Chapitre I

ELEMENTS PREMIERS D'UN TREILLIS

Dans ce chapitre nous étudierons les éléments premiers d'un treillis.

La première section contient quelques définitions et préliminaires.

Dans la deuxième section nous étudions la topologie de Zariski sur des parties de l'ensemble des éléments premiers d'un treillis T et les relations entre cette topologie et la structure du treillis T. Cette section ne contient rien de nouveau ; mais l'auteur ne connait pas de référence qui fournirait les résultats dans le langage et la généralité voulus. La topologie de Zariski est couramment utilisée dans la théorie des anneaux (voir par exemple Jacobson [19], Bourbaki [7]). Dans la théorie des groupes réticulés elle a été étudiée surtout par F. Sik [31], [32], ainsi que par Henriksen et Isbell [17]. L'exposé de la topologie de Zariski le plus proche du notre semble dû à P. Samuel [29].

Dans la section 3 nous traitons la notion de compacité. La notion de valeur que nous utilisons est empruntée à la théorie des groupes réticulés (cf. [9], p. 26). La proposition 3.5 a été formulée par R.L. Blair [5] dans le cas du treillis des idéaux d'un anneau. On la retrouve aussi presque en totalité dans [4], p. 128 et 189.

Dans la section 4, nous caractérisons les éléments premiers d'un treillis algébrique distributif complet, en particulier les éléments premiers minimaux. Les résultats de cette section peuvent être considéré comme des généralisations de propriétés de groupes réticulés (cf. Byrd [8], Conrad [9], p. 42 - 45).

La notion d'élément germinal associé à un élément premier dans la section 5 généralise la notion d'idéal germinal associé à un idéal irréductible d'un f-anneau [22]. Pour les idéaux supermodulaires maximaux d'un f-anneau, cette notion a été introduite par Henriksen et Isbell [17] qui a leur tour ont généralisé les idéaux des fonctions réelles continues s'annulant dans un voisinage d'un point donné d'un espace topologique. Certains de nos résultats généralisent des propriétés du treillis des ℓ-sous-groupes convexes d'un groupe réticulé (cf. [9], p. 43 - 45).

La dernière section de ce chapitre est consacrée à trois classes particulières de treillis : les treillis de Stone, les treillis projetables et les treillis plats. Dans ces cas, l'ensemble des éléments premiers a une structure simple. Bigard [3] a étudié les groupes réticulés dont le treillis des ℓ-sous-groupes convexes appartient à une de ces trois classes.

1. Définitions et propriétés élémentaires.

Soit T un treillis. Nous désignerons par $\vee$ et $\wedge$ les opérations "borne supérieure" et "borne inférieure" dans T. Si T admet un plus petit élément, nous le désignerons par 0 ; et si T admet un plus grand élément, nous le désignerons par 1.

1.1. - Un élément x de T est dit premier si $x \neq 1$ et si $t_1 \wedge t_2 \nleq x$ pour tout couple t_1, t_2 d'éléments de T tels que $t_1 \nleq x$ et $t_2 \nleq x$. Si C est une chaîne non vide d'éléments premiers d'un treillis complet, $x_0 = \bigwedge_{x \in C} x$ est aussi un élément premier. Utilisant l'axiome de Zorn, on en déduit que tout élément premier d'un treillis complet majore au moins un élément premier minimal.

1.2. - Un élément x d'un treillis T est dit irréductible si $x \neq 1$ et si $t_1 \wedge t_2 = x$ pour deux éléments t_1, t_2 de T entraîne $t_1 = x$ ou $t_2 = x$. Tout élément premier est irréductible. Inversement, si T est un treillis distributif, tout élément irréductible est premier. Un élément maximal d'un treillis est toujours irréductible. Donc, dans un treillis distributif, les éléments maximaux sont premiers. (Si T possède un plus grand élément 1, "maximal" signifie "maximal dans $T \setminus \{1\}$".)

1.3. - Soit T un treillis ayant un plus petit élément 0. Soit $t \in T$. Si l'ensemble des s dans T tels que $s \wedge t = 0$ admet un plus grand élément, on appelle cet élément pseudo-complément de t. On le note t^*. On dit que le treillis T est un treillis pseudo-complémenté si tout élément de T admet un pseudo-complément.
Nous utiliserons souvent le théorème de Glivenko (cf. [4], p. 130 ;

voir aussi Samuel [29], Frink [14], Varlet [38]) :

<u>Soit</u> T <u>un treillis pseudo-complémenté. Alors</u> $t^{\perp} = t^{\perp\perp\perp}$ <u>pour tout</u> $t \in T$; <u>l'application</u> $t \longmapsto t^{\perp\perp}$ <u>est une fermeture dans</u> T , <u>dont les fermés sont exactement les pseudo-compléments. Les pseudo-compléments dans</u> T <u>forment un treillis de Boole</u> $\mathcal{B}$, <u>image homomorphe du treillis</u> T . <u>Le complément d'un élément</u> a <u>de</u> $\mathcal{B}$ <u>est</u> $a^{\perp}$. <u>Le treillis de Boole</u> $\mathcal{B}$ <u>est complet si</u> T <u>est complet</u>.

Puisque $t \longmapsto t^{\perp\perp}$ est une fermeture, la borne inférieure dans $\mathcal{B}$ d'une famille quelconque de pseudo-compléments coïncide avec la borne inférieure de cette famille dans T . Mais si a et b sont dans $\mathcal{B}$, $a \vee b$ n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{B}$. On désignera par $a \curlyvee b$ la borne supérieure de a et b dans $\mathcal{B}$. Remarquons que

$$a \curlyvee b = (a \vee b)^{\perp\perp} .$$

Par définition, un treillis pseudo-complémenté possède toujours un plus petit élément 0 . Il possède aussi un plus grand élément, à savoir $1 = 0^{\perp}$.

1.4. - On appelle <u>treillis de Brouwer</u> un treillis T tel que, quels que soient t et c dans T , l'ensemble des s dans T tels que $t \wedge s \leq c$, possède un plus grand élément. Un treillis complet T est un treillis de Brouwer si, et seulement si, T est $\wedge$-<u>distributif général</u>, c'est à dire si, et seulement si, pour tout élément t de T et pour toute famille (t_μ) d'éléments de T ,

$$t \wedge (\bigvee_\mu t_\mu) = \bigvee_\mu (t \wedge t_\mu)$$

(cf. [4], p. 128). En particulier, un treillis de Brouwer est distributif et, s'il possède un plus petit élément, il est pseudo-complémenté.

1.5. - EXEMPLE (cf. [4], p. 216). Soit X un espace topologique. L'ensemble $\mathcal{O}_X$ des ouverts de X est un treillis de Brouwer complet. En particulier, $\mathcal{O}_X$ est un treillis distributif et pseudo-complémenté. Les pseudo-compléments dans $\mathcal{O}_X$ sont exactement les ouverts réguliers, c'est à dire les ouverts qui sont égal à l'intérieur de leur adhérence. Si U est un ouvert, le pseudo-complément $U^{\perp}$ est égal à $X \setminus \overline{U}$, où $\overline{U}$ désigne l'adhérence de U. Le théorème de Glivenko montre que les ouverts réguliers de X forment un treillis de Boole complet que l'on notera $\mathcal{R}_X$.

