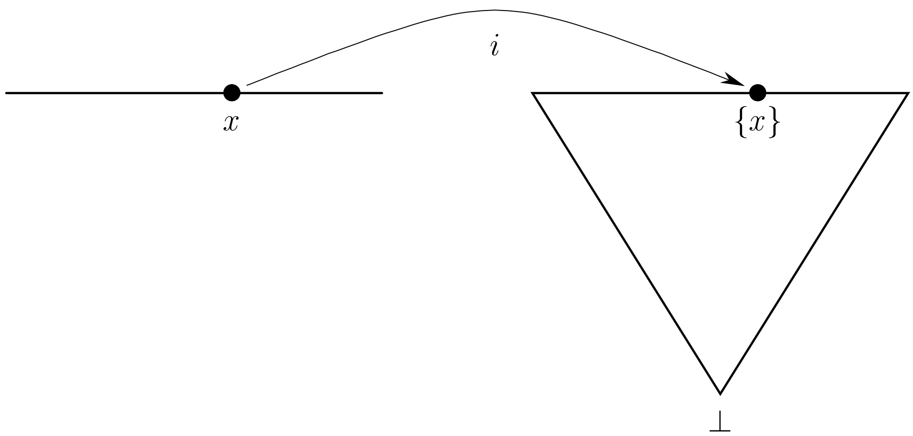
Modellierung von Banachräumen in der Scottschen Domaintheorie

Stefan Brötz

Oktober 1999



Diplomarbeit am Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Darmstadt
Betreuer: Prof. Dr. Klaus Keimel

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In [Sco70] schlug Dana Scott vor, partiell geordnete Strukturen für die Untersuchung von stetigen, berechenbaren Funktionen auf dem Einheitsintervall zu verwenden. Diese Idee wurde später von Abbas Edalat und Martín Escardó aufgegriffen, als sie den Intervall-Domain $\mathcal{I}$ – den Raum der nichtleeren, abgeschlossenen und beschränkten Intervalle – betrachteten und mit seinen Elementen rechneten. Da die reellen Zahlen als einpunktige Intervalle in den Intervall-Domain eingebettet werden können, lag es nahe, die Elemente des Intervall-Domains als Approximation reeller Zahlen zu aufzufassen.

Basierend auf dieser Idee, versuchte Philipp Sünderhauf in [Sü98], diesen Gedanken axiomatisch zu fassen und auf beliebige Banachräume über $\mathbb{R}$ zu übertragen. Er ging von einem stetigen Bereich aus, der mit einer Scott-stetigen Addition, einer Scott-stetigen skalaren Multiplikation mit dem Skalarbereich $\mathcal{I}$ und einem konstanten Element $\mathbf{0}$ ausgestattet sein sollte. Dieses Element und die Operationen $+$ und $\cdot$ sollten den üblichen Gesetzen eines Banachraums unterliegen. Ein Bereich, der dies erfüllt, wird Banach-Domain genannt.

Durch die Forderung, daß die Skalare nicht aus $\mathbb{R}$ sondern aus $\mathcal{I}$ stammen sollten, mußten einige Gleichungen zu Ungleichungen umformuliert werden. Insbesondere folgt nicht mehr, daß $x - x = \mathbf{0}$ für alle Elemente x eines Banach-Domains gelten muß. Jedoch erfüllen gewisse Elemente diese Gleichung. Das Hauptresultat in [Sü98] besagt, daß diese Elemente einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bilden. Auf diesem Vektorraum läßt sich ordnungstheoretisch eine Norm erklären, bezüglich der dieser Raum zu einem Banachraum wird. Die genauen Details werden in Kapitel 1 behandelt. In Kapitel 2 werden dann wichtige Beispiele für Banach-Domains vorgestellt. Insbesondere wird gezeigt, daß der Intervall-Domain $\mathcal{I}$ ein Banach-Domain ist.

In dieser Arbeit wird die ursprüngliche Definition von Sünderhauf dahingehend modifiziert, daß Banach-Domains ein kleinstes Element $\perp$ haben sollen. Dadurch sind Funktionenräume einfacher zu handhaben: Im allgemeinen ist nämlich der Raum aller stetigen Funktionen zwischen zwei stetigen Domains nicht notwendigerweise stetig, vgl. [AJ94]. Jedoch gibt es im Fall der stetigen Bereiche mit $\perp$ hinreichende Kriterien, die diese Stetigkeit garantieren. In Kapitel 3 werden wir zeigen, wie sich Banach-Domains verwenden lassen, um Funktionenräume zu konstruieren, die ihrerseits wieder Banach-Domains sind. Ebenso wird gezeigt, wie man aus diesen Funktionenräumen wieder Banachräume gewinnen kann. Dabei wird das Konzept von totalen Elementen eine Rolle spielen, das in [Ber90] und [Nor98] vorgestellt und hier auf Banach-Domains übertragen wurde.

An dieser Stelle möchte ich allen danken, ohne deren Mithilfe die vorliegende Arbeit nicht diese Form hätte annehmen können. An erster Stelle steht dabei sicherlich mein Betreuer Prof. Dr. Klaus Keimel, der mich zunächst durch viele engagierte Veranstaltungen für den Bereich der Domaintheorie begeistern konnte und schließlich während der arbeitsintensiven Phase dieser Arbeit ein immer ansprechbarer Betreuer war.

Ein weiteres Dankeschön geht an die Mitglieder der Arbeitsgruppe 14, die ebenfalls immer ein offenes Ohr für mich hatten. Insbesondere sei Regina Tix, Michael Marz und Alexander Rohr gedankt, die viel Zeit in inhaltliche Diskussionen und gründliches Korrekturlesen der Arbeit investiert haben.

