Quantenwahrscheinlichkeitstheorie

Arbeitsgruppe Operatoralgebren und Quantenstochastik
Leiter: Prof. Burkhard Kümmerer

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zweimal hintereinander eine sechs zu würfeln? Mit welchem Einsatz soll ich darauf wetten, daß meine Aktie in drei Monaten mehr als 200 € wert ist? Wie verringere ich das Rauschen aus meinem CD-Player? Mit solchen und ähnlichen Fragen beschäftigt sich die Wahrscheinlichkeitstheorie.

Beobachtet man statt Würfeln Atome, die sich in verschiedenen Zuständen befinden können, statt Aktienkursen die Zahl der Lichtquanten, die von einer Strahlungsquelle im Laufe der Zeit emittiert werden, statt dem Signal eines CD-Players das eines sehr schwachen Lichtstrahls, so ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nicht mehr in der Lage, solche Fragen zu beantworten. An ihre Stelle tritt die Quantenwahrscheinlichkeitstheorie. Mit der Entwicklung dieser Theorie sowie mit ihren Anwendungen beschäftigt sich unsere Arbeitsgruppe.

Wahrscheinlichkeitstheorie

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ...? Die Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt sich mit der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Ereignissen. Typische Ereignisse könnten sein: „Morgen um 11.15 Uhr regnet es in Stuttgart“, „Der Euro steigt heute bis Börsenschluß gegenüber dem Dollar um 1 Cent“oder „Morgen geht die Sonne auf“. Ereignisse können natürlich auch beliebig zusammengesetzt werden: Morgen um 11.15 Uhr regnet es in Stuttgart und der Euro steigt um 1 Cent. Auch das Ereignis „Zweimal hintereinander eine sechs würfeln“ ist ein zusammengesetztes Ereignis: Zunächst eine sechs würfeln *und* anschließend noch eine sechs würfeln. Ereignisse müssen so klar definiert sein, daß im Prinzip klar ist, daß es am Ende eintritt oder nicht: Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht – „tertium non datur“.

Weiß man noch nicht genau, welcher Fall eintritt, so kann man einem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnen, mit der es eintritt. Dies ist eine Zahl zwischen 0 und 1: Wahrscheinlichkeit 0 bedeutet, das Ereignis tritt mit Sicherheit nicht ein, bei Wahrscheinlichkeit 1 hingegen tritt das Ereignis mit Sicherheit ein. Dazwischen liegt zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit 0.3: Man geht davon aus, daß das Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0.3, also in 30 Prozent aller Fälle, eintritt

Die moderne mathematische Formulierung der Wahrscheinlichkeitstheorie geht auf A. Kolmogorov (1903–1987) zurück. Er gab in den dreißiger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts den Grundbegriffen „Ereignis“ und „Wahrscheinlichkeit“ eine axiomatische Formulierung, auf die sich die moderne Wahrscheinlichkeitstheorie gründet.

Die Gesetze der Quantenmechanik sprengen den Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Will man die Wahrscheinlichkeitstheorie auf atomare Systeme wie Atome oder Elektronen anwenden, so gelten hier die Gesetze der Quantenmechanik (siehe Kasten zur Quantenmechanik). Diese sind aber prinzipiell unverträglich mit den Grundannahmen der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie: Wohl macht es noch Sinn, nach der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses zu fragen, daß sich ein Elektron zu einem Zeitpunkt an einem bestimmten Ort befindet oder daß es zu einem Zeitpunkt einen bestimmten Impuls besitzt. Aber Ort und Impuls sind nicht gleichzeitig meßbar (vgl. Kasten zur Vertauschungsrelation); daher kann man diese Ereignisse nicht beliebig zu einem neuen Ereignis kombinieren: Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß sich das Elektron zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem Ort befindet *und gleichzeitig* einen bestimmten Impuls besitzt, ist nicht mehr zulässig.

