \mathbf{P}[A_1 = u \cdot A_0] = p > 0$$

eine Arbitrage.

Im Falle $u \leq 1+\rho$ führt man den Beweis analog, indem man sich eine Aktie zur Geldanlage leiht, also $z = (A_0, -1)^T$ setzt.
"$\Leftarrow$" Ist die Bedingung rechts erfüllt, so kann nicht gleichzeitig $x^T S_0 = 0$ und $x^T S_1 \geq 0$ gelten. □

Definition 7. Ein **Claim** (Anrecht, Forderung) ist eine reellwertige Zufallsvariable C. Der zugehörige **Hedge** (das zugehörige Sicherungsgeschäft) ist ein Portfolio x mit

$$x^T S_1 = C.$$

Ein Claim heißt **absicherbar**, falls ein zugehöriger Hedge existiert. Ein Modell heißt **vollständig**, falls jeder Claim absicherbar ist.

Beispiel (Fortsetzung): Das Modell aus obigem Beispiel ist vollständig.

Begründung: Betrachte einen Claim C und ein Portfolio $x = (x_1, x_2)^T$. Dann gilt:

$$x \text{ ist Hedge für } C \quad \Leftrightarrow \quad x^T S_1(\omega_i) = C(\omega_i) \quad (i \in \{1, 2\}).$$

Also ist x genau dann ein Hedge für C, wenn $x = (x_1, x_2)^T$ Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 \cdot (1+\rho) + x_2 \cdot u \cdot A_0 &= C(\omega_1) \\ x_1 \cdot (1+\rho) + x_2 \cdot d \cdot A_0 &= C(\omega_2) \end{aligned}$$

ist.
Die Determinante dieses LGS ist

$$(1+\rho) \cdot d \cdot A_0 - (1+\rho) \cdot u \cdot A_0 = (1+\rho) \cdot A_0 \cdot (d-u) \neq 0,$$

womit das LGS für jeden Claim eindeutig lösbar ist.

Speziell: Zu einem europäischem Call mit Basispreis $K > 0$ und Verfallstermin $T = 1$, d.h. zu

$$C = (A_1 - K)^+,$$

erhält man mit Hilfe der Cramerschen Regel den Hedge

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(u \cdot A_0 - K)^+ d \cdot A_0 - (d \cdot A_0 - K)^+ u \cdot A_0}{(1+\rho) \cdot A_0 \cdot (d-u)} = \frac{(d \cdot A_0 - K)^+ u - (u \cdot A_0 - K)^+ d}{(1+\rho) \cdot (u-d)}, \\ x_2 &= \frac{(1+\rho) \cdot (d \cdot A_0 - K)^+ - (1+\rho) \cdot (u \cdot A_0 - K)^+}{(1+\rho) \cdot A_0 \cdot (d-u)} = \frac{(u \cdot A_0 - K)^+ - (d \cdot A_0 - K)^+}{A_0 \cdot (u-d)}. \end{aligned}$$

Wegen $x_1 \leq 0$ und $x_2 \geq 0$ bedeutet dieser Hedge anschaulich: "Leihe Geld und kaufe davon die Aktie".

Als nächstes wollen wir uns im obigen Modell mit dem "fairen Preis" eines Hedge befassen.

Lemma 3. Ist C ein Claim mit zugehörigem Hedge x, so ist

$$x^T S_0$$

der einzig sinnvolle Preis für den Claim, da jeder andere Preis für C zu einer Arbitrage führt.

Beweis. Wird der Claim C zu einem Preis $a > x^T S_0$ verkauft, so führt folgende Strategie zu einer Arbitrage:

Verkaufe Claim zum Preis a und kaufe den Hedge x zum Preis $x^T S_0$. Zum Zeitpunkt Null hat man dann den Gewinn

$$a - x^T S_0 > 0,$$

den Claim verkauft und das Portfolio x gekauft. Zum Zeitpunkt 1 gleichen sich die Zahlungen aus Portfolio und Claim aus, man hat aber weiterhin den (verzinsten) Gewinn, was einer Arbitrage entspricht.

Wird dagegen der Claim C zu einem Preis $a < x^T S_0$ verkauft, so führt folgende Strategie zu einer Arbitrage:
Kaufe Claim zum Preis a und führe Leerverkauf des Hedges x (d.h. erwerbe $z = -x$ zum Preis $z^T S_0 = -x^T S_0$) durch. Zum Zeitpunkt Null hat man dann den Gewinn

$$x^T S_0 - a > 0,$$

den Claim gekauft und das Portfolio x verkauft. Zum Zeitpunkt 1 gleichen sich die Zahlungen aus Portfolio und Claim aus, man hat aber weiterhin den (verzinsten) Gewinn, was wieder einer Arbitrage entspricht. $\square$

Bemerkung. Der obige Preis des Claims hängt nicht vom gewähltem Hedge ab, da sonst wieder eine Arbitragemöglichkeit besteht (analog).

Definition 8. Ist C ein Claim mit Hedge x, so heißt

$$s(C) = x^T S_0$$

der **faire Preis** des Claims C.

Im Beispiel oben: Der faire Preis des europäischem Calls mit Basispreis $K > 0$ und Verfallstermin $T = 1$ ist

$$\begin{aligned} x^T S_0 &= x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot A_0 \\ &= \frac{(d \cdot A_0 - K)^+ u - (u \cdot A_0 - K)^+ d}{(1+\rho) \cdot (u-d)} + \frac{(u \cdot A_0 - K)^+ - (d \cdot A_0 - K)^+}{(u-d)}. \end{aligned}$$

Dieser Preis ist z.B. monoton wachsend in A_0 und monoton fallend in K.

5 Stochastische Modellierung eines Aktienkurses in stetiger Zeit, Teil 1

Vorstellung: Aktienkurs ist nicht deterministisch, sondern ergibt sich durch eine “zufällige” Störung um einen Bondpreis mit anderer Zinsrate $\widetilde{b} > r$ (im allgemeinen).

Hierzu: Betrachte Logarithmus von Bondpreis (2.1).
Für Bondpreis folgt aus (2.1)

$$\log B(t) = \log(b_0) + r \cdot t,$$

d. h. $B(t)$ ist **log-linear**.

Ansatz für Aktienkurs $S(t)$:

$$\log S(t) = \log(s_0) + \widetilde{b} \cdot t + \text{“Zufall”} \quad (S(0) = s_0)$$

Für Zufall soll gelten:

i) keine Tendenz, d. h. $E(\text{Zufall}) = 0$

ii) ist von t abhängig

iii) stellt die Summe der Abweichungen $\log(S(t)) - (\log(s_0) + \widetilde{b}t)$ auf $t \in [0, T]$ dar

Definiere: $\quad Y(t) := \log(S(t)) - (\log(s_0) + \widetilde{b}t)$

Aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes ist folgende Modellierung sinnvoll:

$$Y(t) \sim N(0, \sigma^2 t).$$

Dabei heißt $\sigma > 0$ die **Volatilität** und ist ein Indikator für die Größe der Schwankungen des Aktienkurses.
Zusätzliche sinnvolle Forderung:

1. $$Y(t) - Y(\delta) \sim N(0, \sigma^2(t - \delta)) \text{ für } \delta \in (0, t),$$

   d. h. Varianz der Zuwächse $Y(t) - Y(\delta)$ hängt nur von Zeitdifferenz $t - \delta$ ab.

2. Für $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ sind

   $$Y(t_4) - Y(t_3), Y(t_2) - Y(t_1)$$

   unabhängig.

Definition 9: Sei (Ω, F, P) W-Raum.
Eine Menge $\{(X_t, F_t)\}_{t \in I}$, I geordnete Indexmenge, bestehend aus monoton wachsender Folge $\{F_t\}_{t \in I}$ von σ-Algebren $F_t \subset F$ - so genannte **Filterung** - und einer Folge $\{X_t\}_{t \in I}$ von $\mathbb{R}^d$-wertigen ZVn mit X_t F_t-messbar, heißt **stochastischer Prozess** mit Filterung $\{F_t\}_{t \in I}$.
Kurzschreibweise: $\{X_t\}_{t \in I}$ oder X_t .
In diesem Fall verwenden wir $F_t = F(X_s : s \leq t)$.

Bemerkungen:

i) Im Folgenden: $I = [0, \infty)$ oder $I = [0, T]$.

ii) Für festes $\omega \in \Omega$ wird Menge

$$X_{\cdot}(\omega) := \{X_t(\omega)\}_{t \in I} = \{X(t, \omega)\}_{t \in I}$$

als Funktion der Zeit t interpretiert und als Pfad oder Realisierung des stochastischen Prozesses bezeichnet.

Definition 10: Ein reellwertiger stochastischer Prozess $\{W_t\}_{t \geq 0}$ mit stetigen Pfaden und den Eigenschaften

a) $W_0 = 0$ P-f.s. (d. h. $P(\{\omega \in \Omega : W_0(\omega) = 0\}) = 1$)

b) für alle $0 \leq s < t$ gilt:
$(W_t - W_s) \sim N(0, t - s)$ (stationäre Zuwächse)

c) für alle $0 \leq r \leq u \leq s < t$ gilt:
$(W_t - W_s)$ und $(W_u - W_r)$ sind unabhängig (unabh. Zuwächse)

heißt **eindimensionale Brownsche Bewegung**.

Bemerkungen:

1) d-dimensionale Brownsche Bewegung $W(t) = (W_1(t), \ldots, W_d(t))$ besteht aus d unabhängigen eindimensionalen Brownschen Bewegungen (BB).

2) $\{W_t\}_{t \geq 0}$ wird auch **Wiener Prozess** genannt (nach Norbert Wiener, der als erster BB mathematisch beschrieben hat), deshalb Abkürzung W.

3) Nachweis der Existenz des Wiener Prozesses kann durch Grenzwertbildung bei geeigneten einfachen Prozessen erfolgen.

Bisheriger Ansatz für Aktienkurs $S(t)$:

$$\log(S(t)) = \log(s_0) + \widetilde{b}t + \text{“Zufall”} \ (S(0) = s_0)$$

Mit Brownscher Bewegung $\{W_t\}_{t \geq 0}$ geeigneter Prozess gefunden um Zufall im log-linearen Ansatz für Aktienkurse zu modellieren.

Neuer Ansatz für Aktienkurs $S(t)$:
Wähle für “Zufall” Brownsche Bewegung mit Volatilität σ
$\Rightarrow \log(S(t)) = \log(s_0) + \widetilde{b}t + \sigma W_t$,

also $\boxed{S(t) = s_0 \cdot e^{\widetilde{b}t + \sigma W_t}}$ (5.1)

Da $\log(S(t))\;\; N(\log(s_0)+\widetilde{b}t, \sigma^2 t)$-verteilt ist, sagt man $\underline{S(t)}$ ist lognormal-verteilt. Weitere Eigenschaften von (5.1):

Lemma 4: Sei $b = \widetilde{b} + \frac{1}{2}\sigma^2$ und sei $S(t)$ wie in (5.1). Dann gilt

$$E(S(t)) = s_0 \cdot e^{bt}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
E(S(t)) &= E(s_0 \cdot e^{\widetilde{b}t+\sigma W_t}) = E(s_0 \cdot e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\sigma W_t}) \\
&= s_0 \cdot e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)t} \cdot E(e^{\sigma W_t}) \\
&= s_0 \cdot e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)t} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{\sigma x} \cdot e^{\frac{-(x-0)^2}{2t}}}_{=e^{\frac{-x^2+2x\sigma t}{2t}}} dx \text{ (da } W_t \sim N(0,t) \text{ nach Def. 10b))} \\
&= s_0 \cdot e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)t} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2t}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x^2-2x\sigma t+\sigma^2 t^2)}{2t}} dx \\
&= s_0 \cdot e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)t} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\sigma t)^2}{2t}} dx}_{=1, \text{ da Dichte von } \mathcal{N}(\sigma t, t)-\text{verteilter ZV}} \\
&= s_0 \cdot e^{bt-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} \cdot 1 \\
&= s_0 \cdot e^{bt}.
\end{aligned}$$

□

Beachte: Im Beweis wurde gezeigt: $E(e^{\sigma W_t}) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} \cdot 1$
$\Rightarrow E(e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}) = 1$

Mit obigem Lemma folgende Interpretation des Aktienkurses:

$$S(t) = s_0 \cdot e^{(\widetilde{b}+\frac{1}{2}\sigma^2)t} \cdot \underbrace{e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}}_{\text{ZV mit EW 1}}, S(0) = s_0\ .$$

Aktienkurs ist Produkt aus mittlerem Kurs $s_0 \cdot e^{(\widetilde{b}+\frac{1}{2}\sigma^2)t}$ und einer Zufallsvariablen mit EW 1, die die zufällige Schwankung um mittleren Kurs modelliert.

