Chapitre II

L'ESPACE DE STONE-ČECH ISBELL D'UN TREILLIS DISTRIBUTIF PSEUDO-COMPLEMENTE

J.R. Isbell [18] a associé à tout groupe réticulé commutatif G un espace topologique compact βG et il a démontré que certains homomorphismes de groupes réticulés $f : G \longrightarrow H$ induisent des applications continues $\beta f ; \beta H \longrightarrow \beta G$ de manière que β soit un foncteur contravariant. Bigard a remarqué que la construction de βG n'utilise que les propriétés du treillis des idéaux de G et il a suggéré de généraliser les raisonnements d'Isbell aux treillis distributifs pseudo-complémentés.

Nous associerons à tout treillis distributif pseudo-complémenté T un espace topologique compact βT . Avec une définition convenable des morphismes, β sera un foncteur. La construction de βT est une abstraction d'une certaine construction du compactifié de Stone-Čech d'un espace topologique. Le treillis $\mathcal{O}_X$ des ouverts d'un espace topologique X est en effet distributif et pseudo-complémenté, et nous verrons que $\beta \mathcal{O}_X$ n'est rien d'autre que le compactifié de Stone-Cech de X . Plus généralement : Si T est un treillis distributif complet, dont tout élément est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers, alors βT n'est rien d'autre que le compactifié de Stone-Cech de l'espace ξT de tous les éléments premiers de T . Ce résultat s'applique au treillis des idéaux d'un groupe réticulé.

1. c-r-voisinages et c-r-idéaux.

Dans cette section, T désignera toujours un treillis pseudo-complémenté distributif. Nous utiliserons les notations de I.1.3. En particulier, $\vee$ et $\wedge$ désigneront les opérations de treillis dans T ; le pseudo-complément d'un élément t de T sera noté $t^{\perp}$. On désigne par $\mathcal{B}$ le treillis de Boole des pseudo-compléments dans T.

DEFINITION 1.1. - Soient a et b deux éléments de T. Nous dirons que b est un r-<u>voisinage</u> de a, et nous écrirons $a \prec b$, si $a^{\perp} \vee b = 1$.

EXEMPLE 1.2. - Soit $\mathcal{O}_X$ le treillis des ouverts d'un espace topologique X. Soient $U, V \in \mathcal{O}_X$. Alors V est un r-voisinage de U si, et seulement si, $\overline{U} \subseteq V$.

Démontrons quelques propriétés de la relation $\prec$:

Puisque $0^{\perp} \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$ et $1^{\perp} \vee 1 = 1$, on a :

(P1) $\quad 0 \prec 0$ et $1 \prec 1$.

Si $a^{\perp} \vee b = 1$, alors $a = a \wedge (a^{\perp} \vee b) = (a \wedge a^{\perp}) \vee (a \wedge b) = a \wedge b$; donc:

(P2) $\quad a \prec b$ entraîne $a \leq b$.

Si $a^{\perp} \vee b = 1$, alors $(b^{\perp})^{\perp} \vee a^{\perp} = 1$; donc :

(P3) $\quad a \prec b$ entraîne $b^{\perp} \prec a^{\perp}$.

Si $a^{\perp} \vee b = 1$, alors $(a^{\perp\perp})^{\perp} \vee b = 1$; donc :

(P4) $\quad a \prec b$ entraîne $a^{\perp\perp} \prec b$.

Si $a_1 \leq a \prec b \leq b_1$, alors $a_1^{\perp} \geq a^{\perp}$ et $a^{\perp} \vee b = 1$, donc $a_1^{\perp} \vee b_1 = 1$:

(P5) $\quad a_1 \leq a \prec b \leq b_1$ entraîne $a_1 \prec b_1$.

Si $a^{\perp} \vee b = 1$ et $a_1^{\perp} \vee b_1 = 1$, alors $a^{\perp} \vee b \vee b_1 = 1 = a_1^{\perp} \vee b \vee b_1$, ce qui entraîne $(a^{\perp} \wedge a_1^{\perp}) \vee (b \vee b_1) = 1$ puisque T est distributif. Puisque $a^{\perp} \wedge a_1^{\perp} = (a \vee a_1)^{\perp}$, nous avons donc :

(P6) $a \prec b$ et $a_1 \prec b_1$ entraîne $a \vee a_1 \prec b \vee b_1$.

Si $a^{\perp} \vee b = 1$ et $a^{\perp} \vee b_1 = 1$, alors $a^{\perp} \vee (b \wedge b_1) = 1$. Donc $a \prec b$ et $a \prec b_1$ entraînent $a \prec b \wedge b_1$. On en déduit :

(P7) $a \prec b$ et $a_1 \prec b_1$ entraîne $a \wedge a_1 \prec b \wedge b_1$.

DÉFINITION 1.3. - Soit Q l'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1. Soient a et b deux éléments de T. On appelle <u>chaîne normale entre</u> a <u>et</u> b toute famille $(c_r)_{r \in Q}$ d'éléments de T telle que $c_o = a$ et $c_1 = b$ et telle que $c_r \prec c_s$ chaque fois que $r < s$. On dit que b est un c-r-<u>voisinage</u> de a, et on écrit $a \prec\!\!\prec b$, s'il existe au moins une chaîne normale entre a et b. Dans cette définition on peut évidemment remplacer Q par n'importe quel ensemble ordonné o-isomorphe à Q.

EXEMPLE 1.4. - Une famille $(U_r)_{r \in Q}$ d'ouverts d'un espace topologique X est une chaîne normale dans $\mathcal{O}_X$ si, et seulement si, $\overline{U}_r \subseteq U_s$ chaque fois que $r < s$.

Démontrons quelques propriétés de la relation $\prec\!\!\prec$:

La famille $(a_r)_{r \in Q}$ avec $a_r = 0$ (resp. $a_r = 1$) pour tout $r \in Q$ est une chaîne normale d'après (P1). Par conséquent :

(P'1) $0 \prec\!\!\prec 0$ et $1 \prec\!\!\prec 1$.

Si b est un c-r-voisinage de a, alors b est un r-voisinage de a. Donc (P2) entraîne :

(P'2) $a \prec\!\!\prec b$ entraîne $a \leq b$.

Si $(c_r)_{r \in Q}$ est une chaîne normale entre a et b, la famille

$(c_{1-r}{}^{\perp})_{r\in Q}$ est une chaîne normale entre $b^{\perp}$ et $a^{\perp}$ d'après (P3); donc :

(P'3) $a \lll b$ entraîne $b^{\perp} \lll a^{\perp}$.

De même, la propriété (P4) permet de montrer :

(P'4) $a \lll b$ entraîne $a^{\perp\perp} \lll b$.

Si $a_1 \leqq a$ et $b \leqq b_1$ et si $(c_r)_{r\in Q}$ est une chaîne normale entre a et b , la famille $(d_r)_{r\in Q}$ définie par $d_0 = a_1$, $d_1 = b_1$, $d_r = c_r$ pour tout $r \neq 0,1$, est une chaîne normale entre a_1 et b_1 d'après (P5). Nous avons donc :

(P'5) $a_1 \leqq a \lll b \leqq b_1$ entraîne $a_1 \lll b_1$.

