SEMINAR ON CONTINUITY IN SEMILATTICES (SCS)

NAMES: Karl H.Hofmann and Klaus Keimel

| Date | M | D | Y |
|---|---|---|---|
| | 6 | 11 | 79 |

TOPIC: Bemerkungen zum "NEUEN LEMMA"

REFERENCES: Hofmann and Watkins, A new Lemma on primes ... (SCS Memo 5-30-79)
Compendium
Hofmann and Lawson, Irreducibility... Semigroup Forum 13 (19776/77),303-353

Am 5.Juni ist in Darmstadt das "Neue Lemma" (SCS Memo 5-30-79) zur Sprache gekommen. Klaus Keimel bemerkte schnell, daß ein direkterer Beweis des "Neuen Lemma"möglich sei , welcher sich nicht auf das alte "LEMMA" stützt und daher allgemeinere Folgerungen zuließ. Ein dem Keimelschen Schluß verwandtes Argument findet sich schon in "Irreducibility"; allerdings muß man hier die Lage etwas genauer analysieren.
Als eine Folge der Verallgemeinerung des "Neuen Lemmas" ist auch eine allgemeinere Version des "Äquivalenzsatses" (Hofmann and Watkins,SCS-5-30-79, siehe 3.5) möglich, die wir unten ebenfalls andeuten.

## 1. Der neue Beweis des "NEUEN LEMMAS"

Wir alle haben in den letzten Jahren immer häufiger beobachtet, daß die Theorie der stetigen Verbände für allgemeinere Klassen geordneter Mengen benötigt wird; daher ist auch im Kompendium in den Übungen dauernd von "continuous posets,continuous semilattices, complete continuous semilattices" usw die Rede. Wir schließen uns diesem Bedürfnis hier an und formulieren das "Neue Lemma" in einem möglichst allgemeinen Rahmen. Insbesondere hat sich die Frage nach irreduzibelen und Primelementen in stetigen Halbverbänden im Frühjahr gestellt, als sich Gierz,Hofmann und Mislove über den stetigen Halbverband der quasikompakten Teilmengen eines lokal quasikompakten Raumes unterhielten. (Der Keim eines Memo darüber liegt vor; es fehlt aber noch ein halbwegs befriedigender Abschluß.)

Wir erinnern zuerst an die Kategorie $\underline{\mathrm{CPoset}}_0$ :

1.1. RÜCKERINNERUNG. (Compendium IV-1.39). Die Objekte der Kategorie $\underline{\mathrm{CPoset}}_0$ (bzw. $\underline{\mathrm{CSem}}_0$) sind die stetigen partiell geordneten Mengen (bzw. die stetigen Halbgruppen) und die zugehörigen Morphismen sind Abbildungen $f:S \longrightarrow T$ , die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(1) f ist Scott-stetig (d.h. ~~gehörtxxxxxxEES~~ erhält gerichtete sups- siehe II-2.12).

(2) $f^{-1}(U)$ ist ein Filter für jeden offenen Filter U von T.

(und,im Falle von $\underline{\mathrm{CSem}}_0$:

(3) f is Halbgruppenmorphismus (d.h. $f(xy) = f(x)f(y)$). ) $\square$

Die Kategorie $\underline{\mathrm{CL}}$ ist offensichtlich voll sowohl in $\underline{\mathrm{CSem}}_0$ als auch in $\underline{\mathrm{CPoset}}_0$ .

Man kann die Frage stellen, ob man in einer teilweise geordneten Menge (poset) noch von Primelementen sprechen kann (und soll). Wir tun das (Einwände sind uns wurstegal):

1.2. DEFINITION. Sei L eine teilweise geordnete Menge (d.h. ein poset). Ein Element $p \in L$ heiße prim genau dann, wenn $L \setminus \downarrow p$ ein Filter ist. Die Menge aller (von $\top$ verschiedenen) Primelemente heiße Spec L. (Eine nähere Untersuchung dieses Spektrums steht hier nicht zur Debatte; daher erwähnen wir hier keine Topologie auf Spec L.)

Wir sagen $p \in L$ sei irreduzibel genau dann, wenn $p$ in $\uparrow p$ prim ist, d.h. $\uparrow p \setminus \{p\}$ ein Filter ist. Die Menge aller irreduziblen Elemente heiße IRR L, wie üblich. □

Da der Durchschnitt zweier Filter wiederum ein Filter ist, gilt $\mathrm{Spec}\, L \subseteq \mathrm{IRR}\, L$ wie im Fall von Verbänden. Als Übungsaufgabe beweise man wie im Fall von Verbänden, mit Hilfe des Distributivitätsbegriffes bei Halbverbänden:

1.3. BEMERKUNG. Sei L ein distributiver Halbverband. Dann ist

$$\mathrm{IRR}\, L \setminus \{\top\} = \mathrm{Spec}\, L. \ \square$$

Nun folgt die Verallgemeinerung von SCS-5-30-79, Hofmann-Watkins, 1.3:

1.4. DAS NEUE LEMMA. Es sei S eine aufwärts vollständiger (oder induktiver) Halb~~xxxxx~~verband. (an up-complete semilattice). (Siehe Compendium O -2.11.), Ferner sei T eine beliebige teilweise geordnete Menge (a poset). Die Funktion $f\colon S \longrightarrow T$ erfülle 1.1.2; genauer

(*) $f^{-1}(U)$ ist ein Scott offener Filter für jeden Scott offenen Filter U in T.