Andere Schreibweise:

$$S(t) = s_0 \cdot e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W_t} \qquad (5.2)$$

Bezeichnung: Einen stochastischen Prozess der Gestalt (5.2) nennt man **geometrische Brownsche Bewegung** (gBB) mit Drift b und Volatilität σ.

6 Steilkurs: Bedingte Erwartungen und Martingale

Satz 6. Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. **Integrierbare** ZV $X\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$. σ-Algebra $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$. Dann existiert eine ZV $Z : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit folgenden Eigenschaften:

$(*)$ Z ist integrierbar und $\mathcal{C}$-$\mathcal{B}$-messbar,

$(**)$ $\underset{C\in\mathcal{C}}{\forall} \quad \int_C X\,dP = \int_C Z\,dP\,.$

Z ist eindeutig bis auf die Äquivalenz "$=$ Rest$_{\mathcal{C}}$ P-f.ü.".

Beweis: Folgt aus dem Satz von Radon-Nikodym, vgl. Wahrscheinlichkeitstheorie. $\square$

Definition 11. Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Integrierbare ZV $X\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$. σ-Algebra $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$. Die Äquivalenzklasse (im oberen Sinne) der ZVn $Z\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit $(*)$ und $(**)$ — oder auch ein Repräsentant dieser Äquivalenzklasse — heißt **bedingte Erwartung von X bei gegebenem $\mathcal{C}$** $\ldots E(X \mid \mathcal{C})$. Häufig wird ein Repräsentant dieser Äquivalenzklasse als eine Version von $E(X \mid \mathcal{C})$ bezeichnet.

Achtung $E(X|\mathcal{C})$ ist Zufallsvariable / messbare Abbildung!
$E(X|\mathcal{C})$ ist "Vergröberung"von X.

Beispiele

a) $\mathcal{C} = \mathcal{A} \ldots E(X \mid \mathcal{C}) = X$ f.s.
(beachte: $E(X|\mathcal{C})$ ist reellwertig, daher muss X eventuell auf der Nullmenge $[|X| = \infty]$ abgeändert werden).

b) $\mathcal{C} = \{\emptyset, \Omega\} \ldots E(X \mid \mathcal{C}) = EX$ (da $E(X|\mathcal{C})$ $\mathcal{C} - \mathcal{B}$-messbar ist, muss hier $E(X|\mathcal{C})$ konstant sein, und mit $\int_\Omega E(X|\mathcal{C})\,dP = EX$ folgt die Behauptung).

c) $\mathcal{C} = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$ mit $0 < P(B) < 1$.

$$(E(X \mid \mathcal{C}))(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{P(B)} \displaystyle\int_B X\,dP =: E(X \mid B), & \omega \in B \\ \dfrac{1}{P(B^c)} \displaystyle\int_{B^c} X\,dP, & \omega \in B^c \end{cases}$$

$E(X \mid B)$ heißt **bedingter Erwartungswert von X unter der Hypothese B.**

Begründung

Die rechte Seite ist $\mathcal{C} - \mathcal{B}$-messbar und erfüllt:

– $\int_\emptyset$ (Re.S.) $dP = 0 = \int_\emptyset X\,dP$

–
$$\begin{aligned}\int_B (\text{Re.S.})\, dP &= \int_B \frac{\int_B X\,dP}{P(B)} dP = \frac{\int_B X\,dP}{P(B)} \cdot \int_B 1\, dP\\ &= \int_B X\, dP.\end{aligned}$$

– $\int_{B^C} (\text{Re.S.})\, dP \overset{analog}{=} \int_{B^C} X\, dP$

–
$$\begin{aligned}\int_\Omega (\text{Re.S.})\, dP &= \int_B (\text{Re.S.})\, dP + \int_{B^C} (\text{Re.S.})\, dP\\ &\overset{s.o.}{=} \int_B X\, dP + \int_{B^C} x\, dP = \int_\Omega X\, dP.\end{aligned}$$

Aus obiger Rechnung folgt auch, dass die konstanten Funktionswerte von $E(X|\mathcal{C})$ auf B bzw. B^C eindeutig sind. □

Satz 7. Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. X, X_i integrierbar; σ-Algebra $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$; $c, \alpha_{1,2} \in \mathbb{R}$.

a) $\underset{C\in\mathcal{C}}{\forall} \displaystyle\int_C E(X \mid \mathcal{C}) dP = \int_C X\, dP$

b) $X = c$ P-f.s. $\Longrightarrow E(X \mid \mathcal{C}) = c$ f.s.

c) $X \geq 0$ P-f.s. $\Longrightarrow E(X \mid \mathcal{C}) \geq 0$ f.s.

d) $E(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \mid \mathcal{C}) = \alpha_1 E(X_1 \mid \mathcal{C}) + \alpha_2 E(X_2 \mid \mathcal{C})$ f.s.

e) $X_1 \leq X_2$ P-f.s. $\Longrightarrow E(X_1 \mid \mathcal{C}) \leq E(X_2 \mid \mathcal{C})$ f.s.

f) X $\mathcal{C}$-$\mathcal{B}$-messbar $\Longrightarrow X = E(X \mid \mathcal{C})$ f.s.

g) X integrierbar, Y $\mathcal{C}$-$\mathcal{B}$-messbar, XY integrierbar $\Longrightarrow E(XY \mid \mathcal{C}) = Y E(X \mid \mathcal{C})$ f.s.

h) X, X' integrierbar, $XE(X' \mid \mathcal{C})$ integrierbar
$\Longrightarrow E(XE(X' \mid \mathcal{C}) \mid \mathcal{C}) = E(X \mid \mathcal{C})E(X' \mid \mathcal{C})$ f.s.

i) σ-Algebra $\mathcal{C}_{1,2}$ mit $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{A}$, X integrierbar
$$E(E(X \mid \mathcal{C}_1) \mid \mathcal{C}_2) = E(X \mid \mathcal{C}_1) \text{ f.s.}$$
$$E(E(X \mid \mathcal{C}_2) \mid \mathcal{C}_1) = E(X \mid \mathcal{C}_1) \text{ f.s.}$$

Hier f.s. … $\text{Rest}_{\mathcal{C}}$ P-f.s. bzw. $\text{Rest}_{\mathcal{C}_1}$ P-f.s.

Beweis:

a) Folgt unmittelbar aus der Definition.

b) Klar, da die Konstante die Messbarkeits- und Integralbedingungen erfüllt.

c) $\forall\, C \in \mathcal{C}: \quad \int_C \; E(X|\mathcal{C})\, dP = \int_C \; X\, dP \geq 0$
(da $X \geq 0$ P-f.s.)
$\Rightarrow E(X|\mathcal{C}) \geq 0$ f.s.
(da $0 \leq \int\limits_{[E(X|\mathcal{C})<-\frac{1}{n}]} E(X|\mathcal{C})\, dP \;\leq -\frac{1}{n} \cdot P\big[E(X|\mathcal{C}) < -\frac{1}{n}\big]$
also $P[E(X|\mathcal{C}) < 0] = \lim\limits_{n\to\infty} P[E(X|\mathcal{C}) < -\frac{1}{n}] = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0.$)

d) Rechte Seite ist $\mathcal{C} - \mathcal{B}$-messbar, integrierbar und erfüllt für alle $C \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
&\int_C (\alpha_1 E(X_1|\mathcal{C}) + \alpha_2 \cdot E(X_2|\mathcal{C}))\, dP \\
&= \alpha_1 \cdot \int_C E(X_1|\mathcal{C})\, dP + \alpha_2 \cdot \int_C E(X_2|\mathcal{C})\, dP \\
&\overset{Definition}{=} \alpha_1 \cdot \int_C X_1\, dP + \alpha_2 \cdot \int_C X_2\, dP \\
&= \int_C (\alpha_2 \cdot X_1 + \alpha_2 \cdot X_2)\, dP.
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
&X_1 \leq X_2 \text{ P-f.s.} \;\Rightarrow\; X_2 - X_1 \geq 0 \text{ P-f.s.} \\
&\overset{c)}{\Rightarrow} E(X_2 - X_1|\mathcal{C}) \geq 0 \text{ f.s.} \\
&\overset{d)}{\Rightarrow} E(X_2|\mathcal{C}) - E(X_1|\mathcal{C}) \geq 0 \text{ f.s.}
\end{aligned}$$

f) Klar, da X $\mathcal{C} - \mathcal{B}$-messbar ist und die Integralbedingung erfüllt.

g) **Fall I:** $X \geq 0$ und $Y \geq 0$
Da $Y \cdot E(X|\mathcal{C})$ $\mathcal{C} - \mathcal{B}$-messbar ist, genügt es zu zeigen:

(1) $Y \cdot E(X|\mathcal{C})$ integrierbar
(2) $\forall\, C \in \mathcal{C}: \quad \int_C \; Y \cdot E(X|\mathcal{C})\, dP = \int_C X \cdot Y\, dP$

(1) folgt wegen $X \geq 0$ und $Y \geq 0$ aus (2).

Nachweis von (2):

Fall 1: $X \geq 0$ und $Y = \chi_B$ für ein $B \in \mathcal{C}$.

Dann gilt für $C \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
\int_C \; Y \cdot E(X|\mathcal{C})\, dP &= \int\limits_{B\cap C} E(X|\mathcal{C})\, dP \\
&= \int\limits_{B\cap C} X\, dP \\
&\quad \text{(nach Definition der bedingten Erwartung und } B \cap C \in \mathcal{C}) \\
&= \int_C X \cdot \chi_B\, dP = \int_C X \cdot Y\, dP
\end{aligned}$$

Fall 2: $X \geq 0$ und Y nichtnegativ einfach.

Beh. folgt mit Linearität des Integrals aus Fall 1.

Fall 3: $X \geq 0$ und $Y \geq 0$

Behauptung folgt aus Fall 2, indem man Y von unten durch nichtnegative (und $\mathcal{C}-\mathcal{B}$-messbare) Funktionen appoximiert, den Satz von der monotonen Konvergenz und das Resultat aus Fall 2 anwendet.

Fall II: Allgemeine X und Y.

$$\begin{aligned}
E(X \cdot Y|\mathcal{C}) &= E(X^+ \cdot Y^+ - X^- \cdot Y^+ - X^+ \cdot Y^- + X^- \cdot Y^-|\mathcal{C}) \\
&\overset{d)}{=} E(X^+ \cdot Y^+|\mathcal{C}) - E(X^- \cdot Y^+|\mathcal{C}) - E(X^+ \cdot Y^-|\mathcal{C}) + E(X^- \cdot Y^-|\mathcal{C}) \quad f.s. \\
&= Y^+ \cdot E(X^+|\mathcal{C}) - Y^+ \cdot E(X^-|\mathcal{C}) - Y^- \cdot E(X^+|\mathcal{C}) + Y^- \cdot E(X^-|\mathcal{C}) \quad f.s. \\
&\quad \text{(nach Fall 3, wobei alle auftretenden Produkte integrierbar sind,} \\
&\quad \text{ da } X \cdot Y \text{ integrierbar ist)} \\
&= (Y^+ - Y^-) \cdot (E(X^+|\mathcal{C}) - E(X^-|\mathcal{C})) \\
&\overset{d)}{=} Y \cdot E(X|\mathcal{C}) \quad \text{f.s.}
\end{aligned}$$

h) Folgt aus g) mit $Y = E(X'|\mathcal{C})$.

i) i_1) $E(X|\mathcal{C}_1)$ ist $\mathcal{C}_1 - \mathcal{B}$-messbar und damit auch $\mathcal{C}_2 - \mathcal{B}$-messbar. Mit f) folgt die Behauptung.

i_2) $E(X|\mathcal{C}_1)$ ist $\mathcal{C}_1 - \mathcal{B}$-messbar, integrierbar, und es gilt für $C \in \mathcal{C}_1$:

$$\int_C E(X \mid \mathcal{C}_1)\, dP \overset{Def.}{=} \int_C X\, dP = \int_C E(X|\mathcal{C}_2)\, dP$$

wobei die letzte Gleichheit aus $C \in \mathcal{C}_2$ und der Definition von $E(X|\mathcal{C}_2)$ folgt.