Si $(c_r)_{r\in Q}$ est une chaîne normale entre a et b et si $(d_r)_{r\in Q}$ est une chaîne normale entre a_1 et b_1 , alors $(c_r \vee d_r)_{r\in Q}$ est une chaîne normale entre $a \vee a_1$ et $b \vee b_1$ et $(c_r \wedge d_r)_{r\in Q}$ est une chaîne normale entre $a \wedge a_1$ et $b \wedge b_1$ d'après (P6) et (P7). Donc :

(P'6) $a \lll b$ et $a_1 \lll b_1$ entraîne $a \vee a_1 \lll b \vee b_1$.

(P'7) $a \lll b$ et $a_1 \lll b_1$ entraîne $a \wedge a_1 \lll b \wedge b_1$.

La propriété suivante sera très importante : Si $(c_r)_{r\in Q}$ est une chaîne normale entre a et b , la famille $(c_r)_{r\in Q, r\leqq 1/2}$ est une chaîne normale entre a et $c_{1/2}$ et $(c_r)_{r\in Q, r\geqq 1/2}$ est une chaîne normale entre $c_{1/2}$ et b . Donc :

(P'8) Si $a \lll b$, il existe c tel que $a \lll c \lll b$.

DEFINITION 1.5. - Un idéal $\mathcal{C}$ du treillis T est appelé c-r-<u>idéal</u> si tout élément a de $\mathcal{C}$ admet un c-r-voisinage b appartenant aussi à $\mathcal{C}$.

Soit $\mathcal{J}(T)$ le treillis de tous les idéaux de T . D'après [4], p. 114, $\mathcal{J}(T)$ est un treillis distributif. Soit $\mathcal{C}(T)$ l'ensemble des c-r-idéaux de T .

LEMME 1.6. - <u>Si</u> $\mathcal{C}$ <u>est la borne supérieure dans</u> $\mathcal{J}(T)$ <u>d'une famille</u> $(\mathcal{C}_\mu)_{\mu\in M}$ <u>de c-r-idéaux</u>, $\mathcal{C}$ <u>est aussi un c-r-idéal</u>.

Démonstration. Soit a un élément de $\mathcal{C}$. Il y a un nombre fini d'indices $\mu_1, \dots, \mu_n \in M$ et des éléments $a_i \in \mathcal{C}_{\mu_i}$ $(i = 1, \dots, n)$ tels que $a = a_1 \vee \dots \vee a_n$. Tout a_i admet un c-r-voisinage b_i dans $\mathcal{C}_{\mu_i}$. D'après (P'6), $b = b_1 \vee \dots \vee b_n$ est un c-r-voisinage de a. De plus, b appartient à $\mathcal{C}$. Donc $\mathcal{C}$ est un c-r-idéal.

D'après le lemme 1.6, $\mathcal{C}(T)$ est un $\vee$-sous-demi-treillis complet de $\mathcal{J}(T)$. Puisque $\{0\}$ est un c-r-idéal, $\mathcal{C}(T)$ est donc un treillis complet. Tout idéal $\mathfrak{y}$ de T contient un plus grand c-r-idéal que nous désignerons par $k(\mathfrak{y})$. Si $\mathfrak{y}$ est l'idéal principal engendré par un élément a de T, c'est à dire si

$$\mathfrak{y} = \{t \in T \ ; \ t \leq a\},$$

on notera simplement $k(a)$ au lieu de $k(\mathfrak{y})$. On peut donner une caractérisation simple de $k(\mathfrak{y})$:

LEMME 1.7. - <u>Pour tout idéal</u> $\mathfrak{y}$ <u>de</u> T, $k(\mathfrak{y})$ <u>est l'ensemble des éléments</u> a <u>de</u> T <u>qui admettent un c-r-voisinage</u> $b \in \mathfrak{y}$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{z}$ l'ensemble des éléments a de T qui admettent un c-r-voisinage $b \in \mathfrak{y}$. Evidemment, $k(\mathfrak{y}) \subseteq \mathfrak{z}$. D'autre part, $\mathfrak{z}$ est un c-r-idéal. En effet, si $a \ll b \in \mathfrak{y}$ et $a_1 \leq a$, alors $a_1 \ll b$ d'après (P'5) ; donc $\mathfrak{z}$ est héréditaire. Si $a \ll b \in \mathfrak{y}$ et $a_1 \ll b_1 \in \mathfrak{y}$, alors $a \vee a_1 \ll b \vee b_1 \in \mathfrak{y}$ d'après (P'6); donc $\mathfrak{z}$ est un idéal de T. L'idéal $\mathfrak{z}$ est un c-r-idéal ; car si $a \in \mathfrak{z}$, il existe $b \in \mathfrak{y}$ tel que $a \ll b$; il existe donc un c tel que $a \ll c \ll b$, et on a $c \in \mathfrak{z}$. Puisque $\mathfrak{z}$ est un c-r-idéal contenu dans $\mathfrak{y}$, on a aussi $\mathfrak{z} \subseteq k(\mathfrak{y})$.

COROLLAIRE. - Si b est un élément quelconque de T, le c-r-idéal $k(b)$ est l'ensemble des éléments a de T dont b est un c-r-voisinage.

L'intersection d'une famille quelconque de c-r-idéaux de T n'est pas nécessairement un c-r-idéal. Mais si $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont deux c-r-idéaux, $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ est aussi un c-r-idéal. En effet, tout élément a de $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ admet un c-r-voisinage $b_1 \in \mathscr{C}_1$ et un c-r-voisinage $b_2 \in \mathscr{C}_2$; l'élément $b = b_1 \wedge b_2$ appartient à $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ et est un c-r-voisnage de a d'après (P'7). Par conséquent, $\mathscr{C}(T)$ est un sous-treillis de $\mathscr{I}(T)$; en particulier, $\mathscr{C}(T)$ est distributif. Puisque $a \prec\!\!\prec 1$ pour tout $a \in T$, on a $T \in \mathscr{C}(T)$. De plus, T est un élément compact de $\mathscr{C}(T)$, puisque tout idéal principal est compact. Ainsi nous avons démontré :

PROPOSITION 1.8. - L'ensemble $\mathscr{C}(T)$ des c-r-idéaux de T est un treillis distributif complet dont le plus grand élément est compact.

D'après I,3.3, tout c-r-idéal propre de T est contenu dans un c-r-idéal maximal de T. Dans la section 2 nous aurons besoin de la caractérisation suivante des c-r-idéaux maximaux :

LEMME 1.9. - Pour un c-r-idéal $\mathscr{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathscr{C}$ est un c-r-idéal maximal.

(b) Il existe un idéal premier $\mathfrak{P}$ de T tel que $\mathscr{C} = k(\mathfrak{P})$.

(c) $a \prec\!\!\prec b$ entraîne $a \in \mathscr{C}$ ou $b^{\perp} \in \mathscr{C}$ quels que soient $a, b \in T$.