Nicht unerwähnt bleiben sollen alle Mitglieder des studentischen Arbeitsraums 301, die regelmäßig als Versuchskaninchen für neue Behauptungen meinerseits herhalten mußten. Namentlich erwähnen möchte ich Martin Bulach und Jochen Hoheisel, die durch konsequentes Hinterfragen (und manchmal auch durch offensichtliche Gegenbeispiele) manche aufkommende „Theorie“ zum Einsturz brachten, aber auch richtige Ergebnisse bestätigen konnten. Ebenso sei den 301ern als stetige Quelle der Motivation gedankt.

Das größte Danke steht am Ende: Es geht an meine Eltern. Ohne die Art, wie sie mir mein Studium ermöglicht und mich dabei unterstützt haben, wäre es wohl nie zu dieser Arbeit gekommen.

KAPITEL 1

Grundlegendes

Unter einem *Bereich* bzw. *Domain* verstehen wir im folgenden eine partiell geordnete Menge $(D, \sqsubseteq)$ mit einem kleinsten Element $\perp$, in der jede gerichtete Teilmenge ein Supremum besitzt (dcpo, directed complete partial order). Ein Element x *approximiert* ein Element y – man sagt auch, daß x *weit unter* y liegt und schreibt dafür $x \ll y$ –, wenn für jede gerichtete Teilmenge A von D

$$y \sqsubseteq \bigsqcup A \implies \exists d \in A.\ x \sqsubseteq d$$

gilt. Die Menge $\{y \in D \mid y \ll x\}$ der Elemente, die x approximieren, wird mit $\twoheaddownarrow x$ bezeichnet. Ein Bereich heißt *stetig*, falls jedes Element das gerichtete Supremum seiner approximierenden Elemente ist, d.h. $x = \bigsqcup \twoheaddownarrow x$.

Eine Funktion f zwischen Bereichen D und E heißt *(Scott-)stetig*, falls f monoton ist und $f(\bigsqcup A) = \bigsqcup f(A)$ für jede gerichtete Teilmenge A von D erfüllt. Eine äquivalente Charakterisierung besagt, daß f stetig bezüglich der *Scott-Topologie* ist: Eine Menge A heißt *Scott-abgeschlossen*, wenn $A = \downarrow A$ und $\bigsqcup B \in A$ für alle gerichteten Mengen $B \subseteq A$.

Neben der Scott-Topologie benötigen wir später noch die *Lawson-Topologie*. Eine Subbasis für die offenen Mengen dieser Topologie besteht aus allen Scott-offenen Mengen und allen Mengen der Form $D \setminus \uparrow x$.

Sind D und E Bereiche, so wird mit $[D \to E]$ der Bereich der stetigen Funktionen $f \colon D \to E$ bezeichnet. Die Ordnung auf diesem Bereich ist punktweise erklärt, d.h. $f \sqsubseteq g :\iff \forall d \in D.\ f(d) \sqsubseteq g(d)$.

Eine ausführliche Einführung in die Domaintheorie ist in [AJ94] zu finden.

1.1. Der Intervall-Domain

Wir betrachten die Menge der nichtleeren, abgeschlossenen, beschränkten Intervalle aus $\mathbb{R}$. Durch

$$[a, b] \sqsubseteq [c, d] :\iff [a, b] \supseteq [c, d]$$

wird auf dieser Menge eine Ordnung definiert, mit der die Menge dieser Intervalle zusammen mit $\mathbb{R}$ als kleinstem Element zu einem stetigen Bereich – dem *Intervall-Domain* $\mathcal{I}$ – wird. Die Weit-unter-Relation ist dabei durch

$$[a, b] \ll [c, d] \iff [c, d] \subseteq \operatorname{int}\big([a, b]\big)$$

charakterisiert. Es gilt $[a, b] \ll [c, d]$ somit genau dann, wenn $a < c \leq d < b$ gilt.

Wir benutzen im folgenden die Schreibweise

$$[x \pm \varepsilon] := [x - \varepsilon, x + \varepsilon],$$

um Intervalle durch ihren Mittelpunkt x und ihren Radius $\varepsilon \geq 0$ zu spezifizieren. Das Intervall $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ mit Mittelpunkt 0 und Radius ε wird abkürzend mit $[\pm\varepsilon]$ bezeichnet. Schließlich steht das Intervall $[x \pm \infty]$ mit beliebigem $x \in \mathbb{R}$ für die gesamte Menge $\mathbb{R}$. Da dieses Intervall das kleinste Element des Bereichs $\mathcal{I}$ ist, wird es auch mit $\perp$ bezeichnet.

Auf dem Intervall-Domain können wie folgt eine Addition und eine Multiplikation definiert werden: Die Addition zweier Intervalle erfolgt punktweise, d.h.

$$[x \pm \varepsilon] + [y \pm \delta] := [x + y \pm (\varepsilon + \delta)].$$

Führte man die Multiplikation ebenfalls punktweise durch, so entstünde ein Intervall, dessen Mittelpunkt nicht mit dem Produkt der Mittelpunkte identisch ist. Aus diesem Grund erklärt man die Multiplikation wie folgt:

$$[x \pm \varepsilon] \cdot [y \pm \delta] := \big[xy \pm \big(\varepsilon|y| + \delta|x| + \varepsilon\delta\big)\big]$$

Ist ein Summand bzw. ein Faktor das Element $\perp$, so ist die Summe bzw. das Produkt ebenfalls $\perp$.

Die so definierten Abbildungen sind stetig bezüglich der Scott-Topologie. Weiterhin setzen diese Operationen die entsprechenden Operationen auf den reellen Zahlen fort, wenn man die reellen Zahlen durch die Abbildung $i\colon x \mapsto [x \pm 0]$ in den Intervall-Domain einbettet, siehe Abbildung 1. Die reellen Zahlen entsprechen also den maximalen Elementen des Intervall-Domains. Im folgenden werden wir daher meist $\mathbb{R}$ mit seinem Bild unter der Abbildung i identifizieren.

