Maßtheorie

Skript zur Vorlesung von

Prof. Dr. Michael Kohler

Sommersemester 2005 und Wintersemester 2005/2006

1 Grundbegriffe der Maßtheorie

Ziel: Konstruktion von Maßzahlen (wie z. B. Länge / Fläche / Volumen / ...) von Mengen $A \subseteq \Omega$, wobei $\Omega \neq \emptyset$ fest.

Im Folgenden ist

$$\mathcal{P}(\Omega) := \{A : A \subseteq \Omega\}$$

die sogenannte **Potenzmenge** von Ω, die "abgeschlossen" ist bzgl. beliebigen Mengenoperationen (z. B. Vereinigung, Durchschnitt, Komplement, ...).

Im Allgemeinen ist es nicht möglich, eine sinnvolle Maßzahl für jede Menge aus $\mathcal{P}(\Omega)$ festzulegen. Statt dessen bestimmt man diese nur für Mengen aus einem vorgegebenen Mengensystem $\mathcal{A}$. Für $\mathcal{A}$ wählt man meist sogenannte **σ-Algebren**, die "abgeschlossen" sind bzgl. **abzählbar** vielen der üblichen Mengenoperationen (Vereinigung, Duchschnitt, Komplement).

§ 1 Mengensysteme

Zentraler Begriff ist der Begriff der σ-Algebra. Zur Konstruktion und Nachweis von Eigenschaften werden weitere Hilfsbegriffe verwendet.

Definition 1.1 *Nichtleere Menge Ω. System $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω.*

a) $\mathcal{A}$ heißt **Ring**, wenn gilt

   1.) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

   2.) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{A}$,

   3.) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

b) $\mathcal{A}$ heißt **Algebra**, wenn gilt

   1.) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

   2.) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c := \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$,

   3.) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

c) $\mathcal{A}$ heißt **σ-Ring**, wenn gilt:

   1.) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

   2.) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{A}$

   3.) $A_n \in \mathcal{A}\ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

d) $\mathcal{A}$ heißt σ-**Algebra**, wenn gilt

1.) $\emptyset \in \mathcal{A}$

2.) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c := \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$

3.) $A_n \in \mathcal{A}\ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Lemma 1.1

a) $\mathcal{A}$ Ring, $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n \in \mathcal{A}$ und $\bigcap_{n=1}^{m} A_n \in \mathcal{A}$

b) $\mathcal{A}$ Algebra $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ Ring und $\Omega \in \mathcal{A}$

Beweis

a) Für $m = 2$ gilt $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$ nach Definition und $A_1 \cap A_2 = A_1 \backslash (A_1 \backslash A_2) \in \mathcal{A}$ nach zweimaliger Anwendung von 2.)

Allgemeiner Fall folgt mit vollständiger Induktion.

b) "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{A}$ Algebra. Dann gilt

$$\Omega = \Omega \backslash \emptyset \in \mathcal{A} \quad \text{nach 2.)}$$

und für $A, B \in \mathcal{A}$ ist

$$A \backslash B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c \in \mathcal{A}$$

nach 2.) und 3.), wobei die zweite Gleichheit aus den de Morganschen Regeln folgt.

"$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{A}$ Ring mit $\Omega \in \mathcal{A}$. Dann gilt für $A \in \mathcal{A}$

$$A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$$

nach 2.) (da $A, \Omega \in \mathcal{A}$). $\square$

Folgerung:

Eine Algebra ist ein Mengensystem $\mathcal{A}$, das $\emptyset$ und Ω enthält, und bei dem Differenzbildung, endliche Vereinigungsbildung und endliche Durchschnittsbildung nicht aus $\mathcal{A}$ herausführt. Wendet man also endlich viele der üblichen Mengenoperationen auf Mengen aus $\mathcal{A}$ an, so erhält man eine Menge, die wieder in $\mathcal{A}$ liegt.

Bemerkung

a) $\mathcal{A}$ σ-Ring $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ Ring

b) $\mathcal{A}$ σ-Algebra $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ Algebra

Beweis

Folgt aus $A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$ und $\emptyset \in \mathcal{A}$ $\square$

Umkehrung gilt i. A. nicht!

Lemma 1.2

a) $\mathcal{A}$ σ-Ring, $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

b) $\mathcal{A}$ σ-Algebra $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ σ-Ring und $\Omega \in \mathcal{A}$.

Beweis

a) Wegen $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A_1$ gilt nach den de Morganschen Regeln

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \backslash (A_1 \backslash \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = A_1 \backslash \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_1 \backslash A_n \Big) \in \mathcal{A},$$

(denn $A_1 \backslash A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_1 \backslash A_n \in \mathcal{A}$ nach 3.), dann noch 2.) anwenden).

b) Folgt wie in Lemma 1.1 b) $\square$

Folgerung

Eine σ-Algebra ist ein Mengensystem $\mathcal{A}$, das $\emptyset$ und Ω enthält, und bei dem Differenzbildung, abzählbare Vereinigungsbildung und abzählbare Durchschnittbildung nicht aus $\mathcal{A}$ herausführen. Bei einer σ-Algebra führen also endlich oder abzählbar unendlich viele der üblichen Mengenoperationen nicht aus der σ-Algebra heraus.

Zusammenhang der Begriffe:

$$\begin{array}{ccc} \sigma\text{-Algebra} & \Rightarrow & \text{Algebra} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \sigma\text{-Ring} & \Rightarrow & \text{Ring} \end{array}$$

Beispiele:

1.) $\{\emptyset, \Omega\}$ ist σ-Algebra (und damit auch σ-Ring, Algebra und Ring).

2.) Für $\emptyset \subsetneqq A \subsetneqq \Omega$ ist $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ σ-Algebra, aber $\{\emptyset, A, A^c\}$ keine Algebra und kein Ring (da $A \cup A^c \notin \{\emptyset, A, A^c\}$).

3.) $\mathcal{P}(\Omega)$ ist σ-Algebra.

4.) Das System aller endlichen Teilmengen von Ω ist ein Ring, aber i. A. kein σ-Ring (vgl. Übungen).

5.) Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und für $a = (a_1, \ldots, a_n)^T \in \Omega, b = (b_1, \ldots, b_n)^T \in \Omega$ mit $a_i \leq b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sei

$$(a, b] := \{(x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i \leq b_i \ (i = 1, \ldots, n)\}.$$

Sei $\mathcal{E}_n$ das System aller elementaren Figuren, d. h. aller endlicher Summen von halboffenen Intervallen $(a, b]$ definiert wie oben. Hierbei ist eine Summe eine Vereinigung, bei der paarweise Disjunktheit der zu vereinigenden Mengen vorausgesetzt wird.

Beh.:

Das System $\mathcal{E}_n$ der elementaren Figuren in $\mathbb{R}^n$ ist ein Ring.

Beweis

1.) $\emptyset = (a, a] \in \mathcal{E}_n$

2.) Seien $A, B \in \mathcal{E}_n$. Zu zeigen: $A \backslash B \in \mathcal{E}_n$.
Es gelte $A = A_1 + \ldots + A_p, B = B_1 + \ldots + B_q$, wobei "+" für Vereinigung bei paarweiser Disjunktheit steht. Wir zeigen $A \backslash B \in \mathcal{E}_n$ mit Induktion nach

q:
"$q = 1$" : $\quad A\backslash B_1 = (A_1\backslash B_1) + \ldots + (A_p\backslash B_1) \quad \in \mathcal{E}_n$
da $\quad (a_1, b_1]\backslash(a_2, b_2] = (a_1, b_1]\backslash \underbrace{((a_1, b_1] \cap (a_2, b_2])}_{\text{wieder von der Form } (a,b]}$
sich als endliche Summe halboffener Intervalle darstellen lässt.

"$q \to q+1$" : $A\backslash(B_1 + \ldots + B_{q+1}) = (A\backslash(B_1 + \ldots + B_q))\backslash B_{q+1} \in \mathcal{E}$ nach Induktionsvoraussetzung sowie dem Fall $q = 1$.

3.) Seien $A, B \in \mathcal{E}_n$ Zu zeigen: $A \cup B \in \mathcal{E}_n$.
Folgt mit $A \cup B = A + B\backslash A, B\backslash A \in \mathcal{E}_n$ nach 2. und Definition von $\mathcal{E}_n$. $\square$

Lemma 1.3

$\mathcal{A}$ σ-Algebra $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathcal{A}$ Algebra und für paarweise disjunkte $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt immer auch $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Beweis

"$\Rightarrow$" ist trivial.
"$\Leftarrow$" folgt mit

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = A_1 + (A_2\backslash A_1) + (A_3\backslash(A_1 \cup A_2)) + \ldots$$

$\square$

Nachweis der Eigenschaften einer σ-Algebra oft möglich über Umweg über Dynkin-Systeme.

Definition 1.4

$\Omega \neq \emptyset$. System $\mathcal{D}$ von Teilmengen von Ω heißt **Dynkin-System**, wenn gilt

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$

(ii) $A, B \in \mathcal{D}, A \subseteq B \Rightarrow B\backslash A \in \mathcal{D}$

(iii) $A_n \in \mathcal{D}$ $(n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$

Beispiel:

Für $\Omega = \{1,2,3,4\}$ ist

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,3\}, \{2,4\}\}$$

ein Dynkin-System, aber wegen $\{1,2\} \cup \{2,4\} \notin \mathcal{A}$ kein Ring, keine Algebra und keine σ-Algebra.

Lemma 1.4

a) $\mathcal{R}_\alpha$ Ring in Ω ($\alpha \in I \neq \emptyset$) $\Rightarrow \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{R}_\alpha$ Ring in Ω.

b) $\mathcal{E}$ Mengensystem in Ω. Dann existiert ein "kleinster" Ring, der $\mathcal{E}$ umfasst, d. h. es existiert ein Ring, der $\mathcal{E}$ umfasst und in allen Ringen enthalten ist, die $\mathcal{E}$ umfassen.

Analoge Aussage gilt für σ-Ringe, Algebren, σ-Algebren und Dynkin-Systeme.

Beweis:

a) (i) $\emptyset \in \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{R}_\alpha$, da $\emptyset \in \mathcal{R}_\alpha$ für alle $\alpha \in I$ und $I \neq \emptyset$.

   (ii) $A, B \in \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{R}_\alpha \Rightarrow A, B \in \mathcal{R}_\alpha$ für alle $\alpha \in I \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{R}_\alpha$ für alle $\alpha \in I \Rightarrow A\backslash B \in \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{R}_\alpha$

   (iii) analog.

b) $I := \{\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : \mathcal{R}$ Ring mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}\}$
   $I \neq \emptyset$, da $\mathcal{P}(\Omega) \in I$

   Dann ist $\bigcap_{\mathcal{R}\in I} \mathcal{R}$ ein Ring (siehe a)), der $\mathcal{E}$ umfasst (nach Definition), und der in jedem Ring enthalten ist, der $\mathcal{E}$ umfasst (da jeder solcher Ringe in obigem Schnitt auftaucht).

$\square$

Definition 1.3

Sei $\mathcal{E}$ Mengensystem in Ω. Der kleinste Ring, der $\mathcal{E}$ umfasst, heißt **der von $\mathcal{E}$ erzeugte Ring**. $\mathcal{E}$ heißt **Erzeugersystem** dieses Rings.

Analog für σ-Ring, Algebren, σ-Algebren und Dynkin-Systeme.

Bezeichnungen:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{F}(\mathcal{E}) = \mathcal{F}_\Omega(\mathcal{E}) & \dots & \text{die von } \mathcal{E} \text{ (in } \Omega) \text{ erzeugte } \sigma- \text{ Algebra.} \\ \mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}) & \dots & \text{das von } \mathcal{E} \text{ (in } \Omega) \text{ erzeugte Dynkin-System.} \end{array}$$

Beispiel

(i) $\mathcal{E} = \sigma$-Algebra $\Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$

(ii) $\emptyset \subsetneqq A \subsetneqq \Omega \Rightarrow \mathcal{F}(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

Definition 1.4

Sei $\mathcal{O}_n$ das System der offenen Mengen im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\mathcal{B}_n := \mathcal{F}(\mathcal{O}_n)$$

das System der **Borelschen Mengen** in $\mathbb{R}^n$.

Bezeichnung: $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$

Bemerkung

a) $\mathcal{B}_n$ enthält alle abgeschlossenen Mengen (da jede abgeschlossene Menge das Komplement einer offenen Menge ist), alle Einpunktmengen (da abgeschlossen) und alle abzählbaren Mengen.

b) Man kann zeigen: $\mathcal{B}_n \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (ohne Beweis).

Satz 1.1:

Die folgenden Mengensysteme sind Erzeuger von $\mathcal{B}_n$:

a) Das System $\mathcal{J}_n$ der halboffenen Intervalle

$$(a, b] = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i \leq b_i \ (i = 1, \dots, n) \right\}$$

b) Das System der abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{R}^n$.

c) Das System der abgeschlossenen Intervalle in $\mathbb{R}^n$.

d) Das System der offenen Intervalle in $\mathbb{R}^n$.

e) Das System der kompakten Mengen in $\mathbb{R}^n$.

f) Das System der Intervalle (a, ∞) in $\mathbb{R}^n$.

g) Das System der Intervalle $(-\infty, a)$ in $\mathbb{R}^n$.

Beweis von Satz 1.1:

Nur Beweis von a) im Fall $n = 2$, Rest analog.
Zu zeigen: $\mathcal{F}(\mathcal{J}_2) = \mathcal{F}(\mathcal{O}_2) \quad (= \mathcal{B})$

α) Wir zeigen: $\mathcal{F}(\mathcal{J}_2) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{O}_2)$.
Da $\mathcal{F}(\mathcal{O}_2)$ σ-Algebra ist, genügt es zu zeigen:

$$\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{O}_2)$$

Sei $(a, b] \in \mathcal{J}_2$ beliebig. Dann gilt

$$(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (a_1, b_1 + \frac{1}{k}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{k}) \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_2),$$

$$\text{nach Lemma 1.2, da } (a_1, b_1 + \frac{1}{k}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{k}) \in \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{O}_2)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt und $\mathcal{F}(\mathcal{O}_2)$ σ-Algebra ist.

β) Wir zeigen: $\mathcal{F}(\mathcal{O}_2) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{J}_2)$
Wieder genügt es, dazu zu zeigen: $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{J}_2)$
Dazu: Sei $D \in \mathcal{O}_2$ beliebig
Da D offen ist, existiert zu jedem $d \in D$ ein offenes Intervall (a, b) mit $d \in (a, b) \subseteq D$. Durch Verkleinern des Intervalls kann man *oBdA* erreichen, dass die Endpunkte des Intervalls rational sind und $(a, b] \subseteq D$ gilt. Dann ist aber

$$D = \bigcup_{d \in D} (\text{zu } d \text{ gehörendes Intervall mit rationalen Endpunkten})$$

als **abzählbare** Vereinigung halboffener Intervalle aus $\mathcal{J}_2$ in $\mathcal{F}(\mathcal{J}_2)$ enthalten.

$\square$

Lemma 1.5

a) $\mathcal{D}$ Dynkin-System $\quad\Rightarrow\quad \emptyset \in \mathcal{D}$ und aus $A \in \mathcal{D}$ folgt $A^c \in \mathcal{D}$

b)
$$\begin{aligned} \mathcal{A}\ \sigma - \text{Algebra} \;\Leftrightarrow\;& \mathcal{A} \text{ Dynkin-System und } \mathcal{A} \cup - \text{ stabil} \\ & (\text{ d. h. aus } A, B \in \mathcal{A} \text{ folgt } A \cup B \in \mathcal{A}) \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \mathcal{A}\ \sigma - \text{Algebra} \;\Leftrightarrow\;& \mathcal{A} \text{ Dynkin-System und } \mathcal{A} \cap -\text{stabil} \\ & (\text{d. h. aus } A, B \in \mathcal{A} \text{ folgt } A \cap B \in \mathcal{A}). \end{aligned}$$

Beweis

a) $\emptyset = \Omega \backslash \Omega \in \mathcal{D}$ nach Def. 1.) + 2.)

$A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{D}$ nach Def. 2.), beachte $A \subseteq \Omega$ und $\Omega \in \mathcal{D}$.

b) "$\Rightarrow$" klar
"$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{A}$ Dynkin-System und $\cup$-stabil. Dann gilt:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ nach a)
(2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ nach a)
(3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A} \quad$ (da $\mathcal{A}$ $\cup$-stabil)
(4) $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ nach Definition Dynkin-System.

Mit Lemma 1.3 folgt die Behauptung.

c) "$\Rightarrow$" klar
"$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{A}$ $\cap$-stabiles Dynkin-System. Wegen $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ ist $\mathcal{A}$ $\cup$-stabil, und mit b) folgt Beh.

$\square$

Lemma 1.6

Ist $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem, dann ist auch das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil.

Vor dem Beweis von Lemma 1.6 zeigen wir zunächst die folgende Folgerung aus Lemma 1.6:

Satz 1.2

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{E}$ Mengensysteme in Ω.

a) $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil $\Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$

b) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}, \mathcal{A}$ Dynkin-System, $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil
$\Rightarrow \quad \mathcal{F}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$

Anwendung:

Ist $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil, und haben die Mengen aus $\mathcal{E}$ die Eigenschaft E, dann haben auch die Mengen aus $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ die Eigenschaft E, sofern das System aller Mengen mit Eigenschaft E ein Dynkin-System ist.

Beweis von Satz 1.2:

a) Sei $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil.

"$\supseteq$" $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{E})$ und $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ Dynkin-System nach Lemma 1.5 b)
$\Rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{E})$ nach Definition.

"$\subseteq$" $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E}), \mathcal{D}(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil nach Lemma 1.6, $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ Dynkin-System nach Definition $\Rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{E})$ σ-Algebra nach Lemma 1.5 c) $\Rightarrow \ \mathcal{F}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$ nach Definition $\mathcal{F}(\mathcal{E})$

b) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ Dynkin-System $\Rightarrow \ \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ nach Definition. Wegen $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil gilt nach a) $\mathcal{F}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E}) \Rightarrow$ Beh.

$\square$

Beweis von Lemma 1.6:

Sei $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil.

Zu zeigen: $\quad E, F \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \Rightarrow E \cap F \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$

1. Schritt:

Sei $E \in \mathcal{E}$. Gezeigt wird:

$$E \cap F \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \text{ für alle } F \in \mathcal{D}(\mathcal{E}).$$

Setze

$$\mathcal{G}_E := \{\widetilde{F} \in \mathcal{P}(\Omega) : E \cap \widetilde{F} \in \mathcal{D}(\mathcal{E})\}.$$

Behauptung folgt aus

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G}_E \quad \text{(typischer Beweisschritt!)}$$

Nach Definition von $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ folgt dies wiederum aus:

(1) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}_E$

(2) $\mathcal{G}_E$ ist Dynkin-System.

Nachweis von (1): $\widetilde{F} \in \mathcal{E}$. Da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil und $E \in \mathcal{E}$ nach Annahme oben ist, gilt dann $E \cap \widetilde{F} \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E}) \Rightarrow \widetilde{F} \in \mathcal{G}_E$

Nachweis von (2):

(1) $\Omega \in \mathcal{G}_E$, da $E \cap \Omega = E \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$

(2) Seien $A, B \in \mathcal{G}_E$ mit $A \subseteq B$.
$E \cap (B \backslash A) = (E \cap B) \backslash (E \cap A) \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ da $E \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{E}), E \cap A \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$,
$E \cap A \subseteq E \cap B$ und $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ Dynkin-System
$\Rightarrow B \backslash A \in \mathcal{G}_E$.

(3) Seien $A_n \in \mathcal{G}_E$ $(n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt
$\Rightarrow E \cap A_n \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ (nach Def. $\mathcal{G}_E$) und paarweise disjunkt
$E \cap \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n) \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad$ (nach Definition Dynkin-System).

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}_E \qquad \rightsquigarrow (2).$$

Bemerkung

Beweis zeigt, dass $\mathcal{G}_E$ auch Dynkin-System ist für $E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

2. Schritt:

Sei $E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$
Wir zeigen wieder:

$$E \cap F \quad \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \qquad \text{für alle } F \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$$

.

Dazu genügt es wieder zu zeigen:

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G}_E := \{\widetilde{F} \in \mathcal{P}(\Omega) : E \cap \widetilde{F} \in \mathcal{D}(\mathcal{E})\}$$

Dies wiederum folgt aus:

(1) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}_E$

(2) $\mathcal{G}_E$ Dynkin-System.

Nachweis von (2) erfolgt wie im 1. Schritt.
Nachweis von (1):
Sei $\widetilde{F} \in \mathcal{E}$. Nach Schritt 1 gilt dann

$$\widetilde{F} \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$$

$\Rightarrow \widetilde{F} \in \mathcal{G}_E$ $\rightsquigarrow$ (1) $\rightarrow$ Beh. $\square$

§ 2 Inhalte und Maße

Bezeichnungen:	$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
Rechenregeln:	$a \pm \infty = \pm\infty = \pm\infty + a$ für $a \in \mathbb{R}$
	$\infty + \infty = \infty, -\infty - \infty = -\infty$
	Nicht definiert sind: $\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$.

Im Folgenden: Auflistung von Eigenschaften, die bei Zuweisungen wie

$$A \mapsto \text{ Volumen von } A$$

sinnvollerweise vorliegen sollten.

Definition 2.1

$\mathcal{C}$ Mengensystem in Ω. $\varphi : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ ist

a) **positiv** $:\Leftrightarrow \varphi(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{C}$

b) **monoton**$:\Leftrightarrow$ Für $A, B \in \mathcal{C}$ mit $A \subseteq B$ gilt $\varphi(A) \leq \varphi(B)$

c) **endlich** $:\Leftrightarrow \varphi(A) \in \mathbb{R}$ für alle $A \in \mathcal{C}$

d) **additiv** $:\Leftrightarrow$ Für paarweise disjunkte $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{C}$ gilt $\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(A_i)$.

e) σ**-additiv**: $\Leftrightarrow$ Für paarweise disjunkte $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{C}$ mit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$ gilt $\varphi\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$.

Bemerkung

a) Endlich $\neq$ beschränkt

b) In e) ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ unabhängig von der Summationsreihenfolge, da linke Seite unabhängig von Summationsreihenfolge ist.