Quantenmechanik. Die Quantenmechanik bildet zusammen mit der Einsteinschen Relativitätstheorie die Grundlage des modernen naturwissenschaftlichen Weltbildes. Fragen über die Natur des Lichtes gaben die ersten Anstöße zu ihrer Entwicklung: Max Planck (1858–1947) zur Erklärung des Spektrums der Hohlraumstrahlung (1900) und Albert Einstein (1879–1955) zur Erklärung des photoelektrischen Effektes (1905) nahmen an, daß man sich das Licht nicht nur als Welle, sondern auch als Teilchenstrahlung vorstellen müsse. Diese „Lichtteilchen“ nennt man Photonen. Die Frage nach der Natur der Atome und der Farbe des Lichtes, das sie aussenden können, führte schließlich zur Formulierung der Quantenmechanik um 1925. Wichtige Protagonisten sind W. Heisenberg (1901–1976) und E. Schrödinger (1887–1961). Ihre mathematische Ausformulierung erhielt die Quantenmechanik durch J. v. Neumann (1903–1957) im Jahre 1932.
Die Quantenmechanik ist vor allem bei der Beschreibung der Welt in atomaren Dimensionen unentbehrlich. Quantenmechanische Effekte sind Grundlage vieler moderner Geräte, vom Transistor bis zum Laser, vom Kernspintomographen bis zur Solarzelle.

Zwar gibt es also auch in der Quantenmechanik Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten; das Zusammensetzen von Ereignissen zu komplizierteren Ereignissen nach den Regeln der klassischen Logik, wie es für die Wahrscheinlichkeitstheorie grundlegend ist, ist hier also nicht mehr uneingeschränkt durchführbar. Damit einher geht die Tatsache, daß Ereignisse nicht mehr eindeutig wahr oder falsch sein müssen: Sie können gleichzeitig zu einem Prozentsatz wahr und falsch sein – nicht, weil wir nicht alles über sie wissen, sondern weil es prinzipiell so ist: Tertium datur! Eine Beobachtung wird zwar eine Entscheidung herbeiführen, sie verändert aber gleichzeitig das System unumkehrbar. Am sinnfäligsten wird diese Situation wohl durch die berühmte Schrödingersche Katze beschrieben, die in einem geschlossenen Kasten gleichzeitig tot und lebendig ist - solange man nicht hineinschaut. Man spricht in diesem Zusammenhang manchmal auch von der Quantenlogik. Seit einigen Jahren steigt die Hoffnung, auf ihrer Grundlage später einmal „Quantencomputer“ konstruieren zu können. Weil

„Quanten-Bits“ (man spricht auch von QuBits) gleichzeitig gesetzt und nicht gesetzt sein können, hofft man, daß sich Quantencomputer besonders gut für paralleles Rechnen eignen.

Ein Test für die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie: Die Bellsche Ungleichung

Allein die Annahme, daß Ereignisse nach den Gesetzen der klassischen Logik zusammengesetzt werden können, ermöglicht es schon, Ungleichungen für Wahrscheinlichkeiten abzuleiten. Diese müssen also für beliebige Ereignisse erfüllt sein.

Wir betrachten drei Ereignisse A, B und C. Zum Beispiel könnte wieder A die Abkürzung für das Ereignis „Morgen um 11.15 Uhr regnet es in Stuttgart“ sein, B für das Ereignis „Der Euro steigt heute um 1 Cent“ und C kann für „Morgen geht die Sonne auf“ stehen, genauso gut aber auch für „Peter hat heute schwarze Schuhe an“. $W(A)$ soll eine Abkürzung sein für die Wahrscheinlichkeit, daß A eintritt, $W(A)$ ist also eine Zahl zwischen 0 und 1. Auch $A \wedge B$ („A und B“), $A \vee B$ („A oder B“) und $\neg A$ („nicht A“) sollen mögliche Ereignisse sein. $W(A \wedge B)$, $W(A \vee B)$ und $W(\neg A)$ stehen dann für die Wahrscheinlichkeiten, daß diese Ereignisse eintreten. Für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten benötigen wir die folgenden drei Regeln:

- **Regel 1**: $W(A \vee (\neg A)) = 1$.

  Denn entweder das Ereignis A tritt ein, oder es tritt nicht ein. Tritt A nicht ein, so tritt also das Ereignis $(\neg A)$ ein.