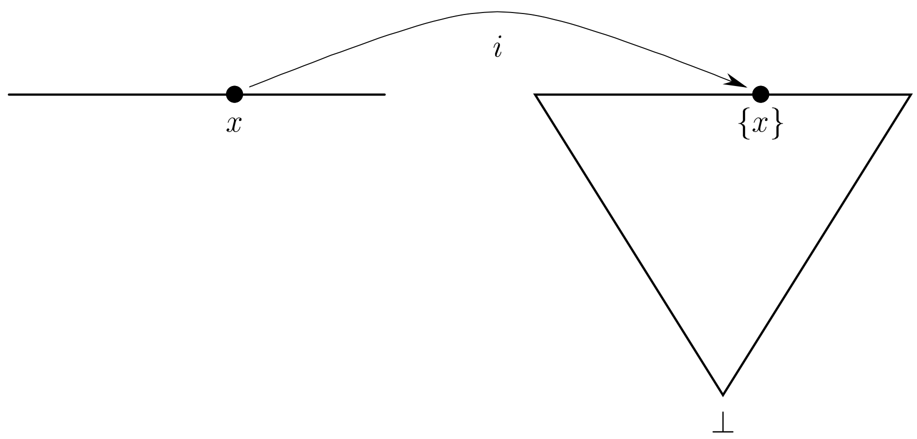


Abbildung 1. Die Einbettung $i\colon \mathbb{R} \to \mathcal{I}$

Neben der Ordnung auf dem Intervall-Domain werden wir im folgenden auch die übliche Ordnung auf den reellen Zahlen benutzen. Diese bezeichnen wir dann mit den Zeichen $<$ bzw. $\leq$.

1.2. Banach-Domains

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir kurz skizziert, wie der stetige Bereich $\mathcal{I}$ mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zusammenhängt. Dies wollen wir nun auf andere stetige Bereiche übertragen, indem wir sie einer zusätzlichen Struktur versehen, so daß sich aus ihnen Banachräume über $\mathbb{R}$ gewinnen lassen. Solche Bereiche werden wir Banach-Domains nennen.

Die Definition eines Banach-Domains und die weiteren Aussagen aus diesem Abschnitt sind mit leichten Modifikationen aus [Sü98] entnommen.

1.2.1 Definition. Ein *Banach-Domain* $(D, \sqsubseteq, +, \cdot, \mathbf{0})$ ist ein stetiger Bereich $(D, \sqsubseteq)$ mit einem kleinsten Element $\perp$ zusammen mit

- einer Scott-stetigen Addition $+\colon D \times D \to D$,
- einer Scott-stetigen skalaren Multiplikation $\cdot\colon \mathcal{I} \times D \to D$,
- einer Konstanten $\mathbf{0} \in D$,

so daß für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alle $a, b \in \mathcal{I}$ und alle $x, y, z \in D$ gilt:

(1) $$x + (y + z) = (x + y) + z$$

(2) $$x + y = y + x$$

(3) $$x + \mathbf{0} = x$$

(4) $$a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$$

(5) $$0 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$0 \cdot x \sqsubseteq \mathbf{0}$$

(6) $$n \cdot x = \underbrace{x + \cdots + x}_{n\text{-mal}}$$

(7) $$a \cdot x + b \cdot x \sqsubseteq (a + b) \cdot x$$

(8) $$a \cdot x + a \cdot y \sqsubseteq a \cdot (x + y)$$

Im folgenden schreiben wir ax für $a \cdot x$, $-x$ für $(-1)x$ und $x - y$ für $x + (-y)$. Ein wichtiger Spezialfall von (6) ist

$$1x = x$$

Da in den Distributivgesetzen keine Gleichheit gefordert ist, läßt sich (6) nicht aus dieser Gleichung folgern.

Wir wollen nun einige allgemeine Eigenschaften von Banach-Domains festhalten. Zunächst beschäftigen wir uns mit der Konstanten $\mathbf{0}$:

1.2.2 Lemma. 1. *Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt $s\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Insbesondere folgt damit $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$.*

2. *In einem Banach-Domain ist das Element $\mathbf{0}$ maximal.*

Beweis. 1. Es gilt $s\mathbf{0} = s(0\mathbf{0}) = (s0)\mathbf{0} = 0\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

2. Ist $\mathbf{0} \sqsubseteq x$, dann folgt aus der Monotonie der skalaren Multiplikation, daß $-\mathbf{0} \sqsubseteq -x$, also $\mathbf{0} \sqsubseteq -x$ wegen $\mathbf{0} = -\mathbf{0}$. Das impliziert $x = x + \mathbf{0} \sqsubseteq x - x \sqsubseteq \mathbf{0}$, also ist $\mathbf{0}$ ein maximales Element. □

Eine weitere Folge der schwachen Distributivgesetze ist, daß für ein Element $x \in D$ nur $x - x \sqsubseteq \mathbf{0}$ zu erwarten ist, was man mit (7) und (5) feststellt. Jedoch gibt es Elemente, für die Gleichheit gilt. Diese Elemente sollten einen speziellen Namen erhalten.

1.2.3 Definition. Ein Element x aus einem Banach-Domain D wird *invertierbar* genannt, wenn $x - x = \mathbf{0}$ gilt. Die Menge der invertierbaren Elemente wird mit $\mathsf{inv}(D)$ bezeichnet.

Aus $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$ folgt die Invertierbarkeit von $\mathbf{0}$. Allerdings wird nicht jedes Element eines Banach-Domains invertierbar sein.

1.2.4 Lemma. *Jedes invertierbare Element ist maximal.*

Beweis. Sei $x \in \mathsf{inv}(D)$ und $x \sqsubseteq y$. Dann gilt aufgrund der Monotonie der Addition $\mathbf{0} = x - x \sqsubseteq y - x$. Mit der Stetigkeit der skalaren Multiplikation mit -1 ergibt sich $\mathbf{0} \sqsubseteq x - y$. Da $\mathbf{0}$ maximal ist, folgt $\mathbf{0} = x - y$. Damit ist $y = \mathbf{0} + y = (x - y) + y = x + (y - y) \sqsubseteq x + \mathbf{0} = x$. Folglich gilt $x = y$, und x ist maximal. □

Die Umkehrung dieses Lemmas gilt nicht. In Beispiel 3.3.2 werden wir einen Banach-Domain angeben, der nicht-invertierbare maximale Elemente besitzt.