L'application $U \longmapsto X \setminus U$ est un anti-isomorphisme du treillis $\mathcal{O}_X$ des ouverts de X sur le treillis des fermés de X. Si U est un ouvert régulier, $X \setminus U$ est un fermé régulier, c'est à dire que $X \setminus U$ est l'adhérence de son intérieur ; inversement, tout fermé régulier de X est de la forme $X \setminus U$ avec $U \in \mathcal{R}_X$. Il s'ensuit que les fermés réguliers de X forment un treillis de Boole complet anti-isomorphe à $\mathcal{R}_X$.

2. Espaces d'éléments premiers.

Soit T un treillis complet. Soit X une partie de l'ensemble des éléments premiers de T. Pour tout $t \in T$, soit

$$S_X(t) = \{x \in X ;\ t \nleq x\},$$
$$Z_X(t) = \{x \in X ;\ t \leq x\} = X \setminus S_X(t).$$

S'il n'y a pas d'erreur possible, nous écrirons simplement S(t) et Z(t). Pour toute famille $(t_\mu)_{\mu \in I}$ d'éléments de T, dont la borne supérieure existe, on a :

(1) $$S(\bigvee_{\mu\in I} t_\mu) = \bigcup_{\mu\in I} S(t_\mu) ,$$

(2) $$Z(\bigvee_{\mu\in I} t_\mu) = \bigcap_{\mu\in I} Z(t_\mu) .$$

Soient t_1 et t_2 deux éléments de T . Un élément $x \in X$ appartient à $S(t_1 \wedge t_2)$ si, et seulement si, $t_1 \wedge t_2 \nleq x$; puisque x est premier, cela s'écrit aussi $t_1 \nleq x$ et $t_2 \nleq x$, c'est à dire que $x \in S(t_1)$ et $x \in S(t_2)$; donc :

(3) $$S(t_1 \wedge t_2) = S(t_1) \cap S(t_2) ,$$

(4) $$Z(t_1 \wedge t_2) = Z(t_1) \cup Z(t_2) .$$

La relation (3) montre que les ensembles de la forme $S(t)$, t T , forment une base d'ouverts d'une topologie sur T .

DEFINITION 2.1. - La topologie sur X , dont les ensembles de la forme $S_X(t)$, $t \in T$, forment une base, est appelée <u>topologie de Zariski</u>.

Sur un ensemble X d'éléments premiers de T , nous ne considèrerons jamais de topologie autre que la topologie de Zariski.

DEFINITION 2.2. - On appelle <u>espace d'éléments premiers</u> de T tout ensemble d'éléments premiers de T muni de la topologie de Zariski.

NOTATION. - On désigne par ξT l'espace de tous les éléments premiers, par μT l'espace des éléments premiers maximaux et par πT l'espace des éléments premiers minimaux de T .

PROPRIETES 2.3. - Soit X un espace d'éléments premiers d'un treillis complet T .

(a) $t \longmapsto S(t)$ est un homomorphisme surjectif du treillis T sur le treillis $\mathcal{O}_X$ des ouverts de X d'après (1) et (3).

(b) Une partie de X est fermée si, et seulement si, elle est de la forme $Z(t)$, $t \in T$.

(c) Si Y est une partie de X , la topologie de Zariski sur Y coïncide avec la topologie induite sur Y par la topologie de Zariski sur X .

(d) X est un espace de Kolmogoroff (= T_0), c'est à dire que pour deux éléments distincts quelconques de X , il existe un ouvert contenant l'un de ces deux éléments, mais pas l'autre. (En effet, si x et y sont deux éléments distincts de X , on a par exemple $x \nleq y$; il s'ensuit que l'ouvert $S(x)$ contient y , mais pas x .)

(e) X est un espace accessible (= T_1) si, et seulement si, les éléments de X sont deux à deux non comparables. (Un espace topologique est dit accessible si, pour tout couple (x,y) d'éléments distincts de X , il existe un ouvert contenant x , mais pas y ; cette propriété se démontre comme (d).)

(f) Pour que X soit un espace topologique séparé (= T_2), il suffit que pour tout couple x_1,x_2 d'éléments premiers distincts de X , il existe t_1 et t_2 dans T tels que

$$t_1 \wedge t_2 = 0 \ , \ t_1 \nleq x_1 \ , \ t_2 \nleq x_2 \ .$$

Si $\bigwedge\limits_{x \in X} x = 0$, cette condition est aussi nécessaire.

Soit X un espace d'éléments premiers d'un treillis complet T . D'après (2) et (4), $t \longmapsto Z(t)$ est un anti-homomorphisme du treillis T sur le treillis des fermés de X . On a en particulier :

(5) $\qquad t_1 \leq t_2$ entraîne $Z(t_1) \supseteq Z(t_2)$.

Définissons inversement une application R du treillis $\mathcal{P}(X)$ des parties de X dans T par :

$$R(Y) = \bigwedge_{y \in Y} y \quad \text{quel que soit} \quad Y \subseteq X .$$

Cette application vérifie :

(6) $\qquad Y_1 \subseteq Y_2$ entraîne $R(Y_1) \geq R(Y_2)$.

On a de plus :

(7) $\qquad t \leq RZ(t)$ quel que soit $t \in T$,

(8) $\qquad Y \subseteq ZR(Y)$ quel que soit $Y \subseteq X$.

Les relations (5),(6),(7),(8) montrent que les applications $Z : T \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ et $R : \mathcal{P}(X) \longrightarrow T$ constituent une correspondance de Galois entre T et $\mathcal{P}(X)$.

La théorie générale des correspondances de Galois (cf. [4], p. 124) permet d'affirmer :

(9) $\qquad RZR = R$ et $ZRZ = Z$.

De plus, RZ et ZR sont des fermetures respectivement dans T et $\mathcal{P}(X)$. Notons $\overline{t} = RZ(t)$ et $\overline{Y} = ZR(Y)$ les fermés associés respectivement aux éléments t de T et aux parties Y de X . Les applications R et Z induisent des anti-isomorphismes mutuellement réciproques entre le treillis complet $\overline{T} = \{\overline{t} ; \ t \in T\}$ et le treillis complet des fermés de $\mathcal{P}(X)$. Notons que les fermés de $\mathcal{P}(X)$ sont exactement les parties fermées de X pour la topologie de Zariski d'après (9) et 2.3b. Puisque $F \longmapsto X \setminus F$ est un anti-isomorphisme du treillis des fermés de X sur le treillis $\mathcal{O}_X$ des ouverts de X , $t \longmapsto S(t)$ est un isomorphisme du treillis $\overline{T}$ des fermés de T sur le treillis $\mathcal{O}_X$ des ouverts de X . Par conséquent, $\overline{T}$ est un treillis de Brouwer complet.