Definition 2.2

$\mathcal{R}$ sei Ring über Ω.
Eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt

a) **Inhalt** $:\Leftrightarrow \mu(\emptyset) = 0, \mu$ positiv und μ additiv.

b) **Maß** $:\Leftrightarrow \mu(\emptyset) = 0, \mu$ positiv und μ σ-additiv

Bemerkung

a) Häufig verwendet man σ-Algebren als Definitionsbereich von Maßen

b) Jedes Maß ist ein Inhalt, da

$$\mu(A_1+\ldots+A_n) = \mu(A_1+\ldots+A_n+\emptyset+\emptyset+\ldots) = \mu(A_1)+\ldots+\mu(A_n)+0+0+\ldots$$

c) Jeder Inhalt ist monoton, da

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(B) = \mu(B\backslash A) + \mu(A) \geq \mu(A),$$

wobei verwendet wurde, dass mit A, B auch $B\backslash A$ im Ring $\mathcal{R}$ liegt.

Beispiele für Inhalte:

a) $\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu(A) = \begin{cases} 0 & , \quad |A| \text{ endlich} \\ \\ \infty & , \quad \text{sonst} \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{R}).$

μ ist Inhalt:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(A) \geq 0 \quad$ für alle $A \in \mathcal{R}$
- $\mu(A_1 + \ldots + A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$, denn sind alle A_i endlich, so sind beide Seiten Null, andernfalls sind beide Seiten ∞.

μ ist aber kein Maß, da

$$\infty = \mu(\mathbb{N}) \neq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\{n\}) = 0.$$

b) $\Omega = \mathbb{R}^n, \mathcal{R} = \mathcal{E}_n =$ Ring der elementaren Figuren.

$m(A) =$ elementargeometrisches Volumen von A $(A \in \mathcal{E}_n)$.
Man sieht informal sofort: m ist ein Inhalt.
Wir zeigen später: m ist sogar Maß.

Beispiele für Maße

a) triviale Maße:

$$\mu_1(A) = 0 \quad \text{für alle } A \in \mathcal{R}$$

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad A = \emptyset \\ \infty & \text{für } A \neq \emptyset \end{cases}$$

b) $\mathcal{R}$ Ring über $\Omega, \omega \in \Omega$ fest.

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{für} \quad \omega \in A \end{cases}$$

(sog. **Dirac-Maß**)

Anschaulich: Maß misst Masse einer Menge, bei Dirac-Maß ist alle Masse im Punkt ω konzentriert.

c) abzählendes Maß:

$\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{R} = \mathcal{P}(\Omega)$,
$\mu(A) = |A| =$ Anzahl Elemente der Menge A.

Definition 2.3

Ω Menge, $\mathcal{A}$ σ-Algebra über $\Omega, \mu : \mathcal{A} \Rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Maß. Dann heißt $(\Omega, \mathcal{A})$ **Messraum**, die Mengen $A \in \mathcal{A}$ heißen **messbare Mengen**, und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **Maßraum**.

Im Falle $\mu(\Omega) = 1$ heißt μ **Wahrscheinlichkeitsmaß** und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Im Folgenden behandeln wir einige Folgerungen aus der σ-Additivität.

Definition 2.4

A_n $(n \in \mathbb{N})$ und A seien Mengen

a) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert von unten gegen** A (kurz: $A_n \uparrow A$) $:\Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ und $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$

b) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert von oben gegen** A (kurz: $A_n \downarrow A$) $:\Leftrightarrow A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ und $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Definition 2.5

$\mathcal{C}$ Mengensystem in $\Omega, \varphi : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ Abbildung.

a) φ heißt **stetig von unten**, wenn gilt:

$$A_n \in \mathcal{C}, A_n \uparrow A \in \mathcal{C} \Rightarrow \varphi(A_n) \to \varphi(A)\ (n \to \infty).$$

b) φ heißt **stetig von oben**, wenn gilt:

$$A_n \in \mathcal{C}, A_n \downarrow A \in \mathcal{C}, \varphi(A_n) \text{ endlich } \Rightarrow \varphi(A_n) \to \varphi(A)\ (n \to \infty).$$

c) φ heißt **$\emptyset$-stetig**, wenn gilt:

$$A_n \in \mathcal{C}, A_n \downarrow \emptyset, \varphi(A_n) \text{ endlich } \Rightarrow \varphi(A_n) \to 0\ (n \to \infty).$$

Satz 2.1

Sei $\mathcal{R}$ Ring über Ω und $\varphi : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein Inhalt. Dann gilt:

a) φ σ-additiv $\Leftrightarrow \varphi$ stetig von unten

b) φ stetig von unten $\Rightarrow \varphi$ stetig von oben $\Rightarrow \varphi$ $\emptyset$-stetig

c) φ $\emptyset$-stetig und φ endlich $\Rightarrow \varphi$ σ-additiv.

Für einen endlichen Inhalt sind also die Begriffe σ-additiv, stetig von unten, stetig von oben und $\emptyset$-stetig äquivalent.

Beispiel

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei W-Raum mit $\Omega = \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x) = \mu((-\infty, x])$ (sog. Verteilungsfunktion). Dann ist F rechtsseitig stetig, denn für $x_1 \geq x_2 \geq \dots$ mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ gilt $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$ und daher gilt

$$F(x_n) = \mu((-\infty, x_n]) \stackrel{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \mu((-\infty, x]) = F(x).$$

Beweis von Satz 2.1

a) "$\Rightarrow$" Sei φ σ-additiv und $A_n, A \in \mathcal{R}$ mit $A_n \uparrow A$
Zu zeigen: $\varphi(A_n) \to \varphi(A)$ $(n \to \infty)$

Dazu:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + (A_2 \backslash A_1) + (A_3 \backslash A_2) + \dots$$

nach Definition der Konvergenz von unten.

Die Mengen $A_n \backslash A_{n-1}$ sind in Ring $\mathcal{R}$ enthalten, und mit der σ-Additivität von φ folgt:

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= \varphi(A_1) + \varphi(A_2 \backslash A_1) + \varphi(A_3 \backslash A_2) + \dots \\ &= \varphi(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \varphi(A_k \backslash A_{k-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\varphi(A_1) + \varphi(A_n \backslash A_1)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n).\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" Sei φ stetig von unten und $A_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$.

zu zeigen: $\varphi\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$.

Setze $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$. Da $\mathcal{R}$ Ring ist, gilt $B_n \in \mathcal{R}$, weiter gilt nach Konstruktion $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ und $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Mit φ stetig von unten und φ Inhalt folgt

$\varphi(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \varphi\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty}\varphi(B_n)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\varphi\left(\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(A_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi(A_k).$

b) b_1) Sei φ stetig von unten und $A_n, A \in \mathcal{R}$ mit $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ und $\varphi(A_n) \in \mathbb{R}$ für alle $n \in N$.

zu zeigen: $\varphi(A_n) \to \varphi(A)$ $(n \to \infty)$

Es gilt $A_1\backslash A_2 \subseteq A_1\backslash A_3 \subseteq \ldots$ und $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_1\backslash A_n = A_1\backslash\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

Da φ stetig von unten ist, folgt daraus

$$\varphi(A_1\backslash A_n) \to \varphi(A_1\backslash\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)\right) \, (n \in \mathbb{N})$$

Wegen $\varphi(A_1) \in \mathbb{R}, \varphi$ positiv und

$$\varphi(A_1) = \varphi(A_1\backslash A_n) + \varphi(A_n),$$
$$\varphi(A_1) = \varphi\left(A_1\backslash\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) + \varphi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

folgt daraus

$$\varphi(A_n) = \varphi(A_1) - \varphi(A_1\backslash A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(A_1) - \varphi\left(A_1\backslash\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \varphi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

b_2) Ist φ stetig von oben, so ist (mit $A = \emptyset$ und $\varphi(\emptyset) = 0$) φ auch $\emptyset$-stetig.

c) Sei φ $\emptyset$-stetig und φ endlich.
Nach a) genügt es zu zeigen: φ ist stetig von unten.

Dazu: Seien $A_n, A \in \mathcal{R}$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ und $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Dann ist $A\backslash A_n$ im Ring $\mathcal{R}$ enthalten und erfüllt
$A\backslash A_1 \supseteq A\backslash A_2 \supseteq A\backslash A_3 \supseteq \ldots$ sowie $\bigcap_{n=1}^{\infty} A\backslash A_n = A\backslash\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \emptyset.$

Also gilt $A\backslash A_n \downarrow \emptyset$ und unter Beachtung von φ endlich folgt mit der $\emptyset$-Stetigkeit von φ:

$$\varphi(A\backslash A_n) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Da φ endlich ist, gilt aber $\varphi(A\backslash A_n) = \varphi(A) - \varphi(A_n)$ (da

$$\varphi(A) = \varphi(A_n + A\backslash A_n) = \varphi(A_n) + \varphi(A\backslash A_n)$$

und alle auftretenden Werte endlich sind), und es folgt

$$\varphi(A_n) \to \varphi(A) \quad (n \to \infty)$$

□

Bemerkung

a) Satz 2.1 b) gilt nicht, wenn man in der Definition von φ stetig von oben die Bedingung $\varphi(A_n) \in \mathbb{R}$ weglässt.

Beispiel

Für $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}$ und $m =$ Lebesque-Borel-Maß (s. u., dasjenige Maß auf $\mathcal{B}$, das Intervallen ihre elementare Länge zuordnet) gilt:

$A_n = [n, \infty) \downarrow \emptyset$, aber $m(A_n) = \infty$ konvergiert nicht gegen $0 = m(\emptyset)$ für $n \to \infty$.

b) Satz 2.1 c) gilt ohne die Voraussetzung "φ endlich" nicht (vgl. Übungen).

Lemma 2.1

Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$ in Ω. Dann gilt

a) μ ist monoton.

b) μ ist subadditiv, d. h. für $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$ gilt immer

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

c) Ist μ ein Maß, so ist μ sogar σ-subadditiv, d. h. für alle $A_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ gilt

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Beweis

Siehe Übungen.

Zur Erinnerung:
Elementare Figur = endlich disjunkte Vereinigung beschränkter halboffener Intervalle

$\mathcal{E}_n$ = Ring (!) der elementaren Figuren (d. h. ε_n enthält $\emptyset$ und ist abgeschlossen gegen Vereinigungsbildung, Durchschnittsbildung und Differenzbildung zweier Mengen)

Satz 2.2

Der elementargeometrisch definierte Inhalt m auf dem Ring $\mathcal{E}_n$ der elementaren Figuren in $\mathbb{R}^n$ ist ein Maß.

Beweis von Satz 2.2

Ohne Beweis: m ist Inhalt ... (klar!)

Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{E}_n$, paarweise disjunkt, und sei $A = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}_n$.

zu zeigen: $m\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

1. Schritt: Wir zeigen die Behauptung im Spezialfall $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{J}_n$ = System der halboffenen, beschränkten Intervalle

α) Wir zeigen: $\sum\limits_{j=1}^{\infty} m(A_j) \leq m(A)$.

Folgt wegen $\sum\limits_{j=1}^{N} A_j \subseteq A, m$ monoton aus

$$m(A) \geq m\left(\sum_{j=1}^{N} A_j\right) = \sum_{j=1}^{N} m(A_j) \qquad (N \in \mathbb{N})$$

(da m als Inhalt endlich additiv ist) mit $N \to \infty$.

β) Wir zeigen: $m(A) \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} m(A_j)$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Wähle $B \in \mathcal{J}_n$ mit $\overline{B} \subseteq A$ und $m(B) \geq m(A) - \varepsilon$, wobei $\overline{B}$ die Abschließung von B ist.

Für $n \in \mathbb{N}$ wähle $B_j \in \mathcal{J}_n$ mit $A_j \subseteq \mathring{\mathrm{B}}_j$ und

$$m(B_j) \leq m(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j},$$

wobei $\mathring{\mathrm{B}}$ das Innere von B ist.

Dann gilt

$$\overline{B} \subseteq A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathring{\mathrm{B}}_j,$$

und da $\overline{B}$ kompakt ist (da abgeschlossen und beschränkt) und die $\mathring{\mathrm{B}}_j$ offen sind, existiert nach dem Satz von Heine-Borel ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\overline{B} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \mathring{\mathrm{B}}_j,$$

woraus folgt:

$$B \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_j$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad m(A) - \varepsilon \quad &\leq \quad m(B) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^{N} B_j\right) \\
&\leq \quad \sum_{j=1}^{N} m(B_j) \quad \text{(Lemma 2.1}b\text{))} \\
&\leq \quad \sum_{j=1}^{N} \left(m(A_j) + \tfrac{\varepsilon}{2^j}\right) \\
&\leq \quad \sum_{j=1}^{N} m(A_j) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Mit $N \to \infty$ folgt

$$m(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) + 2\varepsilon$$

Mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt β).

2. Schritt:

Wir zeigen die Behauptung im allgemeinen Fall $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{E}_n$.

Sei also $\quad A = \sum\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{E}_n$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=1}^{K} I_k \quad \text{für geeignete} \quad I_{1,\ldots} I_K \in \mathcal{J}_n, \\
A_j &= \sum_{s=1}^{s_j} I_{j,s} \quad \text{für geeignete} \quad I_{j,1..} I_{j,s_j} \in \mathcal{J}_n,
\end{aligned}$$

und damit ist

$$\begin{aligned}
I_k &= I_k \cap A = I_k \cap \sum_{j=1}^{\infty} A_j = \sum_{j=1}^{\infty} I_k \cap A_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} I_k \cap \sum_{s=1}^{s_j} I_{j,s} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{s_j} I_k \cap I_{j,s},
\end{aligned}$$

wobei $I_k \cap I_{j,s} \in \mathcal{J}_n$ ist, da Durchschnitt halboffener Intervalle wieder ein halboffenes Intervall ergibt.

Mit Schritt 1 folgt:

$$m(A) = m\left(\sum_{k=1}^{K} I_k\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } m \text{ Inhalt}}}{=} \sum_{k=1}^{K} m(I_k)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{K} m\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{s_j} (I_k \cap I_{j,s})\right) \\
&\overset{\text{Schritt 1}}{=} \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{s_j} m(I_k \cap I_{j,s}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{s_j} m\left(\sum_{k=1}^{K} I_k \cap I_{j,s}\right)
\end{aligned}$$

Reihenfolge der Summation ist bei nichtnegativen Summanden egal, m Inhalt

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{s_j} m(A \cap I_{j,s}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{s_j} m(I_{j,s}) \quad (\text{da } I_{j,s} \subseteq A_j \subseteq A) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} m\left(\sum_{s=1}^{s_j} I_{j,s}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) \qquad \rightarrow \text{Beh.} \qquad \square
\end{aligned}$$

§ 3 Fortsetzung von Maßen

Motivation: Der elementargeometrische Inhalt m ist Maß auf dem Ring $\mathcal{E}_n$ der elementaren Figuren. Um auch allgemeineren Mengen ihre Maßzahl zuordnen zu können, ist es wünschenswert, m auf ein größeres Mengensystem $\mathcal{A}$ fortzusetzen, wobei $\mathcal{E}_n \subsetneqq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gilt. D. h. gesucht ist **Maß**

$$\overline{m} : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

mit $\overline{m}\big|_{\mathcal{E}_n} = m$, also $\overline{m}(A) = m(A)$ für alle $A \in \mathcal{E}_n$.

Wir zeigen im Folgenden, dass m auf $\mathcal{B}_n = \mathcal{F}(\mathcal{E}_n)$ fortsetzbar ist.

Hilfsmittel dabei ist das sogenannte äußere Maß:

Definition 3.1:

Sei $\mathcal{R}$ ein Ring über Ω und $\mu : \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein Maß. Dann heißt

$$\begin{aligned}
&\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\
&\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \;\middle|\; B_n \in \mathcal{R} \text{ mit } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right\}
\end{aligned}$$

das **zu μ gehörende äußere Maß**. (Hierbei $\inf \emptyset = \infty$)

Definition 3.2

Eine Mengenfunktion $\nu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $\nu(\emptyset) = 0, \nu$ positiv, ν monoton und ν σ-subadditiv heißt **äußeres Maß**.

Hierbei ist ν σ-subadditiv, falls gilt: Für alle $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}(\Omega)$ ist

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

.

Klar: μ Maß $\Rightarrow$ ν äußeres Maß

Die Umkehrung gilt i. A. nicht, z. B. ist μ mit

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad A = \emptyset \\ 1 & \text{für} \quad A \neq \emptyset \end{cases}$$

ein äußeres Maß, aber kein Maß.

Satz 3.1

Sei $\mathcal{R}$ ein Ring über Ω, $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ Maß, und μ^* das zu μ gehörende äußere Maß. Dann gilt:

a) μ^* ist ein äußeres Maß im Sinne von Definition 3.2.

b) μ^* stimmt auf $\mathcal{R}$ mit μ überein, d. h. $\mu^*(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

Beweis:

a)
- $\mu^*(\emptyset) = 0$ da $\emptyset \subseteq \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \ldots$ und daher $\mu^*(\emptyset) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(\emptyset) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$, da μ Maß.
- μ^* positiv, da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \geq 0$ für alle $A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ (wegen μ positiv).
- Ist $A \subseteq B$, so folgt aus $B \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ auch $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Daher gilt

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \quad \middle| \quad B_n \in \mathcal{R} \text{ mit } A \subseteq \bigcup\nolimits_{n=n}^{\infty} B_n\right\}$$
$$\subseteq \left\{\sum_{n=n}^{\infty} \mu(B_n) \quad \middle| \quad B_n \in \mathcal{R} \text{ mit } B \subseteq \bigcup\nolimits_{n=n}^{\infty} B_n\right\},$$

was $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ impliziert.

– Sei $A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$. Wir zeigen: $\mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.
$0BdA\ \mu^*(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $B_{n,k} \in \mathcal{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ mit $A_n \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{n,k}$ und $\mu^*(A_n) \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k}) - \frac{\varepsilon}{2^n}$.
Dann gilt:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}} B_{n,k} \quad \text{mit} \quad B_{n,k} \in \mathcal{R}$$

und die Definition von μ^* impliziert:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \mu(B_{n,k}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{n,k})$$

(Summationsreihenfolge spielt bei nichtnegativen Zahlen keine Rolle)

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)\right) + \varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt die Behauptung.

b) Sei $A \in \mathcal{R}$ beliebig.
zu zeigen: $\mu^*(A) = \mu(A)$

b_1) Wir zeigen: $\mu^*(A) \leq \mu(A)$
Folgt mit $B_1 = A, B_2 = \emptyset, B_3 = \emptyset, \ldots$ unmittelbar aus Definition

b_2) Wir zeigen: $\mu(A) \leq \mu^*(A)$
Nach Definition von μ^* genügt es dazu zu zeigen:
Ist $B_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $A \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$, so gilt

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

Mit

$$A = A \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap B_n),$$

wobei $A \cap B_n \in \mathcal{R}$ da $\mathcal{R}$ Ring und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A \cap B_n) = A \in \mathcal{R}(!)$, folgt aus der σ-Subadditivität des Maßes μ:

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n),$$

da μ monoton und $A \cap B_n \subseteq B_n$ $\rightarrow$ Beh. $\square$

Wir zeigen im Folgenden:
Die Einschränkung von μ^* auf $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ ist ein Maß (und dieses stimmt dann auf $\mathcal{R}$ mit μ überein, da μ^* das schon tut).

Dazu Umweg:
Einführung einer σ-Algebra $\mathcal{M}_\mu^*$, die $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ umfaßt und auf der μ^* ein Maß ist.

Motivation der Definition dieses Mengensystems:
Im Falle $\mu^*(\Omega) < \infty$ wird definiert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mu^* &= \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \text{Äußeres Maß von } A = \text{Inneres Maß von } A\} \\
&= \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \mu^*(A) = \mu^*(\Omega) - \mu^*(A^c)\} \\
&= \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \mu^*(\Omega) = \mu^*(A) + \mu^*(A^c)\},
\end{aligned}$$

wobei $\mu^*(\Omega) - \mu^*(A^c)$ als Ersatz für ein "inneres Maß" von A verwendet wird.

Im allgemeinen Fall wird definiert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mu^* &= \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c) \text{ für alle } Q \in \mathcal{P}(\Omega)\} \\
&\overset{\text{vgl. Übungen}}{=} \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \mu^*(S+T) = \mu^*(S) + \mu^*(T) \text{ für alle } S \subseteq A^c, T \subseteq A\}
\end{aligned}$$

Im Falle $\mu^*(\Omega) < \infty$ stimmen beide Definitionen überein (vgl. Übungen).

Definition 3.3

Die Mengen aus $\mathcal{M}_\mu^*$ heißen μ^*-messbare Mengen.

Lemma 3.1

Sei μ ein Maß über einem Ring $\mathcal{R}$ über Ω. Dann sind alle Mengen aus $\mathcal{R}$ μ^*-messbare Mengen.

Beweis

Seit $A \in \mathcal{R}$ und seien $S \subseteq A^c, T \subseteq A$.
Zu zeigen:

$$\mu^*(S+T) = \mu^*(S) + \mu^*(T)$$

α) Da μ^* ein äußeres Maß ist (vgl. Satz 3.1a)) gilt

$$\begin{aligned}
\mu^*(S+T) &= \mu^*(S+T+\emptyset+\emptyset+\ldots) \leq \mu^*(S)+\mu^*(T)+\mu^*(\emptyset)+\mu^*(\emptyset)+\ldots \\
&= \mu^*(S)+\mu^*(T)
\end{aligned}$$

β) Wir zeigen $\mu^*(S)+\mu^*(T) \leq \mu^*(S+T)$.
oBdA $\quad \mu^*(S+T) < \infty$
Sei $B_n \in \mathcal{R}$ mit

$$S+T \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

Wegen $\quad S \subseteq A^c, T \subseteq A \quad$ gilt dann

$$S \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \cap A^c \qquad \text{und} \qquad T \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \cap A$$

wobei $B_n \cap A^c, B_n \cap A \in \mathcal{R}$ gilt wegen $\mathcal{R}$ Ring.
Nach Definition von μ^* gilt dann aber

$$\begin{aligned}
\mu^*(S)+\mu^*(T) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap A^c) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap A) \\
&\overset{\mu \text{ Maß}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap A^c + B_n \cap A) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)
\end{aligned}$$

und da $B_n \in \mathcal{R}$ beliebig war mit $S+T \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ folgt daraus

$$\mu^*(S)+\mu^*(T) \leq \mu^*(S+T)$$

$\square$

Lemma 3.2

Sei μ ein Maß über einem Ring $\mathcal{R}$ über Ω. Dann ist

$$\mathcal{M}_\mu^* = \{A \subseteq \Omega \mid \mu^*(S+T) = \mu^*(S)+\mu^*(T) \text{ für alle } S \subseteq A^c, T \subseteq A\}$$

eine σ-Algebra über Ω.