Démonstration. (a) entraîne (b), puisque tout c-r-idéal maximal $\mathscr{C}$ est contenu dans au moins un idéal maximal $\mathfrak{P}$ de T, ce qui entraîne $\mathcal{C} = k(\mathfrak{P})$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) : Soit $\mathcal{C} = k(\mathfrak{P})$ pour un idéal premier $\mathfrak{P}$ de T et supposons que $a \prec\!\!\prec b$. Il existe c tel que $a \prec\!\!\prec c \prec\!\!\prec b$. Puisque $\mathfrak{P}$ est un idéal premier, on a $c \in \mathfrak{P}$ ou $c^{\perp} \in \mathfrak{P}$. Si $c \in \mathfrak{P}$, on a $a \in k(\mathfrak{P})$. Si $c^{\perp} \in \mathfrak{P}$, on a $b^{\perp} \in k(\mathfrak{P})$ puisque $b^{\perp} \prec\!\!\prec c^{\perp}$ d'après (P'3).

(c) $\Longrightarrow$ (a) : Supposons que $\mathcal{C}$ vérifie la condition (c) et que $\mathcal{C}_1$ soit un c-r-idéal contenant $\mathcal{C}$ strictement. Il y a alors un élément a n'appartenant pas à $\mathcal{C}$, qui admet un c-r-voisinage $b \in \mathcal{C}_1$. D'après (c), $b^{\perp}$ appartient à $\mathcal{C}$ et par suite à $\mathcal{C}_1$. Donc $c = b \vee b^{\perp} \in \mathcal{C}_1$. Or, $c' \in \mathcal{C}_1$ entraîne $c^{\perp\perp} \in \mathcal{C}_1$ d'après (P'4). Puisque $c^{\perp\perp} = 1$, on a donc $\mathcal{C}_1 = T$.

Tout c-r-idéal premier vérifie la propriété (c) du lemme précédent. Par conséquent, tout c-r-idéal premier est maximal.

Si T est un treillis distributif avec 0 , l'intersection des idéaux premiers de T est réduite à $\{0\}$ d'après I.3.5. Le lemme précédent admet donc la conséquence suivante :

COROLLAIRE. - <u>L'intersection des c-r-idéaux maximaux de</u> T <u>est réduite à</u> $\{0\}$.

2. L'espace de Stone-Čech-Isbell.

Soit T un treillis distributif pseudo-complémenté. Nous utiliserons les mêmes notations que dans la section précédente.

D'après la proposition 1.7, le treillis des c-r-idéaux de T est distributif. Les éléments maximaux de ce treillis sont donc premiers. On peut donc considérer l'espace des c-r-idéaux maximaux de T, c'est à dire l'ensemble des c-r-idéaux maximaux muni de la topologie de Zariski comme dans la section I.2.

DEFINITION 2.1. - L'espace des c-r-idéaux maximaux d'un treillis distributif pseudo-complémenté T est appelé espace de Stone-Čech-Isbell de T ; on le note βT.

Donnons une autre définition de la topologie sur βT : Pour tout élément a de T, désignons par $S_\beta(k(a))$ l'ensemble des c-r-idéaux maximaux ne contenant pas le c-r-idéal $k(a)$ et par $Z_\beta(a)$ l'ensemble des c-r-idéaux maximaux $\mathcal{C}$ tels que $a \in \mathcal{C}$. On a $Z_\beta(a) = Z_\beta(a^{\perp\perp})$ pour tout a dans T ; car $a \in \mathcal{C}$ entraîne $a^{\perp\perp} \in \mathcal{C}$ pour tout c-r-idéal $\mathcal{C}$.

LEMME 2.2. - Pour tout $a \in \mathcal{B}$, $S_\beta(k(a)) = Z_\beta(a^\perp)$. Les ensembles $Z_\beta(a)$, $a \in T$, forment une base de la topologie de βT.

Démonstration. Soit $\mathcal{C} \in \beta T$. Si $a^\perp \in \mathcal{C}$, il y a un $c \in \mathcal{C}$ tel que $a^\perp \prec\!\!\prec c$. Puisque $c^\perp \prec\!\!\prec a^{\perp\perp}$, on a $c^\perp \in k(a^{\perp\perp})$. On en tire que $k(a^{\perp\perp}) \nsubseteq \mathcal{C}$, puisque $c^\perp \notin \mathcal{C}$. Inversement, si $k(a^{\perp\perp}) \subseteq \mathcal{C}$, il existe $c \notin \mathcal{C}$ tel que $c \prec\!\!\prec a^{\perp\perp}$; donc $a^\perp \in \mathcal{C}$ d'après 1.9. Ainsi nous avons démontré que $S_\beta(k(a^{\perp\perp})) = Z_\beta(a^\perp)$. Si $\mathcal{J}$ est un c-r-idéal quelconque de T, alors $\mathfrak{z} = \bigcup\{k(a) ; a \in \mathcal{B} \cap \mathfrak{z}\}$. Donc $S_{\beta}(\mathfrak{z}) = \bigcup_{a \in \mathcal{B}\cap\mathfrak{z}} S_{\beta}(k(a))$. Donc tout ouvert de βT est une réunion d'une famille d'ouverts de la forme $S_{\beta}(k(a))$, $a \in \mathcal{B}$. Puisque

$$S_{\beta}(k(a)) \cap S_{\beta}(k(b)) = S_{\beta}(k(a) \cap k(b)) = S_{\beta}(k(a \wedge b)) ,$$

les ensembles de la forme $S_{\beta}(k(a))$, $a \in \mathcal{B}$, forment une base de la topologie de Zariski sur βT.

Démontrons maintenant le théorème principal de ce chapitre :

THEOREME 2.3. - <u>L'espace de Stone-Cech-Isbell βT d'un treillis distributif pseudo-complémenté T est compact.</u>

Démonstration. D'après les propositions II.1.8 et I.3.3, βT est quasi-compact. Montrons que βT est séparé. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux c-r-idéaux maximaux distincts. Soit a un élément de $\mathcal{C}_2$ n'appartenant pas à $\mathcal{C}_1$. Il existe des éléments b, c, d dans $\mathcal{C}_2$ tels que $a \lll b \lll c \lll d$. Puisque $b \wedge c^{\perp} = 0$, on a $k(b) \cap k(c^{\perp}) = \{0\}$; de plus, $k(b) \nsubseteq \mathcal{C}_1$ puisque $a \in k(b)$ et $a \notin \mathcal{C}_1$; en outre $k(c^{\perp}) \nsubseteq \mathcal{C}_2$ puisque $d^{\perp} \in k(c^{\perp})$ et $d^{\perp} \notin \mathcal{C}_2$. Le treillis des c-r-idéaux de T vérifie donc les hypothèses de I.2.3f.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 2.4. - <u>Soient H et K deux parties compactes disjointes de βT. Il existe c dans T et un c-r-voisinage b de c tel que $H \subseteq Z_{\beta}(b)$ et $K \subseteq Z_{\beta}(c^{\perp})$.</u>

Démonstration. Tout $\mathcal{C} \in H$ admet un voisinage ne rencontrant pas K, de la forme $Z_{\beta}(a_{\mathcal{C}})$, $a_{\mathcal{C}} \in T$ (cf. lemme 2.2). Pour tout $\mathcal{C} \in H$, soient $c_{\mathcal{C}}$ et $b_{\mathcal{C}}$ des éléments de $\mathcal{C}$ tels que $a_{\mathcal{C}} \lll c_{\mathcal{C}} \lll b_{\mathcal{C}}$; évidemment $Z_{\beta}(b_{\mathcal{C}})$ est aussi un voisinage de $\mathcal{C}$ ne rencontrant pas K. Puisque