Appliquons ces raisonnements dans deux cas : Prenons d'abord $X = \xi T$ et supposons que tout élément de T soit la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers. Alors $T = \overline{T}$; donc :

PROPOSITION 2.4. - *Si tout élément d'un treillis complet* T *est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers, alors* T *est un treillis de Brouwer.*

Dans le deuxième cas les hypothèses sont moins fortes. Soit $X = \xi T$ et supposons que $\bigwedge_{x \in \xi T} x = 0$. Dans ce cas on a $\overline{0} = RZ(0) = 0$. Montrons que T est pseudo-complémenté : Soit t un élément de T. Pour tout élément s de T tel que $s \wedge t = 0$, on a $\overline{s} \wedge \overline{t} = \overline{0} = 0$. On en déduit que $s \leq \overline{s} \leq t^{\perp}$, où $t^{\perp}$ désigne le pseudo-complément de $\overline{t}$ dans $\overline{T}$. Par conséquent, $t^{\perp}$ est aussi le pseudo-complément de t dans T. Nous avons :

PROPOSITION 2.5. - *Un treillis complet* T *dont le plus petit élément est la borne inférieure de la famille des éléments premiers est pseudo-complémenté.*

Soit X un espace d'éléments premiers d'un treillis complet T tel que $\bigwedge_{x \in X} x = 0$. D'après la proposition précédente, T est pseudo-complémenté. Les pseudo-compléments dans T forment un treillis de Boole complet $\mathcal{B}$ d'après le théorème de Glivenko (1.3). Nous avons les propriétés suivantes :

PROPRIETES 2.6. - (a) $a \longmapsto S(a)$ est un isomorphisme du treillis de Boole $\mathcal{B}$ sur le treillis de Boole $\mathcal{R}_X$ des ouverts réguliers de X.

(b) $a \longmapsto Z(a)$ est un anti-isomorphisme de $\mathcal{B}$ sur le treillis de Boole des fermés réguliers de X.

(c) Pour tout $t \in T$, $S(t^{\perp}) \cup S(t^{\perp\perp})$ est partout dense dans X et $S(t^{\perp}) \cap S(t^{\perp\perp}) = \emptyset$.

(d) Pour tout $t \in T$, $t^\perp = RS(t)$; en particulier, tout pseudo-complément est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers appartenant à X.

(e) $U \longmapsto R(U)^\perp$ est un isomorphisme de $\mathcal{R}_X$ sur $\mathcal{B}$.

(f) Pour tout $t \in T$, $Z(t^\perp)$ est l'adhérence de $S(t)$ et $S(t^\perp)$ est l'intérieur de $Z(t)$.

(g) Pour tout $t \in T$ et tout $x \in X$, les propriétés suivantes sont équivalentes : (i) $Z(t)$ est un voisinage de x ;

(ii) $Z(t^{\perp\perp})$ est un voisinage de x ;

(iii) $x \in S(t^\perp)$.

Démonstration. (a) Puisque l'application $t \longmapsto S(t)$ est un isomorphisme de $\overline{T}$ sur $\mathcal{O}_X$, elle induit un isomorphisme du treillis de Boole $\mathcal{B}$ des pseudo-compléments de $\overline{T}$ sur le treillis de Boole $\mathcal{R}_X$ des pseudo-compléments de $\mathcal{O}_X$.

(b) est une conséquence immédiate de (a).

(c) D'après (a), $S(t^{\perp\perp}) = S(t^\perp)^\perp$; et pour tout ouvert U d'un espace topologique, $U \cup U^\perp$ est partout dense et $U \cap U^\perp = \emptyset$.

(d) Si $t \nleq x \in X$, alors $t^\perp \leq x$ puisque x est premier; donc $S(t) \subseteq Z(t^\perp)$, ce qui entraîne $RS(t) \geq RZ(t^\perp) = t^\perp$. Inversement, $RS(t) \leq x$ pour tout $x \in X$ tel que $t \nleq x$; par suite,

$$RS(t) \wedge t \leq x \quad \text{pour tout} \quad x \in X .$$

On en déduit que $RS(t) \wedge t = 0$ et par conséquent $RS(t) \leq t^\perp$.

(e) Soit U un ouvert régulier de X. D'après (a), il existe $a \in \mathcal{B}$ tel que $U = S(a)$; donc $R(U)^\perp = RS(a)^\perp = a^{\perp\perp} = a$.

(f) L'adhérence de $S(t)$ est $ZRS(t)$; d'après (d), $ZRS(t) = Z(t^\perp)$. L'intérieur de $Z(t)$ est $X \setminus ZR(X \setminus Z(t)) = SRS(t) = S(t^\perp)$.

(g) resulte de (f) ; car d'après (f), l'intérieur de $Z(t)$ ainsi que de $Z(t^{\perp\perp})$ est égal à $S(t^\perp)$.

3. Compacité.

Soit T un treillis. Un élément k de T est dit <u>compact</u> si la condition suivante est vérifiée : Toute famille d'éléments de T dont la borne supérieure existe et majore k, contient une famille finie dont la borne supérieure majore k. Cette condition est équivalente à la condition suivante : Tout idéal de T, dont la borne supérieure existe et majore k, contient k.

Les éléments compacts d'un treillis T forment un $\vee$-sous-demi-treillis K de T. Si T admet un plus petit élément 0, cet élément est compact. Mais K n'est pas un treillis en général.

Soit k un élément compact de T. On appelle <u>valeur</u> de k tout élément maximal dans le famille des éléments de T ne majorant pas k. Par $V(k)$ on désigne l'ensemble des valeurs de k. Un élément de T est dit semi-maximal s'il appartient à un ensemble $V(k)$.

Si T est un treillis complet, la famille des éléments de T ne majorant pas un élément compact k donné, est inductive. Par conséquent :

LEMME 3.1. - <u>Soit</u> k <u>un élément compact d'un treillis complet</u> T. <u>Alors tout élément de</u> T <u>ne majorant pas</u> k <u>est majoré par une valeur de</u> k.

Si v est une valeur de k, l'élément $v^* = v \vee k$ est le plus petit élément de la famille des majorants stricts de v. Donc v est irréductible. Dans un treillis distributif, tout élément semi-maximal est donc premier, et nous pouvons parler de l'espace des valeurs de k.

(d) Pour tout $t \in T$, $t^{\perp} = RS(t)$; en particulier, tout pseudo-complément est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers appartenant à X .

(e) $U \longmapsto R(U)^{\perp}$ est un isomorphisme de $\mathcal{R}_X$ sur $\mathcal{B}$.

(f) Pour tout $t \in T$, $Z(t^{\perp})$ est l'adhérence de $S(t)$ et $S(t^{\perp})$ est l'intérieur de $Z(t)$.