$\square$

Definition 12. Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Integrierbare ZV X: $(\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$. ZV Y: $(\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\Omega', \mathcal{A}')$.
$E(X \mid Y) := E(X \mid \underbrace{Y^{-1}(\mathcal{A}')})$ ...**bedingte Erwartung von X bei gegeb. Y.**
[kleinste σ-Algebra in Ω, bzgl. der Y messbar ist ...$\mathcal{F}(Y)(\subset \mathcal{A})$]

b) Integrierbare ZV X: $(\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$. ZVn Y_i: $(\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\Omega_i', \mathcal{A}_i')$ $(i \in I)$

$\mathcal{C}(\subset \mathcal{A})$ sei die kleinste σ-Algebra in Ω, bzgl. der alle Y_i messbar sind

$[\mathcal{C} = \mathcal{F}(\bigcup_{i \in I} Y_i^{-1}(\mathcal{A}_i)) \ldots \mathcal{F}(Y_i,\ i \in I)]$

$E(X \mid (Y_i)_{i \in I}) := E(X \mid \mathcal{C})$ ...**bedingte Erwartung von X bei gegebenem Y_i, $i \in I$.**

Bemerkung. Integrierbare ZV $X\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$.

a) σ-Algebra $\mathcal{C}$ in $\mathcal{A}$

   $(X^{-1}(\overline{\mathcal{B}}), \mathcal{C})$ unabhängig $\Longrightarrow E(X \mid \mathcal{C}) = EX$ f.s.

   Hierbei heißen $(X^{-1}(\overline{\mathcal{B}}), \mathcal{C})$ unabhängig, falls für alle Mengen $B \in X^{-1}(\overline{\mathcal{B}})$ und $C \in \mathcal{C}$ gilt: B, C sind unabhängig.

b) ZV $Y\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\Omega', \mathcal{A}')$

   (X, Y) unabhängig $\Rightarrow E(X \mid Y) = EX$ f.s.

Beweis:

a) EX ist als konstante Abbildung $\mathcal{C} - \mathcal{B}$-messbar, integrierbar und für $C \in \mathcal{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_C X\, dP = \int X \cdot \chi_C\, dP = E(X \cdot \chi_C) \\
&= E(X) \cdot E(\chi_C) \\
&\qquad \text{(da } X, \chi_C \text{ unabhängig wegen } X^{-1}(\overline{\mathcal{B}}),\ \mathcal{C} \text{ unabhängig)} \\
&= E(X) \cdot P(C) = \textstyle\int_C E(X)\, dP.
\end{aligned}$$

b) folgt aus a) mit $\mathcal{C} = \mathcal{F}(Y) = Y^{-1}(\mathcal{A}')$

$\square$

Definition 13. Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von integrierbaren ZVn $X_n\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ heißt bei gegebener monoton wachsender Folge $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von σ-Algebren $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_n$-$\overline{\mathcal{B}}$-Messbarkeit von X_n [wichtiger Fall $\mathcal{A}_n = \mathcal{F}(X_1, \ldots, X_n)$ $(n \in \mathbb{N})$] ein **Martingal** bzgl. $(\mathcal{A}_n)$, wenn

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = X_n \text{ f.s.}$$

$$\text{[d.h.} \qquad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{C\in\mathcal{A}_n}{\forall}\ \int_C X_{n+1}\, dP = \int_C X_n\, dP].$$

Analog für stochastische Prozesse $(X_t)_{t\in[0,T]}$ mit Filterung $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$.

Bemerkung. Ein Martingal (X_n) bzgl. $(\mathcal{A}_n)$ ist auch ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}(X_1, \ldots, X_n))$.

Begründung: Meßbarkeit ist klar. Aus $\mathcal{F}(X_1) \subset \mathcal{A}_1, \mathcal{F}(X_2) \subset \mathcal{A}_2, \ldots$ und $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \ldots$ folgt $\mathcal{F}(X_1, \ldots, X_n) \subset \mathcal{A}_n$, und daher gilt für alle $C \in \mathcal{F}(X_1, \ldots X_n)$:

$$\int\limits_C X_{n+1} dP = \int\limits_C X_n dP.$$

□

Beispiel: Ein Spiel mit zufälligen Gewinnständen X_n in $\overline{\mathbb{R}}$ heißt fair, wenn gilt:
X_n integrierbar, $EX_1 = 0$ und $E(X_{n+1}|X_1, \dots, X_n) = X_n \ P - f.s.$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dies ist äquivalent zu $EX_1 = 0$ und $(X_n)_n$ ist Martingal bzgl. $\mathcal{F}(X_1, \dots, X_n)$.

Anwendung in der Finanzmathematik:

Lemma 5. Ist $\sigma \geq 0$, ist $(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ Wiener Prozess, und ist die zugehörige Filterung $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ definiert durch

$$F_t = \mathcal{F}\left(\left\{W_s : 0 \leq s \leq t\right\}\right),$$

so ist

$$\left(\exp\left(\sigma \cdot W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)\right)_{t\in\mathbb{R}}$$

ein Martingal bzgl. $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Der Aktienkurs

$$S(t) = s_0 \cdot e^{(\widetilde{b}+\frac{1}{2}\sigma^2)t} \cdot \underbrace{e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}}_{\text{Martingal mit EW 1}}, S(0) = s_0$$

ist also Produkt aus mittlerem Kurs $s_0 \cdot e^{(\widetilde{b}+\frac{1}{2}\sigma^2)t}$ und einem Martingal, das die zufällige Schwankung um mittleren Kurs modelliert.

Beweis von Lemma 5. Setze

$$X_t = \exp\left(\sigma \cdot W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right).$$

Sei $t > s$. Es ist zu zeigen: $E(X_t|F_s) = X_s$.
Mit

$$\begin{aligned} X_t &= e^{\sigma W_t - \sigma W_s + \sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \cdot e^{\sigma W_s} \cdot e^{\sigma(W_t - W_s)} \end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned} E(X_t|F_s) &= E(e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \cdot e^{\sigma W_s} \cdot e^{\sigma(W_t-W_s)}|F_s) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \cdot E(e^{\sigma W_s} \cdot e^{\sigma(W_t-W_s)}|F_s) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \cdot e^{\sigma W_s} \cdot E(e^{\sigma(W_t-W_s)}|F_s) \\ &\quad \text{(da } e^{\sigma W_s} \text{ messbar bzgl. } F_s \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \cdot e^{\sigma W_s} \cdot E(e^{\sigma(W_t-W_s)}) \text{ (da unabh. von } F_s) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \cdot e^{\sigma W_s} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)} \cdot 1 \quad \text{(nach Beweis von Lemma 4)} \\ &= e^{\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s}. \end{aligned}$$

□

7 Stochastische Modellierung eines Aktienkurses in stetiger Zeit, Teil 2

Mit geometrischer Brownscher Bewegung (5.2), d.h. mit

$$S(t) = s_0 \cdot e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)\cdot t+\sigma\cdot W_t}$$

wurde Prozess gefunden, um Aktienkurs bei fester Zinsrate und Volatilität mathematisch zu modellieren.

Wünschenswert: Aktienkurs allgemeiner formulieren
$\rightsquigarrow$ mit nicht-konstanter, zeitabhängiger, integrierbarer Zinsrate $\widetilde{b}(t) = b(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)$ und Volatilität $\sigma(t)$.

Idee: Statt Logarithmus von (5.2)

$$\log(S(t)) = \log(s_0) + \underbrace{(b - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot t}_{\int\limits_0^t (b-\frac{1}{2}\sigma^2)ds} + \sigma W_t$$

schreibe

$$\log(S(t)) = \log(s_0) + \int\limits_0^t (b(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s))ds + \int\limits_0^t \sigma(s)dW_s$$

wobei

$$\int\limits_0^t 1dW_s = W_t - W_0 = W_t$$

gelten wird.

Nötig: Definition von $\int\limits_0^t \sigma(s)dW_s$!

Berechnung bzw. Definition von $\int\limits_0^t \sigma(s)dW_s$ führt zu dem Begriff des stochastischen Integrals oder auch Itô-Integral.

Itô-Integral

Zwei (naive) Ideen zur Berechnung von $\int\limits_0^t X_s(\omega)dW_s(\omega)$ $(t \in [0,\infty))$, wobei X_s stochastischer Prozess ist.

1. Idee: Berechnung, falls Dichte existiert:

$$\int\limits_0^t X_s(\omega)dW_s(\omega) = \int\limits_0^t X_s(\omega)\frac{dW_s(\omega)}{ds}ds$$

Problem: Berechnung nicht möglich, da P-fast alle Pfade von W_s, also $s \mapsto W_s(\omega)$ (ω fest), nicht differenzierbar (siehe Kapitel 2, Satz 21 in *Korn und Korn (2001)*[2]).

2. Idee: Erklärung als Lebesgue-Stieltjes-Integral:

$$\int_0^1 X_s(\omega) dW_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} (W_{i/2^n}(\omega) - W_{(i-1)/2^n}(\omega)) \cdot X_{\frac{i-1}{2^n}}(\omega)$$

(nur sinnvoll, falls für alle n gilt: $\sum |W_{i/2^n}(\omega) - W_{i-1/2^n}(\omega)| \leq C < \infty$ für Konstante C)

Problem: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{2^n} |W_{i/2^n}(\omega) - W_{(i-1)/2^n}(\omega)| = \infty \;\; P - f.s.$ (siehe Kapitel 2, Satz 22 in *Korn und Korn (2001)*).

3. Idee: Definition von $\int_0^t X_s(\omega) dW_s$ für stückweise konstante stochastische Prozesse und dann Fortsetzung.

Definition 14: Ein **einfacher Prozess** $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ ist ein stochastischer Prozess $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$, welcher für alle $\omega \in \Omega$ die Darstellung

$$X_t(\omega) = X(t,\omega) = \Phi_0(\omega) \cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(\omega) \cdot 1_{(t_{i-1},t_i]}(t)$$

besitzt. Hierbei ist $\{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Zerlegung von $[0,T]$ und $\Phi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) sind beschränkte ZVn mit den Eigenschaften

$$\Phi_0 \; F_0 - \text{messbar}, \Phi_i \; F_{t_{i-1}} - \text{messbar} .$$

Bemerkung: Pfade $X_.(\omega)$ vom einfachen Prozess X_t sind linksstetige Treppenfunktionen der Höhe $\Phi_i(\omega) \cdot 1_{(t_{i-1},t_i]}(t)$. Die Form des Intervalls bei den Indikatorfunktionen (links offen und rechts abgeschlossen) wurde im Hinblick auf die Definition des Integrals eines einfachen Prozesses in Definition 15 gewählt (vgl. Definition des Lebesgue-Stieltjes-Integrals).

Definition 15: Das **stochastische Integral** $I_.(X)$ **bezüglich** eines **einfachen Prozesses** $X = \{X_t\}_{t\in[0,T]}$ ist für $t \in [0,T]$ definiert gemäß

$$I_t(X) := \int_0^t X_s dW_s := \sum_{1\leq i\leq n} \Phi_i \cdot (W_{\min\{t_i,t\}} - W_{\min\{t_{i-1},t\}}).$$

Bemerkung: Man sieht leicht: Das obige Integral ist wohldefiniert, da jede Verfeinerung der ursprünglichen Partition des einfachen Prozesses zum gleichen Integral führt.

[2] Ralf und Elke Korn. Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung. Vieweg. 2001.

Eigenschaften von $I_t(X)$:

Satz 8: Sei $X := \{X_t\}_{t\in I}, I = [0,T]$, einfacher Prozess.
Dann gilt:

a) $\{I_t(X)\}_{t\in I}$ ist Martingal bzgl. $\{F_t\}_{t\in I}$ mit stetigen Pfaden und $E(I_t(X)) = 0$ für alle $t \in I$.

b) $E(\int\limits_0^t X_s dW_s)^2 = E(\int\limits_0^t X_s^2 ds)$ für alle $t \in I$.