H est compact, il y a un nombre fini $\mathscr{C}_1, \dots, \mathscr{C}_n$ d'éléments de H tels que

$$H \subseteq Z_\beta(b_{\mathscr{C}_1}) \cup \dots \cup Z_\beta(b_{\mathscr{C}_n}) .$$

Soient $b = b_{\mathscr{C}_1} \wedge \dots \wedge b_{\mathscr{C}_n}$ et $c = c_{\mathscr{C}_1} \wedge \dots \wedge c_{\mathscr{C}_n}$. Alors $c \lll b$ d'après (P'7) et $H \subseteq Z_\beta(b)$. Puisque $a_{\mathscr{C}_i} \lll c_{\mathscr{C}_i}$ et $a_{\mathscr{C}_i} \notin \mathscr{C}$ pour tout $\mathscr{C} \in K$, $c_{\mathscr{C}_i}{}^{\perp}$ appartient à $\mathscr{C}$ pour tout $\mathscr{C} \in K$ quel que soit $i = 1, \dots, n$. On en déduit $K \subseteq Z_\beta(c^\perp)$.

Un élément a de T vérifie $a \lll a$ si, et seulement si, $a \vee a^\perp = 1$, c'est à dire si, et seulement si, a est central. Rappelons que l'ensemble $\mathcal{D}$ des éléments centraux de T est un sous-treillis de Boole de $\mathcal{B}$ (cf. sec. I.6).

Si $a \lll a$, tout c-r-idéal maximal contient a ou $a^\perp$ d'après 1.9 ; puisqu'aucun c-r-idéal propre ne contient à la fois a et $a^\perp$, l'espace de Stone-Cech-Isbell βT est la réunion des deux ouverts disjoints $Z_\beta(a)$ et $Z_\beta(a^\perp)$; il s'ensuit que $Z_\beta(a)$ et $Z_\beta(a^\perp)$ sont aussi fermés. Réciproquement, nous démontrerons que toute partie à la fois ouverte et fermée de βT est de cette forme; plus précisément :

PROPOSITION 2.5. - $a \longmapsto Z_\beta(a^\perp)$ <u>est un isomorphisme du treillis de Boole</u> $\mathcal{D}$ <u>des éléments</u> a <u>de</u> T <u>vérifiant</u> $a \lll a$ <u>sur le treillis de Boole des parties à la fois ouvertes et fermées de</u> βT .

Démonstration. Il suffit de montrer que $a \longmapsto Z_\beta(a^\perp)$ est (i) strictement croissant et (ii) surjectif.

(i) Soient a et b deux éléments de $\mathcal{D}$ tels que $a < b$. On a alors $a^\perp > b^\perp$ et il est clair que $Z_\beta(a^\perp) \subseteq Z_\beta(b^\perp)$. Il existe un idéal premier $\mathfrak{J}$ de T contenant $b^\perp$ et ne contenant pas $a^\perp$.

D'après le lemme 1.9, $\mathcal{C} = k(\mathfrak{y})$ est un c-r-idéal maximal. Il contient $b^\perp$ puisque $b^\perp \in \mathcal{D}$, mais il ne contient pas $a^\perp$. Par conséquent, $Z_\beta(a^\perp) \neq Z_\beta(b^\perp)$.

(ii) Prenons une partie ouverte et fermée H de βT. D'après le lemme 2.4, il existe $c \in T$ et un c-r-voisinage b de c tels que $H \subseteq Z_\beta(b)$ et $\beta T \setminus H \subseteq Z_\beta(c^\perp)$. Il s'ensuit que $b \wedge c^\perp$ est contenu dans tout c-r-idéal maximal. Donc $b \wedge c^\perp = 0$, c'est à dire que $b \leq c^{\perp\perp}$. Puisque $c \prec\!\!\prec b$, on a aussi $c^{\perp\perp} \leq b$ d'après (P'4) et (P'2). Par conséquent, $b = c^{\perp\perp}$. Puisque b est un c-r-voisinage de c, $b \vee c^\perp = b \vee b^\perp = 1$. Si l'on pose $a = b^\perp$, on a donc $H = Z_\beta(a^\perp)$ et $a \in \mathcal{D}$.

3. Morphismes et applications continues.

Soient T et T' deux treillis distributifs pseudo-complémentés.

DEFINITION 3.1. - Une application $f : T \longrightarrow T'$ est appelée morphisme (de treillis distributifs pseudo-complémentés) si les propriétés suivantes sont vérifiées :

(M1) $\quad f(1) = 1$.

(M2) $\quad f(a) \wedge f(a^{\perp}) = 0$ quel que soit $a \in T$.

(M3) $\quad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ quels que soient $a,b \in T$.

L'application composée de deux morphismes est aussi un morphisme. Par conséquent, les treillis distributifs pseudo-complémentés et les morphismes au sens défini ci-dessus forment une catégorie.

EXEMPLE 3.2. - Soient X et Y deux espaces topologiques et $\varphi : X \longrightarrow Y$ une application continue. Définissons une application $\mathcal{O}_{\varphi} : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$ par $\mathcal{O}_{\varphi}(U) = \varphi^{-1}(U)$ pour tout ouvert U de Y . Alors $\mathcal{O}_{\varphi}$ est un morphisme au sens défini ci-dessus. On vérifie facilement que $\mathcal{O}$ est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des treillis distributifs.

Soit $f : T \longrightarrow T'$ un morphisme de treillis distributif pseudo-complémentés. Démontrons quelques propriétés : Si l'on pose $a = 0$ dans (M2), on obtient en utilisant (M1) :

$$0 = f(0) \wedge f(0^{\perp}) = f(0) \wedge f(1) = f(0) \wedge 1 = f(0) \ ;$$

donc :

(M4) $\quad f(0) = 0$.

Si $a^{\perp} \vee b = 1$, alors $f(a^{\perp}) \vee f(b) = f(1) = 1$ d'après (M1) et (M3).

D'après (M2), $f(a^{\perp}) \leqq f(a)^{\perp}$; donc $f(a)^{\perp} \vee f(b) = 1$. Ainsi nous avons :

(M5) $a \prec b$ entraîne $f(a) \prec f(b)$ quels que soient $a, b \in T$.

Si $(c_r)_{r \in Q}$ est une chaîne normale dans T , $(f(c_r))_{r \in Q}$ est une chaîne normale dans T' d'après (M6). Donc :

(M6) $a \prec\prec b$ entraîne $f(a) \prec\prec f(b)$ quels que soient $a, b \in T$.

Remarquons qu'un morphisme au sens défini ci-dessus n'est pas en général un homomorphisme de treillis.

Nous allons montrer que tout morphisme $f : T \longrightarrow T'$ induit une application continue $\beta f : \beta T' \longrightarrow \beta T$.