- **Regel 2**: $W(A \vee B) = W(A) + W(B)$,

  falls sich die Ereignisse A und B gegenseitig ausschließen.

- **Regel 3**: $W(A \wedge B) \leq W(A)$.

  Denn betrachtet man nur $W(A)$ statt $W(A \wedge B)$, so verzichtet man auf die zusätzliche Forderung, daß auch das Ereignis B eintreten soll. Die Wahrscheinlichkeit wird also höchstens größer (oder bleibt gleich).

Die **Bellsche Ungleichung** (J. Bell, 1965) besagt nun:

$$W(A \wedge (\neg C)) \leq W(A \wedge (\neg B)) + W(B \wedge (\neg C))$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß A eintritt und C nicht, ist also kleiner oder gleich der Wahrscheinlichkeit, daß A eintritt und B nicht, plus der Wahrscheinlichkeit, daß B eintritt und C nicht.

Die Begründung ist einfach: Nach Regel 1 ist

$$W(A \wedge (\neg C)) = W(A \wedge (\neg B \vee B) \wedge (\neg C))$$

$$= W((A \wedge (\neg B) \wedge (\neg C)) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C)))$$

daraus wird nach Regel 2

$$= W(A \wedge (\neg B) \wedge (\neg C)) + W(A \wedge B \wedge (\neg C))$$

wegen Regel 3 ist schließlich

$$W(A \wedge (\neg B) \wedge (\neg C)) \leq W(A \wedge (\neg B)) \text{ und}$$

$$W(A \wedge B \wedge (\neg C)) \leq W(B \wedge (\neg C)).$$

Setzt man dies ein, so ergibt sich die behauptete Ungleichung.

Da diese Ungleichung für die Wahrscheinlichkeiten von je drei beliebigen Ereignissen erfüllt sein müssen, kann man umgekehrt schließen: Findet man drei Ereignisse, für welche die Bellschen Ungleichungen verletzt sind, so können diese Ereignisse nicht im Rahmen der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie behandelt werden.

Vertauschungsrelation. Die Quantenmechanik stellt die Gesetze zur Verfügung, denen die Welt in atomaren Dimensionen gehorcht. Die Welt in diesen Dimensionen unterscheidet sich erheblich von der Welt unserer täglichen Anschauung. Viele ihrer Besonderheiten folgen aus der nach Heisenberg benannten Vertauschungsrelation

$$PQ - QP = \frac{h}{2\pi i} \; .$$

Hier steht P für eine Messung des Impulses, Q für eine Ortsmessung, i ist die imaginäre Einheit. Die Vertauschungsrelation besagt: Es ist prinzipiell ein Unterschied, ob man zuerst eine Ortsmessung und danach eine Impulsmessung durchführt (PQ) oder umgekehrt zuerst eine Impulsmessung und danach eine Ortsmessung (QP). Der Unterschied zwischen beiden Vorgehensweisen ist nicht 0 sondern eine sehr kleine Zahl, die im wesentlichen durch das Plancksche Wirkungsquantum $h \sim 6,625 \times 10^{-34} J \cdot Sek$ gegeben ist. Wegen der Kleinheit dieser Zahl merkt man den Unterschied im Alltag jedoch nicht. Im atomaren und subatomaren Bereich macht sich dieser Unterschied aber bemerkbar. Da hier also die Reihenfolge der Messungen wesentlich ist, kann man Ort und Impuls eines Quantensystems nicht mehr gleichzeitig festlegen.
Die Vertauschungsrelation hat ihre Ursache in der Beeinflussung des Systems durch eine Messung. Zur jeder Messung muß man das System auf eine Weise „anschauen“, zum Beispiel mit Licht bestrahlen. Dadurch wird das System auf eine nicht kontrollierbare Weise verändert, insbesondere geht das Wissen aus einer vorangehenden Messung teilweise wieder verloren.

