N° d'enregistrement au C.N.R.S. :

A.O. 4800

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Klaus KEIMEL

1re Thèse. — Représentation de groupes et d'anneaux réticulés par des sections dans des faisceaux.

2e Thèse. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues, le 16 Juin 1970, devant la Commission d'Examen :

Mme	M.-L. DUBREIL-JACOTIN	Président
MM.	J. DIXMIER	Examinateurs
	M. SCHÜTZENBERGER	

REPRESENTATION DE GROUPES ET D'ANNEAUX RETICULES PAR DES SECTIONS DANS DES FAISCEAUX

par Klaus KEIMEL

Je remercie vivement Mme DUBREIL-JACOTIN qui m'a encouragé à écrire ce travail, M. DIXMIER qui a bien voulu rapporter cette thèse et M. SCHÜTZENBERGER qui m'a donné le sujet de ma deuxième thèse, ainsi que mes collègues A. BIGARD et S. WOLFENSTEIN pour de nombreuses conversations utiles.

Je tiens à remercier chaleureusement M. K.H. HOFMANN (Tulane University) dont les idées sont à l'origine de ce travail et qui n'a jamais ménagé son temps ni ses conseils à l'égard de mon travail.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'établir une théorie de représentation pour les anneaux réticulés et d'en donner des applications.

Nombreux sont les auteurs qui ont donné des représentations de groupes réticulés archimédiens et d'anneaux de fonctions archimédiens au moyen de fonctions continues définies sur certains espaces topologiques à valeurs dans la droite réelle achevée, par exemple D.G. Johnson [21], D. Papert [27], J. Kist [25], J.S. Bernau [1], B.Z. Vulikh [41].(Nous appelons anneau de fonctions, ou simplement f-anneau, tout anneau réticulé, produit sous-direct d'anneaux totalement ordonnés.) Les méthodes utilisées par ces auteurs ne peuvent plus être appliquées aux groupes réticulés non-archimédiens ni aux anneaux réticulés en général.

Nous cherchons à représenter les anneaux réticulés par des sections de certains faisceaux. Les méthodes que nous utilisons ont été développées par J. Dauns et K.H. Hofmann [11], [12] ainsi que par R.S. Pierce [28] dans la théorie des anneaux (non réticulés). Kist [42], Ch. Mulvey [43] et S. Teleman [34], [35], [36], [37] ont utilisé ces mêmes méthodes de représentation.

Le problème principal que nous nous sommes posé est le suivant :

Etant donné un anneau réticulé A , trouver canoniquement un espace topologique compact $\mathcal{B}A$ et un faisceau $\mathcal{F}^{\mathcal{B}}(A)$ d'anneaux réticulés de base $\mathcal{B}A$, tels que A soit isomorphe à l'anneau réticulé $\Gamma\mathcal{F}^{\beta}(A)$ de toutes les sections (globales et continues) de $\mathcal{F}^{\beta}(A)$.

Ce problème est résolu en toute généralité.

Une note de J.R. Isbell [18] a été extrêmement utile pour la solution du problème. Isbell a associé fonctoriellement à tout groupe réticulé commutatif un espace topologique compact. La construction d'Isbell n'utilise que les propriétés du treillis des idéaux de A . (Ici on appelle idéal tout noyau d'un homomorphisme de groupes (respectivement d'anneaux) réticulés.) Généralisant la construction d'Isbell, nous exposons dans le deuxième chapitre une construction qui permet d'associer canoniquement à tout treillis distributif pseudo-complémenté, un espace topologique compact. Le treillis des idéaux d'un anneau réticulé A étant distributif et pseudo-complémenté, cette construction nous permet d'associer à tout anneau réticulé A un espace compact βA . Si l'on définit les morphismes d'anneaux réticulés d'une manière appropriée, β est un foncteur. Nous montrons aussi que βA n'est rien d'autre que le compactifié de Stone-Čech de l'espace des idéaux irréductibles de A , muni de la topologie de Zariski. Dans le cas particulier où A est l'anneau $C(X)$ des fonctions réelles continues sur un espace topologique X , l'espace βA est le compactifié de Stone-Čech de X .

Sur cet espace βA nous construisons un faisceau $\mathcal{F}^{\beta}(A)$ d'anneaux réticulés tel que A soit isomorphe à l'anneau réticulé $\Gamma\mathcal{F}^{\beta}(A)$ de toutes les sections de $\mathcal{F}^{\beta}(A)$. Si l'on définit les morphismes de manière appropriée, $\mathcal{F}^{\beta}$ est un foncteur. S[illegible] l'anneau $C(X)$ des fonctions réelles continues définies sur un espace compact X, le faisceau $\mathcal{F}^{\beta}(A)$ n'est rien d'autre que le faisceau des germes des fonctions réelles continues.