(g) Pour tout $t \in T$ et tout $x \in X$, les propriétés suivantes sont équivalentes : (i) $Z(t)$ est un voisinage de x ;

(ii) $Z(t^{\perp\perp})$ est un voisinage de x ;

(iii) $x \in S(t^{\perp})$.

Démonstration. (a) Puisque l'application $t \longmapsto S(t)$ est un isomorphisme de $\overline{T}$ sur $\mathcal{O}_X$, elle induit un isomorphisme du treillis de Boole $\mathcal{B}$ des pseudo-compléments de $\overline{T}$ sur le treillis de Boole $\mathcal{R}_X$ des pseudo-compléments de $\mathcal{O}_X$.

(b) est une conséquence immédiate de (a).

(c) D'après (a), $S(t^{\perp\perp}) = S(t^{\perp})^{\perp}$; et pour tout ouvert U d'un espace topologique, $U \cup U^{\perp}$ est partout dense et $U \cap U^{\perp} = \emptyset$.

(d) Si $t \nleq x \in X$, alors $t^{\perp} \leq x$ puisque x est premier; donc $S(t) \subseteq Z(t^{\perp})$, ce qui entraîne $RS(t) \geq RZ(t^{\perp}) = t^{\perp}$. Inversement, $RS(t) \leq x$ pour tout $x \in X$ tel que $t \nleq x$; par suite,

$$RS(t) \wedge t \leq x \quad \text{pour tout} \quad x \in X .$$

On en déduit que $RS(t) \wedge t = 0$ et par conséquent $RS(t) \leq t^{\perp}$.

(e) Soit U un ouvert régulier de X . D'après (a), il existe $a \in \mathcal{B}$ tel que $U = S(a)$; donc $R(U)^{\perp} = RS(a)^{\perp} = a^{\perp\perp} = a$.

(f) L'adhérence de $S(t)$ est $ZRS(t)$; d'après (d), $ZRS(t) = Z(t^{\perp})$. L'intérieur de $Z(t)$ est $X \setminus ZR(X \setminus Z(t)) = SRS(t) = S(t^{\perp})$.

(g) resulte de (f) ; car d'après (f), l'intérieur de $Z(t)$ ainsi que de $Z(t^{\perp\perp})$ est égal à $S(t^{\perp})$.

PROPOSITION 3.2. - Soit k un élément compact d'un treillis complet distributif. Alors l'espace $V(k)$ des valeurs de k et l'espace $S(k)$ des éléments premiers ne contenant pas k sont quasi-compacts.

Démonstration. Soit $X = V(k)$ ou $X = S(k)$. Soit $(U_\mu)_\mu$ un recouvrement ouvert de X. Tout ouvert U_μ est de la forme $S_X(t_\mu)$ pour un certain $t_\mu \in T$. Puisque

$$X = \bigcup_\mu U_\mu = \bigcup_\mu S_X(t_\mu) = S_X(\bigvee_\mu t_\mu) ,$$

l'élément $\bigvee_\mu t_\mu$ n'est majoré par aucune valeur de k. D'après le lemme 3.1, on a donc $k \leqq \bigvee_\mu t_\mu$. Puisque k est compact, $(t_\mu)_\mu$ contient une sous-famille finie $t_1, \ldots, t_n$ telle que $k \leqq t_1 \vee \ldots \vee t_n$. Par conséquent,

$$X = S_X(t_1 \vee \ldots \vee t_n) = S_X(t_1) \cup \ldots \cup S_X(t_n) ,$$

c'est à dire que $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ est un recouvrement fini de X.

Si le plus grand élément 1 d'un treillis complet distributif est compact, alors $V(1) = \mu T$ et $S(1) = \xi T$. D'après 3.1 et 3.2, nous avons donc :

PROPOSITION 3.3. - Soit T un treillis complet distributif, dont le plus grand élément 1 est compact. Alors tout élément différent de 1 est majoré par un élément maximal. L'espace μT des éléments maximaux et l'espace ξT des éléments premiers sont quasi-compacts.

Un treillis T est dit algébrique si tout élément de T est la borne supérieure d'une famille d'éléments compacts.

EXEMPLE 3.4. - Soit A une algèbre universelle et $\mathcal{T}(A)$ le treillis complet des relations de congruence dans A. Les éléments compacts de $\mathcal{J}(A)$ sont les congruences qui ont un nombre fini de générateurs ; $\mathcal{J}(A)$ est un treillis algébrique (cf. [4], p. 189). Dans le treillis des idéaux d'un anneau, les éléments compacts sont les idéaux engendrés par un nombre fini d'éléments. Dans le treillis des idéaux d'un $\vee$-demi-treillis, les éléments compacts sont les idéaux principaux.

Dans un treillis algébrique, la distributivité est équivalente à des propriétés qui sont, en général, plus fortes :

PROPOSITION 3.5. - Pour un treillis algébrique complet, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) T est distributif.

(b) Tout élément de T est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers.

(c) T est un treillis de Brouwer.

(d) T est $\wedge$-distributif général.

Démonstration. (a) $\Longrightarrow$ (b) : Il suffit de montrer que dans un treillis algébrique complet, tout élément t est la borne inférieure d'une famille d'éléments semi-maximaux. Soit t' la borne inférieure de la famille de tous les éléments semi-maximaux majorant t. Supposons que $t < t'$. Puisque T est algébrique, il existe un élément compact $k \leq t'$ tel que $k \nleq t$. D'après 3.1, il y a une valeur v de k telle que $t \leq v$. Il s'ensuit que v est un élément semi-maximal tel que $t \leq v$ et $v \ngeq t'$, ce qui est absurde.

(b) entraîne (c) d'après la proposition 2.4.

(c) $\Longrightarrow$ (d) : Soit $(t_\mu)_\mu$ une famille d'éléments de T et soit

$t' = \bigvee_{\mu}(s \wedge t_{\mu})$. On a toujours $t' \leq s \wedge (\bigvee_{\mu} t_{\mu})$. Puisque $s \wedge t_{\mu} \leq t'$ et puisque T est un treillis de Brouwer, on a aussi $s \wedge (\bigvee_{\mu} t_{\mu}) \leq t'$.

Il est évident que (d) entraîne (a).

Une partie H de T est appelée <u>base compacte</u> de T si tout élément de H est compact et si tout élément de T est la borne supérieure d'une famille d'éléments de H.