Beweis:

a) Es ist zu zeigen:

   i) $I_t(X)$ ist F_t-messbar

   ii) $\{I_t(X)\}_{t\in\mathbb{R}}$ hat stetige Pfade

   iii) $E(I_t(X)|F_s) = I_s(X)$ für $t > s$

   iv) $E(I_t(X)) = 0$

zu i) : Folgt aus der $F_{t_{i-1}}$-Messbarkeit von Φ_i und der F_t-Messbarkeit von W_{t_k} für $t_k \leq t$.

zu ii) : Klar, da W_t stetige Pfade besitzt.

zu iii) : OBdA sei $k > l$ und seien $t \in (t_{k-1}, t_k], s \in (t_{l-1}, t_l], s < t$.

$$\begin{aligned}
E(I_t(X)|F_s) &= E\Bigg[\sum_{i=1}^{l-1} \Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_l(W_{t_l} - W_s + W_s - W_{t_{l-1}}) \\
&\qquad + \sum_{i=l+1}^{k-1} \Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_k(W_t - W_{t_{k-1}})\Bigg| F_s\Bigg] \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{l-1} \Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_l(W_s - W_{t_{l-1}}) + \underbrace{E(\Phi_l(W_{t_l} - W_s)|F_s)}_{=:A} \\
&\quad \underbrace{+ E(\sum_{i=l+1}^{k-1} \Phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_k(W_t - W_{t_{k-1}})|F_s)}_{=:B} \\
&= I_s(X)
\end{aligned}$$

da $A = \Phi_l E(W_{t_l} - W_s|F_s) \overset{\text{unabh. Zuwächse}}{=} \Phi_l \cdot E(W_{t_l} - W_s) \overset{\text{nach Def.}}{=} 0$,
($(*)$: da für $i \leq l-1$ Φ_l F_s-messbar, $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$ F_s-messbar, Φ_l F_s-messbar (aufgrund der monoton wachsender Eigenschaft von σ-Alg.))

und für $i \geq l+1$ und $u \geq t_{i-1} (\rightsquigarrow t_{i-1} \geq s!)$ gilt

$$\begin{aligned}
&E(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|F_s) \\
&= E\left(E(\Phi_i(W_u - W_{t_{i-1}})|F_{t_{i-1}})|F_s\right) \\
&= E\left(\Phi_i E((W_u - W_{t_{i-1}})|F_{t_{i-1}})|F_s\right) \\
&\overset{\text{unabh. Zuwächse}}{=} E(\Phi_i E(W_u - W_{t_{i-1}})|F_s) = 0
\end{aligned}$$

und somit

$$B = 0\ .$$

zu iv) : Zu zeigen: $E(I_t(X)) = 0$.

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow\quad & E\left(\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(W_{\min\{t_i,t\}} - W_{\min\{t_{i-1},t\}})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left(E(\Phi_i(W_{\min\{t_i,t\}} - W_{\min\{t_{i-1},t\}})|F_{t_{i-1}})\ \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(\Phi_i \underbrace{E(W_{\min\{t_i,t\}} - W_{\min\{t_{i-1},t\}})}_{=0,\text{ nach Def.}})
\end{aligned}$$

Oder auch einfacher:

$I_0(X) = 0$ nach Definition.
$\rightsquigarrow E(I_0(X)) = 0$
Da $I_t(X)$ Martingal folgt $E(I_t(X)) = E(E(I_t(X)|\mathcal{F}_0)) = E(I_0(X)) = 0$.

b) Einfachheitshalber sei $t = t_{k+1}$.

$$E\left(\int_0^t X_s dW_s\right)^2 = \sum_{i,j=1,\ldots,k} E(\Phi_i\Phi_j(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}))$$

1. Fall: $i \neq j$, oBdA $i > j$:

$$\begin{aligned}
&E(\Phi_i\Phi_j(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})) \\
&= E(\underbrace{E(\Phi_i\Phi_j(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})|F_{t_{i-1}})}_{=\Phi_j(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\cdot\Phi_i\cdot E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})=0})
\end{aligned}$$

2. Fall: $i = j$:

$$\begin{aligned}
E(\Phi_i^2\cdot(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})^2) &= E\{\Phi_i^2\cdot E((W_{t_i}-W_{t_{i-1}})^2|F_{t_{i-1}})\}\\
&\overset{\text{unabh. Zuwächse}}{=} E\{\Phi_i^2\cdot E((W_{t_i}-W_{t_{i-1}})^2)\}\\
&= E\{\Phi_i^2\cdot \underbrace{(E(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})^2-(E(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}))^2)}_{=\underbrace{V(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})}_{=t_i-t_{i-1}}}\}\\
&= E(\Phi_i^2\cdot(t_i-t_{i-1}))
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(I_t(X)^2)=E\left(\sum_{i=1}^k \Phi_i^2\cdot(t_i-t_{i-1})\right)=E\left(\int_0^t X_s^2 ds\right)$$

$\square$

Bemerkungen:

- $I_t(X)$ ist quadratisch integrierbar (nach Satz 8b).
- $X_t \equiv 1 \rightsquigarrow \int_0^t 1dW_s = W_t - W_0 = W_t$,
  somit auch $E(\int_0^t 1dW_s)^2 = E(W_t^2) = t \quad (= \int_0^t 1ds)$.

Ziel im Folgenden: Fortsetzung des stochastischen Integrals bezüglich einfacher Prozesse auf größere Klasse von Prozessen.

Definition 16: Die **Menge** der reellwertigen stochastischen Prozesse $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ mit

$$E\left(\int_0^T X_t^2 dt\right)<\infty$$

wird als $\mathbf{L^2[0,T]}$ bezeichnet.

Bemerkung: In $\mathbf{L^2[0,T]}$ werden zwei Prozesse $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ und $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ mit

$$E\left(\int_0^T (X_t-Y_t)^2 dt\right)=0$$

identifiziert. Dies führt dazu, dass durch

$$\left(E\left(\int_0^T X_t^2 dt\right)\right)^{1/2}$$

eine Norm auf $\mathbf{L^2[0,T]}$ definiert ist.

Beispiele:

a) Eindimensionale Brownsche Bewegung W_t liegt in $L^2[0,T]$, da:

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^T W_t^2 dt\right) &= \int_\Omega \int_0^T W_t^2 dt\, dP = \int_0^T \underbrace{\int_\Omega W_t^2 dP}_{=t}\; dt \\ &= \frac{T^2}{2} < \infty \end{aligned}$$

b) Ist W_t Brownsche Bewegung, dann ist e^{aW_t+bt+c} in $L^2[0,T] \quad (a,b,c \in \mathbb{R})$.
Denn:

$$\begin{aligned} & E(\int_0^T (e^{aW_t+bt+c})^2 dt) \\ &= \int_\Omega \int_0^T e^{2aW_t+2bt+2c} dt\, dP \\ &= \int_0^T e^{2(bt+c)} \underbrace{\int_\Omega e^{2aW_t} dP}_{=E(e^{2aW_t})}\; dt \\ &= \int_0^T e^{2(bt+c)} e^{a^2 t} dt \quad (\text{ mit Beziehung } E(e^{\sigma W_t}) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 \cdot t}) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Satz 9: Sei $X \in L^2[0,T]$. Es existiert Folge $X^{(n)}$ von einfachen Prozessen mit

$$\lim_{n\to\infty} E \int_0^T (X_s - X_s^{(n)})^2 ds = 0 \; .$$

Beweis: Siehe Kapitel 2, Beweis von Satz 30 in Korn und Korn (2001). □

Bemerkung: Obiger Satz besagt, dass jedes $X \in L^2[0,T]$ durch Folge von einfachen Prozessen approximiert werden kann.

Satz 10: Es existiert genau eine lineare Abbildung J von $L^2[0,T]$ in den Raum der Martingale mit stetigen Pfaden auf $[0,T]$ bzgl. $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ mit den Eigenschaften:

i) $X = \{X_t\}_{t\in[0,T]}$ einfacher Prozess $\Rightarrow P(J_t(X) = I_t(X)$ für alle $t \in [0,T]) = 1$

ii) $E(J_t(X)^2) = E(\int_0^t X_s^2 ds)$ (“Itô-Isometrie”)

Beweis: siehe Kapitel 2, Beweis von Satz 32 in Korn und Korn (2001). □

Definition 17: Das **stochastische Integral** bzw. das **Itô-Integral** von X bzgl. W ist gegeben durch

$$\int_0^t X_s dW_s := J_t(X)$$

mit $X \in L^2[0,T]$ und J wie in Satz 10.

Bemerkungen:

a) Itô-Integral eines Prozesses aus $L^2[0,T]$ ist ein Martingal und ist quadratisch integrierbar (folgt aus Itô-Isometrie).

b) Itô-Integral ist linear, d. h. $\int_0^t (\alpha X_s + \beta Y_s) dW_s = \alpha \int_0^t X_s dW_s + \beta \int_0^t Y_s dW_s \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \ X_s, Y_s \in L^2[0,T])$.

c) Zur Modellierung von Handelsstrategien wird größere Klasse als $L^2[0,T]$ - so genanntes $H^2[0,T]$ ($\rightsquigarrow$ für alle Prozesse $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ gilt $\int_0^T Y_s^2 ds < \infty$ f.s.) – benötigt. Itô-Integral lässt sich fortsetzen auf $H^2[0,T]$, aber Itô-Integral eines Prozesses, welcher in $H^2[0,T]$ aber nicht in $L^2[0,T]$ liegt, ist in der Regel kein Martingal.

Aktienkurs bei variabler Zinsrate und Volatilität
Der Aktienkurses bei variabler Zinsrate $\widetilde{b}(t) = b(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)$ und variabler Volatilität $\sigma(t)$ ist gegeben durch

$$S(t) = s_0 \cdot e^{\int_0^t (b(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s))ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s} \quad (s_0 = S(0)). \tag{7.1}$$

Das Integral $\int_0^t \sigma(s) dW_s$ in (7.1) ist ein Itô-Integral.

8 Die Itô-Formel

Definition 18: Ein reellwertiger stochastischer Prozess $\{(X(t), F_t)\}_{t\in I} = \{(X_t, F_t)\}_{t\in I}$, $I = [0, \infty)$, heißt reellwertiger **Itô-Prozess**, wenn er für alle $t \geq 0$ die Darstellung

$$X(t) = X(0) + \int_0^t K(s) ds + \int_0^t H(s) dW(s)$$

besitzt, wobei $\{(W(t), F_t)\}_{t\in I}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung ist, X_0 F_0-messbar ist und für die stochastischen Prozesse $\{K(t)\}_{t\in I}, \{H(t)\}_{t\in I}$ gilt

$$\int_0^t |K(s)| ds < \infty \ \ P\text{-f.s. und } \int_0^t H^2(s) ds < \infty \ \ P\text{-f.s.}$$

für alle $t \geq 0$.

Symbolische Differentialschreibweise :

$$dX_t = K_t dt + H_t dW_t$$

(sogenannte stochastische Differentialgleichung).

Im Folgenden: Herleitung einer stochastischen Differentialgleichung für stochastische Prozesse, die Funktionen von Itô-Prozessen sind.

Definition 19: X, Y reellwertige Itô-Prozesse mit

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + \int_0^t K(s)ds + \int_0^t H(s)dW(s), \\ Y(t) &= Y(0) + \int_0^t L(s)ds + \int_0^t M(s)dW(s). \end{aligned}$$

Die **quadratische Kovariation** von X und Y ist gegeben durch

$$< X, Y >_t := \int_0^t H(s) \cdot M(s)ds.$$

Die **quadratische Variation** von X ist gegeben durch

$$< X >_t := < X, X >_t = \int_0^t H^2(s)ds.$$

Schreibweise eines Integrals vom stochastischen Prozess Y bzgl. eines Itô-Prozesses X:

$$\int_0^t Y(s)dX(s) \; := \; \int_0^t Y(s) \cdot K(s)ds + \int_0^t Y(s) \cdot H(s)dW(s),$$

falls Integrale auf der rechten Seite definiert sind.

Satz 11 (Eindimensionale Itô-Formel):
Sei W_t eindimensionale Brownsche Bewegung, sei X_t reellwertiger Itô-Prozess mit

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.
Dann gilt für alle $t \geq 0$:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d < X >_s \quad f.s. \qquad (8.1)$$

Symbolische Differentialschreibweise der Itô-Formel:

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d < X >_t$$

Beweisidee von Satz 11:

1. Beweis nur mit Beschränktheitsannahmen an

$$X_0, \int_0^t H_s dW_s, \int_0^t |K_s| ds \text{ und } \int_0^t H_s^2 ds$$

durch Konstante C auf $[0, \infty) \times \Omega$.

