SEMINAR ON CONTINUITY IN SEMILATTICES (SCS)

NAME	Karl H. Hofmann	DATE	28 5 78
TOPIC	Équivalence des expaces de Batbedat et des treillis algébriques		
REFERENCES	Batbedat, André, Le spectre plein d'un ensemble ordonné (manuscrit) HMS DUUALITY COMPENDIUM I		

DÉFINITION 1. Un <u>espace de Batbedat</u> ou un <u>espace monogénéré</u> est un espace sobre (donc satisfait à l'axiom T_0) qui possède une base pour sa topologie qui est stable par intersections finies et dont tous les membres U sont des voisinages minimaux d'un point $k_U \in U$.

On appelle <u>monogène</u> tout ouvert U qui est un voisinage minimal d'un point $u \in U$. Lorsque l'espace satisfait à l-axiom T_0, alors u est unique.

Les espaces monogénérés ont été introduits par Badbedat dans ses travaux sur les spectres de demigroupes et leurs représentations séctionales. Il a notemment trouvé que les faisceaux sur les espaces monogénérés sont traités très facilement. ~~traités~~

EXEMPLE 2. Soit L un treillis algébrique. Si on munit L de sa topologie de Scott $\sigma(L)$, on obtient un espace ΣL (notation du COMPENDIUM!) monogénéré. L'espace $\Sigma L \setminus \{0\}$ est toujours monogénéré.
En effet, c'est clair: La base réquise de $\sigma(L)$ est l'ensemble des $\uparrow k$, $k \in K(L)$.

L'objet de cette note est de remarquer l'inverse: Chaque espace monogénéré s'obtient de cette façon. Plus exactement on a le théorème suivant:

<u>THÉORÈME</u>. Soit X un espace de Badbedat et soit $L = (X, \leq)$ l'ensemble ordonné qu'on obtient en munissant X de son ordre de spécialisation. Si L a un élément zéro, alors L est un treillis algébrique, sinon, alors l'ensemble ordonné $L \cup \{0\}$ qu'on en déduit par adjonction d'un élément zero est un treillis algébrique. La topologie donné sur X est la topologie de Scott sur L dans le premier cas, et la topologie induite par celle de Scott sur $L \cup \{0\}$ dans le deuxième.

Démonstration. Soit $M(X) \subseteq O(X)$ la base des ouverts monogénérés selon la Définition 1. Posons $K(L) = \{x \in X:\ x$ est le générateur d'un ouvert $U \in M(X)\}$. Lorsque $M(X)$ est stable par intersections finies, $K(L)$ est un sup-demi-treillis par rapport à $\leq$. (On note que $u \leq v$ chaque fois que u engendre U and v engendre V tel que $U \subseteq V$.)
Soit $D \subseteq L$ un sous-ensemble filtrant croissant; nous allons voir que $\bar{D}$ est irréductible: Si U et V sont des ouverts tels que $U \cap V \cap \bar{D} = \emptyset$; il faut démontrer que $U \cap \bar{D} = \emptyset$ ou bien $V \cap \bar{D} = \emptyset$. Sinon, il existe $u \in U \cap D$ et $v \in V \cap D$. Mais D étant filtrant, il contient un $w \geq u, v$, et puisque $U = \uparrow U$, $V = \uparrow V$ on aurait $w \in U \cap V \cap D$, ce qui serait une contradiction. Or, X est sobre, donc $D = \emptyset$ ou $\bar{D} = \{d\}^-$; d'après la définition de l'order $\leq$, cela signifie $\bar{D} = d$. On note que $d = \sup D$. Ainsi on a vu que n'importe quel ensemble filtrant croissant <u>non-vide</u> a un sup dans L.

Soit alors $k \in K(L)$ et $k \leq \sup D$, ou D est un ensemble filtrant croissant. On a donc $\sup D \in \uparrow k \cap \bar{D}$; mais $\uparrow k$ est l'ensemble ouvert engendré par k ,et par conséquent, $\uparrow k \cap D \neq \emptyset$. Donc k est un élément compact dans le sens de la théorie des treillis.

Si on se donne un élément $x \in X$ quelconque, posons $D = \downarrow x \cap K(L)$. Alors D est un sous-demigroup de K(L), donc est filtrant croissant. Si $d = \sup D < x$, on trouve un ouvert U tel que $d \notin U$;mais $x \in U$, car X satisfait à l'axiom T_0. Lorsque M(X) est une base de O(X), il existe un $V \in M(X)$ tel que $x \in V \subseteq U$ .Mais V est monogénéré; à savoir $V = \uparrow k$, $k \in K(L)$. Donc $k \in \downarrow x \cap K(L)$, et par conséquent $k \leq d$, ce qui donne $d \in \uparrow k \in V \subseteq U$, une contradiction. Celà demontre que $x = d = \sup D$. Nous venons de voir que $x = \sup(\downarrow x \cap K(L))$ pour n'importe quel $x \in L$.

Considérons deux éléments $x,y \in X$ arbitraires. Dans le sup-demi-treillis K(L), le "produit" $D = (\downarrow x \cap K(L)) \vee (\downarrow y \cap K(L))$ est un sous-demitreillis, donc $z = \sup D$ existe d'après ce que nous avons vu dessus. Si $x,y \leq m$, alors $u \in \downarrow x \cap K(L)$ et $v \in \downarrow y \cap K(L)$ implique $u \vee v \leq m$; il en suit que $z \leq m$. De l'autre coté, $\downarrow x \cap K(L) \subseteq \downarrow z$; par suite $x = \sup(\downarrow x\ K(L)) \leq z$. Également on a $y \leq z$. Tout cela démontre que $z = \sup\{x,y\} = x \vee y$ dans L. Donc L est un sup-demitreillis. Lorsque tout ensemble filtrant croissant non-vide possède un sup, tout ensemble non-vide possède un sup tout court.

Il y a deux cas: Premièrement, L peut avoir un élément zero 0. Dans ce cas L est un treillis algébrique. Deuxièmement, L peut être sans élément minimum. Dans ce cas, l'adjonction d'un élément 0 produit un treillis algébrique $L \cup \{0\}$.

Par définition, la topologie donnée sur X est engendrée par $M(X) = \quad k : k \in K(L)$. Mais cet ensemble engendre aussi la topologie de Scott sur L ,ou bien la topologie induite sur L par la topologie de Scott de $L \cup \{0\}$, selon les cas. □

J'ai rencontré Batbedat le 26 et 27 Mai dans la maison de Campagne de Jean Bénabou à La Garde Freinet près de la Côte d'Azur (15 km de St.Tropez, plus précisement); Jean Bénabou m'a laissé aimablement passer une semaine là-bas, et André Batbedat était gentil de me rendre visite pour m'expliquer ses travaux sur le spectre et la représentation sectionale des demi-groupes(et des algèbres liées aux demi-groups); il vient du départment de mathématiques de l'université de Montpellier. La question résolue dans cette note était posée au cours du débat.

On parlera sur les conséquences et les applications du THÉORÈME une autre fois, notemment sur l'application de la caractérisation des morphisms entre les treillis algébriques. Aussi,il est clair que les espaces monogénérés sont en correspondence biunivoque canonique avec les demi-treillis (sans ou avec élément neutre); il reste à clarifier en quel sens cette correspondence est fonctorielle.