Tatsächlich ist es gelungen, solche Ereignisse zu finden: Eines der einfachsten Quantensysteme (vom theoretischen Standpunkt) sind polarisierte Photonen, also Lichtteilchen. Ein Photon besitzt neben seiner Energie (bzw. Frequenz, bzw. „Farbe“) auch eine Richtung, eine „Polarisation“, die immer senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht. Die Polarisation von Licht, also von Photonen, mißt man, indem man die Photonen durch einen Polarisationsfilter schickt, wie man ihn vom Photoapparat kennt. Definiert man bezüglich einer vorgegebenen Richtung, z.B. waagrecht, mögliche Ereignisse A, B und C durch

A: Das Photon hat Polarisationsrichtung 0 Grad,
B: Das Photon hat Polarisationsrichtung 30 Grad,
C: Das Photon hat Polarisationsrichtung 60 Grad,

Quantenwahrscheinlichkeit kann mehr als klassische Wahrscheinlichkeit – Ein Kartenspiel. Das folgende Gedankenexperiment schildert ein Kartenspiel, das man nur mit Hilfe der Quantenwahrscheinlichkeit gewinnen kann.

Szenario. Peter und Paul sitzen sich an einem Tisch gegenüber. Ein Schiedsrichter gibt die Karten und zählt Punkte. Das Spielfeld besteht aus vier Feldern. Peter und Paul arbeiten zusammen, um das Spiel – gemeinsam – zu gewinnen. Sie bekommen zunächst etwas Zeit, eine Strategie abzusprechen. Nach Beginn des Spiels dürfen Sie jedoch nicht mehr miteinander reden.

Spielregeln. Während des Spiels werden folgende Schritte immer wiederholt: Zunächst bekommt jeder Spieler eine Karte verdeckt ausgegeben, die nur er sich anschaut. Diese Karte kann rot oder schwarz sein. Peter und Paul sagen gleichzeitig und unabhängig voneinander „ja" oder „nein". Sie können ihre Wahl zum Beispiel abhängig machen von einer gewürfelten Augenzahl, vom Wetter, oder auch von ihrer vorherigen Absprache. Sagen beide „ja" oder beide „nein", so wird eine 1 in eines der vier Felder geschrieben, ansonsten eine 0. Das Feld wird zufällig mit Hilfe der Karten bestimmt, die der Schiedsrichter nun aufdeckt. Die Felder sind mit RR, RS, SR und SS beschriftet. Haben beide Spieler rot, so ist es das Feld RR, hat Peter rot und Paul schwarz, so ist es RS, hat Peter schwarz und Paul rot, dann ist es SR, und haben beide schwarz, so wird die 1 oder 0 in das das Feld SS geschrieben.

Ziel des Spieles. Mit der Zeit füllen sich die vier Spielfelder mit Einsen und Nullen. Für jedes Feld führt der Schiedsrichter Buch über den momentanen prozentualen Anteil von Einsen an der Gesamtzahl der in diesem Feld eingetragenen Ziffern. Um zu gewinnen müssen Peter und Paul dafür sorgen, daß langfristig in Feld RR dieser Anteil (A_{RR}) größer wird als die entsprechenden Anteile (A_{RS}, A_{SR}, A_{SS}) in den anderen drei Feldern zusammen. Als Formel:

$$A_{RR} > A_{RS} + A_{SR} + A_{SS}.$$

Peter und Paul müssen also so oft wie möglich die gleiche Antwort geben, falls beide Karten rot sind. In allen anderen Fällen sollten sie möglichst oft unterschiedliche Antworten geben.

Klassische Strategie. Eine Variante der Bellschen Ungleichung sagt nun aus: Wählen Peter und Paul eine beliebige Strategie im Gültigkeitsbereich der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie, so können sie das Spiel nicht gewinnen.