$\Rightarrow |X_t| \leq 3C, H_t \in L^2[0,T]$ (da $E\int_0^T H_s^2 ds < \infty$) für alle $T > 0$, und $\int_0^t H_s dW_s$ ist Martingal.

Aus f zweimal stetig differenzierbar folgt f, f', f'' beschränkt im Wertebereich von X_t. Weiter hat $\{X\}_t$ stetige Pfade, da

$$t \mapsto \int_0^t K(s)\,ds \quad \text{und} \quad t \mapsto \int_0^t H(s)\,dW_s$$

wegen $\int_0^t |K(s)|\,ds < \infty$ $P.-f.s.$ und $H_t \in L^2[0,T]$ mit Wahrscheinlichkeit 1 stetig sind.

2. Anwendung von Taylor-Entwicklung.

Sei $\pi = \{t_0 = 0, \ldots, t_n = t\}$ Partition von $[0,t]$ mit

$$\| \pi \| := \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|$$

und sei $t > 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{i=1}^n (f(X_{t_i}) - f(X_{t_{i-1}})) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n f'(X_{t_{i-1}}) \cdot (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})}_{=:A} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(X_{t_{i-1}} + \Theta_i(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})) \cdot (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2}_{=:B} \end{aligned}$$

wobei $\Theta_i \in (0,1)$.

3. Betrachtung von A:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^n f'(X_{t_{i-1}}) \cdot \left(\int_0^{t_i} K_s ds + \int_0^{t_i} H_s dW_s - \int_0^{t_{i-1}} K_s ds - \int_0^{t_{i-1}} H_s dW_s\right) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n f'(X_{t_{i-1}}) \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} K_s ds}_{=:A_1(\pi)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f'(X_{t_{i-1}}) \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s dW_s}_{=:A_2(\pi)} \end{aligned}$$

3.1 Betrachtung von $A_1(\pi)$:

Es gilt:

$$A_1(\pi) \overset{\|\pi\|\to 0}{\longrightarrow} \int\limits_0^t f'(X_s)K_s ds \quad P-f.s.,$$

da f' gleichmäßig stetig im Wertebereich von X_s, $\{X_s\}_s$ stetige Pfade hat und

$$\int_0^t |K_s|\, ds \leq C < \infty$$

gilt.

3.2 Betrachtung von $A_2(\pi)$:

Da X_s Werte in einem kompakten Intervall annimmt und f' beschränkt in diesem kompakten Intervall ist, folgt $f'(X_s) \in L^2[0,T]$.

Setze

$$Y_s^\pi(\omega) = f'(X_0(\omega)) \cdot 1_{\{0\}}(s) + \sum_{i=1}^n f'(X_{t_{i-1}}(\omega)) \cdot 1_{(t_{i-1},t_i]}(s),$$

dann gilt

$$\int\limits_0^t Y_s^\pi H_s dW_s = A_2(\pi).$$

Mit Itô-Isometrie,

$$Y_s^\pi \to f'(X_s) \quad (\|\pi\| \to 0)$$

(da f' gleichmäßig stetig im Wertebereich von X_s ist und da $\{X_s\}_s$ stetige Pfade hat), und mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt:

$$E\left(\int\limits_0^t (f'(X_s) - Y_s^\pi) \cdot H_s dW_s\right)^2 = \underbrace{E(\int\limits_0^t (f'(X_s) - Y_s^\pi)^2 \cdot H_s^2 ds)}_{\overset{\|\pi\|\to 0}{\longrightarrow}\ 0}$$

Also gilt

$$A_2(\pi) = \int_0^t Y_s H_s dW_s \to \int_0^t f'(X_s) \cdot H_s dW_s \quad (\|\pi\| \to 0)$$

in L^2. Durch Übergang zu einer Teilfolge bei der Folge der Partitionen kann man hier sogar fast-sichere-Konvergenz annehmen.

3.3 Aus 3.1 und 3.2 folgt

$$A \overset{\|\pi\|\to 0}{\longrightarrow} \int\limits_0^t f'(X_s)K_s ds + \int\limits_0^t f'(X_s)H_s dW_s = \int\limits_0^t f'(X_s) dX_s \quad f.s.$$

4. Betrachtung von B:

$$\begin{aligned}
B \;&=\; \sum_{i=1}^{n} f''(X_{t_{i-1}} + \Theta_i(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})) \cdot \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} K_s ds \right)^2 \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^{n} f''(X_{t_{i-1}} + \Theta_i(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})) \cdot \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} K_s ds \right) \cdot \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s dW_s \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} f''(X_{t_{i-1}} + \Theta_i(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})) \cdot \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s dW_s \right)^2 \\
&=: \; I_1(\pi) + I_2(\pi) + I_3(\pi)
\end{aligned}$$

4.1 Betrachtung von $I_1(\pi) + I_2(\pi)$:

Aus Beschränktheit von f'' im Wertebereich von X_t sowie mit

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} K_s ds \right| \leq \int_0^t |K_s| ds < C$$

folgt:

$$\begin{aligned}
&|I_1(\pi) + I_2(\pi)| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} f''(X_{t_{i-1}} + \Theta_i(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})) \cdot \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} K_s ds \right) \cdot \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} K_s ds + 2 \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s dW_s \right] \right| \\
&\leq ||f''||_\infty \cdot \left(\max_{i \leq i \leq n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} K_s ds \right| + 2 \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s dW_s \right| \right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} K_s ds \right| \\
&\leq 2 \cdot C \cdot ||f''||_\infty \cdot \underbrace{\left(\max_{1 \leq i \leq n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} K_s ds \right| + \max_{1 \leq i \leq n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s dW_s \right| \right)}_{(*_1)} .
\end{aligned}$$

Da $\int_0^t K_s ds$ und $\int_0^t H_s dW_s$ mit Wahrscheinlichkeit 1 stetig sind, folgt:

$$(*_1) \overset{||\pi|| \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad f.s.$$

4.2 Betrachtung von $I_3(\pi)$:

$$I_3(\pi) \overset{(*_2)}{\approx} \sum_{i=1}^{n} f''(X_{t_{i-1}} + \Phi_i(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})) \cdot \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds \right)$$

und

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} f''(X_{t_{i-1}} + \Theta_i(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})) \cdot \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds \right) \\
&\overset{||\pi|| \to 0}{\longrightarrow} \int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds = \int_0^t f''(X_s) d < X >_s
\end{aligned}$$

$(*_2)$: vgl. mit Itô-Isometrie gilt: $\quad E\left\{\left(\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} H_s dW_s\right)^2\right\} = E\left(\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} H_s^2 ds\right)$

Dies “zeigt”:

$$\frac{1}{2}B \to \int_0^t f''(X_s)d < X >_s \quad f.s.$$

□

Anwendungsbeispiele der Itô-Formel

Sei X_t Itô-Prozess mit $X_t = X_0 + \int\limits_0^t K_s ds + \int\limits_0^t H_s dW_s$.

1. $X_0 = 0, K_s \equiv 1, H_s = 0$:

   $\rightsquigarrow X_t = t$

   Mit Itô-Formel (8.1)

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int\limits_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int\limits_0^t f''(X_s)d < X >_s \\ &= f(X_0) + \int\limits_0^t f'(X_s)\cdot \underbrace{K_s}_{\equiv 1} ds + \int\limits_0^t f'(X_s)\cdot \underbrace{H_s}_{\equiv 0} dW_s + \frac{1}{2}\int\limits_0^t f''(X_s)d < X >_s \end{aligned}$$

   folgt

$$f(t) = f(0) + \int\limits_0^t f'(s)ds$$

   $\rightsquigarrow$ Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Spezialfall der Itô-Formel

2. $X_t = h(t)$ mit h differenzierbar (also $X_0 = h(0)$, $K_s = h'(s)$ und $H_s \equiv 0$).

   $\rightsquigarrow X_t = h(0) + \int\limits_0^t h'(s)ds + \int\limits_0^t 0dW_s$

Aus Itô-Formel:

$$
\begin{aligned}
f(h(t)) &= f(h(0)) + \underbrace{\int_0^t f'(h(s))dX_s}_{=\int_0^t f'(h(s))\cdot h'(s)ds \;+\; \int_0^t f'(h(s))\cdot 0dW_s} + 0 \\
&= f(h(0)) + \int_0^t f'(h(s))\cdot h'(s)ds
\end{aligned}
$$

$\leadsto$ Substitutionsregel

3. $X_0 = 0, K_s = 0, H_s \equiv 1$ und $f(x) = x^2$

$\leadsto \quad X_t = \int_0^t dW_s = W_t$

Mit (8.1):

$$
f(X_t) = f(X_0) + \underbrace{\int_0^t f'(X_s)dX_s}_{= \underbrace{\int_0^t f'(X_s)\cdot K_s ds}_{=0} \;+\; \int_0^t f'(X_s)\cdot H_s dW_s} + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d < X >_s
$$

folgt

$$
\begin{aligned}
W_t^2 &= 0 + \int_0^t 2W_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds \\
&= 2\int_0^t W_s dW_s + t
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow (W_t^2 - t)\cdot \frac{1}{2} = \int_0^t W_s dW_s$

Beachte: $\quad d < X >_t = \; d < W >_t = \; dt,$ da $\; < X >_t = \int_0^t H_s^2 ds \overset{H_s \equiv 1}{=} t$

Die Gleichung des Aktienkurses

Sei $S(t)$ eine geometrische Brownsche Bewegung, also

$$S(t) = s_0 e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}.$$

Sei X_t Itô-Prozess mit $X_0 = 0, K_s = b - \frac{1}{2}\sigma^2, H_s = \sigma$ und sei $f(x) = s_0 e^x$.

$\rightsquigarrow X_t = 0 + \int\limits_0^t (b - \frac{1}{2}\sigma^2)ds + \int\limits_0^t \sigma dW_s$ und $f(X_t) = S(t)$

Mit (8.1) und $f''(x) = f'(x) = f(x)$ folgt:

$$\begin{aligned}
f(X_t) &= f(X_0) + \underbrace{\int\limits_0^t f'(X_s)dX_s}_{= \int\limits_0^t f'(X_s)\cdot K_s ds + \int\limits_0^t f'(X_s)\cdot H_s dW_s} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t f''(X_s)d < X >_s \\
&= s_0 + \int\limits_0^t (f(X_s)(b - \tfrac{1}{2}\sigma^2) + \tfrac{1}{2}f(X_s)\cdot\sigma^2)ds + \int\limits_0^t f(X_s)\cdot\sigma\, dW_s
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S(t) = s_0 + \int\limits_0^t S(s)\cdot b\, ds + \int\limits_0^t S(s)\cdot\sigma\, dW_s \tag{8.2}$$

(8.2) wird als **Gleichung des Aktienpreises** bezeichnet.

Symbolische Differentialschreibweise von (8.2):

$$\boxed{\begin{array}{c} dS(t) = S(t)(b\,dt + \sigma\,dW_t) \\ \text{mit } S(0) = s_0 \end{array}} \tag{8.3}$$

(8.3) ist so genannte **stochastische DGL** und geometrische Brownsche Bewegung ist (eindeutige) Lösung dieser stochastischer DGL (SDGL).

Bemerkungen:

a) (8.2) gilt auch für zeitabhängige b und σ mit Wahl von X_t gemäß

$$X_t = \int\limits_0^t (b(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s))ds + \int\limits_0^t \sigma(s)dW_s.$$

Beachte: b und σ geeignet voraussetzen, so dass X_t Itô-Prozess!

b) Verallgemeinerung von (8.3) durch SDGL

$$\begin{aligned}
&dX(t) = (A(t)\cdot X(t) + a(t))dt + (D(t)\cdot X(t) + \delta(t))dW_t \text{ mit} \\
&X(0) = x,
\end{aligned}$$

wobei $\{(W(t), F_t)\}_{t\in I}$ eindimensionale Brownsche Bewegung und A, a, D, δ stochastische Prozesse sind mit

$$\left.\begin{array}{l}
\int\limits_0^t (|A(s)| + |a(s)|)ds < \infty \quad P\text{-f.s. } \forall\, t \geq 0 \text{ und} \\
\int\limits_0^t (D(s)^2 + \delta(s)^2)ds < \infty \quad P\text{-f.s. } \forall\, t \geq 0.
\end{array}\right\} (*)$$

Es lässt sich zeigen, dass diese SDGL aufgrund von $(*)$ die "eindeutige" (eindeutig bis auf Mengen von Maß gleich Null) Lösung $\{X_t, F_t\}_{t\in[0,\infty)}$ mit

$$X(t) = x + \int_0^t (A(s) \cdot X(s) + a(s))ds + \int_0^t (D(s) \cdot X(s) + \delta(s))dW_s \quad P\text{-f.s. } \forall\ t \geq 0$$

besitzt (siehe Kapitel 2, Satz 42 – Variation der Konstanten – in *Korn und Korn (2001)*).