Beweis

Bez.: $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^*_\mu$

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}^*$, denn $S \subseteq \emptyset^c, T \subseteq \emptyset$ impliziert $T = \emptyset$ und damit

$$\begin{aligned} \mu^*(S+T) &= \mu^*(S) = \mu^*(S) + 0 = \mu^*(S) + \mu^*(\emptyset) \\ &= \mu^*(S) + \mu^*(T) \end{aligned}$$

da $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) Mit $A \in \mathcal{M}^*$ gilt (nach Symmetrie in der Definition von $\mathcal{M}^*$) auch immer $A^c \in \mathcal{M}^*$.

(iii) Seien $A, B \in \mathcal{M}^*$
Wir zeigen: $A \cup B \in \mathcal{M}^*$
Dazu sei $S \subseteq (A \cup B)^c, T \subseteq A \cup B$.
Zu zeigen: $\mu^*(S+T) = \mu^*(S) + \mu^*(T)$.

"$\leq$" : klar wegen σ-Subadditivität von μ^*.
"$\geq$": Setze $T' = T \cap A, T'' = T \backslash A$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mu^*(S+T) &= \mu^*(S+T'+T'') \\ &= \mu^*(S+T'') + \mu^*(T') \\ &\quad \text{(da } S+T'' \subseteq A^c, T' \subseteq A \text{ und } A \in \mathcal{M}^*) \\ &= \mu^*(S) + \mu^*(T'') + \mu^*(T') \\ &\quad \text{(da } S \subseteq B^c, T'' \subseteq B \text{ und } B \in \mathcal{M}^*) \\ &\geq \mu^*(S) + \mu^*(T'+T'') \\ &\quad \text{(da } \mu^* \ \sigma\text{-subadditiv)} \\ &= \mu^*(S) + \mu^*(T) \end{aligned}$$

Also ist gezeigt

$$\mu^*(S+T) \geq \mu^*(S) + \mu^*(T),$$

und damit gilt die Zwischenbehauptung.

(iv) Seien $A_n \in \mathcal{M}^*$ $(n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt.
Wir zeigen: $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}^*$.

Dazu sei $S \subseteq \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c, T \subseteq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Dann ist zu zeigen:

$$\mu^*(S+T) = \mu^*(S) + \mu^*(T).$$

"$\leq$": Klar, da μ^* σ-subadditiv.
"$\geq$": Setze
$$T_n = T \cap A_n.$$
Dann gilt $T = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$ und damit

$$\begin{aligned}
\mu(S+T) &= \mu^*(S+T_1+T_2+\ldots)\\
&\geq \mu^*(S+T_1+\ldots+T_N)\\
&\quad (\text{ da } \mu^* \text{ monoton})\\
&= \mu^*(S+T_1+\ldots+T_{N-1}) + \mu^*(T_N)\\
&\quad \text{da } S+T_1+\ldots+T_{N-1} \subseteq A_N^c, T_N \subseteq A_N \text{und } A_N \in \mathcal{M}^*\\
&= \ldots\\
&= \mu^*(S) + \mu(T_1) + \ldots + \mu^*(T_N)
\end{aligned}$$

Mit $N \to \infty$ folgt:

$$\begin{aligned}
\mu^*(S+T) &\geq \mu^*(S) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(T_n)\\
&\geq \mu^*(S) + \mu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n\right)\\
&= \mu^*(S) + \mu^*(T),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus der σ-Subadditivität von μ^* folgt.

$\to$ Beh. $\square$

Lemma 3.3

Sei μ ein Maß über einem Ring $\mathcal{R}$ über Ω. Dann ist μ^* ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{M}^*$.

Beweis

Da nach Satz 3.1 μ^*ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$ ist, genügt es zu zeigen:

Sind $A_n \in \mathcal{M}_\mu^*$ $(n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt, so gilt

$$\mu^*\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Dies folgt aber aus

$$\begin{aligned}\mu^*\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &\geq \mu^*(A_1 + \ldots + A_N)\\ &\quad \text{(da } \mu^* \text{ monoton)}\\ &\geq \mu^*(A_1 + \ldots + A_{N-1}) + \mu^*(A_N)\\ &\quad \text{(da } A_1 + \ldots A_{N-1} \subseteq A_N^c, A_N \subseteq A_N, A_N \in \mathcal{M}_\mu^*)\\ &\geq \ldots\\ &\geq \mu^*(A_1) + \ldots + \mu^*(A_N)\end{aligned}$$

mit $N \to \infty$. □

Satz 3.2 (Fortsetzungssatz von Carathéodory)

Sei μ ein Maß auf einem Ring $\mathcal{R}$ über Ω. Dann existiert mindestens ein Maß $\overline{\mu}$ auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ-Algebra $\mathcal{F}(\mathcal{R})$, welches μ fortsetzt, d. h. welches auf $\mathcal{R}$ mit μ übereinstimmt.

Beweis

Sei μ^* das zu μ gehörende äußere Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$, und sei

$$\mathcal{M}_\mu^* = \left\{ A \subseteq \Omega \;\middle|\; \begin{array}{l} \mu^*(S+T) = \mu^*(S) + \mu^*(T) \\ \text{für alle } S \subseteq A^c, T \subseteq A \end{array} \right\}.$$

Nach Lemma 3.1 gilt $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_\mu^*$, da $\mathcal{M}_\mu^*$ nach Lemma 3.2 weiter eine σ-Algebra ist, gilt auch

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}_\mu^*.$$

Nach Lemma 3.3 ist μ^* ein Maß auf $\mathcal{M}_\mu^*$, und damit ist auch

$$\begin{aligned}&\overline{\mu} : \mathcal{F}(\mathcal{R}) \to \overline{\mathbb{R}}\\ &\overline{\mu}(A) := \mu^*(A)\end{aligned}$$

ein Maß.

Nach Satz 3.1 b) stimmt μ^* (und damit auch $\overline{\mu}$) auf $\mathcal{R}$ mit μ überein.

$\rightarrow$ Beh. □

Im Folgenden: Herleitung von hinreichenden Kriterien zur **eindeutigen** Fortsetzung eines Maßes.

Hilfreich dabei:

Definition 3.4

Sei $\mathcal{C}$ ein Mengensystem über Ω, d. h. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Dann heißt $\varphi : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ **σ-endlich**, wenn Mengen $A_k \in \mathcal{C}$ $(k \in \mathbb{N})$ existieren mit $A_k \uparrow \Omega$ und $\varphi(A_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel

Der elementargeometrische Inhalt m auf dem Ring der elementaren Figuren ist σ-endlich, da für

$$\begin{array}{lll} A_k := (-k,k] \times \ldots \times (-k,k] \in \mathcal{E}_n & & \text{gilt:} \\ A_k \uparrow \mathbb{R}^n \quad \text{und} & m(A_k) = (2k)^n < \infty & \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Satz 3.3 (Eindeutigkeitssatz)

Seien μ_1, μ_2 zwei Maße auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω. Sei $\mathcal{C}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}$ (d. h. $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$ und es gilt $\mathcal{A} = \mathcal{F}(\mathcal{C})$). Für die Restriktionen ${\mu_1}|_{\mathcal{C}}$ und ${\mu_2}|_{\mathcal{C}}$ der Maße auf $\mathcal{C}$ gelte:

$${\mu_1}|_{\mathcal{C}} = {\mu_2}|_{\mathcal{C}} \qquad (\text{d. h. } \mu_1(A) = \mu_2(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{C})$$

und

$${\mu_1}|_{\mathcal{C}}, {\mu_2}|_{\mathcal{C}} \qquad \text{seien } \sigma-\text{endlich.}$$

Dann gilt auch

$$\mu_1 = \mu_2,$$
$$\text{d. h. } \mu_1(A) = \mu_2(A) \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Korollar

Ist μ ein σ-endliches Maß auf einem Ring $\mathcal{R}$ über Ω, so existiert genau eine Fortsetzung $\overline{\mu}$ von μ auf $\mathcal{F}(\mathcal{R})$, d. h. es existiert genau ein Maß $\overline{\mu} : \mathcal{F}(\mathcal{R}) \to \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$\overline{\mu}(A) = \mu(A) \qquad \text{für alle} \qquad A \in \mathcal{R}.$$

Hierbei gilt:

$$\overline{\mu}(A) = \mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) : B_n \in \mathcal{R}\ (n \in \mathbb{N}) \text{ und } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right\}$$

für $A \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$.

Beweis:

Folgt unmittelbar aus den Sätzen 3.2 und 3.3 (da $\mathcal{R}$ $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ ist).

Anwendung

Es existiert genau ein Maß m, das den elementargeometrischen Inhalt von dem Ring $\mathcal{E}_n$ der elementargeometrischen Figuren auf $\mathcal{B}_n = \mathcal{F}(\mathcal{E}_n)$ fortsetzt.

Dieses Maß wird als **Lebesgue-Borel-Maß** (kurz: **LB-Maß**) bezeichnet und im Folgenden wieder mit m bezeichnet.

Beweis von Satz 3.3:

1. Schritt: Es gelte $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega) < \infty$
Wir zeigen: $\quad A \in \mathcal{F}(\mathcal{C}) \quad \Rightarrow \quad \mu_1(A) = \mu_2(A)$
d. h.

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{G} := \{G \in \mathcal{F}(\mathcal{C}) \ : \ \mu_1(G) = \mu_2(G)\}$$

Dazu genügt es zu zeigen:

(1) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{G}$

(2) $\mathcal{G}$ ist Dynkin-System

Denn daraus folgt:

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \mathcal{D}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{G}$$

da $\mathcal{C}$ $\cap$-stabil, vgl. Satz 1.2

(1) gilt, da nach Voraussetzung des Satzes $\mu_{1}\big|_{\mathcal{C}} = \mu_{2}\big|_{\mathcal{C}}$.

Nachweis von (2):

a) $\Omega \in \mathcal{G}$, da $\Omega \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ und $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$ nach Voraussetzung.

b) Seien $A, B \in \mathcal{G}$ mit $A \subseteq B$.
Dann ist $B \backslash A \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ und

$$\mu_1(B\backslash A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \mu_1(\Omega) < \infty}}{=} \mu_1(B) - \mu_1(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } A, B \in \mathcal{G}}}{=} \mu_2(B) - \mu_2(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \mu_2(\Omega) < \infty}}{=} \mu_2(B\backslash A),$$

also gilt auch

$$B \backslash A \in \mathcal{G}.$$

c) Seien A_n $(n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt.
Dann ist $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ und es gilt

$$\mu_1\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \mu_1 \text{ Maß}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n) \underset{\substack{\uparrow \\ A_n \in \mathcal{G}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \mu_2 \text{ Maß}}}{=} \mu_2\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\right),$$

also ist auch $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$.

Aus a) - c) folgt (2).

2. Schritt: Allgemeiner Fall

Da $\mu_1\big|_{\mathcal{C}}$ und $\mu_2\big|_{\mathcal{C}}$ σ-endlich sind, existieren $A_{i,n} \in \mathcal{C}$ mit $A_{i,n} \uparrow \Omega$ $(n \to \infty)$ und $\mu_i(A_{i,n}) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $(i \in \{1,2\})$.
Setze

$$A_n := A_{1,n} \cap A_{2,n}.$$

Da $\mathcal{C}$ $\cap$-stabil ist, gilt $A_n \in \mathcal{C}$. Weiter erfüllt A_n

$$A_n \uparrow \Omega,$$

da

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq \left(\bigcup_{n\geq N} A_{1,n}\right) \cap A_{2,N} = \Omega \cap A_{2,N}$$

und damit

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq \bigcup_{N\in\mathbb{N}} A_{2,N} = \Omega.$$

Es gilt außerdem

$$\mu_1(A_n) \leq \mu_1(A_{1,n}) < \infty \text{ und } \mu_2(A_n) \leq \mu_2(A_{2,n}) < \infty,$$

da μ_1, μ_2 als Maße monoton sind.

Wir zeigen im Folgenden:

$$(*) \quad \forall n \in \mathbb{N}\, \forall A \in \mathcal{F}(\mathcal{C}) \;:\; \mu_1(A \cap A_n) = \mu_2(A \cap A_n).$$

Wegen $A \cap A_n \uparrow A$ (folgt aus $A_n \uparrow \Omega$) folgt daraus mit der Stetigkeit des W-Maßes von unten:

$$\mu_1(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(A \cap A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_2(A \cap A_n) = \mu_2(A)$$

für alle $A \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$, was zu zeigen war.

Nachweis von $(*)$: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest.
Setze

$$\mathcal{C}_n = A_n \cap \mathcal{C} = \{A_n \cap A : A \in \mathcal{C}\}.$$

Da $\mathcal{C}$ $\cap$-stabil ist, gilt $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{C}$.
$\mathcal{C}_n$ ist ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{F}_{An}(\mathcal{C}_n)$, und die Maße μ_1 und μ_2 stimmen auf $\mathcal{C}_n$ überein (da sie sogar auf $\mathcal{C}$ übereinstimmen) und erfüllen

$$\mu_1(A_n) = \mu_2(A_n) \qquad (\text{da } A_n \in \mathcal{C}_n)$$

und

$$\mu_1(A_n) < \infty \qquad (\text{nach Konstruktion von } A_n).$$

Mit Schritt 1 folgt daraus

$$\mu_1(A) = \mu_2(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{F}_{A_n}(\mathcal{C}_n).$$

Wegen

$$\mathcal{F}_{A_n}(\mathcal{C}_n) = \mathcal{F}_{A_n}(A_n \cap \mathcal{C}) = A_n \cap \mathcal{F}_\Omega(\mathcal{C})$$

(vgl. Übungen) folgt daraus aber $(*)$ $\square$

Definition 3.5:

Eine Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **maßdefinierende Funktion**, falls sie monoton wachsend (d. h. $x_1 \leq x_2 \Rightarrow G(x_1) \leq G(x_2)$) und rechtsseitig stetig ist.

Gilt außerdem

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$$

und

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = 1,$$

so heißt G (eindimensionale) **Verteilungsfunktion**.

Beispiele

a) $\mathcal{G}(x) = \begin{cases} 3x+7 & \text{für} \quad x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$ ist maßdefinierende Funktion.

b) $\mathcal{G}(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$ ist maßdefinierende Funktion.

c) $\mathcal{G}(x) = 1_{[u,\infty)}(x)$ ist Verteilungsfunktion.

d) $\mathcal{G}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ ist Verteilungsfunktion.

Satz 3.5

a) Zu jedem Maß $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$\mu((a,b]) < \infty \text{ für alle } a,b \in \mathbb{R}, a \leq b$$

existiert eine – bis auf eine additive Konstante eindeutige – maßdefinierende Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\mu((a,b]) = G(b) - G(a) \quad \text{für alle } a,b \in \mathbb{R}, a \leq b,$$

und umgekehrt.

b) Zu jedem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ existiert genau eine Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a) \text{ für alle } a,b \in \mathbb{R}, a \leq b$$

und umgekehrt.
Hierbei gilt: $F(x) = \mu((-\infty, x]) \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Beweis

a) a_1) Sei $\mu : B \to \overline{\mathbb{R}}$ Maß mit $\mu((a,b]) < \infty$ $(a,b \in \mathbb{R}, a \leq b)$.
Wir zeigen: Es existiert eine maßdefinierende Funktion G mit

$$\mu((a,b]) = G(b) - G(a) \quad (a,b \in \mathbb{R}, a \leq b).$$

Dazu definiere

$$G(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & \text{falls } x \geq 0, \\ -\mu((x,0]) & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Dann gilt:

(i) G ist monoton wachsend, denn:
Sei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \leq x_2$.
Ist $x_1, x_2 \geq 0$, so ist $(0, x_1] \subseteq (0, x_2]$
und daher $G(x_1) = \mu((0, x_1]) \leq \mu((0, x_2]) = G(x_2)$.
Ist $x_1 < 0, x_2 \geq 0$, so ist

$$G(x_1) = -\mu((x_1, 0]) \leq 0 \leq \mu((0, x_2]) = G(x_2).$$

Ist $x_1, x_2 < 0$, so gilt

$$(x_1, 0] \supseteq (x_2, 0]$$

und daher

$$G(x_1) = -\mu((x_1, 0]) \leq -\mu((x_2, 0]) = G(x_2).$$

(ii) G ist rechtsseitig stetig, denn:
Sei

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n \to x \quad (n \to \infty)$$

Fall 1: $x \geq 0$
Dann gilt $(0, x_n] \downarrow (0, x]$, und mit Stetigkeit des W-Maßes von oben folgt

$$G(x_n) = \mu((0, x_n]) \to \mu((0, x]) = G(x) \quad (n \to \infty).$$

Fall 2: $x < 0$
Dann gilt $(x_n, 0] \uparrow (x, 0]$, und mit Stetigkeit des W-Maßes von unten folgt wieder

$$G(x_n) = -\mu((x_n, 0]) \to -\mu((x, 0]) = G(x) \ (n \to \infty)$$

Da G monoton ist, folgt daraus die rechtsseitige Stetigkeit.

(iii) Für G gilt

$$\mu((a, b]) = G(b) - G(a) \quad (a, b \in \mathbb{R}, a \leq b)$$

Fall 1: $a, b \geq 0$:

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= \mu((0, b]) - \mu((0, a]) \\ &= \mu((0, b] \setminus (0, a]) = \mu((a, b]) \end{aligned}$$

Fall 2: $a < 0, b \geq 0$:

$$G(b) - G(a) = \mu((0, b]) + \mu((a, 0]) = \mu((a, b])$$

.

Fall 3: $a < 0, b < 0$:

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= -\mu((b, 0]) + \mu((a, 0]) \\ &= \mu((a, 0] \setminus (b, 0]) = \mu((a, b]) \rightsquigarrow a_1). \end{aligned}$$

(iv) G ist bis auf eine additive Konstante eindeutig.
Seien G_1, G_2 maßdefiniertende Funktionen mit

$$G_1(b) - G_1(a) = \mu((a,b]) = G_2(b) - G_2(a) \text{ für } a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$$

Dann gilt für $x \geq 0$ (mit $b = x, a = 0$):

$$G_1(x) = G_2(x) - G_2(0) + G_1(0)$$

und für $x < 0$ (mit $b = 0, a = x$)
$G_1(x) = G_2(x) - G_2(0) + G_1(0)$
$\rightsquigarrow \quad G_1 = G_2 + const \quad$ mit $\quad const = G_1(0) - G_2(0)$.
a_2) Sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine maßdefinierende Funktion.
Dann lässt sich die durch

$$\mu((a,b]) := G(b) - G(a) \geq 0 \quad \text{(da } G \text{ monoton wachsend)}$$

$(a, b \in \mathbb{R}, a \leq b)$
definierte Funktion eindeutig zu einem Inhalt (!) $\mu : \mathcal{E}_1 \to \mathbb{R}$ fortsetzen. Analog zu Satz 2.2 (im Spezialfall $G(x) = x$) folgt aus der rechtsseitigen Stetigkeit und der Monotonie von G, dass μ sogar ein **Maß** auf $\mathcal{E}_1$ ist. Wegen

$$(-n, n] \uparrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mu((-n,n]) = G(n) - G(-n) < \infty$$

für alle $n \in \mathbb{R}$ lässt sich μ auf eindeutige Weise auf $\mathcal{B}$ fortsetzen (vgl. Satz 3.2 und Satz 3.3). Dieses μ erfüllt nach Konstruktion

$$\mu((a,b]) = G(b) - G(a) < \infty \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

$\rightsquigarrow a)$

b) b_1) Setze $F(x) = \mu((-\infty, x])$. Analog zu a_1) sieht man, dass F Verteilungsfunktion ist, und darüber hinaus für $a \leq b$ gilt:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \mu((-\infty, b]) - \mu((-\infty, a]) \\ &= \mu((-\infty, b] \setminus (-\infty, a]) \\ &= \mu((a, b]). \end{aligned}$$

F ist eindeutig, da für Verteilungsfunktionen F_1, F_2 aus

$$F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a) \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$$

mit $a \to -\infty$

$$F_1(b) = F_2(b) \qquad (b \in \mathbb{R})$$

folgt.

b_2) Existenz und Eindeutigkeit des Maßes

$$\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$$

mit

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a) \qquad (a, b \in \mathbb{R}, a \leq b)$$

folgt aus a).

Wegen $(-n, n] \uparrow \mathbb{R}, \mu$ stetig von unten gilt

$$\mu(\mathbb{R}) = \lim_{n\to\infty} \mu((-n,n]) = \lim_{n\to\infty} (F(n) - F(-n)) = 1 - 0 = 1,$$

also ist μ sogar W-Maß.

Aus

$$\mu((a,x]) = F(x) - F(a)$$

folgt mit $a \to -\infty$:

$$\mu((-\infty, x]) = \lim_{a\to-\infty} \mu((a,x]) = \lim_{a\to-\infty} (F(x) - F(a)) = F(x) - 0$$

$\rightsquigarrow$ Beh. $\square$

Beispiele

a) Das zu $G(x) = x$ gehörende Maß ist das LB-Maß.

b) Das zu

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

gehörende Maß heißt (standardisierte) Normalverteilung.

2. Grundbgriffe der Integrationstheorie

Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$

Ziel: Sinnvolle Definition eines Integrals $\int_\Omega f \; d\mu$ für "geeignete" Funktionen f. Um die Voraussetzungen an f formulieren zu können, benötigen wir den Begriff der Messbarkeit einer Funktion f.