Neben den invertierbaren Elementen werden wir noch eine weitere Klasse von Elementen benötigen: die beschränkten Elemente.

1.2.5 Definition. Ein Element $x \in D$ heißt *beschränkt*, wenn

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left[\pm \tfrac{1}{n}\right] \cdot x = \mathbf{0}$$

gilt. Die Menge der beschränkten Elemente des Banach-Domains D wird mit $\mathsf{bd}(D)$ bezeichnet.

Beschränkte Elemente lassen sich durch die skalare Multiplikation mit 0 charakterisieren:

1.2.6 Lemma. *Ein Element $x \in D$ ist genau dann beschränkt, wenn $0 \cdot x = \mathbf{0}$ gilt. Insbesondere ist also $\mathbf{0}$ beschränkt.*

Beweis. Es gilt $\mathbf{0} = \bigsqcup[\pm\frac{1}{n}] \cdot x = \left(\bigsqcup[\pm\frac{1}{n}]\right) \cdot x = 0 \cdot x$ aufgrund der Scott-Stetigkeit der skalaren Multiplikation. □

1.2.7 Lemma. *Die Menge $\mathsf{bd}(D)$ ist unter Addition und skalarer Multiplikation mit Intervallen mit endlichem Radius abgeschlossen.*

Beweis. Seien $x, y \in \mathsf{bd}(D)$. Dann gilt $0 \cdot (x + y) \sqsupseteq 0 \cdot x + 0 \cdot y = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Da $\mathbf{0}$ ein maximales Element ist, gilt $0 \cdot (x + y) = \mathbf{0}$, d.h. $x + y \in \mathsf{bd}(D)$ nach 1.2.6.

Sind $[a \pm \varepsilon] \in \mathcal{I}$ mit $\varepsilon < \infty$ und $x \in \mathsf{bd}(D)$, so ist $0 \cdot ([a \pm \varepsilon] \cdot x) = (0 \cdot [a \pm \varepsilon]) \cdot x = 0 \cdot x = \mathbf{0}$, d.h. $[a \pm \varepsilon] \cdot x \in \mathsf{bd}(D)$ wiederum nach 1.2.6. □

1.2.8 Lemma. *Ist $x \in D$ beschränkt und gilt $y \sqsupseteq x$, so ist auch y beschränkt.*

Beweis. Da x beschränkt ist, gilt $0 \cdot x = \mathbf{0}$. Aufgrund der Monotonie der skalaren Multiplikation gilt $0 \cdot y \sqsupseteq 0 \cdot x = \mathbf{0}$, also $0 \cdot y = \mathbf{0}$ wegen der Maximalität von $\mathbf{0}$. Folglich ist y beschränkt. □

1.2.9 Lemma. *Jedes invertierbare Element eines Banach-Domains ist beschränkt.*

Beweis. Es sei $x \in \mathsf{inv}(D)$, d.h. $\mathbf{0} = x - x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x \sqsubseteq 0 \cdot x$. Da $\mathbf{0}$ maximal ist, gilt $\mathbf{0} = 0 \cdot x$. Mit Lemma 1.2.6 ergibt sich, daß x beschränkt ist. □

1.3. Banach-Domains und Banachräume

Wir wollen nun aus einem gegebenen Banach-Domain D einen Banachraum gewinnen. Der Kandidat für diesen Banachraum bildet die Menge der invertierbaren Elemente. Dazu zeigen wir zunächst, daß die Summe zweier invertierbarer Elemente genau wie das Produkt einer reellen Zahl mit einem invertierbaren Element wieder invertierbar ist.

1.3.1 Lemma. *Die Menge $\mathsf{inv}(D)$ ist unter Addition und skalarer Multiplikation mit reellen Zahlen abgeschlossen.*

Beweis. Sind $x, y \in \mathsf{inv}(D)$, so ist $(x + y) - (x + y) = (x - x) + (y - y) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, womit auch $x + y \in \mathsf{inv}(D)$ ist.

Sei nun $x \in \mathsf{inv}(D)$ und $s \in \mathbb{R}$. Wegen $0x = \mathbf{0}$ und $\mathbf{0} \in \mathsf{inv}(D)$ können wir im folgenden $s \neq 0$ annehmen. Dann gilt

$$\mathbf{0} = x - x = \tfrac{1}{s}(sx) + \tfrac{1}{s}(-sx) \sqsubseteq \tfrac{1}{s}(sx - sx).$$

Aus der Maximalität der $\mathbf{0}$ folgt $\frac{1}{s}(sx - sx) = \mathbf{0}$. Multipliziert man diese Gleichung mit s, so erhält man $sx - sx = s\mathbf{0} = \mathbf{0}$, also $sx \in \mathsf{inv}(D)$. □

1.3.2 Satz. *Ist D ein Banach-Domain, so ist $(\mathsf{inv}(D), +, \cdot, \mathbf{0})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

Beweis. Daß $\mathsf{inv}(D)$ unter den Vektorraumoperationen abgeschlossen ist, wurde gerade im vorangehenden Lemma gezeigt. Die Axiome für den Vektorraum sind gerade die Banach-Domain-Axiome (1) bis (8), wobei in (5), (7) und (8) Gleichheit gelten muß, falls a und b reelle Zahlen und x, y invertierbar sind:

Dies ist jedoch unmittelbar einsichtig: Nach 1.2.9 ist jedes invertierbare Element beschränkt. Damit gilt $0 \cdot x = \mathbf{0}$, und in (5) ist die Gleichheit erfüllt. Ebenso ist die Gleichheit in (7) leicht zu sehen: Nach 1.3.1 ist $ax + bx$ invertierbar, also nach 1.2.4

maximal. Mit der Ungleichung in (7) folgt nun, daß $ax + bx = (a+b)x$ sein muß. Die Gleichheit in (8) ist analog zu zeigen.