Quanten-Strategie. Und dennoch haben Peter und Paul eine Möglichkeit, das Spiel zu gewinnen – mit der Quantentheorie. Die beiden legen ein Kalziumatom auf den Tisch. Dieses hat die Eigenschaft, unter bestimmten Vorraussetzungen ein Photonenpaar zu erzeugen. Die einzelnen Photonen fliegen in entgegengesetzte Richtungen weg und auf Peter bzw. Paul zu. Zusätzlich weiß man, daß sie entgegengesetzt polarisiert sind. Also stellen Peter und Paul vor sich je einen Polarisationsfilter in den Weg des Photons, den sie entsprechend ihrer gezogenen Karte einstellen: Hat Peter rot, so stellt er ihn waagrecht auf 0 Grad, hat er schwarz, so wählt er einen Winkel von 60 Grad. Falls Paul eine rote Karte bekommen hat, stellt er seinen Filter auf 90 Grad, sonst auf 30 Grad. Nun sagt jeder Spieler für sich „ja", falls sein Photon durch den Filter zu ihm kommt, und „nein", falls nicht. Haben beide eine rote Karte, und passiert das Photon Peters Filter, dann passiert das andere Photon, das ja entgegengesetzt polarisiert ist, mit Sicherheit auch Pauls Filter. Beide sagen also „ja"; im anderen Fall sagen beide „nein". Ähnlich kann man die anderen Fälle analysieren: Ein in Richtung α polarisiertes Photon passiert einen in Richtung β ausgerichteten Polarisationsfilter mit Wahrscheinlichkeit $\cos^2(\alpha - \beta)$. Damit erhält man schnell

$$A_{RR} = 1 \quad \text{und} \quad A_{RS} = A_{SR} = A_{SS} = \frac{1}{4}.$$

Peter und Paul werden also das Spiel gewinnen!

Aus: B. Kümmerer, H. Maassen: Elements of quantum probability. Quantum Probability Communications, Vol. X (pp. 73–100), World Scientific Publishing Company, 1998

so ergeben Messungen

$$W(A \wedge (\neg C)) = \frac{3}{8},$$

aber

$$W(A \wedge (\neg B)) = \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad W(B \wedge (\neg C)) = \frac{1}{8}.$$

Die Bellschen Ungleichungen sind also verletzt, der Rahmen der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie ist gesprengt. Die experimentelle Bestätigung dieses Resultates war alles andere als einfach. Sie gelang erstmalig in einem Experiment von A. Aspect 1982. Inzwischen gibt es eine Vielzahl weiterer Experimente, die dieses Resultat bestätigen.

Quantenwahrscheinlichkeitstheorie

Die Quantenwahrscheinlichkeitstheorie erweitert die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie, sodaß auch zufällige quantenmechanische Ereignisse beschrieben werden können.

Aufbauend auf der mathematischen Formulierung der Quantenmechanik von von Neumann werden Ereignisse durch Projektionen auf einem Hilbertraum, genauer den Projektionen in einer von Neumann Algebra, beschrieben. Daraus ergeben sich die Definitionen von Wahrscheinlichkeitsmaßen, Zufallsvariablen und stochastischen Prozessen.

Betrachtet man nur quantenmechanische Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden, so genügt es, die von Neumann

Algebra aller Operatoren auf einem Hilbertraum zu betrachten. Geht man zu unendlich vielen Freiheitsgraden über, wie es zur quantenmechanischen Beschreibung von Licht oder von Festkörpern notwendig wird, so muß man kompliziertere von Neumann Algebren, bzw. **Operatoralgebren**, betrachten. Erst in den siebziger Jahren war die Theorie der Operatoralgebren genügend weit fortgeschritten, daß eine Quantenwahrscheinlichkeitstheorie Gestalt gewinnen konnte.

Die Untersuchungen in unserer Arbeitsgruppe nehmen ihren Ausgangspunkt in der Theorie der **Markoff-Prozesse**. Sie dienen als mathematisches Modell für die Beschreibung von Zeitentwicklungen von zufälligen Systemen, die in dem Sinn gedächtnislos sind, daß der jeweils nächste Schritt nur vom Zustand unmittelbar davor abhängt, nicht aber von der gesamten Vergangenheit, die vergessen wird. Geht man in eine Spielbank, so ist der jeweilige Stand des Guthabens ein typischer Markoff-Prozeß: Der Stand des Guthabens nach dem nächsten Spiel hängt nur vom Stand des Guthabens davor und vom Spielausgang ab, nicht aber davon, auf welche Weise der Stand des Guthabens davor erreicht wurde. Ähnliches gilt für die Länge einer Warteschlange an einer Kasse und in vielen anderen Situationen, auch im Bereich der Quantenmechanik.