§ 4 Messbare Funktionen

Def. 4.1 $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ seien Messräume, weiter sei $f : \Omega \to \Omega'$.

f heißt $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$**-messbar** (kurz: messbar), falls gilt:

$$f^{-1}(A') := \{\omega \in \Omega | f(\omega) \in A'\} \in \mathcal{A}$$

für alle $\mathcal{A}' \in \mathcal{A}'$. d. h.:

$$f^{-1}(\mathcal{A}') = \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\} \subseteq \mathcal{A}$$

bzw. die Urbilder messbarer Mengen in Ω' sind messbare Mengen in Ω.

Bsp.:

a) Jede konstante Funktion ist messbar (da Urbilder immer gleich Ω oder gleich $\emptyset$ sind).

b) $(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B}),\ A \subseteq \mathbb{R}$ und $f = \chi_A$ mit

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

(sog. Indikatorfunktion). Für $B \in \mathcal{B}$ gilt

$$\chi_{\mathcal{A}}^{-1}(B) = \begin{cases} A & \text{falls} \quad 0 \notin B, 1 \in B \\ A^c & \text{falls} \quad 0 \in B, 1 \notin B \\ \emptyset & \text{falls} \quad 0 \notin B, 1 \notin B \\ \mathbb{R} & \text{falls} \quad 0 \in B, 1 \in B. \end{cases}$$

daher ist χ_A genau dann messbar, wenn $A \in \mathcal{B}$ gilt.

Schreibweise für f $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$-messbar: $\quad f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$

Lemma 4.1

$(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ seien Messräume. Für

$$f_1 : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \text{ und } f_2 : (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \to (\Omega_3, \mathcal{A}_3)$$

gilt immer

$$f_2 \circ f_1 : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_3, \mathcal{A}_3),$$

d.h. Verkettung messbarer Funktionen ergibt messbare Funktion.

Beweis Für $A_3 \in \mathcal{A}_3$ gilt

$$f_2^{-1}(A_3) \in \mathcal{A}_2$$

(da f_2 messbar), woraus folgt

$$(f_2 \circ f_1)^{-1}(A_3) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(A_3)) \in \mathcal{A}_1$$

(da f_1 messbar). □

Satz 4.1: $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ seien Messräume, $\mathcal{C}$ sei Erzeugersystem von $\mathcal{A}'$, d.h. $\mathcal{A}' = \mathcal{F}_{\Omega'}(\mathcal{C})$.

Dann sind äquivalent:

(i) $f : \Omega \to \Omega'$ ist $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ messbar

(ii) $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$, d. h. $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ für alle $A' \in \mathcal{C}$.

Beweis:

"(i) $\Rightarrow$ (ii)": klar

"(ii) $\Rightarrow$ (i)": Da $\mathcal{A}$ σ-Algebra ist, folgt aus

$$f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$$

immer auch $\mathcal{F}_\Omega(f^{-1}(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{A}$. Behauptung folgt mit

$$\mathcal{F}_\Omega(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}\left(\mathcal{F}_{\Omega'}(\mathcal{C})\right) = f^{-1}(\mathcal{A}')$$

(vgl. Übungen). □

Bsp.: Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist $\mathcal{B}_n - \mathcal{B}_m$-messbar (da Urbild offener Mengen immer offen ist)

Satz 4.1 ermöglicht eine einfache Charakterisierung messbarer numerischer Funktionen, d. h. von Funktionen $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ mit $(\Omega', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ bzw.

$$\Omega' = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

$$\mathcal{A}' = \overline{\mathcal{B}} = \{B, B \cup \{+\infty\}, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{+\infty, -\infty\} | B \in \mathcal{B}\}$$

Korollar 4.1 Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ Messraum und f eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ oder $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist $\mathcal{A}-\mathcal{B}$- bzw. $\mathcal{A}-\overline{\mathcal{B}}$-messbar

(ii) $[f < \alpha] := \{\omega \in \Omega : f(\omega) < \alpha\} = f^{-1}((-\infty, \alpha)) \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

(iii) $[f \leq \alpha] \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

(iv) $[f > \alpha] \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

(v) $[f \geq \alpha] \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis: Für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 4.1 und den in Satz 1.1 angegebenen Erzeugendensystemen von $\mathcal{B}$. Für $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ wendet man zu Satz 1.1 analoge Aussagen für $\overline{\mathcal{B}}$ an. □

Lemma 4.2: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ Messraum und seien $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}-\overline{\mathcal{B}}$-messbar $(n \in \mathbb{N})$. Dann sind auch

$$\inf_n f_n, \sup_n \ f_n, \overline{\lim}_n f_n = \limsup_n f_n, \underline{\lim}_n f_n = \liminf_n f_n$$

sowie (falls existent)

$$\lim_n f_n$$

$\mathcal{A}-\overline{\mathcal{B}}$-messbar.

Beweis: Mit Korollar 4.1 folgt die Behauptung aus

(i) $[\inf_n f_n < \alpha] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [f_n < \alpha] \in \mathcal{A}$
(da $[f_n < \alpha] \in \mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ σ-Algebra)

(ii) $[\sup_n f_n > \alpha] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [f_n > \alpha] \in \mathcal{A}$
(analog)

(iii) $\overline{\lim}_n f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$ messbar nach 1. und 2.

(iv) $\underline{\lim}_n f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k$ messbar nach 1. und 2.

(v) $\lim_n f_n = \underline{\lim}_n f_n$ (falls existent) messbar nach 4. □

Lemma 4.3

$(\Omega, \mathcal{A})$ sei Messraum.

a) Sind $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}-\mathcal{B}$-messbar $(n = 1, \ldots, m)$ und ist $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}_m - \mathcal{B}$-messbar, so ist $g \circ (f_1, \ldots, f_m)$ $\mathcal{A}-\mathcal{B}$-messbar.

b) Sind $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}-\mathcal{B}$-messbar $(i = 1, 2)$ und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so sind

$$\alpha f_1 + \beta \cdot f_2 \text{ und } f_1 \cdot f_2$$

$\mathcal{A}-\mathcal{B}$-messbar.

Beweis:

a) Nach Satz 4.1 ist $(f_1, \ldots, f_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ $\mathcal{A}-\mathcal{B}_m$-messbar, da für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ gilt

$$[(f_1, \ldots, f_m) \leq (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)] = \bigcap_{n=1}^{m} [f_n \leq \alpha_n] \in \mathcal{A}$$

Mit Lemma 4.1 folgt die Behauptung.

b) Behauptung folgt aus a) unter Beachtung der Messbarkeit der stetigen (!) Abbildungen

$$(x_1, x_2) \mapsto \alpha x_1 + \beta x_2$$
$$(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2.$$

□

Lemma 4.4

Mit $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ sind auch

$$f^+ = \max\{f, 0\}$$

$$f^- = \max\{-f, 0\}$$

und

$$|f|$$

$\mathcal{A}-\overline{\mathcal{B}}$-messbar.

Beweis: Wegen Lemma 4.2 sind

$$f^+ = \sup\{f, 0, 0, \ldots\}$$

und

$$f^- = \sup\{-f, 0, 0, \ldots\}$$

messbar (wobei Messbarkeit von $-f$ z.B. aus Lemma 4.3 b) folgt). Wegen obigem und Lemma 4.3. b) ist analog auch

$$|f| = f^+ + f^-$$

messbar. $\square$

Definition 4.2 $(\Omega, \mathcal{A})$ sei Messraum.

Eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **einfach**, wenn

$$f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$$

für ein $N \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt, d. h. wenn f nur endlich viele Werte annimmt und diese jeweils auf einer Menge aus $\mathcal{A}$ angenommen werden.

Satz 4.2: $(\Omega, \mathcal{A})$ sei Messraum.

a) $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann $\mathcal{A}$–$\overline{\mathcal{B}}$-messbar sind, wenn f^+ und f^- $\mathcal{A}$–$\overline{\mathcal{B}}$-messbar sind.

b) Eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ist genau dann messbar, wenn sie Limes einer monoton wachsenden Folge nichtnegativer (beschränkter) einfacher Funktionen ist.

Beweis.

a) "$\Rightarrow$" Folgt aus Lemma 4.4
"$\Leftarrow$" Mit f^+, f^- ist nach Lemma 4.3 b) auch $f = f^+ - f^-$ messbar.

b) "$\Leftarrow$" Für $A \in \mathcal{A}$ ist χ_A messbar, und mit Lemma 4.3 folgt, dass auch jede einfache Funktion und damit nach Lemma 4.2 auch der Limes einfacher Funktionen messbar ist.

"$\Rightarrow$" Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{A} - \overline{\mathcal{B}}$-messbar

Dann sind

$$f_n = n \cdot \chi_{[f \geq n]} + \sum_{k=0}^{n \cdot 2^n - 1} \frac{k}{2^n} \cdot \chi_{[\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}]}$$

einfach. Man sieht leicht, dass $(f_n)_n$ monoton ist. Weiter gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f,$$

denn für $f(\omega) < \infty$ ist für $n > f(\omega)$

$$|f(\omega) - f_n(\omega)| < \frac{1}{2^n},$$

und für $f(\omega) = \infty$ gilt

$$f_n(\omega) = n \to \infty \ (n \to \infty).$$

$\square$

§ 2 Integration messbarer Funktionen

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$.

Im Folgenden: Definition des Integrals

$$\int_\Omega f \, d\mu$$

in mehreren Schritten:

1. Schritt: f nichtnegativ, einfach
2. Schritt: f nichtnegativ, messbar
3. Schritt: f messbar.

$\boxed{\text{1. Schritt:}}$ Sei f nichtnegativ und einfach

Dann existiert Darstellung

$$f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$$

mit $N \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{A}$ bilden Partition von Ω (d. h. $A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall i \neq j$ und $\bigcup_{j=1}^{N} A_j = \Omega$), $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Wir definieren:

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \mu(A_i)$$

(mit $\infty \cdot 0 = 0$).

Lemma 5.1: Obiges Integral ist wohldefiniert, d. h. unabhängig von der Wahl der Darstellung $f = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}$.

Beweis Sei

$$f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{M} \beta_j \cdot \chi_{B_j}$$

mit A_i, B_j wie oben.

zu zeigen: $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \mu(A_i) = \sum\limits_{j=1}^{M} \beta_j \cdot \mu(B_j)$.

Aus $\Omega = \sum\limits_{i=1}^{N} A_i = \sum\limits_{j=1}^{M} B_j$ folgt

$$\Omega = \sum_{\substack{i=1,\ldots,N,\\ j=1,\ldots,M}} A_i \cap B_j$$

mit $A_i \cap B_j \in \mathcal{A}$ (da $A_i, B_j \in \mathcal{A}$). Daher existiert Darstellung

$$f = \sum_{i,j} \gamma_{i,j} \cdot \chi_{A_i \cap B_j}$$

für $\gamma_{i,j} \in \overline{\mathbb{R}}_+$, und für $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ ist

$$\gamma_{i,j} = \alpha_i = \beta_j$$

(denn aus $\omega \in A_i \cap B_j$ folgt:

$$\begin{aligned} &\alpha_i = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \cdot \chi_{A_k}(\omega) = f(\omega), \\ &\beta_j = \sum_{k=1}^{M} \beta_k \cdot \chi_{\beta_k}(\omega) = f(\omega) \\ &\text{und } \gamma_{i,j} = f(\omega), \end{aligned}$$

also ist $\alpha_i = f(\omega) = \beta_j = \gamma_{i,j}$).

Mit

$$A_i = \sum_{j=1}^{M} A_i \cap B_j \text{ und } B_j = \sum_{i=1}^{N} A_i \cap B_j$$

folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \mu\left(\sum_{j=1}^{M} A_i \cap B_j\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \alpha_i \cdot \mu\left(A_i \cap B_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \gamma_{i,j} \cdot \mu\left(A_i \cap B_j\right)
\end{aligned}$$

und analog:

$$\sum_{j=1}^{M} \beta_j \cdot \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} \gamma_{i,j} \cdot \mu\left(A_i \cap B_j\right) \rightsquigarrow \text{ Beh. } \square$$

Lemma 5.2 (Eigenschaften des Integrals für nichtnegative einfache Funktionen)
Seien f, f_1 und f_2 nichtnegativ einfach. Dann gilt:

a) $\int f \, d\mu \geq 0$

b) $\forall\, c \in \mathbb{R}_+ : \int (c \cdot f) d\mu = c \cdot \int f \, d\mu$

c) $\int (f_1 + f_2) d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f_2 \, d\mu$

d) $f_1 \leq f_2 \Rightarrow \int f_1 \, d\mu \leq \int f_2 \, d\mu$.

Beweis:

a) Klar nach Definition.

b) $f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} \Rightarrow c \cdot f = \sum_{i=1}^{N} (c \cdot \alpha_i) \cdot \chi_{A_i}$ mit $c \cdot \alpha_i \geq 0$ wegen $c \geq 0, \alpha_i \geq 0$.

Somit:

$$\begin{aligned}
\int (c \cdot f) d\mu &= \sum_{i=1}^{N} (c \cdot \alpha_i) \cdot \mu(A_i) = c \cdot \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \mu(A_i) \\
&= c \cdot \int f d\mu.
\end{aligned}$$

c) $f_1 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \chi_{A_i}, \quad f_2 = \sum_{j=1}^{M} \beta_j \cdot \chi_{B_j}$

Wie im Beweis von Lemma 5.1 sieht man:

$$f_1 = \sum_{\substack{i=1,\ldots,N \\ j=1,\ldots,M}} \alpha_i \cdot \chi_{A_i \cap B_j}, f_2 = \sum_{\substack{i=1,\ldots,N, \\ j=1,\ldots,M}} \beta_j \cdot \chi_{A_i \cap B_j}$$

woraus folgt

$$f_1 + f_2 = \sum_{\substack{i=1,\dots,N,\\ j=1,\dots,M}} (\alpha_i + \beta_j) \cdot \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Damit:

$$\begin{aligned}
&\int (f_1 + f_2) d\mu \overset{Def.}{=} \sum_{\substack{i=1,\dots,N,\\ j=1,\dots,M}} (\alpha_i + \beta_j) \cdot \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{\substack{i=1,\dots,N,\\ j=1,\dots,M}} \alpha_i \cdot \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{\substack{i=1,\dots,N,\\ j=1,\dots,M}} \beta_j \cdot \mu(A_i \cap B_j) \\
&\overset{Def.}{=} \int f_1 \, d\mu + \int f_2 \, d\mu
\end{aligned}$$

d) $f_1 \leq f_2$ mit f_1, f_2 nichtnegativ einfach
$\Rightarrow$ Es existiert nichtnegative einfache Funktion g mit

$$f_2 = f_1 + g.$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\int f_2 \, d\mu &= \int (f_1 + g) d\mu \overset{c)}{=} \int f_1 \, d\mu + \int g d\mu \\
&\overset{a)}{\geq} \int f_1 d\mu + 0 = \int f_1 d\mu.
\end{aligned}$$

□

$\boxed{\text{2. Schritt}}$ Sei f nichtnegativ und messbar.

Nach Satz 4.2 existieren nichtnegative einfache Funktionen f_n mit $f_n \uparrow f$. Wir definieren

$$\int f \, d\mu := \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Lemma 5.3 Obiges Integral ist wohldefiniert, d. h. der obige Grenzwert existiert und ist unabhängig von der Wahl der Folge $(f_n)_n$ mit f_n nichtnegativ einfach und $f_n \uparrow f$.

Beweis

a) Wegen $f_n \leq f_{n+1}$ gilt nach Lemma 5.3 d):

$$\int f_n \, d\mu \leq \int f_{n+1} \, d\mu,$$

also existiert der Grenzwert der monoton wachsenden Folge $\left(\int f_n \, d\mu\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Sei f nichtnegativ messbar, seien f_n, g_n nichtnegativ einfach mit $f_n \uparrow f$ $g_n \uparrow f$.

Zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu.$$

Aus Symmetriegründen genügt es zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} \int fn \, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu.$$

Da die Folgen auf der rechten und der linken Seite monoton wachsend sind, ist dies wiederum äquivalent zu

$$(*) \qquad \sup_n \int f_n \, d\mu \geq \int g_k \, d\mu$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Wegen $f_n \uparrow f, g_n \uparrow f$ gilt

$$g_k \leq g = \sup_n \; f_n.$$

Also folgt $(*)$ aus

$$(**) \quad \begin{cases} \text{Sind } f_n, h \text{ nichtnegative einfache Funktionen} \\ \text{mit } h \leq \sup\limits_n \; f_n \text{ und } f_n \uparrow, \text{ so gilt} \\ \qquad \int h \, d\mu \leq \sup\limits_n \int f_n \, d\mu \end{cases}$$

Im Folgenden zeigen wir $(**)$.

Fall 1: $0 < m := \min\limits_{\omega\in\Omega} h(\omega) \leq \max\limits_{\omega\in\Omega} h(\omega) =: M < \infty$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig mit $0 < \varepsilon < m$.

Setze

$$\Omega_n := \{\omega \in \Omega | f_n(\omega) \geq h(\omega) - \varepsilon\} \in \mathcal{A}$$

Wegen $f_n \uparrow, \sup\limits_n \; f_n \geq h$ und $\max\limits_{\omega\in\Omega} h(\omega) < \infty$ gilt dann

$$\Omega_n \uparrow \Omega.$$

Nach Definition von Ω_n ist

$$f_n(\omega) \geq (h(\omega) - \varepsilon) \cdot \chi_{\Omega_n}(\omega) \; (\omega \in \Omega),$$

wobei die Funktionen auf beiden Seiten nichtnegativ und einfach sind.
Mit Lemma 5.2 d) folgt

$$\int f_n \, d\mu \geq \int (h - \varepsilon) \cdot \chi_{\Omega_n} \, d\mu.$$

Im Falle $\mu(\Omega) = +\infty$ erhält man daraus

$$\begin{aligned} \int f_n \, d\mu &\geq \int (h-\varepsilon) \cdot \chi_{\Omega_n} \, d\mu \\ &\geq \int (m-\varepsilon) \cdot \chi_{\Omega_n} \, d\mu \text{ (nach Lemma 5.2 d))} \\ &= (m-\varepsilon) \cdot \mu(\Omega_n) \overset{(n\to\infty)}{\to} (m-\varepsilon) \cdot \mu(\Omega) = \infty \end{aligned}$$

da $m - \varepsilon > 0, \mu(\Omega) = \infty$, und damit hat man gezeigt:

$$\sup_n \int f_n \, d\mu = \infty \geq \int h \, d\mu.$$

Im Falle $\mu(\Omega) < \infty$ folgt daraus unter Beachtung von

$$\begin{aligned} \int h \, d\mu &= \int ((h-\varepsilon) \cdot \chi_{\Omega_n} + h \cdot \chi_{\Omega_n^c} + \varepsilon \cdot \chi_{\Omega_n}) d\mu \\ &\overset{\mathit{Lemma}\ 5.2.c)}{=} \int (h-\varepsilon) \cdot \chi_{\Omega_n} d\mu + \int h \cdot \chi_{\Omega_n^c} d\mu + \varepsilon \cdot \mu(\Omega_n), \end{aligned}$$

dass gilt:

$$\begin{aligned} &\int f_n \, d\mu \geq \int (h-\varepsilon) \cdot \chi_{\Omega_n} \, d\mu \\ &= \int h \, d\mu - \int h \cdot \chi_{\Omega_n^c} d\mu - \varepsilon \cdot \mu(\Omega_n) \\ &\geq \int h \, d\mu - M \cdot \mu(\Omega_n^c) - \varepsilon \cdot \mu(\Omega_n) \\ &= \int h \, d\mu - M \cdot (\mu(\Omega) - \mu(\Omega_n)) - \varepsilon \cdot \mu(\Omega_n) \\ &\longrightarrow \int h \, d\mu - M \cdot (\mu(\Omega) - \mu(\Omega)) - \varepsilon \cdot \mu(\Omega) \\ &\quad = \int h \, d\mu - 0 - \varepsilon \cdot \mu(\Omega) \end{aligned}$$

Mit

$$\sup_n \int f_n d\mu = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} \int f_n d\mu$$

(wegen Monotonie von $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$) folgt daraus

$$\sup_n \int f_n d\mu \geq \int h \, d\mu - \varepsilon \cdot \mu(\Omega).$$

Mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt die Behauptung.

Fall 2: $0 < m \leq M = \infty$

h lässt sich dann darstellen als

$$h = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} + \infty \cdot \chi_{[h=\infty]} \text{ mit } \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}.$$

Setze

$$h^{(c)} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \chi_{A_i} + c \cdot \chi_{[h=\infty]}$$

für $c > 0$.

Dann gilt $h^{[c]} \uparrow h$, $\int\ h^{(c)} d\mu \overset{(c \to \infty)}{\longrightarrow} \int\ h\ d\mu$ und aus

$$h^{(c)} \leq h \leq \sup_n\ f_n$$

folgt nach Fall 1:

$$\sup_n \int\ f_n d\mu \geq \int\ h^{(c)} d\mu \to \int\ h\ d\mu\ (c \to \infty).$$

Daraus folgt die Behauptung.

Fall 3: $0 \leq m \leq M \leq \infty$.

oBdA sei $h \not\equiv 0$.