Damit ist $(\mathsf{inv}(D), +, \cdot, \mathbf{0})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. $\square$

Bemerkung. Betrachtet man die Spurtopologie der Scott-Topologie auf $\mathsf{inv}(D)$, so wird $\mathsf{inv}(D)$ zu einem topologischen Vektorraum.

Wir wollen nun aus dem topologischen Vektorraum $\mathsf{inv}(D)$ einen normierten Vektorraum machen. Dazu bemerken wir, daß sich durch die Angabe einer Einheitskugel (d.h. einer offenen, konvexen, symmetrischen, absorbierenden Menge um das Nullelement) eine Norm definieren läßt.

Zu diesem Zweck fixieren wir in D ein beschränktes $b \ll \mathbf{0}$ mit $b = [\pm 1]b$. (Ein solches erhält man zum Beispiel, indem man ein beschränktes $a \ll \mathbf{0}$ wählt und $b := [\pm 1]a$ setzt.) Dieses b soll die Rolle unserer Einheitskugel übernehmen.

1.3.3 Lemma. *Sei $b \in \mathsf{bd}(D)$ mit $b \ll \mathbf{0}$ und $b = [\pm 1]b$. Weiterhin seien $s, t \in \mathbb{R}$.*

1. *Für alle $s > 0$ gilt $sb \ll \mathbf{0}$.*
2. *Es gilt $-b = b$.*
3. *Für $0 < t \leq s$ gilt $sb \sqsubseteq tb$.*
4. *Es gilt $\bigsqcup_{s>t} sb = tb$ für alle $t > 0$. Weiterhin gilt $\bigsqcup_{s>0} sb = \mathbf{0}$.*

Beweis.
1. Nach Voraussetzung gilt $b \ll \mathbf{0}$. Da für $s \neq 0$ die skalare Multiplikation mit s – also die Abbilung $(x \mapsto sx)\colon D \to D$ – ein Ordnungsisomorphismus ist, folgt $sb \ll s\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
2. Es gilt $-b = -1\big([\pm 1]b\big) = \big(-1[\pm 1]\big)b = [\pm 1]b = b$.
3. Für $0 < t \leq s$ gilt $t[\pm 1] = [\pm t] \sqsupseteq [\pm s] = s[\pm 1]$, also $sb = [\pm s]b \sqsubseteq [\pm t]b = tb$ aufgrund der Monotonie der skalaren Multiplikation.
4. Nach 3 bildet die Menge $\{sb \mid s > t\}$ eine Kette. Die Scott-Stetigkeit der skalaren Multiplikation impliziert
$$\bigsqcup_{s>t} sb = \bigsqcup_{s>t} \big([\pm s]b\big) = \Big(\bigsqcup_{s>t} [\pm s]\Big)b = [\pm t]b = tb$$
Der zweite Teil der Aussage folgt aus der Beschränktheit von b. $\square$

Für die folgenden Betrachtungen benötigen wir die Tatsache, daß in bestimmten Fällen in Axiom (7) Gleichheit gilt. Diese Eigenschaft wird in einem Lemma bereitgestellt.

1.3.4 Konvexitätslemma. *Für alle $x \in D$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \geq 0$ gilt*
$$px + qx = (p+q)x.$$

Beweis. Sei $p = \frac{n}{k}$ und $q = \frac{m}{k}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Setzt man $y = \frac{1}{k}x$, so erhält man $px = ny$, $qx = my$, somit $(p+q)x = (n+m)y$ und daraus

$$px + qx = \underbrace{y + \cdots + y}_{n\text{-mal}} + \underbrace{y + \cdots + y}_{m\text{-mal}} = \underbrace{y + \cdots + y}_{n+m\text{-mal}} = (p+q)x$$

mit (6). □

1.3.5 Satz. *Es sei $b \in \mathsf{bd}(D)$ mit $b \ll \mathbf{0}$ und $b = [\pm 1]b$. Dann wird durch*

$$\|x\|_b := \inf\{s > 0 \mid sb \sqsubseteq x\}$$

auf $\mathsf{bd}(D)$ eine Norm definiert.

Beweis. Für die Wohldefiniertheit von $\|\cdot\|_b$ ist zu zeigen, daß für $x \in \mathsf{bd}(D)$ die Menge $\{s > 0 \mid sb \sqsubseteq x\}$ nicht leer ist. Betrachte dazu die Folge $\left(\frac{1}{n}x\right)_{n>0}$. Diese konvergiert gegen $\mathbf{0}$. Wegen $b \ll \mathbf{0}$ gilt $\mathbf{0} \in \mathrm{int}(\uparrow b)$, so daß $\uparrow b$ eine Umgebung von $\mathbf{0}$ ist. Demnach existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0}x \in \uparrow b$. Damit ist $b \sqsubseteq \frac{1}{n_0}x$ bzw. $n_0 b \sqsubseteq x$, folglich $\|x\|_b \leq n_0$.

Offensichtlich gilt $\|\mathbf{0}\|_b = 0$. Ist andererseits $\|x\| = 0$, so gilt $x \in \bigcap_{s>0} \uparrow(sb) = \{\mathbf{0}\}$. Also gilt $x = \mathbf{0} \iff \|x\|_b = 0$.

Nun gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, daß

$$sb \sqsubseteq x \iff \alpha sb \sqsubseteq \alpha x \iff |\alpha| sb \sqsubseteq \alpha x$$

da $-b = b$. Folglich gilt $\|\alpha x\|_b = |\alpha|\|x\|_b$. Für $\alpha = 0$ ist die Aussage offensichtlich, da $0x = x$ für alle $x \in \mathsf{bd}(D)$ gilt.