Soit φ un c-r-idéal maximal de T' . En vertu de (M3), l'image réciproque $f^{-1}(\varphi)$ est un idéal de T . Soit $\beta f(\varphi)$ le plus grand c-r-idéal de T contenu dans $f^{-1}(\varphi)$. D'après 1.7, $\beta f(\varphi)$ est l'ensemble des éléments a de T qui admettent un c-r-voisinage b tel que $f(b) \in \varphi$.

LEMME 3.3. - $\beta f(\varphi)$ <u>est un c-r-idéal maximal de</u> T .

Démonstration. Soient a et b deux éléments de T tels que $a \prec\prec b$. Choisissons c et d tels que $a \prec\prec c \prec\prec d \prec\prec b$. D'après (M6), $f(c) \prec\prec f(d)$. Puisque φ est un c-r-idéal maximal, $f(c) \in \varphi$ ou $f(d)^{\perp} \in \varphi$ d'après 1.9. Si $f(c) \in \varphi$, alors $a \in \beta f(\varphi)$. Si $f(d)^{\perp} \in \varphi$, alors $b^{\perp} \in \beta f(\varphi)$; car $f(d^{\perp}) \leqq f(d)^{\perp}$ d'après (M2) et $b^{\perp} \prec\prec d^{\perp}$. D'après 1.9, $\beta f(\varphi)$ est donc un c-r-idéal maximal.

Ainsi nous avons une application bien définie $\beta f : \beta T' \longrightarrow \beta T$. Montrons qu'elle est continue : Soit $\varphi \in \beta T'$ et soit $U \subseteq \beta T$ un voisinage de $\beta f(\varphi)$. D'après 2.2, on peut supposer que $U = Z_{\beta}(a)$ pour un certain élément a de T . En particulier, a appartient à $\beta f(\varphi)$. Soit b un c-r-voisinage de a appartenant aussi à $\beta f(\varphi)$.

L'élément a appartient à $\beta f(\mathfrak{q})$ pour tout $\mathfrak{q} \in \beta T'$ tel que $f(b) \in \mathfrak{q}$. Donc l'image réciproque $(\beta f)^{-1}(U)$ contient l'ensemble $Z_\beta(f(b))$ qui est un voisinage de φ dans $\beta T'$.

Montrons que β est un foncteur contravariant de la catégorie des treillis distributifs pseudo-complémentés dans la catégorie des espaces topologiques compacts : Soient $f : T \longrightarrow T'$ et $g : T' \longrightarrow T''$ deux morphismes de treillis distributifs pseudo-complémentés. Soit φ un c-r-idéal maximal de T''. Alors $\beta g(\varphi)$ est le plus grand c-r-idéal de T' contenu dans $g^{-1}(\varphi)$. Donc $f^{-1}(\beta g(\varphi)) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(\varphi))$. Or, $(\beta f \circ \beta g)(\varphi)$ est le plus grand c-r-idéal contenu dans $f^{-1}(\beta g(\varphi))$ et $\beta(g \circ f)(\varphi)$ est le plus grand c-r-idéal contenu dans $g^{-1}(f^{-1}(\varphi))$. Donc $(\beta g \circ \beta f)(\varphi) \subseteq \beta(g \circ f)(\varphi)$. Puisqu'il s'agit de c-r-idéaux maximaux dans les deux cas, on a nécessairement égalité. Par conséquent, $\beta f \circ \beta g = \beta(g \circ f)$.

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant :

THEOREME 3.4. - β _est un foncteur contravariant de la catégorie des treillis distributifs pseudo-complémentés dans la catégorie des espaces topologiques compacts_.

Le foncteur β sera appelé _foncteur de Stone-Čech-Isbell_.

Dans ce qui suit, soit $f : T \longrightarrow T'$ un morphisme de treillis distributifs pseudo-complémentés.

PROPOSITION 3.5. - _L'application_ $\beta f : \beta T' \longrightarrow \beta T$ _est surjective si, et seulement si,_ $f(a) \neq 1$ _pour tout élément_ a _de_ T _qui admet un c-r-voisinage_ $b \neq 1$.

Démonstration. Supposons d'abord que $f(a) \neq 1$ pour tout élément

a qui admet un c-r-voisinage $b \neq 1$. Soit $\mathfrak{p}$ un c-r-idéal maximal de T. L'image $f(\mathfrak{p})$ est filtrante supérieurement et ne contient pas 1 en vertu de l'hypothèse. De plus, tout élément de $f(\mathfrak{p})$ admet un c-r-voisinage appartenant aussi à $f(\mathfrak{p})$ d'après (M6). Par conséquent, $f(\mathfrak{p})$ est contenu dans un c-r-idéal maximal $\mathfrak{z}$ de T'. Puisque $\mathfrak{p} \subseteq f^{-1}(\mathfrak{z})$, on a $\mathfrak{p} = \beta f(\mathfrak{z})$. Donc βf est surjective.

Supposons inversement que βf soit surjective. Soit a un élément de T qui admet un c-r-voisinage $b \neq 1$. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de T contenant b. Alors $a \in k(\mathfrak{m})$ et $k(\mathfrak{m})$ est un c-r-idéal maximal d'après 1.9. Soit $\mathfrak{p}$ un c-r-idéal maximal de T' tel que $k(\mathfrak{m}) = \beta f(\mathfrak{p})$. Alors $a \in \beta f(\mathfrak{p}) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{p})$ et par suite $f(a) \in \mathfrak{p}$. Donc $f(a) \neq 1$.

COROLLAIRE 1. - *Si* $f(a) \neq 1$ *pour tout pseudo-complément* a *de* T *différent de* 1, *alors* βf *est surjectif*.

COROLLAIRE 2. - *Si* f *est injectif*, βf *est surjectif*.

PROPOSITION 3.6. - *Pour que* $\beta f : \beta T' \longrightarrow \beta T$ *soit injective, il suffit que pour tout couple* a', b' *d'éléments de* T' *tels que* $a' \ll b'$, *il existe* $a, b \in T$ *tels que* $a \ll b$ *et* $f(a) = a'$, $f(b) = b'$.

Soient $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ deux c-r-idéaux maximaux de T' distincts. Soit a' un élément de $\mathfrak{p}_1$ non contenu dans $\mathfrak{p}_2$; soit b' un c-r-voisinage de a' dans $\mathfrak{p}_1$. D'après l'hypothèse, il existe a et b dans T tels que $a \ll b$ et $f(a) = a'$, $f(b) = b'$. L'élément a appartient à $\beta f(\mathfrak{p}_1)$, mais pas à $\beta f(\mathfrak{p}_2)$. Donc $\beta f(\mathfrak{p}_1) \neq \beta f(\mathfrak{p}_2)$.

COROLLAIRE. - βf *est injective si* f *est surjective et si la condition* (I) *suivante est vérifiée* :

(I) Pour tout $a, b \in T$, $f(a)^{\perp} \vee f(b) = 1$ entraîne $a^{\perp} \vee b = 1$.

En effet, soient a' et b' deux éléments de T' tels que $a' \prec b'$. Puisque f est surjective, il existe $a, b \in T$ tels que $f(a) = a'$, $f(b) = b'$. Donc $1 = (a')^{\perp} \vee b' = f(a)^{\perp} \vee f(b)$ ce qui entraîne $a^{\perp} \vee b = 1$ d'après la condition (I); donc $a \prec b$. On en déduit que si $(c'_r)_{r \in Q}$ est une chaîne normale dans T', il existe une chaîne normale $(c_r)_{r \in Q}$ dans T telle que $f(c_r) = c'_r$ pour tout $r \in Q$. Cela entraîne que la condition suffisante de la proposition 3.6 est vérifiée.