9 Die Black-Scholes Formel

Annahmen an den Markt

a) Der Investor hat keine Kenntnis über die zukünftigen Preise und seine Handlungen haben keinen Einfluss auf die Wertpapierpreise

b) Jeder Investor besitzt zum Zeitpunkt $t = 0$ Startkapital

c) Das nicht in Aktien angelegte Geld wird in Bonds angelegt

d) Vermögensänderungen entstehen nur durch Gewinne oder Verluste von Investments und nicht durch Konsum $\rightsquigarrow$ selbst-finanzierend

e) Wertpapiere sind beliebig teilbar

f) Man kann auch negative Anzahl von Wertpapieren halten:
Bonds $\rightarrow$ Aufnahme eines Kredits
Aktien $\rightarrow$ Aktienleerverkäufe

g) Keine Transaktionskosten

h) Arbitragefreiheit

Bisher bekannt:

- Modellierung von Bond

$$B(t) = b_0 \cdot e^{\int_0^t r(s)ds}, \quad B(0) = b_0$$

- Modellierung von Aktienkurs

$$S(t) = s_0 \cdot e^{\int_0^t (b(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s))ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s}, \quad S(0) = s_0$$

- Schranken für europäische und amerikanische Optionspreise

Wir benötigen noch den folgenden Begriff:

Portfolio Π: Kombination aus einer endlichen Anzahl von Finanzinstrumenten (Bonds, Aktien, Optionen,...), deren Wertentwicklung als Ganzes gesehen wird.

$$\begin{array}{lcl} \Pi_t := \Pi(t) & = & \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \cdot FI_i(t) \quad \widehat{=} \quad \text{Wert des Portfolios zur Zeit } t \\ FI_i(t) & = & \text{Wert des Finanzinstrumentes oder Basiswertes zur Zeit } t \\ \varphi_i(t) & = & \text{Anteile des Finanzinstrumentes oder Basiswertes zur Zeit } t \\ \varphi(t) & = & (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))^T \in \mathbb{R}^n \quad \widehat{=} \quad \text{zu } \Pi_t \text{ gehörende } \textbf{Handelsstrategie} \end{array}$$

Beachte: $FI_i(t) \geq 0,\ \varphi_i(t) \in \mathbb{R}$, insbesondere $\varphi_i(t) < 0$ erlaubt $\rightsquigarrow$ Leerverkauf ($i = 1, \ldots, n$)

Gesucht: Fairer Preis einer Option, z. B. $C_E(0)$

Idee: Wie in Kapitel 4 werden wir als "fairen Preis" einer Option das Anfangskapital bei einer "geeignet definierten" Duplikationsstrategie der Auszahlung der Option ansehen.

Vorgehen: Betrachte Portfolio Y, bestehend aus einem Bond, einer Aktie und genau einer verkauften Option, z. B. europäischer Call auf Aktie mit AÜP K.
Nehme an, Optionspreis ist zur Zeit $t \in [0, T]$ darstellbar als Funktion von Zeit t und Aktienkurs.
Verfolge dann selbst-finanzierende Handelsstrategie φ in Aktie und Bond unter Einschluß der verkauften Call Option, so dass Wert des Portfolios nicht zufälligen Schwankungen unterliegt, also risikolos ist.
$\rightsquigarrow$ Durch Ausnützen bestimmter Annahmen folgt die sogenannte Black-Scholes Gleichung ($\widehat{=}$ partieller DGL).

Beispiel zur zeitdiskreten selbst-finanzierenden Handelsstrategie
Betrachtet wird ein Portfolio Π, bestehend aus Bond und Aktie, in den Zeitpunkten $t = 0, 1, 2$.
$\underline{t = 0}$: Vermögen in $t = 0$:

$$\Pi_0 = \varphi_1(0) \cdot B(0) + \varphi_2(0) \cdot S(0)$$

$\underline{t = 1}$: Preisänderungen von Bond/Aktie in $t = 1$ liefern Vermögen in $t = 1$:

$$\Pi_1 = \varphi_1(0) \cdot B(1) + \varphi_2(0) \cdot S(1)$$

Insgesamt:

$$\underbrace{\Pi_1}_{\substack{\text{Vermögen}\\ \text{in t=1}}} = \underbrace{\Pi_0}_{\substack{\text{Vermögen}\\ \text{in t=0}}} + \underbrace{\varphi_1(0) \cdot (B(1) - B(0)) + \varphi_2(0) \cdot (S(1) - S(0))}_{\text{Gewinne/Verluste aus den Preisänderungen}}$$

Mögliche Umschichtungen in $t = 1$ liefern

$$\Pi_1 = \varphi_1(1) \cdot B(1) + \varphi_2(1) \cdot S(1),$$

da Vermögen vollständig in Bond/Aktie investiert werden muss.

$\underline{t = 2}$: Analog

$$\Rightarrow \quad \Pi_2 = \Pi_0 + \sum_{i=1}^{2} \left[\varphi_1(i-1) \cdot (B(i) - B(i-1)) + \varphi_2(i-1) \cdot (S(i) - S(i-1))\right]$$

und

$$\Pi_2 = \varphi_1(2) \cdot B(2) + \varphi_2(2) \cdot S(2)$$

Diese Strategie ist selbst-finanzierend in dem Sinne, dass der Wert des Portfolios vor der Umschichtung gleich dem Wert nach der Umschichtung entspricht, da die Gewinne bzw. Verluste vollständig ins Portfolio investiert werden müssen.

Für mehrere Zeitschritte gilt:

$$\Pi_t = \Pi_0 + \sum_{i=1}^{t} \left[\varphi_1(i-1) \cdot (B(i) - B(i-1)) + \varphi_2(i-1) \cdot (S(i) - S(i-1))\right]$$

Verallgemeinerung von zeitdiskreten zum zeitstetigen Modell durch
Definition 20: Eine zum Portfolio Π (mit n Finanzinstrumenten $FI_1, \ldots, FI_n$) gehörende Handelsstrategie heißt **selbst-finanzierend**, falls für $t \in [0, T]$ gilt:

$$\Pi_t = \Pi_0 + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \varphi_i(s) dFI_i(s) \quad P\text{-f.s.} \tag{9.1}$$

$$\rightsquigarrow \quad d\Pi_t = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) dFI_i(t) \tag{9.2}$$

Bemerkung: Mit r, b, σ konstant, $\sigma > 0$ und mit $dS(t) = S(t)(bdt + \sigma dW_t)$ und $dB(t) = B(t)rdt \;\; (S(0) = s_0, B(0) = b_0)$
gilt:

- $\int_0^t \varphi_1(s) dB(s) = \int_0^t \varphi_1(s) B(s) r ds$
- $\int_0^t \varphi_2(s) dS(s) = \int_0^t \varphi_2(s) S(s) b ds + \int_0^t \varphi_2(s) S(s) \sigma dW_s$

Zur Herleitung der Black-Scholes Gleichung wird eine Modifikation der eindimensionalen Itô-Formel (Satz 11) benötigt. Es werden Funktionen mit 2 Veränderlichen betrachtet und f' wird durch partielle Ableitungen von f "ersetzt".

Satz 12 (Itô-Formel für zeitabh. Funktionen):

Sei W_t eindimensionale Brownsche Bewegung, sei X_t reellwertiger Itô-Prozess mit

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s \text{ und sei}$$

$f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und auf $[0,T) \times (0,\infty)$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} f_t(X_t) := f(t, X_t) = f(0, X_0) \quad &+ \int_0^t \tfrac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds \; + \int_0^t \tfrac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s \\ &+ \tfrac{1}{2} \int_0^t \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d < X >_s \end{aligned}$$

Symbolische Schreibweise:

$$df_t(X_t) = \frac{\partial f_t}{\partial t}(X_t)dt + \frac{\partial f_t}{\partial x}(X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_t}{\partial x^2}(X_t)d < X >_t$$

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 11. Betrachte in 2)

$$\begin{aligned} & f(t_i, X_{t_i}) - f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \\ &= [f(t_i, X_{t_i}) - f(t_{i-1}, X_{t_i})] + [f(t_{i-1}, X_{t_i}) - f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})] \\ &= \tfrac{\partial f}{\partial t}(\tau_i, X_{t_i}) \cdot (t_i - t_{i-1}) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \cdot (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}} + \Theta(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})) \cdot (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \end{aligned}$$

mit $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$.

Grundidee von Black und Scholes zur Bewertung eines europäischem Calls (oder einer anderen europäischen Option):
Betrachte ein Portfolio bestehend aus Bonds (gemäß $\varphi_1(t)$), aus der der Option zugrundeliegenden Aktie (gemäß $\varphi_2(t)$) und genau einem verkauftem Call (mit Wert $C_t(S_t)$). Bestimme selbstfinanzierende Handelsstrategie so, dass der Vermögensprozess

$$Y_t = \varphi_1(t)B(t) + \varphi_2(t)S(t) - C_t(S_t)$$

risikolos ist (und damit - aus Arbitragegründen - sich wie der Bond verhält). Leite aus dieser Bedingung eine partielle Differentialgleichung für $C_t(S_t)$ her.

Annahmen:

A_1) Annahmen an den Markt (siehe Beginn von Kapitel 9)

A_2) Aktienkurs S_t entwickelt sich gemäß geometrischer Brownschen Bewegung (5.2) in $t \in [0,T]$

A_3) Preis des europäischen Calls darstellbar Funktion $C_t(S_t)$, die nur von der Zeit t und dem Aktienkurs S_t abhängt.

$A_4)$ $C_t(S_t)$ stetig und auf $[0,T) \times (0,\infty) \ni (t, S_t)$ zweimal stetig differenzierbar

$A_5)$ r, b, σ konstant und $\sigma > 0$

$A_6)$ $\int_0^T |\varphi_1(t)| dt < \infty$ P-f.s., $\int_0^T (\varphi_2(t) \cdot S_t)^2 dt < \infty$ P-f.s.

$A_7)$ Handelsstrategie φ selbst-finanzierend

$A_8)$ Wert Y_t des obigen Portfolios ist risikolos

Mit $A_5)$ und $A_6)$ existieren Integrale in (9.1).