Setze

$$\Omega' = \{\omega \in \Omega | h(\omega) > 0\}$$

Da h einfach, gilt

$$\min_{\omega \in \Omega'} h(\omega) > 0.$$

Betrachte Maßraum

$$\left(\Omega', \Omega' \cap \mathcal{A}, \mu\big|_{\Omega' \cap \mathcal{A}}\right).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sup_n \int\ f_n d\mu &\geq \sup_n \int\ f_n \cdot \chi_{\Omega'} d\mu \\ &= \sup_n \int\ f_n\ d\mu\big|_{\Omega' \cap \mathcal{A}} \\ &\overset{\textit{Fälle 1 und 2}}{\geq} \int\ h\ d\mu\big|_{\Omega' \cap \mathcal{A}} \\ &= \int\ h\ d\mu, \end{aligned}$$

da $h(\omega) = 0$ für $\omega \notin \Omega'$. $\rightarrow$ Beh. $\square$

Lemma 5.4 (Eigenschaften des Integrals für nichtnegative messbare Funktionen)
Seien f, g nichtnegativ messbar. Dann gilt:

a) $\int\, f d\mu \geq 0$

b) $\forall\, c \in \mathbb{R}_+ : \quad \int\, (c \cdot f) d\mu = c \cdot \int\, d\mu$

c) $\int\, (f+g) d\mu = \int\, f\, d\mu + \int\, g\, d\mu$

d) $f \leq g \Rightarrow \int\, f\, d\mu \leq \int\, g\, d\mu.$

Beweis:

a) klar.

b) Seien f_n nichtnegativ einfach mit $f_n \uparrow f$.
Wegen $c \geq 0$ sind dann $c \cdot f_n$ nichtnegativ einfach mit $c \cdot f_n \uparrow c \cdot f$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ \int\, c \cdot f\, d\mu &= \lim_{n \to \infty} \int\, c \cdot f_n d\mu \quad \text{(Definition)} \\ &= \lim_{n \to \infty} c \cdot \int\, f_n d\mu \quad \text{(nach Lemma 5.2 b))} \\ &= c \cdot \int\, f d\mu \quad \text{(Definition)} \end{aligned}$$

c) Folgt analog zu b) mit Lemma 5.2 c).

d) $f \leq g \Rightarrow g = f + (g-f)$ mit $g - f \geq 0$
$\stackrel{c)}{\Rightarrow} \int\, g\, d\mu = \int\, f d\mu + \int\, (g-f) d\mu \stackrel{a)}{\geq} \int\, f d\mu.$ □

Der folgende Satz zeigt, dass der bisher eingeführte Integralbegriff "abgeschlossen" ist bzgl. der Grenzwertbildung im Schritt 2.

Satz 5.1 (Satz von der monotonen Konvergenz bzw. Satz von B. Levi (1875 - 1961))

Seien f_n nichtnegative messbare Funktionen $(n \in \mathbb{N})$ mit $f_n \uparrow f$. Dann ist auch f nichtnegativ messbar, und es gilt

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \inf\, f_n d\mu.$$

Beweis: f ist nichtnegativ und messbar, da f Grenzwert nichtnegativer und messbarer Funktionen ist (vgl. Lemma 4.2).

Setze
$$g_j = f_j - f_{j-1} \; (j \in \mathbb{N}), \text{ wobei } f_0 := 0.$$
Dann ist g_j nichtnegativ messbar, und es gilt
$$f_n = f_n - f_0 = \sum_{j=1}^{n} g_j.$$
Nach Satz 4.2 ist g_j Limes einer monoton wachsenden Folge einfacher Funktionen. Die dabei auftretenden Funktionen lassen sich darstellen als Partialsummen von nichtnegativ einfachen Funktionen $h_{j,k}$, d. h. es gilt
$$g_j = \sum_{k=1}^{\infty} h_{j,k} \text{ mit } h_{j,k} \text{ nichtnegativ einfach}$$
Damit
$$f_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} h_{j,k}$$
und
$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_{j,k} = \sum_{j,k} h_{j,k},$$
wobei im letzten Schritt benutzt wurde, dass Summationsreihenfolge bei nichtnegativen reellen Zahlen keine Rolle spielt.

Für endliche Mengen $\mathcal{J}, K \subseteq \mathbb{N}$ gilt nach Lemma 5.2 c)
$$\int \sum_{j\in\mathcal{J},k\in K} h_{j,k} d\mu = \sum_{j\in\mathcal{J},k\in K} \int h_{j,k} d\mu,$$
also folgt mit der Definition des Integrals:
$$\int f \, d\mu = \sum_{j,k} \int h_{j,k} d\mu.$$
Mit
$$\begin{aligned}
\int f_n \, d\mu &\overset{Lemma\ 5.4\ c)}{=} \sum_{j=1}^{n} \int \sum_{k=1}^{\infty} h_{j,k} d\mu \\
&\overset{Def.}{=} \sum_{j=1}^{n} \lim_{m\to\infty} \int \sum_{k=1}^{m} h_{j,k} d\mu \\
&\overset{Lemma\ 5.2\ c)}{=} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \int h_{j,k} d\mu \\
&\rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int h_{j,k} d\mu \qquad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

und

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int h_{j,k}d\mu = \sum_{j,k}\int h_{j,k}d\mu$$

(da Integrale nichtnegativ und Summationsreihenfolge deshalb keine Rolle spielt) folgt die Behauptung. $\square$

$\boxed{\text{3. Schritt:}}$ Sei f messbar. Nach Satz 4.2 sind dann auch $f^+ = \max\{f, 0\}$ und $f^- = \max\{-f, 0\}$ nichtnegativ und messbar und damit existieren.

$$\int f^+\,d\mu \text{ und } \int f^-\,d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Falls nicht beide Integrale unendlich sind, definieren wir:

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Bem.: Ist f nichtnegativ messbar, so ist

$$\int f^- d\mu = \int 0 d\mu = 0 \text{ und } f = f^+.$$

Damit stimmt die obige Definition mit der aus Schritt 2 überein, sofern f nichtnegativ ist.

Lemma 5.5: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei Maßraum, $u, v : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ seien messbar. Sind

$$u - v \text{ und } \int u\,d\mu - \int v\,d\mu$$

definiert, dann existiert $\int(u-v)d\mu$ und es gilt

$$\int (u-v)d\mu = \int u\,d\mu - \int v\,d\mu.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
& u - v = (u-v)^+ - (u-v)^- \\
\Rightarrow\quad & u + (u-v)^- = v + (u-v)^+ \\
\overset{\text{Lemma 5.4 c)}}{\Rightarrow}\quad & \textstyle\int u\,d\mu + \int(u-v)^- d\mu = \int v\,d\mu + \int(u-v)^+ d\mu \\
\Rightarrow\quad & \textstyle\int u\,d\mu - \int v\,d\mu = \int(u-v)^+ d\mu - \int(u-v)^+ d\mu \qquad (*)
\end{aligned}$$

denn:

Die letzte Umformung ist klar für $\int\ v\ d\mu < \infty$ und $\int(u-v)^- d\mu < \infty$.
Im Falle $\int v\ d\mu = +\infty$ ist aber $\int\ u\ d\mu < \infty$ und damit (wegen der Nichtnegativität von u und v) auch

$$\int (u-v)^+ d\mu \leq \int\ u^+ d\mu = \int\ u\ d\mu < \infty$$

Wegen

$$\int\ u\ d\mu + \int (u-v)^- d\mu = \int\ v\ d\mu + \int (u-v)^+ d\mu$$

folgt daraus

$$\int (u-v)^- d\mu = \infty,$$

womit $(*)$ wieder gilt.

Im Falle $\int(u-v)^- d\mu = \infty$ gilt (wegen der Nichtnegativität von u und v)

$$\int\ v\ d\mu \geq \int (u-v)^- d\mu = \infty$$

woraus $\int\ u\ d\mu < \infty$ und $\int(u-v)^+ d\mu \leq \int\ u\ d\mu < \infty$ folgt, also gilt wieder $(*)$.
Weiter folgt wegen

$$\int(u-v)^+ d\mu \leq \int\ u\ d\mu$$
$$\int(u-v)^- d\mu \leq \int\ v\ d\mu$$

aus der Existenz von $\int\ u d\mu - \int\ v d\mu$ auch die Existenz von

$$\int (u-v)^+ d\mu - \int (u-v)^- d\mu = \int (u-v) d\mu.$$

$\square$

Lemma 5.6

Seien $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Sind $a-b, c-d$ und $(a-b)+(c-d)$ definiert, so ist auch

$$(a+b)-(b+d)$$

definiert, und es gilt

$$(a+c)-(b+d) = (a-b)+(c-d)$$

Beweis: Folgt mit Fallunterscheidung $< \infty, = \infty$. $\square$

Fall 1. $a = \infty \Rightarrow b < \infty, d < \infty$

Fall 1.1: $c = \infty$

li. S. $= \infty$, re. S. $= \infty + \infty = \infty$

Fall 1.2: $c < \infty$

li. S. $= \infty$, re. S. $= \infty$

Fall 2. $a < \infty, b = \infty \Rightarrow c < \infty$

Fall 2.1: $d = \infty$

li. S. $= -\infty$, re. S. $= -\infty - \infty = -\infty$

Fall 2.2: $d < \infty$

li. S. $= -\infty$, re. S. $= -\infty$

Rest durch Vertauschen von a, b mit c, d.

Def. 5.1 Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

a) Jedes $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ heißt μ-**Nullmenge**.

b) Eine Eigenschaft gilt μ-**fast überall** (kurz: μ-**f.ü.**), wenn die Menge der ω, für die sie nicht gilt, *Teilmenge* einer μ-Nullmenge ist.

Satz 5.2 (Eigenschaften des Integrals)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen, für die $\int f d\mu$ und $\int g\, d\mu$ existieren. Dann gilt

a) $f \geq 0 \Rightarrow \int f d\mu \geq 0$

b) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert $\int (\alpha \cdot f) d\mu$ und es gilt

$$\int (\alpha \cdot f) d\mu = \alpha \cdot \int f\, d\mu.$$

c) Sind $f + g$ und $\int f d\mu + \int g d\mu$ definiert, dann existiert $\int (f + g) d\mu$ und es gilt

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

d) $f \geq g \Rightarrow \int f d\mu \geq \int g d\mu$.

e) $f = g$ μ-f.ü. $\Rightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$

f) $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.

Beweis:

a) Folgt aus Lemma 5.4 a).

b) Trivial für $\alpha = 0$.

Fall $\alpha > 0$**:** $(\alpha \cdot f)^+ = \alpha \cdot f^+, (\alpha \cdot f)^- = \alpha \cdot f^-$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int (\alpha \cdot f) d\mu &\overset{Def.}{=} \int (\alpha \cdot f)^+ d\mu - \int (\alpha \cdot f)^- d\mu \\ &\overset{s.o.}{=} \int \alpha \cdot f^+ d\mu - \int \alpha \cdot f^- d\mu \\ &\overset{Lemma\ 5.4b)}{=} \alpha \cdot \int f^+ d\mu - \alpha \cdot \int f^- d\mu \\ &= \alpha \cdot (\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu) \\ &\overset{Def.}{=} \alpha \cdot \int f d\mu. \end{aligned}$$

Fall $\alpha < 0$**:** $(\alpha \cdot f)^+ = (-\alpha) \cdot f^-, (\alpha \cdot f)^- = (-\alpha) \cdot f^+$

Wegen $(-\alpha) > 0$ folgt mit der Definition des Integrals und Lemma 5.4 b):

$$\begin{aligned} \int (\alpha \cdot f) d\mu &= \int (\alpha \cdot f)^+ d\mu - \int (\alpha \cdot f)^- d\mu \\ &\overset{s.o.}{=} \int (-\alpha) \cdot f^- d\mu - \int (-\alpha) \cdot f^+ d\mu \\ &= (-\alpha) \cdot (\int f^- d\mu - \int f^+ d\mu) \\ &= (-\alpha) \cdot (-1) \cdot \int f d\mu \\ &= \alpha \cdot \int f d\mu. \end{aligned}$$

c) Nach Voraussetzung existieren

$$f^+ - f^- = f$$

$$g^+ - g^- = g$$

$$(f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = f + g.$$

Mit Lemma 5.6 folgt, dass auch

$$(*) \qquad (f^+ + g^+) - (f^- + g^-) = f + g$$

existiert.

Analog sieht man, dass auch

$$(**) \begin{cases} \int (f^+ + g^+) d\mu - \int (f^- + g^-) d\mu \\ = (\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu) + (\int g^+ d\mu - \int g^- d\mu) \\ = \int f d\mu + \int g d\mu \end{cases}$$

existiert.

Mit Lemma 5.5 (setze $u = f^+ + g^+, v = f^- + g^-$) folgt die Existenz von

$$\int (u - v) d\mu \overset{(*)}{=} \int (f + g) d\mu$$

sowie

$$\begin{aligned} \int (f+g) d\mu &= \int (u - v) d\mu = \int u d\mu - \int v d\mu \\ &\overset{(**)}{=} \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

d) $f \geq g \Rightarrow f^+ \geq g^+$ und $f^- \leq g^-$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int f d\mu &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \\ &\overset{Lemma\ 5.4d)}{\geq} \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int g d\mu. \end{aligned}$$

e) Sei $f = g$ f.ü.

Da f und g messbar sind, gilt $A = [f = g] \in \mathcal{A}$.

Nach Voraussetzung ist $\mu(A^c) = 0$.

Mit

$$\begin{aligned} \int f^+ d\mu &= \int f^+ \chi_A d\mu + \int f^+ \chi_{A^c} d\mu \\ &= \int f^+ \chi_A d\mu \end{aligned}$$

(wegen $0 \leq \int f^+ \chi_{A^c} d\mu \leq \infty \cdot \mu(A^c) = 0$) und den analogen Aussagen für f^-, g^+ und g^- folgt:

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \\ &= \int f^+ \chi_A d\mu - \int f^- \chi_A d\mu \\ &= \int g^+ \chi_A d\mu - \int g^- \chi_A d\mu \text{ (nach Definition von } A) \\ &= \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int g d\mu. \end{aligned}$$

f) $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \int f d\mu \right| &\leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \\ &\overset{c)}{=} \int (f^+ + f^-) d\mu \\ &= \int |f| d\mu \end{aligned}$$

wegen $|f| = f^+ + f^-$. $\square$

Def. 5.2 Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $f : (\Omega\mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}})$.

f heißt μ-**integrierbar** (kurz: integrierbar), falls $\int\ f d\mu$ existiert und endlich ist.

Satz 5.3 Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

a) Sei f messbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} f \text{ integriertbar } &\Leftrightarrow\ f^+, f^- \text{ integrierbar } \Leftrightarrow\ |f| \text{ integrierbar} \\ &\Rightarrow\ f \text{ f.ü. endlich.} \end{aligned}$$

b) f messbar, g integrierbar mit $|f| \leq g$ f.ü.
$\Rightarrow \quad f$ integrierbar

Beweis:

a) f integrierbar
$\Leftrightarrow\ \int\ f^+ d\mu < \infty$ und $\int\ f^- d\mu < \infty$
$\Leftrightarrow\ f^+, f^-$ integrierbar
$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\ |f|$ integrierbar

Begr. von $(*)$: "$\Rightarrow$":

$$\begin{aligned} \int |f|\ d\mu &= \int (f^+ + f^-) d\mu \\ &\overset{Satz\ 5.2c)}{=} \int\ f^+ d\mu + \int\ f^- d\mu \\ &< \infty \text{ nach Vor.} \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" $\quad f^+ \leq |f|, f^- \leq |f|$

$\rightsquigarrow\ \int\ f^+ d\mu \leq \int\ |f| d\mu < \infty$ und $\int\ f^- d\mu \leq \int\ |f| d\mu < \infty$
nach Satz 5.2 d)

$\rightsquigarrow\ f^+, f^-$ integrierbar.

Ist nun $|f|$ integrierbar, so gilt

$$\infty > \int\ |f| d\mu \geq \int\ \infty \cdot 1_{[|f|=\infty]} d\mu$$

(nach Satz 5.2 d)

$$= \infty \cdot \mu([|f| = \infty])$$

$\Rightarrow \quad \mu([|f| = \infty]) = 0$

$\Rightarrow \quad f$ f.ü. endlich

b) Sei $|f| \leq g$ f.ü. mit g integrierbar.
$\Rightarrow\ f^+ \leq g$ f.ü. und $f^- \leq g$ f.ü.
Wähle Nullmenge N mit $f^+ \cdot 1_{N^c} \leq g \cdot 1_{N^c}$ und $f^- \cdot 1_{N^c} \leq g \cdot 1_{N^c}$
$\Rightarrow\ \int f^+ d\mu \overset{\text{Satz 5.2e)}}{=} \int f^+ \cdot 1_{N^c} d\mu \leq \int g \cdot 1_{N^c} d\mu = \int g d\mu < \infty$
und analog

$$\int f^- d\mu \leq \int g d\mu < \infty$$

$\overset{a)}{\Rightarrow}\ f$ integrierbar. □

Def. 5.3 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}}), A \in \mathcal{A}$. Wir setzen

$$\int_A f d\mu := \int f \cdot \chi_A d\mu$$

Für eine äquivalente Definition siehe Übungen, Aufgabe 6.

Def. 5.4 Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, m)$ mit $m = LB$-Maß,

$$f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}}), A \in \mathcal{A}.$$

Dann heißt

$$\int_A f dm \quad \text{(falls existent)}$$

Lebesque-Integral (kurz: L-Integral)

Für $n = 1$ auch Bezeichnung: $\int_A f(x)dx$ oder $\int_A f dx$.

Satz 5.4:

Sei $f : [a : b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und messbar. Dann ist f auch Lebesque-integrierbar und das Lebesque-Integral stimmt mit dem Riemann-Integral überein.

Bem.:

Die Umkehrung von Satz 5.4 gilt aber i. A. nicht:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist Lebesque-integrierbar (da $f = 0$ m-f.ü.), aber nicht Riemann-integrierbar.

Beweis von Satz 5.4:

Ist f Riemann-integrierbar, so ist f auch beschränkt (da sonst jede Obersumme $+\infty$ wäre), daher ist f nach Satz 5.3 b) auch Lebesque-integrierbar.

Also genügt es zu zeigen: Riemann- und Lebesque-Integral stimmen überein.

Dazu sei oBdA $f \geq 0$ (sonst zerlegen wir f in Positiv- und Negativanteil und zeigen die Aussagen für die beiden Anteile separat).

Setze

$$x_{k,n} = a + k \cdot \frac{b-a}{n} \text{ für } k = 0, 1, \ldots, n$$

und

$$I_{k,n} = \begin{cases} [x_{k-1,n}, x_{k,n}) & \text{für} \quad k \leq n-1, \\ [x_{n-1,n}, x_{n,n}] & \text{für} \quad k = n. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Riemann-Integral von } f &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\inf_{x \in I_{k,n}} f(x) \right) \cdot \tfrac{1}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x \in I_{k,n}} f(x) \right) \cdot \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \left(\inf_{x \in I_{k,n}} f(x) \right) \cdot \chi_{I_{k,n}}(t) &\leq f(t) \cdot \chi_{[a,b]}(t) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x \in I_{k,n}} f(x) \right) \cdot \chi_{I_{k,n}}(t) \end{aligned}$$

folgt aus der Monotonie des (Lebesque-)Integrals:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \left(\inf_{x \in I_{k,n}} f(x) \right) \cdot \tfrac{1}{n} &\leq \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \chi_{[a,b]}(f) dt \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x \in I_{k,n}} f(x) \right) \cdot \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

Da rechts und linke Seite beide für $n \to \infty$ gegen das Riemann-Integral von f konvergieren, folgt daraus die Behauptung. $\square$

3. Weitere Eigenschaften von Maß und Integral

§6 Integralkonvergenzsätze

Wir zeigen zunächst folgende leichte Verallgemeinerung des Satzes von Beppo Levi:

Satz 6.1: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gelte

$$\int f_n d\mu > -\infty \text{ für mindestens ein } n$$

und

$$f_n \uparrow f.$$

Dann existiert $\int f d\mu$ und es gilt

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis:

(*Beweisidee:* Bisherige Fassung des Satzes auf $h_n = f_n - f_1 \geq 0$ anwenden).

oBdA $\int f_n d\mu > -\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(denn $\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu$ und Aussage ist asymptotisch)

Also

$$\int f_n^- d\mu < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit Satz 5.3a) folgt daraus

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \text{ f.ü. } f_n^- < \infty$$

was

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ f.ü. } f_n > -\infty$$

impliziert.

Da abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ergibt, gilt sogar:

$$\text{f.ü. } [\forall\, n \in \mathbb{N}\ f_n > -\infty]$$

Ändert man die Integranden auf einer Nullmenge ab, so ändert sich der Wert des Integrals nicht (vgl. Satz 5.2e)). Daher sogar oBdA:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : f_n > -\infty$$

Setze
$$h_n(\omega) = \begin{cases} f_n(\omega) - f_1(\omega) & , \text{ falls } f_1(\omega) < \infty \\ 0 & , \text{ falls } f_1(\omega) = \infty \end{cases}$$
und
$$h(\omega) = \begin{cases} f(\omega) - f_1(\omega) & , \text{ falls } f_1(\omega) < \infty \\ 0 & , \text{ falls } f_1(\omega) = \infty. \end{cases}$$
Dann gilt:

h_n, h nichtnegativ messbar $\quad$ (da $f_n \uparrow$)

$h_n \uparrow h$ (denn für $f_1(\omega) = \infty$ gilt trivialerweise $h_n(\omega) \uparrow h(\omega)$ $(n \to \infty)$)

Mit Satz 5.1 folgt:
$$\int h_n d\mu \to \int h \, d\mu \quad (n \to \infty).$$
Wegen
$$f_n = f_1 + h_n$$
$$f = f_1 + h$$
(denn im Falle $f_1(\omega) < \infty$ ist diese Beziehung klar, für $f_1(\omega) = \infty$ gilt $f_n(\omega) = f(\omega) = \infty$ wegen $f_n \uparrow f$ und daher sind dann oben beide Seiten unendlich) folgt daraus mit Satz 5.2c):
$$\int f_n d\mu = \int f_1 d\mu + \int h_n d\mu \overset{s.o.}{\to} \int f_1 d\mu + \int h \, d\mu = \int f d\mu \; (n \to \infty).$$
Hierbei existiert $\int f d\mu$, da $\int f_1 d\mu$ existiert nach Voraussetzung, $\int h \, d\mu$ existiert nach Satz 5.1 eine $\int f_1 d\mu + \int h \, d\mu$ existiert wegen Voraussetzung $\int f_1 d\mu > -\infty$ (vgl. Satz 5.2c)). □

Bemerkung: Die Voraussetzung

a) $\int f_n d\mu > -\infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$
bzw.

b) $f_n \uparrow$

in Satz 6.1 darf nicht weggelassen werden.

Begründung:

Setze $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ mit $m =$ LB-Maß.