Soit H une base compacte de T . Soit X un espace d'éléments premiers de T ; alors pour tout $t \in T$, l'ouvert $S_X(t)$ est la réunion d'ouverts de la forme $S_X(h)$, $h \in H$. Notons qu'un élément x de T est premier si et seulement si pour deux éléments quelconques h_1 et h_2 de H , $h_1 \nleq x$ et $h_2 \nleq x$ entraîne $h_1 \wedge h_2 \nleq x$. En effet, si x est premier, cette condition est vérifiée. Supposons inversement que cette condition soit vérifiée. Soient t_1 et t_2 deux éléments de T tels que $t_1 \nleq x$ et $t_2 \nleq x$. Puisque H est une base compacte, il existe h_1 et h_2 dans H tels que $h_1 \leq t_1$, $h_2 \leq t_2$ et $h_1 \nleq x$, $h_2 \nleq x$, d'où $h_1 \wedge h_2 \leq t_1 \wedge t_2$ et $h_1 \wedge h_2 \nleq x$ et par suite $t_1 \wedge t_2 \nleq x$.

Si $\mathcal{J}(A)$ est le treillis des congruences d'une algèbre universelle A , les congruences principales forment une base compacte de $\mathcal{J}(A)$.

4. Eléments premiers et filtres premiers.

Soit E un $\vee$-demi-treillis ayant un plus petit élément O. On appelle <u>filtre</u> toute partie F de E vérifiant les trois propriétés suivantes :

(F_1) $O \notin F$;

(F_2) F est filtrant inférieurement;

(F_3) Si $k \in F$, $k' \in E$ et $k \leq k'$, alors $k' \in F$.

Un filtre F de E est dit <u>premier</u>, s'il vérifie

(F_4) $E \setminus F$ est un $\vee$-sous-demi-treillis de E.

La famille des filtres dans E est inductive. Les filtres maximaux sont appelés <u>ultrafiltres</u>.

Soit T un treillis algébrique complet. L'ensemble K des éléments compacts est un $\vee$-sous-demi-treillis de T. Pour tout filtre premier F de K, soit

$$\pi(F) = \bigvee_{k \in K \setminus F} k .$$

Pour tout élément x de T, soit

$$\varphi(x) = \{k \in K ;\ k \not\leq x\} .$$

PROPOSITION 4.1. - <u>Pour tout filtre premier</u> F <u>de</u> K, $\pi(F)$ <u>est un élément premier de</u> T, <u>et pour tout élément premier</u> x <u>de</u> T, $\varphi(x)$ <u>est un filtre premier de</u> K. <u>De plus</u>, φ <u>et</u> π <u>sont des correspondances bijectives mutuellement réciproques entre l'ensemble des éléments premiers de</u> T <u>et l'ensemble des filtres premiers de</u> K.

Démonstration. Soit x un élément premier de T. Evidemment, $\varphi(x)$ vérifie (F_1),(F_3),(F_4). Si k_1 et k_2 sont deux éléments compacts non majorés par x, $k_1 \wedge k_2$ n'est pas majoré par x, puisque x est premier. Puisque $k_1 \wedge k_2$ est la borne supérieure d'une famille d'éléments compacts, il existe un élément compact k tel que $k \lneq k_1 \wedge k_2$ et $k \not\leq x$. Par suite, (F_2) est aussi vérifié, et $\varphi(x)$ est un filtre premier de K .

Puisque x est la borne supérieure de la famille des éléments compacts k tels que $k \lneq x$, on a bien $\pi\varphi(x) = x$.

Soit maintenant F un filtre premier de K . L'élément $\pi(F)$ est la borne supérieure des éléments compacts non dans F . Si un élément compact k est majoré par $\pi(F)$, il est donc majoré par par un élément compact n'appartenant pas à F , ce qui entraîne que k n'appartient pas à F . Par conséquent, $\varphi\pi(F) = F$. De plus, $\pi(F)$ est premier. En effet, soient t_1 et t_2 deux éléments de T non majorés par $\pi(F)$. Il existe k_1 et k_2 dans $\varphi\pi(F) = F$ tels que $k_1 \lneq t_1$ et $k_2 \lneq t_2$. Puisque F est un filtre, il existe dans F un élément $k \lneq k_1 \wedge k_2$. Puisque $k \not\leq \pi(F)$, on a aussi $t_1 \wedge t_2 \not\leq \pi(F)$.

Il est évident que φ et π inversent l'ordre, c'est à dire que $x_1 \lneq x_2$ pour deux éléments premiers de T entraîne $\varphi(x_1) \supseteq \varphi(x_2)$. On a donc :

COROLLAIRE. - φ <u>et</u> π <u>sont des correspondances bijectives mutuellement réciproques entre l'ensemble des éléments premiers minimaux de</u> T <u>et l'ensemble des filtres premiers maximaux de</u> K .

En général, on ne peut rien dire sur l'existence d'éléments premiers dans un treillis algébrique complet. Dans la proposition 3.5 nous avons vu que, dans un treillis algébrique complet distributif, tout élément est la borne inférieure d'une certaine famille d'éléments premiers. Maintenant nous allons considérer une autre classe de treillis algébriques qui possède "suffisamment" d'éléments premiers.

Soit E un treillis ayant un plus petit élément 0 . Nous dirons que E est 0-<u>distributif</u> si, pour tout $t_1, t_2, t \in E$,

$$t_1 \wedge t = 0 \quad \text{et} \quad t_2 \wedge t = 0 \quad \text{entraîne} \quad (t_1 \vee t_2) \wedge t = 0 .$$

Nous dirons que E est 0-<u>distributif</u> <u>général</u> si, pour tout $t \in E$ et pour toute famille $(t_\mu)_{\mu \in I}$ d'éléments de E tels que $t \wedge t_\mu = 0$ quel que soit $\mu \in I$,

$$t \wedge (\bigvee_\mu t_\mu) = 0 ,$$

pourvu que $\bigvee_\mu t_\mu$ existe.

LEMME 4.2. - <u>Soit</u> E <u>un treillis ayant un plus petit élément</u> 0 . <u>Si</u> E <u>est</u> 0-<u>distributif, tout ultrafiltre</u> F <u>de</u> E <u>est premier</u>.

Démonstration. Un élément k de E n'appartient pas à l'ultrafiltre F de E si, et seulement si, il existe k' dans F tel que $k \wedge k' = 0$. Si k_1 et k_2 sont deux éléments de $E \setminus F$, il existe donc k_1' et k_2' dans F tels que $k_1 \wedge k_1' = k_2 \wedge k_2' = 0$. Puisque E est 0-distributif, $(k_1 \vee k_2) \wedge (k_1' \wedge k_2') = 0$. Puisque $k_1' \wedge k_2'$ appartient à F , $k_1 \vee k_2$ n'appartient pas à F . Donc F est un filtre premier.

DEFINITION 4.3. - Un treillis T est appelé <u>arithmétique</u>, si T est un treillis algébrique et si l'ensemble K des éléments compacts est un sous-treillis 0-distributif de T .

D'après 4.2 et le corollaire de 4.1 on a le théorème suivant :

THEOREME 4.4. - <u>Soit</u> T <u>un treillis arithmétique complet. Alors</u> φ <u>et</u> π <u>sont des correspondances bijectives mutuellement réciproques entre l'ensemble des ultrafiltres dans</u> K <u>et l'ensemble</u> πT <u>des éléments premiers minimaux de</u> T .