Betrachte Portfolio Y von oben unter Einschluß des verkauften europäischen Calls und $A_3)$

$$\rightsquigarrow Y_t := \varphi_1(t)B(t) + \varphi_2(t)S(t) - C_t(S_t)$$

Mit $A_7)$ folgt:

$$\begin{aligned}
dY_t &\overset{(9.2)}{=} \varphi_1(t)dB(t) + \varphi_2(t)dS(t) - dC_t(S_t) \\
&\overset{A_2),A_5)}{=} \varphi_1(t)B(t)rdt + \varphi_2(t)S(t)bdt + \varphi_2(t)S(t)\sigma dW_t - dC_t(S_t) \\
&\overset{\substack{Satz\ 12 \\ (K_s = bS(s), H_s = \sigma S(s))}}{=} \Big[\varphi_1(t)B(t)r + \varphi_2(t)S(t)b\Big]dt + \varphi_2(t)S(t)\sigma dW_t \\
&\quad - \Big(\tfrac{\partial C_t}{\partial t}(S_t)dt + \tfrac{\partial C_t}{\partial s}(S_t)dS_t + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 C_t}{\partial s^2}(S_t)d < S >_t\Big) \\
&= \Big[\varphi_1(t)B(t)r + \varphi_2(t)S(t)b\Big]dt + \varphi_2(t)S(t)\sigma dW_t \\
&\quad - \Big(\tfrac{\partial C_t}{\partial_t}(S_t)dt + \tfrac{\partial C_t}{\partial s}(S_t) \cdot bS(t)dt + \tfrac{\partial C_t}{\partial s}(S_t) \cdot \sigma S(t)dW_t \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 C_t}{\partial s^2}(S_t) \cdot \sigma^2 S(t)^2 dt\Big) \\
&= \Big[\varphi_1(t)B(t)r + \varphi_2(t)S(t)b - \Big(\tfrac{\partial C_t}{\partial t}(S_t) + \tfrac{\partial C_t}{\partial s}(S_t) \cdot bS(t) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 C_t}{\partial s^2}(S_t) \cdot \sigma^2 S(t)^2\Big)\Big]dt + \Big[\varphi_2(t)S(t)\sigma - \tfrac{\partial C_t}{\partial s}(S_t) \cdot \sigma S(t)\Big]dW_t \quad (*)
\end{aligned}$$

Mit $A_8)$ folgt : $[\varphi_2(t)S(t)\sigma - \frac{\partial C_t}{\partial s}(S_t) \cdot \sigma S(t)] = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi_2(t) = \frac{\partial C_t}{\partial s}(S_t)}$$

Aus Arbitragegründen: $dY_t = rY_t\, dt$ $\qquad (**)$
(da Y_t als risikolose Anlage das Gleiche erwirtschaften muss wie ein Bond)

Mit $(*), (**)$ und $\varphi_2(t) = \frac{\partial C_t}{\partial s}(S_t)$ folgt:

$$\begin{aligned}
rY_t &\overset{!}{=} \varphi_1(t)B(t)r + \tfrac{\partial C_t}{\partial s}(S_t)\cdot S(t)b - (\tfrac{\partial C_t}{\partial t}(S_t) + \tfrac{\partial C_t}{\partial s}(S_t)\cdot bS(t) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 C_t}{\partial s^2}(S_t)\cdot\sigma^2 S(t)^2) \\
&= r\cdot\underbrace{\Big(\varphi_1(t)B(t) + \varphi_2(t)S(t) - C_t(S_t)\Big)}_{=Y_t} + rC_t(S_t) + b\tfrac{\partial C_t}{\partial s}(S_t)\cdot S(t) \\
&\quad - r\tfrac{\partial C_t}{\partial s}(S_t)\cdot S(t) - \Big(\tfrac{\partial C_t}{\partial t}(S_t) + \tfrac{\partial C_t}{\partial s}(S_t)\cdot bS(t) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 C_t}{\partial s^2}(S_t)\cdot\sigma^2 S(t)^2\Big) \\
&= r\cdot Y_t + \Big(rC_t(S_t) - r\tfrac{\partial C_t}{\partial s}(S_t)\cdot S(t) - \tfrac{\partial C_t}{\partial t}(S_t) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 C_t}{\partial s^2}(S_t)\cdot\sigma^2 S(t)^2\Big)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad rC_t(S_t) - r\tfrac{\partial C_t}{\partial s}(S_t)\cdot S(t) - \tfrac{\partial C_t}{\partial t}(S_t) - \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 C_t}{\partial s^2}(S_t)\cdot\sigma^2 S(t)^2 = 0$$

Mit $C_T(S_T) = (S_T - K)^+$ ist obige Gleichung so genannte Black-Scholes Gleichung für europäischen Call mit Lösung $C_t(S_t)$.

Allgemeiner: Black-Scholes Gleichung für europäische Optionen

$$\boxed{\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + rS_t\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} - r\cdot f = 0 \\
\text{mit } f := f(t, S_t) : [0,T]\times(0,\infty)\to\mathbb{R} \text{ stetig und} \\
\text{auf } [0,T)\times(0,\infty) \text{ zweimal stetig differenzierbar und} \\
f(T,S_T) = \begin{cases} (S_T - K)^+ & \text{für} \quad \text{Call} \\ (K - S_T)^+ & \text{für} \quad \text{Put} \end{cases}
\end{array}} \tag{9.3}$$

Bemerkungen:

1. (9.3) ist parabolische DGL $\Rightarrow$ Randwerte werden geglättet
2. Wir sind interessiert an $f(0, S_0) = ?$

Randbedingungen:

<u>$t = T$</u>: $f(T, S_T)$ siehe (9.3)

<u>$S \to 0$</u>: Für Call : $f(t,0) = (0-K)^+ = 0$

Für Put: $f(t,0) \overset{Satz\ 4\ (PCP)}{=} (S-K)^+ + Ke^{-r(T-t)} - S|_{S=0} = Ke^{-r(T-t)}$

<u>$S \to \infty$</u>: Für Call: S sehr groß $\Rightarrow$ Call wird ausgeübt

$\rightsquigarrow f(t,S) \approx S - Ke^{-r(T-t)}$ für S groß

$\approx S$ für S groß

$\Rightarrow \frac{f(t,S)}{S} \to 1$ für $S\to\infty$ $(t\in[0,T])$

Für Put: Setze $f(t,S)\to 0$ für $S\to\infty$

Insgesamt:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Für europäischen Call:} & f(t,0)=0,\ \frac{f(t,S)}{S}\to 1 \text{ für } S\to\infty \\ \text{Für europäischen Put:} & f(t,0)=Ke^{-r(T-t)},\ f(t,S)\to 0 \text{ für } S\to\infty \end{array}\right\} (9.4)$$

Lösungsidee der Black-Scholes Gleichung bzw. partieller DGL

Schritt 1: Transformation von (9.3) durch geeignete Variablen-transformation auf Wärmeleitungsgleichung
$u_\tau = u_{xx} \quad (\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) > 0,\ \ x = \ln(\frac{S}{K}) \in \mathbb{R})$

Schritt 2: Lösung (analytisch) von $u_\tau = u_{xx}$ gegeben durch
$u(\tau,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(s) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\tau}} \cdot \exp\left(\frac{-(x-s)^2}{4\tau}\right) ds$
mit $u_0(x) = u(0,x)$

Schritt 3: Rücktransformation + Überprüfung der Randbedingungen

Satz 13: Die Black-Scholes Gleichung (9.3) mit Randbedingungen (9.4) besitzt die Lösungen

a) $C_E(t) := f(t,S_t) = S_t\Phi(d_1(t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t))$ für europäischen Call

b) $P_E(t) := f(t,S_t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2(t)) - S_t\cdot\Phi(-d_1(t))$ für europäischen Put

mit

$$d_1(t) = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\ d_2(t) = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

und Φ Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung.

Beweis: Durch langwieriges Nachrechnen. □

Mit $t = 0$ folgt die sogenannte Black-Scholes Formel:

Satz 14 (Black-Scholes-Formel):
Gegeben sei ein Marktmodell mit Aktie S und Bond B. Entwickelt sich Aktie S im Zeitraum $[0,T]$ gemäß einer geometrischen Brownschen Bewegung (5.2) und gilt r, b, σ konstant mit $\sigma > 0$ ($r, b \in \mathbb{R}$), dann gelten für den Preis einer europäischer Call Option bzw. europäischer Put Option $C_E(0)$ bzw. $P_E(0)$ auf Aktie S mit AÜP $K > 0$ und Verfallszeitpunkt T:

a) $C_E(0) = s_0\cdot\Phi(d_1) - K\cdot e^{-rT}\cdot\Phi(d_2) \qquad (s_0 = S(0))$

b) $P_E(0) = K\cdot e^{-rT}\cdot\Phi(-d_2) - s_0\cdot\Phi(-d_1) \qquad (s_0 = S(0))$

wobei

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{s_0}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, d_2 = \frac{\ln\left(\frac{s_0}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

und Φ Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist.

Beweis: Folgt aus dem obigen Satz durch Einsetzen. □

Bemerkung: Nach Lösung der partiellen DGL von Black und Scholes lässt sich auch die zur Nachbildung der Option erforderliche Handlesstrategie $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ bestimmen. Denn nach Herleitung ist

$$\varphi_2(t) = \frac{\partial C_t}{\partial s}(S_t)$$

und Y_t verhält sich wie der Bond. Dann lässt sich bei Kenntnis von $C_t(S_t)$ und bei Setzen von $Y_0 = 0$ aber auch $\varphi_1(t)$ aus

$$0 = Y_t = \varphi_1(t)B(t) + \varphi_2(t)S_t - C_t(S_t)$$

bestimmen.

10 Die Volatilität

Alle wertbestimmenden Größen des Preises einer europäischen Option bzw. eines amerikanischen Calls sind durch Marktdaten feststellbar mit Ausnahme der Volatilität. Zur Ermittlung der Volatilität σ gibt es zwei Möglichkeiten:

Die historische Volatilität σ_{hist} :
Schätzung der Volatilität mittels historischen Daten.

Vorgehensweise:

1. Aktienkurs entwickelt sich gemäß $dS(t) = S(t)(bdt + \sigma dW_t)$ $(t \in [0, T])$.

2. Betrachte von Aktie S $n+1$ Aktienkurse $S(1), \ldots, S(n+1)$ in der Vergangenheit bis heute in festen Zeitabständen $\triangle\, t$ (z. B. $\triangle\, t = \frac{1}{365} = 1$ Tag).

3. Berechne

$$u_i = \log \frac{S(i+1)}{S(i)} \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

(da mit $S_t = s_0 \cdot e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma\cdot W_t}$ folgt:

$$\log \frac{S_{t+\triangle t}}{S_t} = (b - \frac{1}{2}\sigma^2)\cdot \triangle\, t + \sigma \cdot \underbrace{(W_{t+\triangle t} - W_t)}_{=\mathcal{N}(0,\triangle t)-\text{verteilte ZV}}$$

$$\widehat{=} \quad \mathcal{N}((b - \frac{1}{2}\sigma^2)\cdot \triangle\, t, \sigma^2 \cdot \triangle\, t) - \text{verteilte ZV}$$

(hieraus folgt für $\log \frac{S_{t+\triangle t}}{S_t}$: Varianz $= \sigma^2 \cdot \triangle\, t$
$\rightsquigarrow$ Schätzer $\frac{\text{Varianz}}{\triangle t} = \sigma^2$, siehe 4.))).

4. Berechne emp_S^2 mit

$$\text{emp\_}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2 \text{ und } \overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \ .$$

5. $\sigma_{\text{hist}} \mathrel{\widehat{=}} \sqrt{\frac{\text{emp\_}S^2}{\triangle t}}$.

Bemerkungen für σ_{hist} :

- In Praxis werden nur Tage, an denen die Börse geöffnet ist, berücksichtigt
  $\rightsquigarrow$ 1 Jahr $\widehat{=}$ 252 Börsentage
- Falls Dividendenzahlung am Tag $i = k$ erfolgt
  $\rightsquigarrow$ Neue Stichprobe bilden, indem man Übergang von Tag k auf Tag $k+1$ nicht berücksichtigt.

Die implizite Volatilität σ_{impl} :
Approximation der Volatilität mittels Black-Scholes Formeln und numerischen "Testen".

Vorgehensweise:

1. Preise, zu denen Optionen gehandelt werden, sind am Markt bekannt.
2. Ermittle daraus numerisch die rechnerische Volatilität σ_{impl}, indem für σ in der Black-Scholes Formel solange Werte eingesetzt werden, bis sich der vorgegebene bekannte Preis ergibt.

11 Optionsbewertung mit numerischen Verfahren

Man kann zeigen: Der faire Preis einer (europäischen) Call/Put Option mit Endzahlung $f(S_T)$ lässt sich nach Maßwechsel (Übergang zum sogenannten risiko-neutralen Markt) darstellen als Erwartungswert $E_Q(e^{-rT} \cdot f(S_T))$.

Zum Beispiel ist der faire Preis einer europäischen Put-Option (mit Strike K und Laufzeit T) auf eine Aktie, deren Kurs beschrieben wird durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit Drift b und Volatilität σ, darstellbar als

$$E\left(e^{-r^*T} \cdot \max\left\{K - S_T^*, 0\right\}\right),$$

wobei

- $S_t^* = s_0 \cdot \exp\left(\left(r^* - 0.5 \cdot \sigma^2\right) \cdot t + \sigma \cdot W_t\right)$,

- $(W_t)_t$ ist Wiener Prozess,
- r^* ist der Zinssatz, den ich am Markt durch eine risikolose Anlage (simultan in Aktien, Bonds, etc.) erzielen kann.

Ziel: Schätze diesen Erwartungswert.

Wir verwenden dabei zur Vereinfachung der Schreibweise wieder r anstelle von r^*.