Zur Dreiecksungleichung: Definiere $A_x := \{s > 0 \mid sb \sqsubseteq x\}$. Wegen $\|x\|_b = \inf A_x$ gibt es zu jedem $\varepsilon_x > 0$ ein $s_x \in A_x$ mit $\|x\|_b \geq s_x - \varepsilon_x$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, kann $s_x \in \mathbb{Q}$ gewählt werden. Ebenso gibt es zu jedem $\varepsilon_y > 0$ ein $s_y \in A_y \cap \mathbb{Q}$ mit $\|y\|_b \geq s_y - \varepsilon_y$. Nun gilt $(s_x + s_y)b = s_x b + s_y b \sqsubseteq x + y$ aufgrund des Konvexitätslemmas 1.3.4. Also ist $s_x + s_y \in A_{x+y}$. Daraus folgt $\|x+y\|_b = \inf A_{x+y} \leq s_x + s_y \leq \|x\|_b + \|y\|_b + \varepsilon_x + \varepsilon_y$ für alle $\varepsilon_x, \varepsilon_y \geq 0$, also $\|x+y\|_b \leq \|x\|_b + \|y\|_b$. □

Man beachte, daß die Definition der Norm von dem gewählten $b \ll \mathbf{0}$ abhängt. Jedoch erhält man durch die Wahl eines anderen $b' \ll \mathbf{0}$ mit $b' = [\pm 1]b'$ eine zu $\|\cdot\|_b$ äquivalente Norm $\|\cdot\|_{b'}$

1.3.6 Lemma. *Seien $b, b' \in \mathsf{bd}(D)$ mit $b, b' \ll \mathbf{0}$ und $b = [\pm 1]b$ sowie $b' = [\pm 1]b'$. Dann existieren positive Konstanten $s, r \in \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in \mathsf{bd}(D)$ gilt:*

$$\|x\|_b \geq s\|x\|_{b'} \quad \textit{und} \quad \|x\|_{b'} \geq r\|x\|_b$$

Beweis. Sei $b' \ll \mathbf{0}$ und $b' = [\pm 1]b'$. Die Norm $\|\cdot\|_{b'}$ wird nun wie in Satz 1.3.5 definiert. Wegen $b \ll \mathbf{0} = \bigsqcup_{r>0} rb'$ gibt es ein $r > 0$ mit $b \sqsubseteq rb'$ bzw. $\frac{1}{r}b \sqsubseteq b'$, also

$$\|x\|_{b'} \cdot \tfrac{1}{r}b \sqsubseteq \|x\|_{b'} \cdot b'.$$

Aus Definition der Norm $\|\cdot\|_b$ folgt $\frac{\|x\|_{b'}}{r} \geq \|x\|_b$ oder äquivalent $\|x\|_{b'} \geq r\|x\|_b$.

Die Konstante s ergibt sich durch Vertauschen von b und b'. □

Bemerkungen. • Direkt aus der Definition der Norm folgt, daß $\|x\|_b b \sqsubseteq x$ für alle $x \in \mathsf{bd}(D)$ gilt.

- Es gilt $\|b\|_b = 1$.
- Sofern es irrelevant ist, mit welchem b wir die Norm konstruiert haben, schreiben wir auch $\|\cdot\|$ anstelle von $\|\cdot\|_b$. Dies ist auch dadurch gerechtfertigt, die entstehenden Normen alle äquivalent sind.
- Aus $x \sqsubseteq y$ folgt $\|x\| \geq \|y\|$, sofern x und y beschränkte Elemente sind.

Da wir auf $\mathsf{inv}(D)$ nun eine Norm erklärt haben, stellt sich die Frage, wie die entstehende Normtopologie mit der durch den Bereich D induzierten Scott-Topologie zusammenhängt. Der folgende Satz besagt, daß die Topologien identisch sind.

1.3.7 Satz. *Die Topologie auf* $\mathsf{inv}(D)$*, die durch die Norm aus 1.3.5 definiert wird, stimmt mit der auf* $\mathsf{inv}(D)$ *eingeschränkten Scott-Topologie überein.*

Beweis. Sei $s > 0$. Die Mengen $U_s := \Uparrow(sb) \cap \mathsf{inv}(D)$ bilden eine Umgebungsbasis der $\mathbf{0}$ für die relative Scott-Topologie auf $\mathsf{inv}(D)$. Ist nun $x \in U_s$, so gilt $sb \ll x$, also $sb \sqsubseteq x$ und folglich $\|x\| \leq s$. Also ist die relative Scott-Topologie eine Verfeinerung der Normtopologie.

Da $sb \ll \mathbf{0} = \bigsqcup_{t>0} tb$ nach Lemma 1.3.3, existiert nach Definition der $\ll$-Relation ein $t > 0$ mit $sb \ll tb$. Ist nun $\|x\| < t$, also $tb \sqsubseteq x$, dann gilt auch $sb \ll x$, und somit ist $x \in U_s$. □

Wir haben nun gesehen, daß die Menge der invertierbaren Elemente eines Banach-Domains einen normierten Vektorraum bilden. Um zu zeigen, daß sie auch einen Banachraum bilden, muß nur noch die Vollständigkeit bezüglich der in 1.3.5 definieren Norm nachgewiesen werden.

1.3.8 Satz. *Ist D ein Banach-Domain, so ist* $(\mathsf{inv}(D), \|\cdot\|)$ *ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathsf{inv}(D)$. Wir definieren induktiv eine Teilfolge dieser Folge:

- Wähle $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\|x_{k_0} - x_k\| \leq 1$ für alle $k \geq k_0$.
- Für gegebenes k_n wähle $k_{n+1} > k_n$, so daß $\|x_{k_{n+1}} - x_k\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ für alle $k \geq k_{n+1}$.