Zu a):

$$f_n := -\frac{1}{n} \uparrow 0$$

aber

$$\int f_n d\mu = -\infty \not\to \int 0 d\mu = 0.$$

Zu b):

$$f_n := \frac{1}{n} \downarrow 0$$

aber

$$\int f_n d\mu = +\infty \not\to \int 0 d\mu = 0.$$

Satz 6.2: (Lemma von Fatou)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

a) Sind f_n messbar $(n \in \mathbb{N})$ mit $f_n \geq g$ f.ü. für eine integrierbare Funktion g. Dann existiert

$$\int \underline{\lim}\, f_n \, d\mu \text{ und es gilt}$$

$$\int \underline{\lim}\, f_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n \, d\mu.$$

b) Sind f_n messbar $(n \in \mathbb{N})$ mit $f_n \leq h$ f.ü. für eine integrierbare Funktion h. Dann existiert $\int \overline{\lim}\, f_n \, d\mu$ und es gilt

$$\int \overline{\lim}\, f_n \, d\mu \geq \overline{\lim} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis.

a) **Fall 1:** $f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Setze

$$g_n = \inf_{k \geq n} f_k.$$

Dann ist g_n nichtnegativ messbar mit

$$g_n \uparrow \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k = \underline{\lim} f_k.$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz existiert dann $\int \underline{\lim} f_k \, d\mu$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\int \underline{\lim} f_k \, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \inf_{k\geq n} f_k \, d\mu \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \int f_k \, d\mu \\
&\quad \text{(Monotonie des Integrals)} \\
&= \underline{\lim} \int f_k \, d\mu.
\end{aligned}$$

Fall 2: Allgemeines f_n.

Da g integrierbar gilt nach Satz 5.3a) $g(\omega) \in \mathbb{R}$ f. ü.
Da Integral sich bei Abändern des Integranden auf einer Nullmenge nicht ändert (vgl. Satz 5.2 e)) gilt

$$\text{oBdA} \quad g(\omega) \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } \omega \in \Omega$$

und

$$\text{oBdA} \quad f_n(\omega) \geq g(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega.$$

Setze

$$F_n(\omega) = f_n(\omega) - g(\omega) \geq 0.$$

Nach dem 1. Fall existiert dann $\int \underline{\lim} F_n \, d\mu$ und es gilt

$$\int \underline{\lim} F_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int F_n \, d\mu.$$

Mit

$$f_n = F_n + g \text{ und } \underline{\lim}\, f_n = \underline{\lim}\, F_n + g$$

folgt, da g integrierbar und reellwertig ist, dass auch

$$\int \underline{\lim}\, f_n \, d\mu = \int (\underline{\lim}\, f_n + g) d\mu$$

existiert (vgl. Satz 5.2c)), und es folgt:

$$\begin{aligned}
\int \underline{\lim}\, f_n \, d\mu &= \int (\underline{\lim}\, F_n + g)\, d\mu \\
&= \int \underline{\lim} F_n \, d\mu + \int g d\mu \\
&\quad \text{(nach Satz 5.2c))} \\
&\leq \underline{\lim} \int F_n \, d\mu + \int g d\mu \\
&\quad \text{(nach Fall 1)} \\
&= \underline{\lim} (\int F_n \, d\mu + \int g d\mu) \\
&= \underline{\lim} \int (F_n + g) d\mu \\
&\quad \text{(nach Satz 5.2c))} \\
&= \underline{\lim} \int f_n \, d\mu.
\end{aligned}$$

b) Ist

$$f_n \leq h \text{ f,ü.,}$$

so ist auch

$$-f_n \geq -h \text{ f.ü.}$$

und nach Teil a) existiert $\int \underline{\lim}(-f_n) d\mu$ und es gilt

$$\int \underline{\lim}(-f_n) d\mu \leq \underline{\lim} \int (-f_n) d\mu.$$

Mit

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}(-a_n) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} (-a_n) = -\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_n \\
&= -\overline{\lim} a_n
\end{aligned}$$

folgt daraus und mit der Linearität des Integrals die Existenz von $\int \overline{\lim} f_n \, d\mu$ sowie

$$-\int \overline{\lim} f_n \, d\mu \leq -\overline{\lim} \int f_n \, d\mu,$$

was die Behauptung impliziert. $\square$

Bem.: Die Voraussetzung

$$f_n \geq g \text{ f.ü.} \quad \text{mit } g \text{ integrierbar}$$

in a) ist notwendig.

Denn für $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ mit $m =$ LB-Maß und

$$f_n = -\frac{1}{n}$$

gilt

$$\int \underline{\lim} f_n \, d\mu = \int 0 d\mu = 0$$

aber

$$\underline{\lim} \int f_n \, d\mu = \underline{\lim}(-\infty) = -\infty,$$

also ist hier

$$\int \underline{\lim} \, f_n \, d\mu > \underline{\lim} \int f_n \, d\mu.$$

Satz 6.3 (Satz von der majorisierten Konvergenz; Lebesque)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien

$$f_n, f \text{ messbare Funktionen } (n \in \mathbb{N}).$$

Sei g integrierbar und es gelte

$$|f_n| \leq g \text{ f. ü. } (n \in \mathbb{N})$$

und

$$f_n \to f \ (n \to \infty) \text{ f.ü.}$$

Dann sind f_n, f integrierbar und es gilt

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu \text{ sowie } \lim_{n \to \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

Beweis:

oBdA gelten die Voraussetzungen überall statt f.ü.
oBdA sei g reellwertig.

f_n, f sind messbar mit

$$\int |f_n| d\mu \leq \int |g| d\mu < \infty$$

und

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu < \infty,$$

also sind f_n, f nach Satz 5.3b) integrierbar.

Wegen

$$\begin{aligned} |\textstyle\int f_n \, d\mu - \int f d\mu| &= |\textstyle\int (f_n - f) d\mu| \\ &\leq \textstyle\int |f_n - f| d\mu \end{aligned}$$

genügt es zu zeigen

$$\int |f_n - f| d\mu \to 0 \ (n \to \infty).$$

Setze

$$h_n := |f_n - f| \geq 0.$$

Nach Voraussetzung gilt $\quad h_n \to 0 \ (n \to \infty)$ und

$$h_n \leq |f_n| + |f| \leq 2 \cdot g$$

mit $2g$ integrierbar.

Aus $h_n > 0$ folgt

$$0 \leq \int h_n \, d\mu$$

und mit dem Lemma von Fatou folgt weiter

$$\overline{\lim} \int h_n \, d\mu \leq \int \overline{\lim} \, h_n \, d\mu = \int 0 d\mu = 0.$$

Also gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int h_n \, d\mu = 0, \ \text{ w.z.z.w.}$$

□

Bemerkung Die Voraussetzung $|f_n| \leq g$ f.ü. darf in Satz 6.3 nicht weggelassen werden, denn für $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ mit $m =$ LB-Maß und

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 & , \quad 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

gilt $f_n \to 0$ f. ü. aber $\int f_n \, d\mu = n \to \infty \ (n \to \infty)$.

§7 Maß und Integral in Produkträumen

Fragestellungen:

a) Wie kann man zwei Maßen ein Produkt zuordnen?

b) Wie integriert man bzgl. einem solchen Produktmaß?

zu a):

Genauer:

> Sind $(\Omega, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ Maßräume, so ist ein Maß μ definiert auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ gesucht mit
>
> $$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$
>
> für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Definitionsbereich dieses Maßes?

Def. 7.1 Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ zwei Messräume. Dann wird das Produkt der σ-Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ definiert durch

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 := \mathcal{F}_{\Omega_1 \times \Omega_2}(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}),$$

d. h. $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist die kleinste σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$, die alle Mengen der Form $A_1 \times A_2$ $(A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2)$ enthält.

Satz 7.1 Sind $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ zwei σ-endliche Maßräume, so existiert höchstens ein Maß μ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit

$$(*) \qquad \mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \text{ für alle } A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$$

Beweis:

$$\mathcal{C} := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

ist $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ (denn

$$(A_1 \times A_2) \cap (\overline{A}_1 \times \overline{A}_2) = (A_1 \cap \overline{A}_1) \times (A_2 \cap \overline{A}_2)).$$

Die Mengenfunktion

$$A_1 \times A_2 \mapsto \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \qquad (A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2)$$

ist σ-endlich auf $\mathcal{C}$. Denn da $\mathcal{A}_i$ σ-endlich ist, existieren Mengen $A_n^i \uparrow \Omega_i$ mit $\mu_i\left(A_n^i\right) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $(i = 1, 2)$. Dann gilt aber auch

$$A_n^1 \times A_n^2 \uparrow \Omega_1 \times \Omega_2$$

(da $A_n^1 \times A_n^2 \subseteq A_{n+1}^1 \times A_{n+2}^2$ und

$$\begin{aligned}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^1 \times A_n^2 &\supseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^1 \times A_j^2\right) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \left(\Omega_1 \times A_j^2\right) \\ &= \Omega_1 \times \Omega_2 \quad)\end{aligned}$$

und

$$\mu_1(A_n^1) \cdot \mu_2(A_n^2) < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 3.3 ist daher μ (sofern überhaupt existent) durch $(*)$ bereits eindeutig festgelegt. □

Def. 7.2 Ω_1, Ω_2 Mengen, $A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2,\ \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2$.

Dann heißt

$$A_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}$$

bzw.

$$A_{\omega_2} = \{\omega_1 \in \Omega_1 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}$$

der ω_1**-Schnitt von A** bzw. der ω_2**-Schnitt von A**:

Lemma 7.1

Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ $(i = 1, 2)$ Messräume und $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Dann gilt für alle $\omega_1 \in \Omega_1$

$$A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$$

und für alle $\omega_2 \in \Omega_2$

$$A_{\omega_2} \in \mathcal{A}_1.$$

Beweis:

Wegen Symmetrie genügt der Nachweis der Aussage für ω_1. Dies wiederum folgt aus

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{G} := \{A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 : A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2 \text{ für alle } \omega_1 \in \Omega_1\}$$

Nun gilt:

1.) $\mathcal{C} = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\} \subseteq \mathcal{G}$

   da

$$(A_1 \times A_2)_{\omega_1} = \begin{cases} A_2 & \text{falls} \quad \omega_1 \in A_1 \\ \emptyset & \text{falls} \quad \omega_1 \notin A_1 \end{cases}$$

2.) $\mathcal{G}$ ist σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$, denn:

(a) $\emptyset \in \mathcal{G}$, da $\emptyset_{\omega_1} = \emptyset \in \mathcal{A}_2$ für alle $\omega_1 \in \Omega_1$.

(b) Ist $A \in \mathcal{G}$, so gilt auch $A^c = (\Omega_1 \times \Omega_2)\backslash A \in \mathcal{G}$ da

$$\begin{aligned}
&((\Omega_1 \times \Omega_2)\backslash A)_{\omega_1} \\
&= \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in (\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus A\} \\
&= \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \notin A\} \\
&= \{\omega_2 \in \Omega_2 : \omega_2 \notin A_{\omega_1}\} \\
&= \Omega_2 \backslash A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2
\end{aligned}$$

(denn $A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_2$ ist σ-Algebra).

(c) Sind $A_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist auch $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$, da

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)_{\omega_1} &= \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\} \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A_n\} \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2
\end{aligned}$$

da $(A_n)_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{A}_2$ σ-Algebra ist.

Damit:

$$\mathcal{G} \overset{1.),2.)}{\supseteq} \mathcal{F}(\mathcal{C}) \overset{Def.}{=} \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$$

□

Lemma 7.2

$(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ seien zwei σ-endliche Maßräume. Dann ist für jedes $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ die Funktion

$$\omega_1 \mapsto \mu_2(A_{\omega_1})$$

bzw.

$$\omega_2 \mapsto \mu_1(A_{\omega_2})$$

auf Ω_1 bzw. Ω_2 definiert und $\mathcal{A}_1 - \overline{\mathcal{B}}$- bzw. $\mathcal{A}_2 - \overline{\mathcal{B}}$-messbar.

Beweis:

Aus Symmetriegründen genügt es, die Behauptung für die Abbildung

$$\omega_1 \mapsto \mu_2(A_{\omega_1})$$

zu zeigen.
Nach Lemma 7.1 ist $\mu_2(A_{\omega_1})$ definiert.

1. Schritt: Wir zeigen die Behauptung im Spezialfall $\mu_2(\Omega_2) < \infty$.
Bezeichnung: $s_A : \omega_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ sei definiert durch $s_A(\omega_1) = \mu_2(A_{\omega_1})$.
Wir zeigen:

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subseteq \{A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 : s_A \ \ \mathcal{A}_1 - \overline{\mathcal{B}} - \text{messbar}\} =: \mathcal{G}$$

Dazu zeigen wird:

(1) $\mathcal{C} := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\} \subseteq \mathcal{G}$

(2) $\mathcal{G}$ ist Dynkin-System.

Daraus folgt die Behauptung, denn:

$$\mathcal{G} \overset{(1),(2)}{\supseteq} \mathcal{D}(\mathcal{C}) \overset{\mathcal{C}\ \cap-stabil}{=} \mathcal{F}(\mathcal{C}) \overset{Def.}{=} \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2.$$

Nachweis von (1):

$$\begin{aligned} s_{A_1 \times A_2}(\omega_1) &= \mu_2((A_1 \times A_2)_{\omega_1}) = \begin{cases} \mu_2(A_2) & \text{für} \quad \omega_1 \in A_1 \\ \mu_2(\emptyset) = 0 & \text{für} \quad \omega_1 \notin A_1 \end{cases} \\ &= \mu_2(A_2) \cdot \chi_{A_1}(\omega_1) \end{aligned}$$

Also ist $s_{A_1 \times A_2}$ (als einfache Funktion) messbar für $A_1 \times A_2 \in \mathcal{C}$.

Nachweis von (2):

α) $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{G}$ da

$$s_{\Omega_1 \times \Omega_2}(\omega_1) = \mu_2(\Omega_2)$$

als konstante Funktion messbar ist.

β) Seien $A, B \in \mathcal{G}$ mit $A \subseteq B$.
Dann gilt

$$B_{\omega_1} = (B \backslash A \cup A)_{\omega_1} = (B \backslash A)_{\omega_1} \cup A_{\omega_1},$$

woraus folgt

$$\mu_2(B_{\omega_1}) = \mu_2((B \backslash A)_{\omega_1}) + \mu_2(A_{\omega_1})$$

bzw.

$$\mu_2((B \backslash A)_{\omega_1}) = \mu_2(B_{\omega_1}) - \mu_2(A_{\omega_1})$$

(da $\mu_2(\Omega_2) < \infty$!)

Also ist

$$s_{B \backslash A} \overset{s.o.}{=} s_B - s_A$$

als Differenz zweier messbarer Funktionen messbar.

Daraus folgt:

$$B \backslash A \in \mathcal{G}.$$

γ) Seien $A_n \in \mathcal{G}$ $(n \in \mathbb{N})$ paarweise disjunkt.
Dann sind auch $(A_n)_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$ paarweise disjunkt, und es gilt

$$\left(\bigcup_n A_n \right)_{\omega_1} = \bigcup_n (A_n)_{\omega_1}.$$

Mit μ_2 Maß folgt daraus

$$\begin{aligned} \mu_2 \left(\left(\bigcup_n A_n \right)_{\omega_1} \right) &= \mu_2 \left(\bigcup_n (A_n)_{\omega_1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2 \left((A_n)_{\omega_1} \right), \end{aligned}$$

was

$$s_{\bigcup_n A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} s_{A_n}$$

impliziert. Da s_{A_n} nach Voraussetzung messbar ist für jedes $n \in \mathbb{N}$, folgt die Messbarkeit von $s_{\bigcup_n A_n}$, was wiederum

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$$

impliziert.

Aus α),β), und γ) folgt 2), und damit die Behauptung im 1. Schritt.

2. Schritt: Wir zeigen die Behauptung im Fall μ_2 σ-endlich.

Wähle $B_n \in \mathcal{A}_2$ ($n \in \mathbb{N}$) mit $B_n \uparrow \Omega_2$ und $\mu_2(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist

$$A_2 \mapsto \mu_{2,n}(A_2) = \mu_2(A_2 \cap B_n)$$

ein endliches Maß auf $\mathcal{A}_2$, und damit ist nach Schritt 1

$$\omega_1 \mapsto \mu_2(A_{\omega_1} \cap B_n)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine $\mathcal{A}_1 - \overline{\mathcal{B}}$-messbare Funktion.

Wegen

$$\mu_2(A_{\omega_1}) = \lim_{n\to\infty} \mu_2(A_{\omega_1} \cap B_n)$$

(was aus der Stetigkeit von unten von μ_2 und $A_{\omega_1} \cap B_n \uparrow A_{\omega_1}$ folgt), ist dann aber auch

$$\omega_1 \mapsto \mu_2(A_{\omega_1})$$

als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen selbst messbar. $\square$

Satz 7.2 (Vorstufe des Satzes von Fubini):

Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ zwei σ-endliche Maßräume. Dann existiert genau ein Maß μ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \quad \text{für alle } A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

Dieses Maß ist σ-endlich und ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \int\limits_{\Omega_2} \mu_1(A_{\omega_2})\, d\mu_2(\omega_2) \\ &= \int\limits_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1})\, d\mu_1(\omega_1)\end{aligned}$$

Beweis: Setze

$$\overline{\mu}(A) = \int\limits_{\Omega_2} \mu_1(A_{\omega_2})\, d\mu_2(\omega_2).$$

Nach Lemma 7.2 ist $\overline{\mu}$ wohldefiniert.

Wegen

$$\mu_1(A_{\omega_2}) \geq 0 \text{ für alle } \omega_2 \in \Omega_2$$

gilt

$$\overline{\mu}(A) \geq 0 \text{ für alle } A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2.$$

Weiter gilt

$$\overline{\mu}(\emptyset) = \int\limits_{\Omega_2} \mu_1(\emptyset)\ d\mu_2(\omega_2) = \int\limits_{\Omega_2} 0\ d\mu_2(\omega_2) = 0$$

und für paarweise disjunkte $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \int_{\Omega_2} \mu_1\Bigg(\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)_{\omega_2}}_{=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n)_{\omega_2}}\Bigg) d\mu_2(\omega_2) \\
&= \int_{\Omega_2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1((A_n)_{\omega_2})\ d\mu_2(\omega_2) \\
&\quad \text{(da } \mu_1 \text{ Maß ist)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_2} \mu_1\left((A_n)_{\omega_2}\right)\ d\mu_2(\omega_2) \\
&\quad \text{(nach dem Satz von der monotonen Konvergenz} \\
&\quad \text{und der Linearität des Integrals)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n).
\end{aligned}$$

Also ist $\overline{\mu}$ ein Maß. Für dieses gilt weiter:

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}(A_1 \times A_2) &= \int_{\Omega_2} \mu_1((A_1 \times A_2)_{\omega_2})\ d\mu_2(\omega_2) \\
&= \int_{\Omega_2} \mu_2(A_1) \cdot \chi_{A_2}(\omega_2)\ d\mu_2(\omega_2) \\
&= \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)
\end{aligned}$$

für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Damit ist die Existenz des Maßes μ aus der Behauptung gezeigt.

Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 7.1, im Beweis dort wurde auch die σ-Endlichkeit von μ bewiesen.

Analog zu oben folgt, dass auch

$$A \mapsto \widehat{\mu}(A) = \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1}) d\mu_1(\omega_1)$$

ein Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit

$$\widehat{\mu}(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \ (A_i \in \mathcal{A}_i)$$

ist, woraus mit Satz 7.1 folgt:

$$\widehat{\mu} = \overline{\mu}.$$

□

Def. 7.3: Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ zwei σ-endliche Maßräume. Das in Satz 7.2 auftretende Maß

$$\mu =: \mu_1 \otimes \mu_2$$

auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ heißt **Produkt-Maß**.

Der Maßraum $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ heißt **Produkt-Maßraum**.

Bem.: Es gilt

$$\begin{aligned} \int \chi_A \, d\mu_1 \otimes \mu_2 &= (\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1}) d\mu(\omega_1) \\ &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \chi_A(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2) d\mu_1(\omega_1) \end{aligned}$$

Im Folgenden zeigen wir diese Formel für allgemeines (integrierbares)

$$f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}).$$

Lemma 7.3:

Messräume $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ $(i = 1, 2)$, $f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$.

Dann ist der sog. ω_1-Schritt

$$f_{\omega_1} : \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}, f_{\omega_1}(\omega_2) = f(\omega_1, \omega_2)$$

von f $\mathcal{A}_2 - \overline{\mathcal{B}}$-messbar, und der sogenannte ω_2-Schritt

$$f_{\omega_2} : \Omega_1 \to \overline{\mathbb{R}}, f_{\omega_2}(\omega_1) = f(\omega_1, \omega_2)$$

von f ist $\mathcal{A}_1 - \overline{\mathcal{B}}$-messbar (jeweils für alle $\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2$).

Beweis:

Für $B \in \overline{\mathcal{B}}$ gilt:

$$\begin{aligned} f_{\omega_1}^{-1}(B) &= \{\omega_2 \in \Omega_2 : f_{\omega_1}(\omega_2) \in B\} \\ &= \{\omega_2 \in \Omega_2 : f(\omega_1, \omega_2) \in B\} \\ &= \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in f^{-1}(B)\} \\ &= \left(f^{-1}(B)\right)_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2 \end{aligned}$$

da $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und nach Lemma 7.1 für jedes $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gilt $A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$.
Analog folgt die Behauptung für f_{ω_2} □

Satz 7.3 (Satz von Tonelli / Satz von Fubini)
Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ zwei σ-endliche Maßräume, und sei

$$f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}}).$$

Dann sind die Funktionen

$$\omega_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f_{\omega_2} d\mu_1,\ \omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f_{\omega_1} d\mu_2$$

$\mathcal{A}_2 - \overline{\mathcal{B}}$ bzw. $\mathcal{A}_1 - \overline{\mathcal{B}}$-messbar und es gilt:

$$\begin{aligned} \int\ f\ d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \textstyle\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} (f_{\omega_2}(\omega_1)\ d\mu_1(\omega_1)\ d\mu_2(\omega_2) \\ &= \textstyle\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} (f_{\omega_1}(\omega_2)\ d\mu_2(\omega_2)\ d\mu_1(\omega_1) \end{aligned}$$

Beweis: Gemäß Lemma 7.3 die inneren Integrale wohldefiniert.
Fall 1: $f = \chi_A$
In diesem Fall gilt

$$\int_{\Omega_1} f_{\omega_2} d\mu_1 = \mu_1(A_{\omega_2}), \int_{\Omega_2} f_{\omega_1} d\mu_2 = \mu_2(A_{\omega_2})$$

und

$$\int f\ d(\mu_1 \otimes \mu_2) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(A).$$

Die Behauptung folgt aus Lemma 7.2 und Satz 7.2.