11.1 Approximation durch Binomialbäume

Idee: Beschreibe (zeitdiskreten) Aktienkurs durch Binomialbaum, d. h. betrachte Cox/Ross/Rubinstein-Modell (CRR-Modell). Berechne anschließend rekursiv die in diesem Modell erwartete abgezinste Endzahlung der Option als Näherung für den tatsächlichen Optionspreis.

Annahmen

- Betrachtet wird ein Markt mit Bond, Aktie und europäischer Call/Put Option mit AÜP K
- Aktienkurs S_t ist gegeben durch geometrische Brownsche Bewegung für $t \in [0, T]$
- Bondpreis zur Zeit $t = 0$ ist 1
- r, b, σ konstant und $\sigma > 0$
- Aktienleerverkäufe bzw. Aufnahme eines Kredits erlaubt
- Keine Transaktionskosten
- Arbitragefreiheit

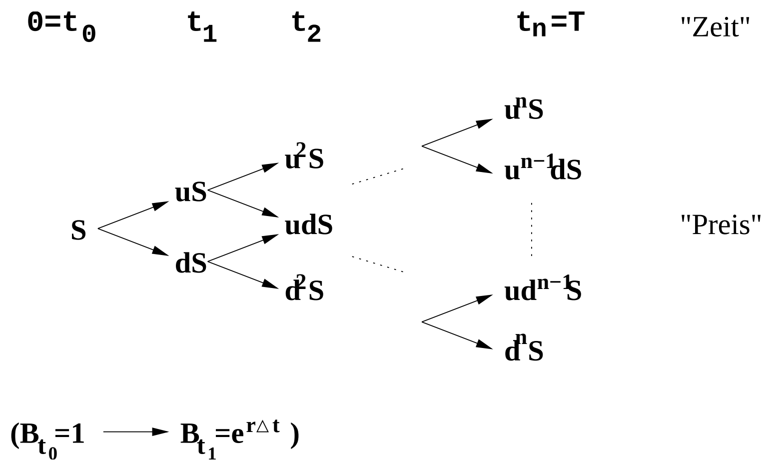
CRR-Modell

Diskretisierung von Zeitintervall $[0, T]$ durch äquidistante Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, wobei $\triangle\, t := t_{i+1} - t_i$ $(i = 0, \ldots, n-1) \Rightarrow \triangle\, t = \frac{T}{n}$
Es gelte: Aktienkurs zur Zeit t_i ist gegeben durch S_{t_i} und

$$S_{t_{i+1}} = \begin{cases} u \cdot S_{t_i} & \text{mit} \quad \text{Wahrscheinlichkeit} \quad q \qquad \text{“up-Zustand''} \\ \\ d \cdot S_{t_i} & \text{mit} \quad \text{Wahrscheinlichkeit} \quad 1-q \quad \text{“down-Zustand''} \end{cases} \tag{11.1}$$

$(i = 0, \ldots, n-1)$ mit $0 < d < u$ und $q \in (0, 1)$.

Graphisch:



Hierbei Notation $S = S_{t_0} = S(t_0) = S(0)$.

Beachte:

1. Mögliche relative Preisänderung $S_{t_i}/S_{t_{i-1}}$ $(i = 1, \ldots, n)$ in jedem Knoten gleich.

2. Aus Arbitragegründen gilt

$$0 < d < e^{r\cdot\triangle t} < u \tag{11.2}$$

($d \geq e^{r\cdot\triangle t} \rightsquigarrow$ Arbitrage: Kauf von Aktien finanziert durch Kredit,
$u \leq e^{r\cdot\triangle t} \rightsquigarrow$ Arbitrage: Kauf von Bond finanziert durch Aktienleerverkäufe).

Idee: Wähle u, d, q, so dass mit wachsender Diskretisierung $S_{t_n} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} S_T$, wobei S_T der Wert der geometrischen Brownschen Bewegung an der Stelle T ist.

Wahl von u, d, q
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige $b(1, q)$-verteilte ZVn und sei $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, die Anzahl der "Aufwärtsbewegungen" von S_{t_n}. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &X \sim b(n, q) \text{ und} \\ &S_{t_n} = S \cdot u^X \cdot d^{n-X} = S \cdot e^{X\cdot\ln\frac{u}{d}+n\cdot\ln d} \end{aligned}$$

Definiere u, d durch

$$u = e^{\tilde{b}\cdot\triangle t+\sigma\cdot\sqrt{\triangle t}}, d = e^{\tilde{b}\cdot\triangle t-\sigma\cdot\sqrt{\triangle t}} \tag{11.3}$$

mit $\tilde{b} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$. In diesem Fall ist dann

$$\tilde{b} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln u + \ln d}{\triangle t}, \sigma = \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln u - \ln d}{\sqrt{\triangle t}} \tag{11.4}$$

(11.3) liefert für S_{t_n}:

$$\begin{aligned} S_{t_n} &= S \cdot e^{X\cdot(\ln u - \ln d) + n\cdot \ln d} \\ &= S \cdot e^{X\cdot(2\sigma\sqrt{\triangle t}) + n\cdot(\widetilde{b}\cdot\triangle t - \sigma\sqrt{\triangle t})} \\ &= S \cdot e^{n\cdot\triangle t\cdot\widetilde{b} + n\cdot\sqrt{\triangle t}\cdot\sigma\cdot\left(\frac{2X}{n}-1\right)} \\ &= S \cdot e^{\widetilde{b}\cdot T + \sigma\cdot\sqrt{T}\cdot\frac{n}{\sqrt{n}}\cdot\left(\frac{2X}{n}-1\right)} \qquad (\text{da } n\cdot \triangle\, t = T) \\ &= S \cdot e^{\widetilde{b}T + \sigma\sqrt{T}\cdot\left(\frac{2X-n}{\sqrt{n}}\right)} \end{aligned}$$

Setze $q := \frac{1}{2}$.

Dann gilt:

$$\frac{2X-n}{\sqrt{n}} = \frac{2X - E(2X)}{\sqrt{V(2X)}}, \text{ da } X \sim b(n, \frac{1}{2})$$

Da $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ Summe von n u.i.v. ZVn X_i ist, folgt mit zentralem Grenzwertsatz

$$\frac{2X-n}{\sqrt{n}}$$

konvergiert nach Verteilung gegen $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte ZV.

Mit Satz von der stetigen Abbildung ergibt sich

$$S_{t_n} = S \cdot e^{\widetilde{b}T + \sigma\sqrt{T}\cdot\left(\frac{2X-n}{\sqrt{n}}\right)} \longrightarrow^{\mathcal{D}} S \cdot e^{\widetilde{b}T + \sigma\cdot W_T} = S_T \;\; (n \to \infty) \quad (\text{also für } \triangle\, t \to 0).$$

Sei $f(S_{t_n})$ bzw. $f(S_T)$ Endzahlung des europäischen Calls/Puts im zeitdiskreten bzw. zeitstetigen Modell. Im Falle eines europäischen Puts folgt dann (wegen Beschränktheit der Auszahlungsfunktion) daraus auch

$$E(e^{-rT} \cdot f(S_{t_n})) \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} E(e^{-rT} \cdot f(S_T)).$$

Für andere Optionen kann man diese Beziehung meist ebenfalls folgern, indem man dazu (in aller Regel recht aufwendig) Zusatzbedingungen wie z.B. gleichgradige Integrierbarkeit nachrechnet.

Idee: Schätze nun Optionspreis $E(e^{-rT} \cdot f(S_T))$ durch $E(e^{-rT} \cdot f(S_{t_n}))$ für n groß.

Algorithmus zur Berechnung von $\mathbf{E(e^{-rT} \cdot f(S_{t_n}))}$
Gegeben: r, b, σ konstant, $\sigma > 0, K, T, S_{t_0} = S(0) = S, S_t = S \cdot \exp((r - 0.5\cdot\sigma^2)\cdot t + \sigma\cdot W_t)$.

1. Schritt: Initialisierung des Binomialbaumes

1.1 Zerlege $[0, T]$ in $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ ($\triangle\, t = t_{i+1} - t_i$) mit n hinreichend groß

1.2 Setze $q = \frac{1}{2}, \triangle\, t = \frac{T}{n}$ und berechne $\widetilde{b} = (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \in \mathbb{R}$

1.3 Berechne u, d gemäß (11.3) ((11.2),(11.4) automatisch erfüllt)

1.4 Berechne für $i = 0, \dots, n,\ j = 0, \dots, i$

$$S_{t_i}^j = u^j d^{i-j} \cdot S \quad (\widehat{=}\ (11.1))$$

2. Schritt: Rekursive Berechnung von $E(e^{-rT} \cdot f(S_{t_n}))$
Trick: Wir berechnen rekursiv

$$V_j(S_{t_i}) = \mathbf{E}\left(f\left(S \cdot u^{j+\sum_{k=i+1}^n X_k} \cdot d^{n-j-\sum_{k=i+1}^n X_k}\right)\right).$$

2.1 Berechne für $j = 0, \dots, n$

$$f\left(S_{t_n}^j\right) = \begin{cases} (S_{t_n}^j - K)^+ & : \quad \text{Call} \\ (K - S_{t_n}^j)^+ & : \quad \text{Put} \end{cases}$$

2.2 Setze $V_j(S_{t_n}) := f(S_{t_n}^j)$ $(j = 0, \dots, n)$.

2.3 Berechne rekursiv für $i = n-1, \dots, 0,\ j = 0, \dots, i$

$$V_j(S_{t_i}) = \frac{1}{2}[V_{j+1}(S_{t_{i+1}}) + V_j(S_{t_{i+1}})]$$

2.4 Setze $\widetilde{V} := e^{-rT} \cdot V_0(S_{t_0})$

Beachte: $E(e^{-rT} \cdot f(S_{t_n})) = \widetilde{V}$

Bemerkungen:

1. Optionspreis könnte auch direkt mittels

$$\widetilde{V} := e^{-rT} \cdot V_0(S_{t_0}) = e^{-rT} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot q^i (1-q)^{n-i} \cdot f(S_{t_n}^i)$$

   berechnet werden.
   Eventuelle Schwierigkeiten: Verschlechterung der numerischen Stabilität wegen der zu berechnenden Fakultäten in den Binomialkoeffizienten.

2. Binomialverfahren gilt auch für europäische pfadunabhängige Optionen wie z. B. Strangle.

3. Wahl von u, d, q auch anders möglich, z. B. nach CRR:

$$u = e^{\sigma \cdot \Delta t}, d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma \cdot \Delta t} \text{ und } q = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u - d}.$$

4. Verallgemeinerungen des "Binomialmodells" durch Trinomialbaum mit 3 Änderungs–möglichkeiten für Aktienkurs mit Wahrscheinlichkeiten p, q, r mit $p + q + r = 1$.
   Vorteil: schnellere Konvergenz

11.2 Monte-Carlo-Simulation

Idee: Erzeuge große Anzahl von u.i.v. Aktienkurspfaden und berechne für jeden einzelnen Pfad die Endzahlung der Option. Da hierfür arithmetisches Mittel nach dem starken Gesetz der großen Zahlen fast sicher gegen EW konvergiert, berechne die erwartete abgezinste Endzahlung der Option als Näherung für tatsächlichen Optionspreis.

Annahmen:

- Annahmen an den Markt (siehe Kapitel 9)
- r, b, σ konstant, $\sigma > 0$

Algorithmus
Gegeben: r, b, σ konstant, $\sigma > 0, K, T, S(0)$

1. Schritt: Simulation von unabhängigen Aktienkursen z. B. gemäß geometrischer Brownscher Bewegung.

1.1 Berechne für $i = 1, \dots, n$

$$S_{i,T} = S(0) \cdot e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot T + \sigma \cdot W_{i,T}}$$

mit $W_{i,T} \sim \mathcal{N}(0, T)$.

2. Schritt: Berechnung von $E(e^{-rT} \cdot f(S_T))$

2.1 Berechne Endzahlung für $i = 1, \dots, n$
$V_i := f(S_{i,T})$

2.2 Schätze $\widehat{E}(V) := \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} V_i$

2.3 Setze $\widetilde{V} = e^{-rT} \cdot \widehat{E}(V)$

Beachte: $E(e^{-rT} \cdot f(S_T)) = E(\widetilde{V})$

Bemerkung: n muss hinreichend groß sein.