Setze nun
$$c_n = x_{k_n} + \tfrac{1}{2^{n-1}} b.$$
Wegen $\|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\| \leq \frac{1}{2^n}$ ist $\frac{1}{2^n} b \sqsubseteq x_{k_{n+1}} - x_{k_n}$ und damit $x_{k_n} + \frac{1}{2^n} b \sqsubseteq x_{k_{n+1}}$, da nach Voraussetzung alle x_{k_n} invertierbar sind. Aus dem Konvexitätslemma 1.3.4 folgt
$$c_n = x_{k_n} + \tfrac{1}{2^{n-1}} b = x_{k_n} + \tfrac{1}{2^n} b + \tfrac{1}{2^n} b \sqsubseteq x_{k_{n+1}} + \tfrac{1}{2^n} b = c_{n+1},$$
so daß $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Kette in D ist. Das Supremum $x := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} c_n$ der Kette ist der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathsf{inv}(D)$:

Zunächst zur Invertierbarkeit von x. Es gilt

$$\begin{aligned}
x - x &= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} c_n - \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} c_n \\
&= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (c_n - c_n) \\
&= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\big(x_{k_n} + \tfrac{1}{2^{n-1}} b\big) + (-1)\big(x_{k_n} + \tfrac{1}{2^{n-1}} b\big)\Big) \\
&\sqsupseteq \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \bigg(\big(x_{k_n} + \tfrac{1}{2^{n-1}} b\big) + \Big((-x_{k_n}) + \big(-\tfrac{1}{2^{n-1}} b\big)\Big)\bigg) \\
&= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \big(\tfrac{1}{2^{n-1}} b + \tfrac{1}{2^{n-1}} b\big) \\
&= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \tfrac{1}{2^{n-2}} b \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

also ist $x - x = \mathbf{0}$, und somit ist x invertierbar.

Nun ist noch $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x$ zu zeigen. Dazu bemerken wir $x_{k_n} + \frac{1}{2^{n-1}} b = c_n \sqsubseteq x$, woraus $\frac{1}{2^{n-1}} b \sqsubseteq x - x_{k_n}$ folgt. Demnach ist $\|x - x_{k_n}\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, und somit konvergiert die Folge gegen x. $\square$

KAPITEL 2

Beispiele für Banach-Domains

2.1. Der Intervall-Domain

Das einfachste und naheliegendste Beispiel für einen Banach-Domain ist der Intervall-Domain $\mathcal{I}$. Wie in Abschnitt 1.1 gesehen, sind die Operationen $+\colon \mathcal{I}\times\mathcal{I}\to\mathcal{I}$ und $\cdot\colon \mathcal{I}\times\mathcal{I}\to\mathcal{I}$ Scott-stetig. Die Rolle der $\mathbf{0}$ übernimmt hier das einpunktige Intervall $\{0\}$. Es bleibt der Nachweis der Axiome für Banach-Domains.

Durch die punktweise Definition der Addition auf $\mathcal{I}$ übertragen sich die Assoziativität, die Kommutativität und die Neutralität von 0 aus $\mathbb{R}$ direkt den Intervall-Domain, so daß (1), (2) und (3) offensichtlich sind. Durch die folgende Rechnung ergibt sich die Assoziativität der Multiplikation:

$$\begin{aligned}
&[x\pm\varepsilon]\cdot\big([y\pm\delta]\cdot[z\pm\vartheta]\big)\\
&=[x\pm\varepsilon]\cdot[yz\pm(\delta|z|+\vartheta|y|+\delta\vartheta)]\\
&=\big[x(yz)\pm\big(\varepsilon|yz|+(\delta|z|+\vartheta|y|+\delta\vartheta)|x|+\varepsilon(\delta|z|+\vartheta|y|+\delta\vartheta)\big)\big]\\
&=\big[xyz\pm(\varepsilon|yz|+\delta|xz|+\vartheta|xy|+\delta\vartheta|x|+\varepsilon\delta|z|+\varepsilon\vartheta|y|+\varepsilon\delta\vartheta)\big]\\
&=\big[(xy)z\pm\big((\varepsilon|y|+\delta|x|+\varepsilon\delta)|z|+\vartheta|xy|+(\varepsilon|y|+\delta|x|+\varepsilon\delta)\vartheta\big)\big]\\
&=[xy\pm(\varepsilon|y|+\delta|x|+\varepsilon\delta)]\cdot[z\pm\vartheta]\\
&=\big([x\pm\varepsilon]\cdot[y\pm\delta]\big)\cdot[z\pm\vartheta]
\end{aligned}$$

Damit ist (4) gezeigt. Das Axiom (5) ist wieder offensichtlich. Zum Nachweis von (6):

$$\begin{aligned}
[n\pm 0]\cdot[x\pm\varepsilon]&=\big[nx\pm(0|x|+\varepsilon|n|+0\varepsilon)\big]\\
&=[nx\pm n\varepsilon]\\
&=\big[(n-1)x\pm(n-1)\varepsilon\big]+[x\pm\varepsilon]\\
&=[(n-1)\pm 0]\cdot[x\pm\varepsilon]\\
&=\dots\\
&=\underbrace{[x\pm\varepsilon]+\cdots+[x\pm\varepsilon]}_{n-\text{mal}}
\end{aligned}$$