EXEMPLE 3.7. - Soit T un treillis distributif pseudo-complémenté et soit u un élément de T. Soit $T' = \{t \in T ; t \leq u\}$. Alors T' est aussi un treillis distributif pseudo-complémenté. L'application $g : T \longrightarrow T'$ définie par $g(t) = t \wedge u$ quel que soit $t \in T$, est un morphisme surjectif. L'application $\beta g : \beta T' \longrightarrow \beta T$ est surjective si, et seulement si, u n'admet aucun c-r-voisinage différent de 1, comme le montre la proposition 3.5. En particulier, si $u^{\perp\perp} = 1$, βg est surjective. Si la propriété suivante (I') est vérifiée :

(I') Pour tout $a, b \in T$, $a^{\perp} \vee b \geq u$ entraîne $a^{\perp} \vee b = 1$,

alors βg est injective d'après le corollaire de 3.6. De plus, $u^{\perp\perp} \vee 0 \geq u$ entraîne $u^{\perp\perp} = u^{\perp\perp} \vee 0 = 1$ lorsque (I') est vérifiée. Donc, si (I') est vérifiée, $\beta g : \beta T' \longrightarrow \beta T$ est un homéomorphisme.

EXEMPLE 3.8. - Soit z un élément d'un treillis de Brouwer complet T. Soit $T' = \{t \in T ; z \leq t\}$. T' est aussi un treillis de Brouwer. L'application $h : T \longrightarrow T'$ définie par $h(t) = t \vee z$ est un morphisme surjectif. D'après 3.5, $\beta h : \beta T' \longrightarrow \beta T$ est surjectif si, et seulement si, z n'est c-r-voisinage d'aucun élément a différent de 0.

4. Propriétés de l'espace de Stone-Čech-Isbell.

Soit $\mathcal{B}$ un treillis de Boole. Tout treillis de Boole est distributif et pseudocomplémenté. Tout idéal de $\mathcal{B}$ est un c-r-idéal. Par conséquent l'espace β des c-r-idéaux maximaux coïncide avec l'espace de Stone des idéaux maximaux de $\mathcal{B}$.

Considérons maintenant un treillis distributif pseudo-complémenté T. Désignons par σT l'espace de Stone des idéaux maximaux du treillis de Boole $\mathcal{B}$ des pseudo-compléments dans T.

PROPOSITION 4.1. - L'application $t \longmapsto q(t) = t^{\perp\perp}$ est un morphisme de T sur $\mathcal{B}$. Elle induit une application continue $\beta q : \sigma T \longrightarrow \beta T$. Cette application est surjective ; elle est un homéomorphisme si, et seulement si, T est un treillis de Stone.

Démonstration. Il est clair que l'application $q : T \longrightarrow \mathcal{B}$ est un morphisme (cf. le théorème de Glivenko I.1.3). La restriction de q sur $\mathcal{B}$ est bijective. D'après le corollaire 1 de 3.5, l'application βq est donc surjective.

Soit φ un c-r-idéal de T. D'après (P'4), $\varphi \cap \mathcal{B}$ est un idéal du treillis de Boole $\mathcal{B}$. Par conséquent, $\varphi \cap \mathcal{B}$ est contenu dans au moins un idéal maximal de $\mathcal{B}$. Si $\mathfrak{y}$ est un idéal maximal de $\mathcal{B}$ contenant $\varphi' = \varphi \cap \mathcal{B}$, où φ est un c-r-idéal maximal de T, alors $\beta q(\mathfrak{y}) = \varphi$. Par conséquent, βq est injective si, et seulement si, pour tout c-r-idéal maximal φ de T, $\varphi \cap \mathcal{B}$ est contenu dans exactement un idéal maximal de $\mathcal{B}$. Tout idéal propre d'un treillis de Boole étant l'intersection d'une famille d'idéaux maximaux, cette dernière condition signifie que $\varphi \cap \mathcal{B}$ est un idéal maximal de $\mathcal{B}$ pour tout c-r-idéal maximal φ de T.

Si T est un treillis de Stone, $a \prec\!\prec a$ pour tout $a \in \mathcal{B}$; par conséquent, $a \in \mathcal{Y}$ ou $a^{\perp} \in \mathcal{Y}$ pour tout c-r-idéal maximal $\mathcal{Y}$ de T, ce qui entraîne que $\mathcal{Y} \cap \mathcal{B}$ est un idéal maximal de $\mathcal{B}$ quel que soit $\mathcal{Y} \in \beta T$. Donc βq est injective.

Inversement, si $\mathcal{Y} \cap \mathcal{B}$ est un idéal maximal de $\mathcal{B}$ pour tout c-r-idéal maximal $\mathcal{Y}$ de T, alors quel que soit $a \in \mathcal{B}$, $a \in \mathcal{Y}$ ou $a^{\perp} \in \mathcal{Y}$ pour tout $\mathcal{Y} \in \beta T$; donc βT est la réunion des deux ouverts disjoints $Z_{\beta}(a)$ et $Z_{\beta}(a^{\perp})$ quel que soit $a \in \mathcal{B}$. D'après 2.5, cela entraîne que $\mathcal{D} = \mathcal{B}$, c'est à dire que T est un treillis de Stone.

Soit T un treillis distributif et pseudo-complémenté. Si x est un élément premier de T, l'idéal principal $\{t \in T \,;\, t \leq x\}$ est un idéal premier. Par conséquent, le plus grand c-r-idéal $k(x)$ majoré par x est un c-r-idéal maximal d'après 1.9.

PROPOSITION 4.2. - <u>Soit</u> X <u>un espace d'éléments premiers d'un treillis distributif pseudo-complémenté</u> T. <u>L'application</u> $x \longmapsto k(x)$ <u>de</u> X <u>dans</u> βT <u>est continue. Si</u> $\bigwedge_{x \in X} x = 0$, <u>l'image</u> $k(X)$ <u>est une partie partout dense de</u> βT.

Démonstration. Soit $x \in X$ et soit U un voisinage de $k(x)$ dans βT. On peut supposer que $U = Z_{\beta}(a)$ pour un certain élément a de T. Soit b un c-r-voisinage de a, contenu dans $k(x)$. L'ensemble $S_X(b^{\perp})$ des éléments $y \in X$ tels que $b^{\perp} \nleq y$, est un ouvert de X. Puisque b appartient à $k(x)$, on a $b^{\perp} \nleq x$, c'est à dire que $S_X(b^{\perp})$ est un voisinage de x. De plus, $S_X(b^{\perp})$ est contenu dans $k^{-1}(U)$; car $b \leq y$ pour tout $y \in S_X(b^{\perp})$ et par suite $a \in k(y)$ pour tout $y \in S_X(b^{\perp})$. - La deuxième assertion est évidente.