Folgerung: Für jedes Primelement $q \in \mathrm{Spec}\, T$ und jedes Element $s \in S$ mit $f(s) \le q$ existiert ein irreduzibles Element $p \in (\mathrm{IRR}\, S) \cap \uparrow s$ mit $f(p) \le q$.

Alternative Formulierung der Folgerung:

$$(\forall (s,q) \in S \times \mathrm{Spec}\, T) \quad f(s) \le q \implies f^{-1}(\downarrow q) \cap \uparrow s \cap \mathrm{IRR}\, S \neq \emptyset.$$

Bemerkungen.

Insbesonders ist unter den gegebenen Voraussetzungen $\mathrm{IRR}\, S \neq \emptyset$. Wenn S und T Einselemente haben und $f(1) = 1$ gilt, kann mann aus $q \neq 1$ auch $p \neq 1$ schließen; d.h. wir wissen $p \in \uparrow s \cap (\mathrm{IRR}\, S \setminus \{1\})$. In diesem Fall ist dann sogar $f^{-1}(\downarrow q) \cap \uparrow s \cap (\mathrm{IRR}\, S \setminus \{1\}) \neq \emptyset$.

Beweis. Wegen 1.2 ist $T \setminus \downarrow q$ ein (offener!) Filter. Also ist $S \setminus f^{-1}(\downarrow q) = f^{-1}(T \setminus \downarrow q)$ ein offener Filter U in S, denn f erfüllt (*). Somit ist $f^{-1}(\downarrow q)$ aufwärts vollständig, d.h. induktiv. Somit gibt es in $\uparrow s \cap f^{-1}(\downarrow q)$ ein maximales Element p. (Zorn!). Nun ist $\uparrow p \setminus \{p\} = \uparrow p \setminus U$ ein Filter, also gilt $p \in \mathrm{IRR}\, L$. □

1.5. KOROLLAR. Sei $f: S \longrightarrow T$ ein $\underline{\text{CPoset}}_0$ -Morphismus und $f(s) \leq q \in \operatorname{Spec} T$, $f(1) \nleq q$. Dann existiert ein $p \in \uparrow s \cap \operatorname{IRR} S$, $p \neq 1$ mit $f(p) \leq q$. Ist S ein distributiver Halbverband, so ist $p \in \uparrow s \cap \operatorname{Spec} S$. □

1.6. KOROLLAR. Ist $f: S \longrightarrow T$ ein $\underline{\text{CSem}}_0$ -Morphismus mit $f(s) \leq q \in \operatorname{Spec} T$, $f(1) \nleq q$, und ist S distributiv, so gilt $f^{-1}(\downarrow q) \cap \uparrow s \cap \operatorname{Spec} S \neq \emptyset$. □

## 2. Die Verallgemeinerung des Äquivalenzsatzes für DCL

2.1. DEFINITION. Entsprechend der Definition in SCS Hofmann-Watkins (loc. cit.), DCL bedeutet die Kategorie der stetigen Heytingalgebren und den CL-Morphismen zwischen ihnen. ⊠
(Die Bezeichnung DCL wird im Kompendium VII-3.5 für eine ganz andere Kategorie verwendet. Es wird also eine Änderung der Bezeichnung nötig werden.) Hier sei HL die Kategorie der vollständigen Heytingalgebren mit Punkten und $\text{INF}^{\uparrow}$ -Morphismen zwischen ihnen. Die Objekte von HL und $\underline{\text{Heyt}}_0$ sind gleich. □
2.2. DEFINITION. Es bezeichne N die Kategorie der nüchternen Räume, deren Morphismen die mehrwertigen Funktionen $F: X \longrightarrow Y$ sind, welche die folgenden Eigenschaften erfüllen:

(0) $F(x)$ ist abgeschlossen für alle $x \in X$.

(1) $F\bar{A} = (FA)^-$ für alle $A \subseteq X$.

(2) $F^{-1}Q$ ist quasikompakt für jedes quasikompakte saturierte Menge $Q \subseteq Y$.

(Mehrwertige Funktionen dieser Art heißen "eigentlich" oder "perfekt".) Zusammensetzung von Morphismen ist die bekannte Komposition von binären Relationen. □

2.3. SATZ. Es gibt wohldefinierte Funktoren $\operatorname{Spec}: \underline{\text{HL}} \longrightarrow \underline{\text{N}}$ und $\Gamma^{op}: \underline{\text{N}} \longrightarrow \underline{\text{HL}}$; dieses Funktorenpaar stellt eine Äquivalenz der Kategorien HL und N her. Die Äquivalenz von DCL und LOC wird von dieser Äquivalenz induziert.

Beweis. Man muß lediglich die sämtlichen Aussagen und Beweise von Abschnitt 2 von Hofmann-Watkins (loc.cit.) auf ihre unveränderte Gültigkeit im Bereich der größeren Kategorien nachprüfen. □

Bemerkungen. Man beachte, daß der Funktor $\Gamma^{op}$ mit dem Funktor O nur auf Objekten isomorph ist; der Funktor $\Gamma^{op}$ is kovariant, der Funktor O kontravariant. Auch im Fall der Teilkategorie $\underline{\text{HL}}^{\S}$, deren Morphismen zusätzlich Spektren respektieren, die vermöge 2.3 zu der Teilkategorie $\underline{\text{N}}^{\S}$ aller nüchternen Räume und perfekten Abbildungen äquivalent ist, ist der Satz 2.3 noch nicht in unserem Material erwähnt worden.