Der Zugang zu Markoff-Prozessen, wie ihn die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie entwickelt hat, läßt sich nicht ohne weiteres auf die Quantenmechanik ausdehnen. Mit der Theorie der **Kopplungsdarstellungen** haben wir einen alternativen Zugang entwickelt. Ähnlich wie im obigen Beispiel das Guthaben vom Ausgang des Spieles abhängt, kann man zu jedem Markoff-Prozeß ein zufälliges System finden, welches den Markoff-Prozeß steuert. Dieses zufällige System ist aber noch gedächtnisloser als der Markoff-Prozeß: Der nächste Schritt hängt nicht einmal mehr vom vorherigen Zustand ab: Man sagt, er ist „stochastisch unabhängig“ vom vorherigen Zustand. Typische Beispiele für solche Systeme sind Roulett-Spiele, Würfel oder Münzwürfe: Ob der nächste Münzwurf Zahl oder Wappen ergibt, hängt nicht mehr davon ab, was der vorherige Münzwurf ergeben hat. Diese stochastischsten aller stochastischen Prozesse heißen Bernoulli-Prozesse oder weiße Rauschen. Die Interpretation eines Markoff-Prozesses als Kopplung eines Systems an ein weißes Rauschen erlaubt auch eine physikalische Interpretation: Der Prozeß beschreibt die Dynamik eines Systems welches gekoppelt ist an ein (sehr stochastisches) „Wärmebad“. Von dieser Interpretation rührt der Name „Kopplungsdarstellung“ her.

Schwerpunkte unserer Arbeit

Aus dem Zugang über Kopplungsdarstellungen ergeben sich verschiedene Schwerpunkte für unsere Arbeit. Eine erste zentrale Aufgabe besteht darin, für einen vorgegebenen Markoff-Prozeß eine Kopplungsdarstellung anzugeben, d. h., ein weißes Rauschen und eine Wechselwirkung zu konstruieren und gegebenenfalls physikalisch zu deuten. Der Untersuchung von **weißem Quantenrauschen** ist ein eigener Schwerpunkt gewidmet: Während es in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie nur eine Form der stochastischen Unabhängigkeit gibt, finden sich im Bereich der Quantenmechnik verschiedene Formen, zum Teil auf Grund der verschiedenen Quantenstatistiken (Fermionisch und Bosonisch). Die systematische Untersuchung der stochastischen Unabhängigkeit hat uns schließlich in den Bereich der Quantengruppen geführt.

Auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie ist es nützlich, Zeitentwicklungen als Lösungen von Differentialgleichungen zu charakterisieren. Da es sich jedoch um stochastische Dynamiken handelt, muß man schon in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie eine Theorie **stochastischer Differentialgleichungen** entwickeln. Die Darstellung eines Markoff-Prozesses als Kopplung an ein weißes Quantenrauschen erlaubte es uns, auch in diesem Rahmen eine Theorie der stochastischen Differentialgleichungen zu entwickeln. Mit ihrer Hilfe können nun auch viele Quantenmarkoff-Prozesse als Lösungen solcher Gleichungen charakterisiert werden.

Nicht alle stochastischen Prozesse sind Markoff-Prozesse. Beschreibt man Markoff-Prozesse als Kopplung an ein weißes Rauschen, so liegt es nahe, allgemeinere Prozesse als Kopplung an ein **farbiges Rauschen** zu charakterisieren. Dieser Aspekt gewinnt zunehmend an Wichtigkeit für unsere Arbeit.