Maintenant nous sommes prêts à démontrer la liaison entre le compactifié de Stone-Cech d'un espace topologique X et l'espace de Stone-Cech-Isbell d'un treillis distributif pseudo-complémenté T.

Soit X un espace topologique et $\mathcal{O}_X$ le treillis des ouverts de X. Pour tout $x \in X$, soit $u(x)$ le plus grand ouvert de X ne contenant pas x. Alors $u(x)$ est un élément premier du treillis $\mathcal{O}_X$. Soit $u(X)$ l'espace des éléments premiers de $\mathcal{O}_X$ de la forme $u(x)$, $x \in X$. La topologie sur $u(X)$ étant la topologie de Zariski, tout ouvert V de $u(X)$ est de la forme suivante : Il y a un ouvert U de X tel que V est l'ensemble des $u(x)$ tels que $U \not\subset u(x)$, c'est à dire que $V = u(U)$. Par conséquent, $x \longmapsto u(x)$ est un application continue de X sur $u(X)$.

D'après 4.2, nous avons une application continue k de $u(X)$ dans l'espace de Stone-Cech-Isbell $\beta\mathcal{O}_X$. L'image $ku(X)$ est partout dense dans $\beta\mathcal{O}_X$ puisque $\bigcap\limits_{x \in X} u(x) = \emptyset$. Posons $\kappa = k \circ u$.

THEOREME 4.3. - *Soit $\varphi : X \longrightarrow K$ une application continue d'un espace topologique X dans un espace topologique compact K. Alors il existe une unique application continue $\bar{\varphi} : \beta\mathcal{O}_X \longrightarrow K$ tel que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \kappa$:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \beta\mathcal{O}_X \arrow[d, "\bar{\varphi}"] \\ & K \end{tikzcd}$$

En d'autres termes, $\beta\mathcal{O}_X$ est un compactifié de Stone-Cech de X.

Démonstration. L'unicité de $\bar{\varphi}$ est une conséquence immédiate du fait que $\kappa(X)$ est partout dense dans $\beta\mathcal{O}_X$. Il suffit donc de démontrer l'existence de $\bar{\varphi}$.

Soit $\mathscr{P}$ un c-r-idéal maximal de $\mathcal{O}_X$. Soit $\Phi(\mathscr{P})$ l'ensemble des ouverts U de K tels que $\varphi^{-1}(U) \in \mathscr{P}$. Alors $\Phi(\mathscr{P})$ est un idéal d'ouverts de K . Puisque $K \in \Phi(\mathcal{P})$ et puisque K est compact, $\Phi(\mathcal{P})$ n'est pas un recouvrement de K . Il existe donc $x \in K$ tel que x n'appartienne à aucun des ouverts $U \in \Phi(\mathcal{P})$. Soit y un élément de K différent de x . Puisque K est un espace normal, il y a un voisinage ouvert U de x , qui admet un c-r-voisinage V tel que $y \in \overline{V}$. Il s'ensuit que $\mathcal{O}_\varphi(V) = \varphi^{-1}(V)$ est un c-r-voisinage de $\mathcal{O}_\varphi(U) = \varphi^{-1}(U)$ tel que $\varphi^{-1}(U) \notin \mathcal{P}$. Puisque $\mathcal{P}$ est un c-r-idéal maximal, on a $\varphi^{-1}(V)^{\perp} \in \mathcal{P}$ d'après 1.9 ; donc $\varphi^{-1}(V^{\perp}) \in \mathcal{P}$. Par conséquent, x appartient à un ouvert $V^{\perp} \in \Phi(\mathcal{P})$. Ainsi nous avons démontré qu'il y a un seul point x dans K tel que $x \notin \bigcup_{U \in \Phi(\mathcal{P})} U$. Posons $\overline{\varphi}(\mathcal{P}) = x$.

Ainsi nous avons défini une application $\overline{\varphi} : \beta\mathcal{O}_X \longrightarrow K$. Notons que $\overline{\varphi} \circ \kappa = \varphi$; car si $x \in X$, alors $x \notin u(x)$, donc $x \notin V$ pour tout $V \in k \circ u(x) = \kappa(x)$; par conséquent, $\varphi(x) \notin U$ pour tout ouvert U de K tel que $U \in \Phi(\kappa(x))$, c'est à dire que $\varphi(x) = \overline{\varphi}(\kappa(x))$.

$\overline{\varphi}$ est continue : Prenons $\mathcal{P} \in \beta\mathcal{O}_X$. Soit V un voisinage de $\overline{\varphi}(\mathcal{P})$. Soient U et U_1 des voisinages de $\overline{\varphi}(\mathcal{P})$ tels que $U_1 \ll U \ll V$. Comme ci-dessus on montre que $\varphi^{-1}(U^{\perp}) \in \mathcal{P}$. L'ouvert $W = Z_\beta(\varphi^{-1}(U^{\perp}))$ est un voisinage de $\mathcal{P}$. Si $\varphi^{-1}(U^{\perp}) \in \mathfrak{q}$, alors $\overline{\varphi}(\mathfrak{q}) \notin U^{\perp}$ d'après la définition de $\overline{\varphi}$; donc $\overline{\varphi}(W) \subseteq K \setminus U^{\perp} \subseteq V$. Ainsi nous avons démontré la continuité de $\overline{\varphi}$.

$\mathcal{O}$ est un foncteur de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des treillis distributifs pseudo-complémentés ; β est un foncteur de la catégorie des treillis distributifs pseudo-complémentés dans la catégorie des espaces compacts. Par conséquent, le foncteur composé $\overline{\beta} = \beta\theta$ est un foncteur (covariant) de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des espaces compacts. Le théorème 4.3 montre que $\overline{\beta}$ est une réflection.

La proposition suivante donne un autre lien entre l'espace de Stone-Cech-Isbell et le compactifié de Stone-Čech.

PROPOSITION 4.4. - *Soit* T *un treillis distributif pseudo-complémenté complet qui admet un espace* X *d'éléments premiers vérifiant les deux conditions suivantes* :

(i) $\bigwedge\limits_{x \in X} x = 0$.

(ii) *Pour tout élément* $t \neq 1$ *de* T , *il existe* $x \in X$ *tel que* $t \leq x$.

Alors l'application $x \longmapsto k(x)$ *de* X *dans* βX *est une compactification de Stone-Čech de* X .

Démonstration. L'application $a \longmapsto S_X(a)$ est un morphisme de T dans θ_X . Elle induit une application continue $\varphi = \beta S_X$ de $\beta\theta_X$ dans βT . En vertu de (i) et I.2.6a, $a \longmapsto S_X(a)$ est une bijection entre les pseudo-compléments de T et les ouverts réguliers de X . D'après le corollaire 1 de 3.5, φ est donc surjective, S_X est surjective et d'après l'hypothèse (ii),

$S_X(a)^{\perp} \vee S(b) = S_X(a^{\perp} \vee b) = 1$ entraîne $a^{\perp} \vee b = 1$.