Ce théorème a un série des conséquences :

COROLLAIRE 1. - <u>Pour un treillis algébrique complet</u> T , <u>dont l'ensemble</u> K <u>des éléments compacts est un sous-treillis, les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(a) T <u>est pseudo-complémenté</u> ;

(b) T <u>est</u> 0-<u>distributif général</u> ;

(c) T <u>est</u> 0-<u>distributif</u> ;

(d) K <u>est</u> 0-<u>distributif</u> ;

(e) 0 <u>est la borne inférieure de la famille</u> πT <u>des éléments premiers minimaux</u>.

Il est évident que (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (d). D'après la proposition 2.5, (e) $\Longleftrightarrow$ (a) . L'implication (d) $\Longrightarrow$ (e) est une conséquence du théorème 4.4 ; car pour tout élément compact k différent de 0 , il existe un ultrafiltre F contenant k et on a $k \nleq \pi(F)$. Par conséquent, la borne inférieure de la famille des éléments premiers minimaux est 0 .

Maintenant nous allons supposer que T est un treillis arithmétique complet. D'après le corollaire 1, T est pseudo-complémenté.

COROLLAIRE 2. - <u>Un élément premier</u> x <u>d'un treillis arithmétique complet</u> T <u>est premier minimal si, et seulement si, pour tout élément compact</u> k <u>de</u> T , <u>ou bien</u> $k \leq x$ <u>ou bien</u> $k^{\perp} \leq x$.

Démonstration. Supposons que x est premier minimal et k un élément compact. Si $k \nleq x$, alors $k^{\perp} \leq x$ puisque x est premier. Si $k \leq x$, il existe $k' \in \varphi(x)$ tel que $k \wedge k' = 0$ puisque $\varphi(x)$ est un ultrafiltre. Donc $k' \leq k^{\perp}$ et $k' \nleq x$. Donc $k^{\perp} \nleq x$.

Supposons inversement que x est un élément premier de T tel que pour tout élément compact k , $k \not\leq x$ ou $k^{\perp} \not\leq x$. Montrons que le filtre premier $\varphi(x)$ est un ultrafiltre. En effet, si k est un élément compact non dans $\varphi(x)$, alors $k \leq x$ et par suite $k^{\perp} \not\leq x$. Il existe donc un élément compact k' tel que $k' \leq k^{\perp}$ et $k' \not\leq x$. Donc $k' \in \varphi(x)$ et $k \wedge k' = 0$.

COROLLAIRE 3. - Soit x un élément premier minimal d'un treillis arithmétique complet T. Pour tout élément compact k tel que $k \leq x$, on a aussi $k^{\perp\perp} \leq x$.

En effet, $k \leq x$ entraîne $k^{\perp} \not\leq x$ d'après le corollaire 2. Donc $k^{\perp\perp} \leq x$, puisque x est premier.

COROLLAIRE 4. - Soit T un treillis arithmétique complet. L'espace πT des éléments premiers minimaux est séparé ; les ensembles $S_{\pi T}(k)$ k compact, sont ouverts et fermés et ils forment un base de la topologie de πT .

Démonstration. Puisque T est algébrique et puisque K est un sous treillis de T , les ensembles $S_{\pi T}(k)$, $k \in K$, forment une base de la topologie de πT . D'après le corollaire 2, $S_{\pi T}(k) = Z_{\pi T}(k^{\perp})$. Donc $S_{\pi T}(k)$ est aussi fermé pour tout élément compact k . Tout espace de Kolmogoroff ayant une base d'ensembles ouverts et fermés est séparé.

EXEMPLE. - Soit E un treillis ayant un plus petit élément 0 . Supposons que E est 0-distributif. Alors le treillis T des idéaux E est un treillis arithmétique complet.

5. Elément germinal associé à un élément premier.

Soit T un treillis complet pseudo-complémenté.

DEFINITION 5.1. - Pour tout élément premier x de T, soit

$$\gamma(x) = \bigvee_{t^{\perp} \nleq x} t \ ;$$

on appelle $\gamma(x)$ l'<u>élément germinal associé à</u> x.

PROPRIETES 5.2. - Soit x un élément premier d'un treillis complet pseudo-complémenté T.

a) Puisque $t \leq t^{\perp\perp}$ et $t^{\perp} = (t^{\perp\perp})^{\perp}$, on a

$$\gamma(x) = \bigvee_{t^{\perp} \nleq x} t^{\perp\perp} .$$

b) Puisque x est premier, $t^{\perp} \nleq x$ entraîne $t^{\perp\perp} \leq x$; donc

$$\gamma(x) \leq x .$$

c) $\gamma(x)$ est la borne supérieure d'une famille de pseudo-compléments filtrant supérieurement. En effet, si $t^{\perp} \nleq x$ et $s^{\perp} \nleq x$, alors $s^{\perp} \wedge t^{\perp} \nleq x$; donc $s^{\perp\perp} \vee t^{\perp\perp} = (s^{\perp} \wedge t^{\perp})^{\perp} \leq x$.

d) Pour tout élément compact k de T, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $k \leq \gamma(x)$; (ii) $k^{\perp\perp} \leq \gamma(x)$; (iii) $k^{\perp} \nleq x$.

En effet, puisque $\gamma(x)$ est la borne supérieure d'une famille filtrante de pseudo-compléments a tels que $a^{\perp} \nleq x$, la relation $k \leq \gamma(x)$ entraîne l'existence d'un pseudo-complément a tel que $k \leq a$ et $a^{\perp} \nleq x$. Il s'ensuit que $k^{\perp} \geq a^{\perp} \nleq x$. Donc (i) entraîne (iii). D'après la définition de $\gamma(x)$, (iii) entraîne (ii). Finalement, (ii) entraîne (i) puisque $k \leq k^{\perp\perp}$.

e) *Si* x *est un élément premier d'un treillis algébrique complet pseudo-complémenté,*

$$\gamma(x) = \bigvee_{k^{\perp} \nleq x} k^{\perp\perp} = \bigvee_{k \leq \gamma(x)} k^{\perp\perp} = \bigvee_{k \nleq x} k^{\perp}$$

où la lettre k *ne représente que des éléments compacts.*

Les deux premières égalités sont claires d'après la définition de $\gamma(x)$ et d). Démontrons la dernière égalité : Soit k_1 compact et $k_1 \leq \gamma(x)$. Alors $k_1^{\perp} \nleq x$ d'après d). Il existe donc un élément compact k tel que $k \leq k_1^{\perp}$ et $k \nleq x$. On a $k_1 \leq k_1^{\perp\perp} \leq k^{\perp}$. Puisque $k \nleq x$, on a aussi $k^{\perp\perp} \nleq x$ et par suite $k^{\perp} \leq \gamma(x)$. Par conséquent, $\gamma(x) = \bigvee_{k_1 \leq \gamma(x)} k_1 \leq \bigvee_{k \nleq x} k^{\perp} \leq \gamma(x)$.