Fall 2: f nichtnegativ einfach.

Unter Beachtung der Messbarkeit von Linearkombinationen messbarer Funktionen und der Linearität des Integrals folgt die Behauptung aus Fall 1.

Fall 3: f nichtnegativ messbar.

Wähle Folge nichtnegativer einfacher Funktionen f_n mit $f_n \uparrow f$.

Dann sind $(f_n)_{\omega_i}$ ebenfalls nichtnegativ einfach und es gilt

$$(f_n)_{\omega_i} \uparrow f_{\omega_i} \; (i = 1, 2).$$

Insbesondere gilt

$$\int_{\Omega_1} f_{\omega_2} d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_1} (f_n)_{\omega_2} d\mu_1 \quad (*)$$

nach Definition des Integrals und

$$\omega_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f_{\omega_2} d\mu_1$$

ist als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen (vgl. Fall 2) selbst messbar.

Weiter folgt aus $((f_n)_{\omega_1})_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativ und wachsend, dass auch

$$\left(\int (f_n)_{\omega_1} d\mu_2\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

nichtnegativ und wachsend ist, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\int f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\
&\quad \text{(nach Definition des Integrals)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_2} \{\int_{\Omega_1} (f_n)_{\omega_2}(\omega_1) d\mu_1(\omega_1)\} d\mu_2(\omega_2) \\
&\quad \text{(nach Fall 2)} \\
&= \int_{\Omega_2} \{\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_1} (f_n)_{\omega_2}(\omega_1) d\mu_1(\omega_1)\} d\mu_2(\omega_2) \\
&\quad \text{(nach dem Satz von der monotonen Konvergenz)} \\
&= \int_{\Omega_2} \{\int_{\Omega_1} f_{\omega_2}(\omega_1) d\mu_1(\omega_1)\} d\mu_2(\omega_2) \\
&\quad \text{(nach } (*)\text{)}
\end{aligned}$$

Der zweite Teil der Behauptung folgt analog. □

Satz 7.4 (Satz von Fubini)

Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ σ-endliche Maßräume und sei

$$f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}}).$$

a) Ist f $(\mu_1 \otimes \mu_2)$- integrierbar, so gilt

$$\begin{aligned} \int f\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f_{\omega_2}(\omega_1)\, d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_2(\omega_2) \\ &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f_{\omega_1}(\omega_2)\, d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1), \end{aligned}$$

wobei gilt:

$$f_{\omega_2} : \Omega_1 \to \overline{\mathbb{R}} \text{ ist für } \mu_2 - f.a.\ \omega_2 \in \Omega_2\ \mu_1 - \text{integrierbar},$$
$$f_{\omega_1} : \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}} \text{ ist für } \mu_1 - f.a.\ \omega_1 \in \Omega_1\ \mu_2 - \text{integrierbar}$$

und die μ_2-f.ü. definierte Funktion

$$\omega_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f_{\omega_2}\, d\mu_1(\omega_1)$$

ist μ_2-integrierbar, und die μ_1-f.ü. definierte Funktion

$$\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f_{\omega_1}\, d\mu_2(\omega_2)$$

ist μ_1-integrierbar.

b) Aus

$$\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} |f_{\omega_2}(\omega_1)| d\mu_1(\omega_1)\, d\mu_2(\omega_2) < \infty$$

bzw.

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |f_{\omega_1}(\omega_2)|\, d\mu_2(\omega_2)\, d\mu_1(\omega_1) < \infty$$

folgt f $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrierbar, und in diesem Fall gilt die Behauptung aus a).

Beweis:

a) Sei f $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-integrierbar, und sei $f = f^+ - f^-$ mit $f^+, f^- \geq 0$.
Dann gilt nach Satz 7.3:

$$\int_{\Omega_1} [\int_{\Omega_2} (f^+)_{\omega_1}(\omega_2)\, d\mu_2(\omega_2)] d\mu_1(\omega_1) = \int f^+\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty,$$

woraus folgt

- $[\ldots] < \infty$ für μ_1-f.a. ω_1,
- $\omega_1 \mapsto [\ldots]$ ist μ_1-integrierbar,
- $(f^+)_{\omega_1}$ ist für μ_1-f.a. ω_1 μ_2-integrierbar.

Unter Verwendung der analogen Aussagen für f^- und Beachtung von

$$(f^+)_{\omega_1}(\omega_2) = (f_{\omega_1})^+(\omega_2), (f^-)_{\omega_2}(\omega_1) = (f_{\omega_2})^-(\omega_1)$$

folgt der zweite Teil der Behauptung aus

$$\int f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int f^+ \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) - \int f^- \, d(\mu_1 \otimes \mu_2).$$

Vertauschen von ω_1 und ω_2 liefert analog den ersten Teil der Behauptung.

b) Aus

$$\begin{aligned} \int |f| d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} |f_{\omega_2}(\omega_1)| d\mu_1(\omega_1) \, d\mu_2(\omega_2) \\ &< \infty \end{aligned}$$

(wobei die erste Gleichheit aus Satz 7.3 folgt) folgt $|f|$ $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-integrierbar, was nach Satz 5.3 f integrierbar impliziert. $\square$

Bemerkung:

Die Definition und Sätze dieses Abschnittes gelten entsprechend auch für endliche Produkte von Maßräumen.

§8 Konvergenz von Folgen messbarer Funktionen

Def. 8.1 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f, f_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ $(n \in \mathbb{N}), p \geq 1$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt gegen f

a) **konvergent μ-fast überall** (auch: μ-fast sicher, f.ü., f.s.), wenn gilt:

$$\mu[f_n \not\to f] = 0,$$

d.h.

$$\mu(\{\omega \in \Omega : f_n(\omega) \not\to f(\omega)\ (n \to \infty)\}) = 0.$$

b) **konvergent fast gleichmäßig**, wenn für jedes $\delta < 0$ ein $\Omega_\delta \in \mathcal{A}$ existiert mit

$$\mu(\Omega_\delta) \leq \delta \text{ und } f_n \to f \text{ gleichmäßig in } \Omega_\delta^c,$$

d.h.

$$\mu(\Omega_\delta) \leq \delta \text{ und } \sup_{\omega\in\Omega_\delta^c} |f_n(\omega) - f(\omega)| \to 0\ (n \to \infty).$$

c) **konvergent dem Maße nach** (bei μ W-Maß auch:

stochastisch konvergent, konvergent in Wahrscheinlichkeit), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\mu[|f_n - f| > \varepsilon] \to 0\ (n \to \infty),$$

d.h.

$$\mu(\{\omega \in \Omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\}) \to 0\ (n \to \infty).$$

d) **konvergent im p-ten Mittel**, wenn gilt:

$$\int\limits_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu \to 0\ (n \to \infty).$$

Bemerkung 8.1:

a) Bei der Konverenz μ-f.ü. ist die Grenzfunktion (sofern existent) bis auf eine Menge vom Maß 0 eindeutig.

b) Da die anderen Konverenzarten die Konvergenz μ-f.ü. einer Teilfolge implizieren (s.u.), gilt dies auch für die anderen Konvergenzarten.

Satz 8.1: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f, f_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ $(n \in \mathbb{N}), p \geq 1$.

a)

$$f_n \to f \text{ fast gleichmäßig } \Rightarrow \begin{cases} f_n \to f \text{ f.ü.} \\ f_n \to f \text{ dem Maße nach} \end{cases}$$

b) $f_n \to f$ dem Maße nach
$\Rightarrow$ Es existiert Teilfolge (n_k) von (n) mit $f_{n_k} \to f$ f.ü.

c) Sei $\mu(\Omega) < \infty$. Dann gilt:
$f_n \to f$ f.ü. $\Rightarrow f_n \to f$ fast gleichmäßig
(Satz von Egorov).

d) Sei $\mu(\Omega) < \infty$. Dann gilt:
$f_n \to f$ f.ü. $\Rightarrow f_n \to f$ dem Maße nach.

e) $f_n \to f$ im p-ten Mittel $\Rightarrow f_n \to f$ dem Maße nach.

Beweis von a)-d)

a) Es gelte $f_n \to f$ fast gleichmäßig.
Sei $\delta > 0$ beliebig. Dann existiert $\Omega_\delta \in \mathcal{A}$ mit $\mu(\Omega_\delta) \leq \delta$ und $f_n \to f$ gleichmäßig auf Ω_δ^c.

Damit

$$\mu[f_n \not\to f] \leq \mu(\Omega_\delta) \leq \delta$$

und wegen

$$[|f_n - f| > \varepsilon] \subseteq \Omega_\delta \text{ für } n \text{ groß genug}$$

(da auf Ω_δ^c $|f_n - f|$ gleichmäßig gegen Null konvergiert)

gilt auch

$$\overline{\lim} \mu[|f_n - f| > \varepsilon] \leq \mu(\Omega_\delta) \leq \delta.$$

Mit $\delta \downarrow 0$ folgt

$$f_n \to f \text{ f.ü.} \quad \text{bzw } f_n \to f \text{ dem Maße nach.}$$

b) Es gelte $f_n \to f$ dem Maße nach, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0: \;\; \mu[|f_n - f| > \varepsilon] \to 0 \; (n \to \infty).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} &\exists n_1: && \mu[|f_{n_1} - f| \geq 1] < 1 \\ &\exists n_2 > n_1: && \mu[|f_{n_2} - f| \geq \tfrac{1}{2}] < \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\ &\exists n_3 > n_2: && \mu[|f_{n_3} - f| \geq \tfrac{1}{3}] < \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

usw.

Man erhält Teilfolge $(f_{n_k})_k$ von $(f_n)_n$ mit

$$\mu[|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{k}] \leq \left(\frac{1}{k}\right)^2 .$$

Für diese gilt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sum_{k=1}^\infty \chi_{[|f_{n_k}-f|\geq \frac{1}{k}]} \, d\mu &= \sum_{k=1}^\infty \int_\Omega \chi_{[|f_{n_k}-f|\geq \frac{1}{k}]} d\mu \\ &= \sum_{k=1}^\infty \mu[|f_{n_k} - f| \geq \tfrac{1}{k}] \leq \sum_{k=1}^\infty \left(\tfrac{1}{k}\right)^2 < \infty. \end{aligned}$$

Mit Satz 5.3 folgt

$$\sum_{k=1}^\infty \chi_{[|f_{n_k}-f|\geq \frac{1}{k}]} < \infty \;\; \mu - \text{f.ü.}$$

Somit gilt für μ-fast alle $\omega \in \Omega$:

$$\chi_{[|f_{n_k}-f|\geq \frac{1}{k}]}(\omega) = 1 \quad \text{nur für endlich viele Indices } k,$$

woraus folgt:

$$\exists\, k_0 = k_0(\omega)\; \forall k \geq k_0 : \; |f_{n_k}(\omega) - f(\omega)| \; < \frac{1}{k}$$

Dies impliziert für μ-f.a. $\omega \in \Omega$:

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} |f_{n_k}(\omega) - f(\omega)| \; \leq \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0,$$

woraus $f_{n_k} \to f$ μ-f.ü. folgt.

c) Siehe Übungen.

d) Folgt aus c) und a).
Direkter Beweis ist aber auch einfach:

$$\mu[|f_n - f| > \varepsilon] = \int_\Omega \chi_{[|f_n-f|>\varepsilon]} d\mu \to \int 0 \; d\mu = 0 \;\; (n \to \infty)$$

nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz, der anwendbar ist wegen:

- $\chi_{[|f_n-f|>\varepsilon]} \to 0$ $(n \to \infty)$ f.ü. wegen $f_n \to f$ f. ü.
- $|\chi_{[|f_n-f|>\varepsilon]}| \leq 1$

wobei die konstante Funktion 1 wegen $\mu(\Omega) < \infty$ integrierbar ist.

$\square$

Für den Beweis von Satz 8.1 c) benötigen wir:

Satz 8.2 (Markoffsche Ungleichung)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}}), \varepsilon > 0$ und $p > 0$.
Dann gilt:

$$\mu[|f| \geq \varepsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_\Omega |f|^p \, d\mu.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mu[|f| \geq \varepsilon] &= \textstyle\int_\Omega \chi_{[|f| \geq \varepsilon]}(\omega) \, d\mu(\omega) \\ &\leq \textstyle\int_\Omega \left(\frac{|f|(\omega)|}{\varepsilon}\right)^p \cdot \chi_{[|f| \geq \varepsilon]}(\omega) \, d\mu(\omega) \\ & \quad \text{(da } \left(\tfrac{|f(\omega)|}{\varepsilon}\right)^p \geq 1 \text{ gilt für } \chi_{[|f| \geq \varepsilon]}(\omega) \neq 0) \\ &\leq \textstyle\int_\Omega \left(\frac{|f(\omega)|}{\varepsilon}\right)^p \, d\mu(\omega) \\ & \quad \text{(da Integrand nichtnegativ)} \\ &= \tfrac{1}{\varepsilon^p} \textstyle\int_\Omega |f|^p \, d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

Damit Beweis von Satz 8.1 e):

$$\mu[|f_n - f| > \varepsilon] \overset{\text{Satz 8.2}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f_n - f|^p \, d\mu \to 0 \ (n \to \infty) \text{ falls } f_n \to f \text{ im p-ten Mittel.}$$

$\square$

Bemerkung 8.2: $f_n \to f$ dem Maße nach $\not\Rightarrow$ $f_n \to f$ f.ü.

Begründung: $\Omega = [0, 1], \mathcal{A} = [0, 1] \cap \mathcal{B}, \mu =$ Restriktion des LB-Maßes auf $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned}
f_1 &= \chi_{[0,1]}\\
f_2 &= \chi_{[0,\frac{1}{2}]}\\
f_3 &= \chi_{[\frac{1}{2},1]}\\
f_4 &= \chi_{[0,\frac{1}{3}]}\\
f_5 &= \chi_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}\\
f_6 &= \chi_{[\frac{2}{3},1]}
\end{aligned}$$

u. s. w.

Grenzfunktion $f \equiv 0$

Es gilt: $f_n \to f$ dem Maße nach.
Es gilt nicht: $f_n \to f$ μ–f.ü. (da $f_n(\omega) \not\to f(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$)

Satz 8.3 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei Maßraum mit μ endlich.

$f_n, f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt:
$f_n \to f$ dem Maße nach $\Leftrightarrow$

Zu jeder Indexteilfolge $(n_k)_k$ von $(n)_n$ existiert eine Teilfolge $(n_{k_j})_j$ mit $f_{n_{k_j}} \to f$ μ-f.ü.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Ist $(n_k)_k$ Indexteilfolge von $(n)_n$, so gilt auch $f_{n_k} \to f$ dem Maße nach. Behauptung folgt mit Satz 8.1 b).

"$\Leftarrow$" Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Zu zeigen: $\mu[|f_n - f| > \varepsilon] \to 0$ $(n \to \infty)$.

Äquivalent (Eigenschaft der Konvergenz bei reellen Zahlenfolgen) ist:

$$(*) \left\{ \begin{array}{c} \text{Zu jeder Indexteilfolge } (n_k) \text{ existiert Teilfolge } \left(n_{k_j}\right) \text{ mit} \\ \mu[|f_{n_{k_j}} - f| > \varepsilon] \to 0 \; (j \to \infty) \end{array} \right.$$

(Ist nämlich $(a_n)_n$ reelle Folge mit $a_n \not\to 0$ $(n \to \infty)$, so existiert Teilfolge $(a_{n_k})_k$ die divergiert bzw. gegen Grenzwert ungleich Null konvergiert. Für diese Teilfolge konvergiert dann aber keine Teilteilfolge gegen Null).

Nachweis von $(*)$:

Sei $(n_k)_k$ beliebige Indexteilfolge von $(n)_n$.

Nach Voraussetzung existiert Teilfolge $\left(n_{k_j}\right)_j$ mit $f_{n_{k_j}} \to f$ f.ü.
Nach Satz 8.1 d) folgt daraus aber

$$f_{n_{k_j}} \to f \text{ dem Maß nach,}$$

also insbesondere

$$\mu[|f_{n_{k_j}} - f| > \varepsilon] \to 0 \ (j \to \infty),$$

was zu zeigen war. $\square$

Anwendung: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-Raum, $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-messbar, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt: $X_n \to X$ dem Maße nach $\Rightarrow$ $h(X_n) \to h(X)$ dem Maße nach.

Beweis: Beliebige Teilfolge (n_k).

Nach Satz 8.1 b) existiert Teilteilfolge $\left(n_{k_j}\right)_j$ mit

$$X_{n_{k_j}} \to X \quad P - \text{f.s.}$$

Da h stetig ist, impliziert dies

$$h\left(X_{n_{k_j}}\right) \to h(X) \ \ P - \text{f.s.},$$

was mit Satz 8.3 die Behauptung impliziert. $\square$

Übersicht über die Konvergenzarten in der Stochastik

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-Raum

$X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-messbar.

Dann gilt:

- $X_n \to X$ fast gleichmäßig $\Leftrightarrow$ $X_n \to X$ f.s.
- $X_n \to X$ f.s. $\Rightarrow$ $X_n \to X$ dem Maße nach
- $X_n \to X$ im p-ten Mittel $\Rightarrow$ $X_n \to X$ dem Maße nach
- $X_n \to X$ dem Maße nach $\Rightarrow$ Es existiert Teilfolge $(X_{n_k})_k$ mit $X_{n_k} \to X$ f. s.

§9 Maße mit Dichten

Def. 9.1: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \overline{\mathcal{B}}_+)$.

Dann heißt

$$\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_\Omega f \cdot \chi_A \, d\mu$$

das **Maß mit der Dichte f bezüglich μ**.

Satz 9.1: Die in Definition 9.1 auftauchende Mengenfunktion ν ist ein Maß auf $\mathcal{A}$.

Beweis: Siehe Übungen, Aufgabe 8 für den Nachweis mit $\mu = LB$-Maß.
Allgemeiner Fall geht analog. □

Maße mit Dichten sind bedeutsam wegen der folgenden Integrationsformel:

Satz 9.2 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}_+)$ und ν das Maß mit Dichte f bzgl. μ. Dann gilt für jedes $\varphi : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \overline{\mathcal{B}}_+)$:

$$(*) \qquad \int_\Omega \varphi \, d\nu = \int_\Omega \varphi \cdot f \, d\mu.$$

Darüber hinaus ist eine Funktion $\varphi : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ genau dann ν-integrierbar, wenn $\varphi \cdot f$ μ-integrierbar ist, und in diesem Fall gilt abermals $(*)$.

Beweis.

Fall 1: $\varphi = \chi_A$ mit $A \in \mathcal{A}$. D. g.:

$$\int_\Omega \varphi \, d\nu = \nu(A) \overset{Def.\,\nu}{=} \int_A f \, d\mu = \int_\Omega \chi_A \cdot f \, d\mu = \int_\Omega \varphi \cdot f \, d\mu.$$

Fall 2: φ nichtnegativ einfach.
$(*)$ folgt mit Linearität des Integrals aus Fall 1.

Fall 3: φ nichtnegativ messbar.
$(*)$ folgt mit Fall 2 und dem Satz von der monotonen Konvergenz.

Zusatz folgt mit $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ und Anwendung von $(*)$ auf φ^+ und φ^-.

Frage: $(\Omega, \mathcal{A})$ Messraum, ν und μ seien Maße auf $\mathcal{A}$.
Wie kann man entscheiden, ob ν ein Dichte bzgl. μ besitzt, d. h. ob für ein $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \overline{\mathcal{B}}_+)$ gilt:

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \text{ für alle } A \in \mathcal{A} \quad ?$$

Hilfreich dabei ist:

Def. 9.2: Ein Maß ν auf $\mathcal{A}$ heißt **stetig bezüglich eines Maßes** μ auf $\mathcal{A}$ (kurz μ-stetig), wenn jede μ-Nullmenge aus $\mathcal{A}$ auch ν-Nullmenge ist, d. h. wenn gilt:

$$\forall\, A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Bemerkung: Die Terminologie lässt sich rechtfertigen durch: Ist ν endlich, so gilt:

$$\nu \text{ stetig bzgl. } \mu \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 \,\forall\, A \in \mathcal{A} :\; \mu(A) \leq \delta \;\Rightarrow\; \nu(A) \leq \varepsilon.$$

Begründung:
"$\Leftarrow$" Ist $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$, so folgt aus der Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 : \nu(A) \leq \varepsilon,$$

also gilt $\quad \nu(A) = 0$.

"$\Rightarrow$" Angenommen, die Aussage gilt nicht.

Dann existiert $\varepsilon > 0$ und Mengen $A_n \in \mathcal{A}$ mit

$$\mu(A_n) \leq 2^{-n} \text{ und } \nu(A_n) > \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Wir zeigen nun für

$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

gilt dann

(1) $\mu(A) = 0$,

(2) $\nu(A) \geq \varepsilon > 0$,

im Widerspruch zur μ-Stetigkeit von ν.

Nachweis von (1): Folgt aus

$$\begin{aligned}\mu(A) &\leq \mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \mu(A_m) \leq \sum_{m=n}^{\infty} 2^{-m} = 2^{-n} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2^{-n+1}\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nachweis von (2): Wir beachten zunächst

$$\begin{aligned}\nu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^c\right) &= \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m^c\right) \\ &= \int_\Omega 1_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty} A_m^c}(\omega)\ \nu(d\omega) \\ &\overset{(!)}{=} \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} 1_{A_n^c}(\omega)\ \nu(d\omega) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega 1_{A_n^c}(\omega)\ \nu(d\omega) \\ &\quad \text{(nach dem Lemma von Fatou)} \\ &= \liminf_{n\to\infty}\ \nu(A_n^c)\end{aligned}$$

und folgern daraus:

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \nu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \nu(\Omega) - \nu\left(\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c\right) \\ &= \nu(\Omega) - \nu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^c\right) \\ &\geq \nu(\Omega) - \liminf_{n\to\infty} \nu(A_n^c) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \left(\nu(\Omega) - \nu(A_n^c)\right) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \nu(A_n) \\ &\geq \varepsilon,\end{aligned}$$

da $\nu(A_n) > \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Konstruktion. □

Klar: Ist ν das Maß mit der Dichte f bzgl. μ, so ist ν stetig bzgl. μ, da gilt:

$$\begin{aligned}\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) &= \int_A f d\mu = \int_\Omega f \cdot \chi_A\, d\mu \\ &\leq \int \infty \cdot \chi_A\, d\mu = \infty \cdot \mu(A) = 0.\end{aligned}$$

Für σ-endliches μ gilt hiervon auch die Umkehrung:

Satz 9.3: (Satz von Radon-Nikodym)
$(\Omega, \mathcal{A})$ sei Messraum, $\mu, \nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ seien Maße und μ sei σ-endlich. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) ν besitzt eine Dichte bzgl. μ.