Il y a des anneaux réticulés A d'une structure très riche, dont l'espace βA est réduit à un seul point, par exemple les extensions lexicographiques. Ce phénomène ne peut pas se produire si A est riche en facteurs directs ; car les facteurs directs de A correspondent bijectivement aux ouverts fermés de βA. Dans ce sens nous considérons en détail les représentations par sections de plusieurs classes d'anneaux réticulés :

a) Les anneaux réticulés stoniens dans la section III.4 (un anneau réticulé est stonien si tout pseudo-complément dans le treillis des idéaux de A est un facteur direct ; les anneaux de fonctions complets ou orthocomplets sont des exemples d'anneaux stoniens) ;

b) Les anneaux réticulés projetables dans la section III.5 (un anneau réticulé est projetable si le pseudo-complément de tout idéal principal est un facteur direct ; les anneau de fonctions σ-complets sont projetables) ;

c) Les anneaux réticulés quasi-réguliers dans la section III.9 (un anneau réticulé est quasi-régulier si tout idéal principal est un facteur direct).

Les anneaux réticulés quasi-réguliers correspondent aux anneaux biréguliers dans la théorie des anneaux. Notre théorème de représentationIII.9.8 correspond au théorème de représentation d'anneaux biréguliers de Bourbaki [7], p. 173, et de Dauns et Hofmann [11]. Les groupes hyper-archimédiens de Bigard [3] sont quasi-réguliers.

Déjà Isbell a donné deux autres classes d'anneaux réticulés pour lesquelles l'espace βA n'est pas trivial :

d) Si A est un groupe réticulé abélien ayant une unité forte, βA est homéomorphe à l'espace des idéaux maximaux de A, muni de la topologie de Zariski (voir section III.6).

e) Si A est un anneau de fonctions, l'espace des idéaux maximaux dominés est homéomorphe à un sous-espace ouvert de βA. (Un idéal maximal I de A est dit dominé s'il existe un élément d dans A n'appartenant pas à I, vérifiant $d^2 + I \geq d + I$. Voir section III.7.)

Nous donnons une généralisation du premier cas et étudions le faisceau $\mathcal{F}^{\beta}(A)$ dans les deux cas.

Les applications que nous donnons de cette théorie de représentation concernent surtout les anneaux de fonctions. Nous montrons que tout anneau de fonctions admet une extension stonienne minimale et une extension orthocomplète minimale ; de plus, ces extensions sont uniques dans un certain sens. Ainsi nous précisons des résultats de Veksler [40] et Bernau [2]. Nous généralisons aux idéaux dominés un certain nombre de résultats de Henriksen et Isbell [17] sur les idéaux supermodulaires des anneaux de fonctions. Nous montrons par exemple, que dans un anneau de fonctions, tout idéal engendré par un élément d vérifiant $d^2 \geq d \geq 0$ est un facteur direct. Enfin nous généralisons la notion d'anneau de fonctions archimédien. Nous dirons qu'un anneau de fonctions est quasi-archimédien si pour tout idéal $I \neq \{0\}$ et pour tout élément a, il existe $b \in I$ tel que $b \not\leq a$. Nous montrons que tout anneau de fonctions quasi-archimédien est un produit sous-direct d'un anneau réticulé archimédien B tel que $B^2 = \{0\}$ et d'un anneau de fonctions $\mathcal{J}$-semisimple. (Un anneau de fonctions est dit $\mathcal{J}$-semisimple si l'intersection de ses idéaux maximaux dominés est réduite à zéro.) Ce résultat permet de caractériser les anneaux de fonctions $\mathcal{J}$-semisimples comme les anneaux de fonctions n'admettant aucun idéal infinitésimal non nul. (cf. III.8).

Pour inclure aussi les groupes réticulés non commutatifs dans cette théorie de représentation, nous introduisons la notion d'annéloïde réticulé. Un annéloïde réticulé est un groupe réticulé non nécessairement commutatif, noté additivement, muni d'une multiplication distributive par rapport à l'addition et vérifiant la règle habituelle d'isotonie. Cette notion ne comporte aucun intérêt en elle-même. Mais elle permet d'établir la théorie de représentation simultanément pour les groupes réticulés non commutatifs et les anneaux réticulés.

Beaucoup de propriétés des annéloïdes réticulés que nous utilisons, ne dépendent que du treillis des idéaux. C'est pour cette raison que nous avons anticipé dans un premier chapitre les raisonnements qui ne concernent que les treillis et en particulier les éléments irréductibles des treillis algébriques distributifs.

La terminologie en ce qui concerne les treillis est celle de Birkhoff [4], en ce qui concerne la topologie, celle de Bourbaki [6]; en particulier, un espace topologique compact est toujours séparé, sinon on parle d'espace quasi-compact.