D'après le corollaire de 3.6, φ est donc aussi injective. En utilisant les définitions des applications u, κ, φ on démontre facilement que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "u"'] & \beta\theta_X \arrow[dl, "\varphi"] \\ \beta T & \end{tikzcd}$$

En vertu de I.3.5, l'espace ξT de tous les éléments premiers d'un treillis algébrique distributif complet T vérifie les hypothèses (i) et (ii) de la proposition précédente. On a donc :

COROLLAIRE 1. - *Si* T *est un treillis algébrique distributif complet, l'application* $x \longmapsto k(x)$ *de l'espace* ξT *de tous les élé-* *ments premiers de* T *dans l'espace compact* βT *est une compactifi-* *fication de Stone-Čech*.

Ce corollaire montre que βT est dans un sens le meilleur espace compact que l'on puisse associer à T .

Si T est un treillis algébrique distributif complet plat, tout élément premier de T est maximal d'après I.6.5. On a donc :

COROLLAIRE 2. - *Si* T *est un treillis algébrique complet distri-* *butif plat,* βT *est un compactifié de Stone-Čech de l'espace* μT *des éléments maximaux de* T .

D'après I.3.3, les hypothèses de 4.4 sont aussi vérifiées si X est l'espace des éléments maximaux d'un treillis distributif complet μ-semi-simple dont le plus grand élément est compact. Donc :

COROLLAIRE 3. - *Soit* T *un treillis distributif complet* μ-*semi-* *simple, dont le plus grand élément est compact. Alors* $x \longmapsto k(x)$ *est une compactification de Stone-Cech de* μT .

Considérons maintenant un treillis algébrique distributif complet T.

DEFINITION 4.5. - Pour tout c-r-idéal maximal φ de T soit

$$\gamma(\varphi) = \bigvee_{a \in \varphi} a \ ;$$

$\gamma(\varphi)$ est appelé *élément absolument germinal* associé à φ .

PROPRIETES 4.6. - Soit φ un c-r-idéal maximal d'un treillis algébrique distributif complet T .

(a) Si $\gamma(\varphi) < 1$, il existe un élément premier x de T tel que $\varphi = k(x)$.

(b) Si x est un élément premier de T tel que $\gamma(\varphi) \leqq x$, alors $\gamma(\varphi) \leqq p$ pour tout élément premier p tel que $p \leqq x$.

(c) $\gamma(\varphi)$ est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers minimaux.

(d) Si le plus grand élément 1 de T est compact, $\gamma(\varphi) < 1$ et il existe un élément maximal x de T tel que $\varphi = k(x)$. Si cet élément maximal x est unique, $\gamma(\varphi)$ est le plus petit élément x-primaire de T et $\gamma(\varphi) = \gamma(x)$, l'idéal germinal associé à x .

Démonstration. (a) Tout élément de T est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers. Si $\gamma(\varphi) < 1$, il existe un élément premier $x < 1$ majorant $\gamma(\varphi)$. Il s'ensuit que $\varphi \subseteq k(x)$; puisque φ et $k(x)$ sont des c-r-idéaux maximaux, on a donc $\varphi = k(x)$.

(b) Supposons que $\gamma(\varphi) \leqq x$, où x est un élément premier. Soit k un élément compact de T tel que $k \leqq \gamma(\varphi)$. Alors $k \in \varphi$. Il y a donc un c-r-voisinage b de k , appartenant à φ . Puisque $k^{\perp} \vee b = 1$, et $b \leqq x$, on a nécessairement $k^{\perp} \nleqq p$ pour tout élément $p \leqq x$. Si p est de plus premier, on en tire $k \leqq p$. Ceci étant vrai pour tout élément compact $k \leqq \gamma(\varphi)$, on a aussi $\gamma(\varphi) \leqq p$.

(c) est une conséquence immédiate de (b), puisque tout élément de T est la borne inférieure d'une famille d'éléments premiers.

(d) Supposons que 1 soit un élément compact. Puisque φ est un idéal propre de T , il ne contient pas 1 et par suite $\gamma(\varphi) < 1$. D'après I.3.3, il y a un élément maximal $x \geqq \gamma(\varphi)$; donc $\varphi = k(x)$.

Si cet élément maximal x est unique, alors $\gamma(\mathcal{C})$ est x-primaire. D'après (b) et (c), $\mathcal{C}$ est la borne inférieure de la famille des éléments premiers minimaux majorés par x.

PROPOSITION 4.7. - *Soit* T *un treillis algébrique distributif complet projetable. Alors* $x \longmapsto k(x)$ *est un homéomorphisme de l'espace* πT *des éléments premiers minimaux de* T *sur un sous-espace ouvert de* βT. *Pour tout* $p \in \pi T$, $p = \gamma k(p)$. *Pour tout élément compact* c *de* T, $k(S_{\pi T}(c)) = Z_{\beta T}(c^{\perp})$. *Les ensembles de la forme* $S_{T}(c)$, c *compact, forment une base de la topologie de* πT *et ils sont compacts.*

Démonstration. Puisque T est projetable, on a $c^{\perp} \vee c^{\perp\perp} = 1$ donc $c^{\perp\perp} \ll c^{\perp\perp}$ pour tout élément compact c de T. Soit p un élément premier minimal de T. Si c est un élément compact tel que $c \leq p$, alors $c^{\perp\perp} \leq p$ d'après le corollaire 3 de I.4.4. Donc $c^{\perp\perp} \in k(p)$. Par conséquent $p = \gamma k(p)$. Ceci montre aussi que $p \longmapsto k(p)$ est une application injective de T dans βT

Soit c un élément compact de T. On a $k(S_{\pi T}(c)) = Z_{\beta}(c^{\perp})$. En effet, si $c \nleq p \in \pi T$, alors $c^{\perp} \leq p$ et par suite $c^{\perp} \in k(p)$ puisque $c^{\perp} \ll c^{\perp}$. Soit réciproquement $\mathcal{C}$ un c-r-idéal maximal contenant $c^{\perp}$. Alors c n'appartient pas à $\mathcal{C}$. Il s'ensuit que $c \nleq \gamma(\mathcal{C})$. D'après 4.6c, il existe un élément premier minimal p tel que $\gamma(\mathcal{C}) \leq p$ et $c \nleq p$. Donc $\mathcal{C} = k(p)$ et $p \in S_{\pi T}(c)$.

Puisque les ensembles de la forme $S_{\pi T}(c)$, c compact, forment une base de la topologie de πT et puisque $Z_{\beta T}(c^{\perp})$ est une partie ouverte de βT, l'application $p \longmapsto k(p)$ est ouverte. Puisque cette application est continue d'après 4.2 et injective,

πT est homéomrrphe à son image. D'après la proposition 2.5, $Z_{\beta}(c^{\perp})$ est compact. Donc $S_{\pi T}(c)$ est aussi compact. D'après le corollaire 4 de I.4.4, les ensembles de la forme $S_{\pi T}(c)$, c compact, forment une base de la topologie de πT .

Utilisant I.6.5, on obtient pour les treillis plats la proposition suivante :

COROLLAIRE. - Soit T un treillis algébrique distributif complet plat. Alors $x \longmapsto k(x)$ est un homéomorphisme de l'espace μT des éléments maximaux de T sur un sous-espace ouvert de βT. Pour tout $x \in \mu T$, $x = \gamma k(x)$. Les ensembles de la forme $S_{\mu T}(c)$, c compact, sont compacts et ils forment une base de la topologie de μT .