In allen Phasen hat sich die Analogie zu dynamischen Systemen auf Hilberträumen (also zur Theorie der zweiten Momente stationärer Prozesse) als sehr hilfreich erwiesen. Diese Analogie haben wir immer wieder zu Rate gezogen und weiterentwickelt. Sie hat uns in jüngerer Zeit unter anderem auf die **Schuranalysis** aufmerksam gemacht. Die Schuranalysis führt zur Entwicklung neuer Algorithmen zur Filterung und zur Lösung inverser Streuprobleme. Die Theorie der Filterung erlaubt es, in einem Meßsignal bis zu einem gewissen Grad das interessierende Signal von störenden Rauschanteilen zu trennen. Mathematisch verwandt ist die wichtige Frage nach der bestmöglichen Vorhersage des Wertes eines zufälligen Prozesses in der Zukunft. Da der Zugang mit Hilfe der Schuranalysis Parallelen zur Kopplungsdarstellung aufweist, entwickeln wir in einem weiteren Schwerpunkt einen solchen Zugang auch für quantenmechanische stochastische Prozesse.

Die Idee der Kopplungsdarstellung führt auch zu einer ganz anderen Intepretation eines Markoff-Prozesses: Die Zustände des weißen Rauschens beeinflussen die Zustände des angekoppelten Systems, letztere werden durch erstere kodiert. In der Tat hat sich eine enge Verbindung zwischen Kopplungsdarstellungen und Kodierungen ergeben, die Ausgangspunkt unserer Untersuchungen zur **Quantenkodierungstheorie** geworden sind.

In der **Physik** spielt die Quantenwahrscheinlichkeitstheorie vor allem in der Quantenoptik, aber auch in der Kernspinresonanz und anderen Gebieten eine wichtige Rolle: Je genauer man messen kann, desto eher trifft man auf Phänomene, die sich nur noch mit der Quantenwahrscheinlichkeitstheorie erfassen lassen. Daher haben wir uns zunächst mit der **Kernspinresonanz** und der mikroskopischen Ableitung von Bloch-Gleichungen beschäftigt, später vor allem mit Fragen aus dem Bereich der **Quantenoptik**. Um ein Beispiel zu nennen: Schon das von einem gewöhnlichen Laser erzeugte Licht weist typisch quantenmechanische Eigenschaften auf, zu deren Verständnis die Quantenwahrscheinlichkeitstheorie hilft. Durch „quetschen“ kann man einen Teil des Quantenrauschens dieser Photonen zusätzlich verringern, wodurch die Präzision von Messungen weiter erhöht werden kann. In solchem Licht sind viele Photonen in typisch quantenmechanischen Zuständen vorhanden: Ein Fall für die Quantenwahrscheinlichkeitstheorie. Viele der Projekte, die sich mit physikalischen Anwendungen befassen, werden in Kooperationen mit Physikern durchgeführt. In letzter Zeit führen darüberhinaus die neuen Aspekte der Quantenkodierung zu einem intensiven und aufregenden Austausch mit der Physik.

Weitere Aktivitäten

Über die Aktivitäten im Umfeld der Quantenwahrscheinlichkeitstheorie hinaus setzen wir gerne unsere mathematischen Erfahrungen in der Praxis ein. Im Rahmen von Industrieprojekten haben wir z. B. ein System zur Vergabe von Artikelnummern und mathematische Algorithmen zur besseren Auswertung des GPS-Signals (zur satellitengestützten Positionsbestimmung) entwickelt. Mit Mitgliedern von Banken sprechen wir über mathematische Modelle zur Bewertung von Optionen und verwandten Produkten. Ein weiteres Projekt beschäftigt sich mit kurzfristigen Verkehrsprognosen. In einem größeren Projekt haben wir für die Universität Stuttgart ein Modell zur Berechnung der Lehrbelastung und darauf basierend zur Mittelverteilung ausgearbeitet.

Zusammenfassung

Die Quantenwahrscheinlichkeitstheorie verbindet moderne Mathematik mit interessanten physikalischen Fragestellungen. Wechselwirkungen zwischen Mathematik und Physik gibt es in beide Richtungen: Physikalische Fragestellungen erfordern die Entwicklung neuer Mathematik und umgekehrt regen mathematische Ergebnisse zu neuen physikalischen Überlegungen an. Dieses Wechselspiel zwischen Mathematik und Physik fasziniert und begeistert uns ständig aufs neue.

Prof. Burkhard Kümmerer
Mathematisches Institut A
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
D–70 569 Stuttgart
Tel.: 0711 685 5364
E-Mail: kuemmerer@mathematik.uni-stuttgart.de