PROPOSITION 5.3. - *Soit* T *un treillis complet et* X *un espace d'éléments premiers de* T , *dont la borne inférieure est* 0 . *Pour tout* $x \in X$, $\gamma(x)$ *est la borne supérieure des éléments* t *de* T *tels que* $Z_X(t)$ *soit un voisinage de* x .

Démonstration. D'après 2.6g, $Z_X(t)$ est un voisinage de x si, et seulement si, $t^{\perp} \nleq x$.

COROLLAIRE 1. - *Supposons que* T *et* X *vérifient les hypothèses de 5.3 et que* T *soit algébrique. Alors pour tout* $x \in X$, $\gamma(x)$ *est la borne supérieure des éléments compacts* k *tels que* $Z_X(k)$ *soit un voisinage de* x .

COROLLAIRE 2. - *Supposons que* T *et* X *vérifient les hypothèses de 5.3 et que* X *soit un espace séparé. Alors pour tout* x *dans* X , x *est le seul élément de* X *majorant* $\gamma(x)$.

En effet, si x et y sont deux éléments distincts de X, il y a un voisinage fermé V de x ne contenant pas y. Il existe t dans T tel que $V = Z_X(t)$. On a $t \nleq y$ et d'après la proposition, $t \leq \gamma(x)$. Par conséquent, $\gamma(x) \nleq y$.

DEFINITION 5.4. - Soit m un élément maximal d'un treillis distributif T. Un élément t de T est appelé m-<u>primaire</u> si $x \leq m$ pour tout élément $x \neq 1$ de T tel que $t \leq x$.

LEMME 5.5. - <u>Soit</u> m <u>un élément maximal d'un treillis algébrique complet distibutif. Alors</u> $\gamma(m) \leq t$ <u>pour tout élément m-primaire</u> t.

Démonstration. Tout élément t de T est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers (3.5). Si t est m-primaire, t est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers x tels que $x \leq m$. Or, si x est un élément premier tel que $x \leq m$, on a $\gamma(m) \leq x$; car si $t^{\perp} \nleq m$, on a aussi $t^{\perp} \nleq x$, ce qui entraîne $t \leq x$.

PROPOSITION 5.6. - <u>Soit</u> T <u>un treillis algébrique complet distributif tel que</u> (a) 0 <u>est la borne inférieure de la famille des éléments maximaux de</u> T, (b) 1 <u>est un élément compact</u>, (c) <u>l'espace</u> μT <u>des éléments maximaux est séparé. Alors pour tout élément maximal</u> m <u>de</u> T, $\gamma(m)$ <u>est le plus petit élément</u> m-<u>primaire de</u> T <u>et</u> $\gamma(m) = \bigwedge \{p \in \pi T \; ; \; p \leq m\}$.

Démonstration. D'après le corollaire 2 de 5.3, $\gamma(m)$ est m-primaire. D'après le lemme 5.4, $\gamma(m)$ est m-primaire minimum.

En particulier, $\gamma(m) \leq x$ pour tout élément premier minimal x tel que $x \leq m$. D'autre part, $\gamma(m)$ est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers. Puisque tout élément premier majorant $\gamma(m)$ est aussi m-primaire et puisque tout élément premier majore un élément premier minimal, on a bien $\gamma(m) = \bigwedge \{p \in \pi T ;\ p \leq m\}$.

PROPOSITION 5.7. - <u>Soit</u> x <u>un élément premier d'un treillis arithmétique complet. Alors</u> $\gamma(x) = \bigwedge \{p \in \pi T ;\ p \leq x\}$.

Démonstration. Soit p un élément premier minimal majoré par x. Si $t^{\perp} \nleq x$, alors $t^{\perp} \nleq p$. Par conséquent, $\gamma(x) \leq p$. Il s'ensuit que $\gamma(x) \leq \bigwedge \{p \in \pi T ;\ p \leq x\}$. Inversement, soit k un élément compact non majoré par $\gamma(x)$. Pour tout élément compact k' tel que $k' \nleq x$, on a $k \wedge k' > 0$. Il existe donc un ultrafiltre F de K contenant $\varphi(x)$ et k. L'élément premier minimal $\pi(F)$ ne majore pas k et on a $\pi(F) \leq x$. Par conséquent, $\gamma(x) = \bigwedge \{p \in \pi T ;\ p \leq x\}$.

COROLLAIRE 1. - <u>Pour tout élément premier minimal</u> p <u>d'un treillis arithmétique complet</u>, $p = \gamma(p)$.

COROLLAIRE 2. - <u>Pour tout élément premier</u> x <u>d'un treillis arithmétique complet</u>, $\gamma(x)$ <u>est premier si, et seulement si</u>, x <u>contient un seul élément premier minimal</u>.

6. Treillis projetables et plats.

Soit T un treillis distributif pseudo-complémenté. Rappelons que pour tout élément a de T, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) a admet un complément.

(b) $a \vee a^{\perp} = 1$.

(c) $a = a^{\perp\perp}$ et $a^{\perp\perp} \vee a^{\perp} = 1$.

Si a vérifie l'une de ces propriétés, on dit que a est central. Les éléments centraux forment un treillis de Boole $\mathcal{D}$, sous-treillis de T et sous-treillis de Boole du treillis de Boole $\mathcal{B}$ des pseudo-compléments.

On appelle treillis de Stone tout treillis distributif pseudo-complémenté T tel que $\mathcal{D} = \mathcal{B}$. On peut donner les caractérisations suivantes d'un treillis de Stone :

PROPOSITION 6.1 (Grätzer et Schmidt [16], Frink [14]). - *Pour un treillis distributif pseudo-complémenté* T, *les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(a) T *est un treillis de Stone*.

(b) $a^{\perp} \vee b^{\perp} = (a \wedge b)^{\perp}$ *quels que soient* a, b *dans* T.

(c) $\mathcal{B}$ *est un sous-treillis de* T.

(d) *Tout idéal premier de* T *contient un unique idéal premier minimal*.

(e) *Pour tout* $t \in T$, *l'ensemble* $\{s\ ;\ t \wedge s = 0\}$ *est un facteur direct de* T.

Rappelons qu'un treillis algébrique complet distributif est pseudo-complémenté (cf. 3.5).

DEFINITION 6.2. - Un treillis algébrique complet distributif est appelé <u>projetable</u> si $k^{\perp} \vee k^{\perp\perp} = 1$ pour tout élément compact k de T.