(ii) ν ist μ-stetig.

Im Beweis benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 9.1:

Seien σ, τ zwei endliche Maße auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ in Ω, und sei

$$\rho = \tau - \sigma$$

ihre Differenz, d. h.

$$\rho : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \rho(A) = \tau(A) - \sigma(A) \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Dann gibt es eine Menge $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ mit

$$\rho(A) \geq 0 \text{ für alle } A \in \Omega_0 \cap \mathcal{A} = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq \Omega_0\}$$

und

$$\rho(\Omega_0) \geq \rho(\Omega).$$

Beweis von Lemma 9.1:

$\varepsilon > 0$ beliebig.

Wir zeigen zunächst:

Es existiert $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{A}$:

(1) $\rho(\Omega_\varepsilon) \geq \rho(\Omega)$

(2) $\rho(A) > -\varepsilon$ für alle $A \in \Omega_\varepsilon \cap \mathcal{A}$.

Dazu:

Im Falle $\rho(\Omega) \leq 0$ leistet $\Omega_\varepsilon = \emptyset$ das Gewünschte.

OBdA sei also $\rho(\Omega) > 0$.

Im Falle $\rho(A) > -\varepsilon$ für alle $A \in \mathcal{A}$ leistet $\Omega_\varepsilon = \Omega$ das Gewünschte.

Gilt dieser Fall nicht, so existiert

$$A_1 \in \mathcal{A} \text{ mit } \rho(A_1) \leq -\varepsilon.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\rho(\Omega \setminus A_1) &= \tau(\Omega \setminus A_1) - \sigma(\Omega \setminus A_1) \\
&= \tau(\Omega) - \tau(A_1) - \sigma(\Omega) + \sigma(A_1) \;\; (\text{da } \tau, \sigma \text{ endlich}) \\
&= \rho(\Omega) - \rho(A_1) \\
&\geq \rho(\Omega) + \varepsilon > \rho(\Omega).
\end{aligned}$$

Im Falle

$$\rho(A) > -\varepsilon \text{ für alle } A \in (\Omega \setminus A_1) \cap \mathcal{A}$$

leistet also $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus A_1$ das Gewünschte.

Gilt dieser Fall ebenfalls nicht, so existiert $A_2 \in (\Omega \setminus A_1) \cap \mathcal{A}$ mit $\rho(A_2) \leq -\varepsilon$.

Wegen $A_2 \subseteq \Omega \setminus A_1$ gilt $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und folglich

$$\rho(\Omega \setminus (A_1 \cup A_2) = \rho(\Omega) - \rho(A_1) - \rho(A_2) \geq \rho(\Omega) + 2\varepsilon > \rho(\Omega).$$

Man wiederhole nun die obige Schlussweise und erzeuge sukzessive Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mit

$$\rho(\Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)) > \rho(\Omega) \text{ und } \rho(A_n) \leq -\varepsilon.$$

Diese Folge bricht mit irgendeinem $n \in \mathbb{N}$ ab, in dem Sinne, dass

$$\rho(A) > -\varepsilon \text{ für alle } A \in (\Omega \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)) \cap \mathcal{A},$$

da sonst

$$\rho\left(\Omega \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\right) = \rho(\Omega) - \sum_{k=1}^{\infty} \rho(A_k) \geq \rho(\Omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon = +\infty$$

im Widerspruch zu

$$\rho(A) \in \mathbb{R} \text{ für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Dann leistet aber

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$$

das Gewünschte.

Damit ist die Existenz eines $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{A}$ mit (1) und (2) gezeigt.

Im Folgenden werden sukzessive Mengen $\Omega_1, \Omega_{1/2}, \Omega_{1/3}, \ldots \in \mathcal{A}$ konstruiert, die (1) und (2) mit $\varepsilon = 1$ bzw. $\varepsilon = 1/2$ bzw. $\varepsilon = 1/3$ bzw. ... erfüllen, und für die gilt:

$$\Omega_1 \supseteq \Omega_{1/2} \supseteq \Omega_{1/3} \supseteq \ldots$$

Dazu:

Für Ω_1 wende (1) und (2) mit $\varepsilon = 1$ an.

Sind $\Omega_1 \supseteq \Omega_{1/2} \supseteq \ldots \supseteq \Omega_{1/n}$ bereits konstruiert, so wendet man zur Konstruktion von $\Omega_{1/(n+1)}$ (1) und (2) auf die Restriktionen der Maße τ, σ auf $\Omega_{1/n} \cap \mathcal{A}$ an.

Wir zeigen nun, dass

$$\Omega_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_{1/n} \in \mathcal{A}$$

die Behauptung von Lemma 9.1 erfüllt.

Dazu:

Wegen $\Omega_{1/n} \downarrow \Omega_0$ gilt

$$\begin{aligned}
\rho(\Omega_0) &= \tau(\Omega_0) - \sigma(\Omega_0) \\
&= \lim_{n\to\infty} \tau(\Omega_{1/n}) - \lim_{n\to\infty} \sigma(\Omega_{1/n}) \\
&\quad \text{(nach der Stetigkeit der Maße } \tau \text{ und } \sigma \text{ von oben)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \rho(\Omega_{1/n}) \\
&\geq \rho(\Omega)
\end{aligned}$$

da $\rho(\Omega_{1/n}) \geq \rho(\Omega)$ nach Konstruktion für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Weiter gilt für $A \in \Omega_0 \cap \mathcal{A}$:

$$A \in \Omega_{1/n} \cap \mathcal{A} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ (da } A \in \mathcal{A} \text{ und } A \subseteq \Omega_0 \subseteq \Omega_{1/n})$$

Mit (2) folgt daraus:

$$\rho(A) > -\frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

was

$$\rho(A) \geq 0$$

impliziert. $\square$

Beweis von Satz 9.3:

"**(i) $\Rightarrow$ (ii)**": Besitzt ν eine Dichte f bzgl μ, so folgt aus $\mu(A) = 0$:

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_\Omega f \cdot \chi_A \, d\mu = 0$$

da $(f \cdot \chi_A)(\omega) = 0$ für μ-f.a. $\omega \in \Omega$ gilt.

"**(ii) $\Rightarrow$ (i)**":

$\boxed{\text{Fall 1:}}$ μ und ν seien endlich.

Wir verwenden im Beweis ein sogenanntes **Exhaustionsprinzip**.

Dazu setzen wir

$$\mathcal{G} = \left\{ g \geq 0, \text{ messbar} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Für alle } A \in \mathcal{A} \text{ gilt:} \\ \int_A g \, d\mu \leq \nu(A) \end{array} \right\}$$

Im ersten Schritt des Beweises zeigen wir:

$$\exists \, f \;\in\; \mathcal{G} : \int_A f \, d\mu = \sup_{g \in \mathcal{G}} \int_\Omega g \, d\mu.$$

Dazu:

$\mathcal{G}$ ist nichtleer, da $g \equiv 0$ Element von $\mathcal{G}$ ist

$\Bigg($ wegen

$$\int_A 0 d\mu = 0 \leq \nu(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A} \Bigg).$$

Setze $\alpha = \sup\limits_{g \in \mathcal{G}} \int_\Omega g \, d\mu$. Nach Definition von $\mathcal{G}$ gilt $\quad \alpha \leq \nu(\Omega) < \infty$.

Wähle $g_n \in \mathcal{G}$ $\;(n \in \mathbb{N})$ mit

$$\int_\Omega g_n \, d\mu \to \alpha \; (n \in \mathbb{N}).$$

Setze
$$f_n = \max\{g_1, \ldots, g_n\} = \max\{f_{n-1}, g_n\}.$$
Dann gilt $f_n \in \mathcal{G}$ ($n \in \mathbb{N}$), denn für $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ und $A \in \mathcal{A}$ gilt:
$$\begin{aligned}
\int_A \max\{g_1, g_2\}\, d\mu &= \int_A g_1 \cdot \chi_{[g_1 \geq g_2]} d\mu + \int_A g_2 \cdot \chi_{[g_1 < g_2]} d\mu \\
&= \int\limits_{A \cap [g_1 \geq g_2]} g_1\, d\mu + \int\limits_{A \cap [g_1 < g_2]} g_2\, d\mu \\
&\leq \nu(A \cap [g_1 \geq g_2]) + \nu(A \cap [g_1 < g_2]) \\
&\ (\text{da } g_1, g_2 \in \mathcal{G} \text{ und } A \cap [g_1 \geq g_2] \in \mathcal{A}, A \cap [g_1 < g_2] \in \mathcal{A}) \\
&= \nu(A) \qquad (\text{da } \nu \text{ Maß ist}).
\end{aligned}$$
Nach Konstruktion gilt
$$f_n \uparrow$$
und wegen
$$\int_\Omega g_n\, d\mu \overset{g_n \leq f_n}{\leq} \int_\Omega f_n\, d\mu \overset{Definition\ von\ \alpha}{\leq} \alpha$$
folgt aus $\int_\Omega g_n\, d\mu \to \alpha$ ($n \to \infty$) auch
$$\int_\Omega f_n\, d\mu \to \alpha \ \ (n \to \infty).$$
Setze
$$f = \lim_{n \to \infty} f_n.$$
Dann gilt $f \in \mathcal{G}$. Ist nämlich $A \in \mathcal{A}$, so gilt:
$$\begin{aligned}
\int_A f\, d\mu &= \int_A \lim_{n \to \infty} f_n\, d\mu \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_A f_n\, d\mu \\
&\ (\text{nach dem Satz von der monotonen Konvergenz,} \\
&\ \text{der wegen } 0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \text{ anwendbar ist}) \\
&\leq \nu(A) \quad (\text{da } f_n \in \mathcal{G}\ (n \in \mathbb{N})).
\end{aligned}$$
Weiter gilt (ebenfalls nach dem Satz von der monotonen Konvergenz):
$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n\, d\mu \overset{s.o.}{=} \alpha \overset{Def.\ \alpha}{=} \sup_{g \in \mathcal{G}} \int_\Omega g\, d\mu,$$
womit die Behauptung des 1. Schrittes gezeigt ist.

Im zweiten Schritt des Beweises zeigen wir nun, dass für

$$\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \tau(A) = \nu(A) - \int_A f \, d\mu$$

gilt:

$$\tau(A) = 0 \text{ für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Dies impliziert die Behauptung im Fall 1, da dann gilt:

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \text{ für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Dazu:

Wir beachten, dass gilt:

- $\tau \geq 0$ (da $f \in \mathcal{G}$),
- τ ist Maß (da $\tau \geq 0$ und τ Differenz zweier Maße ist),
- τ ist μ stetig
  $\big($denn aus $\mu(A) = 0$ folgt wegen der μ-Stetigkeit von ν:
  $$\tau(A) = \nu(A) - \int_A f \, d\mu = 0 - \int_A f \, d\mu = 0 - 0 = 0\big).$$

Es genügt zu zeigen:

$$\tau(\Omega) = 0$$

(da $0 \leq \tau(A) \leq \tau(\Omega)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt, da τ Maß ist).

Angenommen, es gelte $\tau(\Omega) > 0$.

Dann existiert $\beta \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ mit $\tau(\Omega) > \beta \cdot \mu(\Omega)$.

Mit Lemma 9.1 angewendet auf τ und $\sigma := \beta \cdot \mu$ folgt (beachte τ ist **endliches** Maß, da ν endlich ist!):

Es existiert $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ mit

(1) $\tau(\Omega_0) - \beta \cdot \mu(\Omega_0) \geq \tau(\Omega) - \beta \cdot \mu(\Omega) > 0$

(2) $\tau(A) - \beta \cdot \mu(A) \geq 0$ für alle $A \in \Omega_0 \cap \mathcal{A}$.

Aus (1) folgt $\tau(\Omega_0) > \beta \cdot \mu(\Omega_0)$, und wegen der μ-Stetigkeit von τ folgt aus (1) weiter $\mu(\Omega_0) > 0$ (da sonst $\tau(\Omega_0) - \beta \cdot \mu(\Omega_0) = 0 - \beta \cdot 0 = 0$ gelten würde).

Setze

$$f_0 = f + \beta \cdot 1_{\Omega_0}.$$

Dann gilt

$$f_0 \in \mathcal{G},$$

da:

- f_0 ist messbar und nichtnegativ
- Für $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_A f_0 \, d\mu &= \int_A f \, d\mu + \beta \cdot \int_A 1_{\Omega_0} \, d\mu \\
&= \int_A f \, d\mu + \beta \cdot \mu(A \cap \Omega_0) \\
&\overset{(2)}{\leq} \int_A f \, d\mu + \tau(A \cap \Omega_0) \\
&\overset{\tau \text{ Maß}}{\leq} \int_A f \, d\mu + \tau(A) \\
&\overset{Def. \tau}{=} \nu(A).
\end{aligned}$$

Darüber hinaus gilt aber

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_0 \, d\mu &= \int_\Omega f \, d\mu + \beta \cdot \mu(\Omega_0) \\
&= \alpha + \beta \cdot \mu(\Omega_0) \\
&\quad \text{(nach Konstruktion von f)} \\
&> \alpha = \sup_{g \in \mathcal{G}} \int_\Omega g \, d\mu \\
&\quad \text{(da } \beta > 0 \text{ und } \mu(\Omega_0) > 0\text{)},
\end{aligned}$$

was einen Widerspruch zu $f_0 \in \mathcal{G}$ ergibt.

Also war die Annahme $\tau(\Omega) > 0$ falsch, und die Behauptung ist in Fall 1 bewiesen.

$\boxed{\text{Fall 2:}}$ Es sei $\mu(\Omega) < \infty$ und $\nu(\Omega) = \infty$.

1. Schritt: Wir zeigen:

Es existieren paarweise disjunkte Mengen $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ und den Eigenschaften:

(a) Für jedes $A \in \Omega_0 \cap \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu(A) = \nu(A) = 0 \text{ oder } (\mu(A) > 0 \text{ und } \nu(A) = \infty),$$

(b) $\nu(\Omega_n) < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$.

Dazu sei $\mathcal{Q}$ das System aller Mengen $Q \in \mathcal{A}$ mit $\nu(Q) < \infty$.

Setze

$$\alpha = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \mu(Q) \quad (\leq \mu(\Omega) < \infty)$$

und wähle Folge $Q_1, Q_2, \ldots \in \mathcal{Q}$ mit $\mu(Q_n) \to \alpha \quad (n \to \infty)$.

Da mit $A, B \in \mathcal{Q}$ auch $A \cup B \in \mathcal{Q}$ gilt (da

$$\nu(A \cup B) \leq \mu(A) + \nu(B) < \infty \text{ falls } \nu(A) < \infty, \nu(B) < \infty)$$

gilt oBdA $\quad Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \ldots$

Setze $\quad Q_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Dann ist

$$\mu(Q_0) = \lim_{n \to \infty} \mu(Q_n) = \alpha \text{ (da Maß } \mu \text{ stetig von unten ist).}$$

Wir zeigen nun, dass

$$\Omega_0 = \Omega \setminus Q_0$$

und

$$\Omega_1 = Q_1, \Omega_n = Q_n \setminus Q_{n-1} \; (n > 1)$$

die gewünschten Eigenschaften haben.

Klar: $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots \in \mathcal{A}$, paarweise disjunkt und $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n = \Omega$.

Wegen $\Omega_n \subseteq Q_n \in \mathcal{Q}$ gilt außerdem $\nu(\Omega_n) < \infty$.

Sei nun $A \in \Omega_0 \cap \mathcal{A}$ mit $\nu(A) < \infty$.

Dann gilt $A \in \mathcal{Q}$, also auch $A \cup Q_n \in \mathcal{Q}$ und wegen $A \cap Q_n = \emptyset$ (da $A \subseteq \Omega_0 = \Omega \setminus Q_0$) und $Q_n \subseteq Q_0$ gilt:

$$\begin{array}{ccccccc}
\alpha & \geq & \mu(A \cup Q_n) & = & \mu(A) + \mu(Q_n) & \overset{(n\to\infty)}{\to} & \mu(A) + \alpha \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \begin{array}{c}\text{Definition von } \alpha \\ \text{und } A \cup Q_n \in \mathcal{Q}\end{array} & & \begin{array}{c}\text{da} \\ A \cap Q_n = \emptyset\end{array} & & \begin{array}{c}\text{Nach Wahl} \\ \text{von } Q_n\end{array} &
\end{array}$$

$\rightsquigarrow \mu(A) = 0$ und (da ν μ-stetig auch) $\nu(A) = 0$. $\qquad \rightsquigarrow$ 1. Schritt.

2. Schritt: Abschluss des Beweises im Fall 2

Auf Ω_n (mit $n \geq 1$) sind μ und ν endlich. Betrachte μ und ν eingeschränkt auf $\Omega_n \cap \mathcal{A}$. Nach wie vor ist μ ν-stetig (jeweils eingeschränkt auf $\Omega_n \cap \mathcal{A}$), also existiert $f_n : \Omega_n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mit f_n $\Omega_n \cap \mathcal{A} - \overline{\mathcal{B}}_+$-messbar und

$$(*) \quad \nu(A) = \int_A f_n \, d\mu \quad \text{für alle } A \in \Omega_n \cap \mathcal{A}$$

nach dem Ergebnis von Fall 1.

Definiere $\quad f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ durch

$$f(\omega) = \begin{cases} +\infty & \text{falls} \quad \omega \in \Omega_0 \\ f_n(\omega) & \text{falls} \quad \omega \in \Omega_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Dann ist $f = \infty \cdot 1_{\Omega_0} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \cdot 1_{\Omega_n}$

als "Zusammensetzung" von $\mathcal{A} - \overline{\mathcal{B}}_+$-messbarer Funktionen selbst $\mathcal{A} - \overline{\mathcal{B}}_+$-messbar und für $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_A f \, d\mu &= \int f \cdot 1_A \, d\mu \\
&= \int \sum_{n=0}^{\infty} f \cdot 1_{A \cap \Omega_n} \, d\mu \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int f \cdot 1_{A \cap \Omega_n} \, d\mu \\
&\ \text{(nach dem Satz von der monotonen Konvergenz in der Reihenform)} \\
&= \int_{A \cap \Omega_0} \infty \, d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap \Omega_n} f_n \, d\mu \\
&= \nu(A \cap \Omega_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap \Omega_n) = \nu(A) \\
&\ \text{(da entweder } \mu(A \cap \Omega_0) = \nu(A \cap \Omega_0) = 0 \\
&\ \text{oder } \mu(A \cap \Omega_0) > 0,\ \nu(A \cap \Omega_0) = \infty)
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Beh. im Fall 2.

$\boxed{\text{Fall 3:}}$ μ σ-endlich, ν beliebig.

1. Schritt: Wir konstruieren messbare Funktion $h : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mit

$$\int h \, d\mu < \infty \text{ und } 0 < h(\omega) < \infty \text{ für alle } \omega \in \Omega.$$

Dazu:

Da μ σ-endlich ist, existiert Folge $(A_n)_n$ mit $A_n \uparrow \Omega$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Setze

$$\eta_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{, falls} \quad \mu(A_n) \leq 1, \\ \frac{2^{-n}}{\mu(A_n)} & \text{, falls} \quad \mu(A_n) > 1. \end{cases}$$

Dann gilt $\quad 0 < \eta_n \leq 2^{-n}$ und $\eta_n \cdot \mu(A_n) \leq 2^{-n}$,

also gilt für

$$h = \sum_{h=1}^{\infty} \eta_n \cdot 1_{A_n} :$$

(1)

$$0 < h(\omega) \underset{\text{da } \eta_n \leq 2^{-n}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 < \infty,$$

(2)

$$\begin{aligned} \int h \, d\mu \quad &= \sum_{h=1}^{\infty} \eta_n \cdot \mu(A_n) \\ &\quad \text{(nach dem Satz von der monotonen Konvergenz in der Reihenform)} \\ &\leq \sum_{h=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 \\ &\quad \text{(da } \eta_n \cdot \mu(A_n) \leq 2^{-n}\text{).} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Beh. von Schritt 1.

2. Schritt: Abschluss des Beweises.

Sei h wie im 1. Schritt und $\widetilde{\mu} : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definiert durch

$$\widetilde{\mu}(A) = \int_A h \, d\mu.$$

Dann ist $\widetilde{\mu}$ ein endliches Maß (da $\widetilde{\mu}(\Omega) = \int_\Omega h \, d\mu < \infty$), das dieselben Nullmengen wie μ hat

(*denn:* $\qquad \mu(A) = 0 \Rightarrow \widetilde{\mu}(A) = \int_A \; h \, d\mu = 0$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}(A) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int_A h \, d\mu = 0 \overset{h \geq 0}{\Rightarrow} h \cdot 1_A = 0 \ \mu - \text{f.ü.} \\ &\overset{h > 0}{\Rightarrow} \quad \mu(A) = 0 \ \text{).} \end{aligned}$$

Daher ist ν auch $\widetilde{\mu}$-stetig.

Nach den Fällen 1 und 2 existiert dann $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mit

$$\forall A \in \mathcal{A} : \nu(A) = \int_A f \, d\widetilde{\mu} \overset{Satz\ 9.2}{=} \int_A f \cdot h \, d\mu,$$

also ist $f \cdot h$ die gesuchte μ-Dichte von ν. $\square$

Bemerkung:

> Satz 9.3 wurde 1930 von O.M. Nikodym bewiesen. Für $\mu = \lambda$ bewies H. Lebesque 1910 bereits den Satz. J. Radon trieb die Entwicklung in einer 1913 erschienenen grundlegenden Arbeit voran.......