PROPOSITION 6.3. - <u>Soit</u> T <u>un treillis algébrique complet distributif projetable. Soit</u> K <u>l'ensemble des éléments compacts de</u> T. <u>On a les propriétés suivantes</u> :

a) <u>Pour tout</u> $k_1, k_2 \in K$, <u>il existe</u> $\bar{k}_1 \in T$ <u>tel que</u>

$$\bar{k}_1 \wedge k_2 = 0 \quad \underline{\text{et}} \quad k_1 = \bar{k}_1 \vee (k_1 \wedge k_2) .$$

b) <u>Pour tout</u> $k_1, k_2 \in K$, <u>on a</u> $k_1^{\perp} \vee k_2^{\perp} = (k_1 \wedge k_2)^{\perp}$.

c) T <u>est arithmétique.</u>

d) <u>Tout élément premier de</u> T <u>majore un unique élément premier minimal</u>.

e) <u>Tout élément germinal de</u> T <u>est premier</u>.

f) <u>Les ensembles de la forme</u> $S_{\pi T}(k)$, $k \in K$, <u>forment une base de l'espace</u> πT <u>des éléments premiers minimaux et ils sont tous compacts</u>.

Démonstration. (a) Soient $k_1, k_2 \in K$. Posons $\bar{k}_1 = k_1 \wedge (k_1 \wedge k_2)^{\perp}$. Alors $\bar{k}_1 \wedge k_2 = 0$ et

$$\bar{k}_1 \vee (k_1 \wedge k_2) = (k_1 \wedge (k_1 \wedge k_2)^{\perp}) \vee (k_1 \wedge k_2) = k_1 .$$

(b) On vérifie facilement que $k_1^{\perp} \vee k_2^{\perp}$ est un complément de $k_1^{\perp\perp} \wedge k_2^{\perp\perp} = (k_1 \wedge k_2)^{\perp\perp}$. Donc $k_1^{\perp} \vee k_2^{\perp} = (k_1 \wedge k_2)^{\perp}$.

(c) Il suffit de montrer que les éléments compacts forment un $\wedge$-sous-demi-treillis de T. Soient k_1 et k_2 deux éléments compacts et supposons que $(t_\mu)_{\mu \in I}$ soit une famille filtrant supérieurement d'éléments de T tels que $k_1 \wedge k_2 \leqq \bigvee_{\mu} t_\mu$. Choisissons $\bar{k}_1$ comme dans (a). Alors

$$k_1 = \bar{k}_1 \vee (k_1 \wedge k_2) \leqq \bigvee_{\mu} (\bar{k}_1 \vee t_\mu) \; . \; \cancel{\text{Puisque } k_1}$$

Puisque k_1 est compact, on en déduit pour au moins un $\mu \in I$,

$$k_1 \wedge k_2 \leqq (\bar{k}_1 \vee t_\mu) \wedge k_2 = (\bar{k}_1 \wedge k_2) \vee (t_\mu \wedge k_2) \leqq t_\mu \; .$$

Donc $k_1 \wedge k_2$ est compact.

d) Supposons que x est un élément premier de T tel qu'il existe deux éléments premiers minimaux distincts p_1 et p_2 majorés par x . Alors on peut trouver un élément compact k vérifiant $k \leqq p_1$ et $k \nleqq p_2$. On en déduit $k^{\perp\perp} \leqq p_1$ et $k^{\perp} \leqq p_2$, d'où $k^{\perp\perp} \vee k^{\perp} \leqq x$, ce qui est impossible dans un treillis projetable.

e) Compte tenu de 5.7, la propriété e) est une conséquence de d).

f) Cette propriété sera démontré dans le chapitre II.4.7.

Définissons maintenant une classe de treillis projetables qui a des propriétés particulièrement intéressantes :

DEFINITION 6.4. - Un treillis algébrique complet distributif T est appelé <u>plat</u> si tout élément compact de T est central, c'est à dire si $k \vee k^{\perp} = 1$ pour tout élément compact k de T .

Si T est un treillis algébrique complet distributif plat, T est projetable et on a $k = k^{\perp\perp}$ pour tout élément compact k de T . Donnons quelques caractérisations de treillis plats :

THEOREME 6.5. - <u>Pour un treillis algébrique complet distributif T , les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(a) T <u>est plat</u>.

(b) $\gamma(x) = x$ <u>pour tout élément premier</u> x <u>de</u> T .

(c) T <u>est arithmétique et tout élément premier de</u> T <u>est maximal</u>.

(d) T <u>est arithmétique et tout élément premier de</u> T <u>est minimal</u>.

(e) T <u>est arithmétique</u>, 0 <u>est la borne inférieure de la famille des éléments maximaux de</u> T <u>et les ensembles de la forme</u> $S_{\mu T}(k)$, k <u>compact, forment une base d'ouverts compacts fermés de l'espace</u> μT <u>des éléments maximaux de</u> T .

Démonstration. (a) $\Longrightarrow$ (b) : Soit x un élément premier. Soit k un élément compact majoré par x . Puisque $k \vee k^{\perp} = 1$, on a $k^{\perp} \nleq x$ et par suite $k \leq \gamma(x)$. Par conséquent, $x = \gamma(x)$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) : Soit k un élément compact de T . Pour tout élément premier x tel que $k \leq x$, on a $k \leq \gamma(x)$, donc $k^{\perp} \nleq x$ d'après 5.2d. Par conséquent, $k \vee k^{\perp}$ n'est majoré par aucun élément premier, ce qui entraîne $k \vee k^{\perp} = 1$.

(a) et (b) $\Longrightarrow$ (c) : Puisqu'un treillis plat est projetable, il est aussi arithmétique d'après 6.3. Soient x et y deux éléments premiers tels que $x \leq y$. On a donc $\gamma(y) \leq x$. Mais d'après (b), $\gamma(y) = y$; donc $x = y$. Cela entraîne (c) puisque tout élément de T est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers.

Il est clair que (d) et (c) sont équivalentes.

(a) et (c) $\Longrightarrow$ (e) : Puisqu'un treillis plat est projetable, les ensembles $S_{\pi T}(k)$, k compact, forment une base d'ouverts compacts de πT (cf. 6.3). De plus, dans tout treillis algébrique complet distributif, 0 est la borne inférieure de la famille des éléments premiers minimaux. D'après (c), $\pi T = \mu T$. On a donc démontré (e).

(e) $\Longrightarrow$ (c) : Soit m un élément maximal de T . Si k est un élément compact tel que $k \lneq m$, alors $Z_{\mu T}(k) = \mu T \setminus S_{\mu T}(k)$ est un voisinage de m ; donc $k \leq \gamma(m)$ d'après 5.3. Il s'ensuit que $m = \gamma(m)$. Par conséquent, tout élément maximal de T est premier minimal. Puisque 0 est la borne inférieure de la famille des éléments maximaux de T , μT est une partie partout dense de πT . Pour tout élément compact k , $S_{\mu T}(k)$ est une partie partout dense de $S_{\pi T}(k)$. Puisque πT est un espace séparé et $S_{\mu T}(k)$ compact, $S_{\mu T}(k)$ est une partie fermée de πT . Donc $S_{\mu T}(k) = S_{\pi T}(k)$. Puisque tout élément premier minimal appartient à au moins un ensemble de la forme $S_{\pi T}(k)$, k compact, on en déduit $\mu T = \pi T$.