Es verbleiben noch die schwachen Distributivitätsgesetze. Aus

$$\begin{aligned}
&[y\pm\delta]\cdot[x\pm\varepsilon]+[z\pm\vartheta]\cdot[x\pm\varepsilon]\\
&=\big[yx\pm(\delta|x|+\varepsilon|y|+\delta\varepsilon)\big]+\big[zx\pm(\vartheta|x|+\varepsilon|z|+\vartheta\varepsilon)\big]\\
&=\big[yx+zx\pm(\delta|x|+\varepsilon|y|+\delta\varepsilon+\vartheta|x|+\varepsilon|z|+\vartheta\varepsilon)\big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \big[yx + zx \pm (\delta|x| + \varepsilon(|y| + |z|) + \delta\varepsilon + \vartheta|x| + \vartheta\varepsilon)\big] \\
&\sqsubseteq \big[yx + zx \pm \big(\delta|x| + \vartheta|x| + |y+z|\varepsilon + \delta\varepsilon + \vartheta\varepsilon\big)\big] \\
&= \big[(y+z)x \pm \big((\delta+\vartheta)|x| + |y+z|\varepsilon + (\delta+\vartheta)\varepsilon\big)\big] \\
&= \big[y + z \pm (\delta+\vartheta)\big] \cdot [x \pm \varepsilon] \\
&= \big([y \pm \delta] + [z \pm \vartheta]\big) \cdot [x \pm \varepsilon]
\end{aligned}$$

folgt die Gültigkeit von (7). Man beachte, daß im Fall $\varepsilon = 0$ sogar Gleichheit gilt. Das Axiom (8) läßt sich auf ähnliche Art und Weise nachrechnen:

$$\begin{aligned}
&[z \pm \vartheta] \cdot [x \pm \varepsilon] + [z \pm \vartheta] \cdot [y \pm \delta] \\
&= \big[zx + (\vartheta|x| + \varepsilon|z| + \varepsilon\vartheta)\big] + \big[zy \pm (\vartheta|y| + \delta|z| + \vartheta\delta)\big] \\
&= \big[zx + zy \pm (\vartheta|x| + \varepsilon|z| + \varepsilon\vartheta + \vartheta|y| + \delta|z| + \vartheta\delta)\big] \\
&= \big[zx + zy \pm \big(\vartheta(|x| + |y|) + \varepsilon|z| + \delta|z| + \vartheta\varepsilon + \vartheta\delta\big)\big] \\
&\sqsubseteq \big[zx + zy \pm (\vartheta|x+y| + \varepsilon|z| + \delta|z| + \vartheta\varepsilon + \vartheta\delta)\big] \\
&= \big[z(x+y) \pm \big(\vartheta|x+y| + (\varepsilon+\delta)|z| + \vartheta(\varepsilon+\delta)\big)\big] \\
&= [z \pm \vartheta] \cdot \big([x + y \pm (\varepsilon+\delta)\big) \\
&= [z \pm \vartheta] \cdot \big([x \pm \varepsilon] + [y \pm \delta]\big)
\end{aligned}$$

Wieder hat man im Fall $\vartheta = 0$ sogar Gleichheit. Somit ist der Intervall-Domain ein Beispiel für einen Banach-Domain. □

Die invertierbaren Elemente des Intervall-Domains sind genau die reellen Zahlen: Ist $a = [x \pm \varepsilon] \in \mathcal{I}$ invertierbar, so muß $[x \pm \varepsilon] - [x \pm \varepsilon] = [x \pm \varepsilon] + [-x \pm \varepsilon] = [\pm 2\varepsilon] = 0$ gelten, damit also $\varepsilon = 0$. Das heißt aber $a \in \mathbb{R}$. Damit sind in $\mathcal{I}$ die invertierbaren Elemente genau die maximalen.

Die beschränkten Elemente von $\mathcal{I}$ sind die im üblichen Sinne beschränkten Intervalle. Ist $\varepsilon < \infty$, so folgt $0 \cdot [x \pm \varepsilon] = [0x \pm (0x + \varepsilon|0| + 0)] = 0$. Die Intervalle $[x \pm \infty]$ sind aufgrund der Definition der skalaren Multiplikation auf $\mathcal{I}$ nicht beschränkt, da $0 \cdot [\pm\infty] = [\pm\infty]$.

Wir wollen nun sehen, wie die durch 1.3.5 auf den invertierbaren Elementen von $\mathcal{I}$ definierte Norm aussieht. Dazu wählen wir ein Element $a \ll 0$, z.B. $a = [1 \pm 2]$. Dann ist $b = [\pm 1] \cdot [1 \pm 2] = [\pm 3]$. Um nun für $x \in \mathsf{inv}(\mathcal{I}) = \mathbb{R}$ die Norm $\|x\|_{[\pm 3]}$ zu berechnen, müssen wir das Infimum der Menge $\{s > 0 \mid sb \sqsubseteq x\} = \{s > 0 \mid x \in [\pm 3s]\}$ bestimmen. Dieses ist $\frac{1}{3}|x|$, und damit hat $\|x\|_{[\pm 3]}$ genau diesen Wert.

2.2. Der Bereich der formalen Kugeln

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Unter einer *formalen Kugel* dieses Raums verstehen wir ein Paar (x, r) mit $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$. Dabei bezeichnet jedes Paar der Form (x, ∞) mit $x \in X$ den ganzen Raum X. Ordnet man diese formalen Kugeln durch

$$(x, r) \sqsubseteq (y, s) :\Longleftrightarrow d(x, y) \leq r - s,$$

so erhält man nach [EH98, Theorem 6 und Corollary 10] den stetigen Bereich $\mathcal{B}X$. Dieser Bereich wird der *Bereich der formalen Kugeln* genannt. Die maximalen Elemente von $\mathcal{B}X$ sind $(x, 0)$ mit $x \in X$. Diese sind genau das Bild der durch $x \mapsto (x, 0)$ gegebenen Einbettung von X in $\mathcal{B}X$.

Bemerkung. Bezeichnet man mit $C_r(x)$ die abgeschlossene Kugel um x mit Radius $r \geq 0$, so gilt $(x, r) \sqsubseteq (y, s) \implies C_r(x) \supseteq C_s(y)$. Die umgekehrte Implikation gilt nur im Falle nicht-trivialer normierter Vektorräume, vgl. [EH98].

Ist X ein Banachraum über $\mathbb{R}$, so kann man die auf X definierte Addition und skalare Multiplikation auf den Domain $\mathcal{B}X$ und den Skalarenbereich $\mathcal{I}$ stetig fortsetzen:

$$(x, r) + (y, s) := (x + y, r + s)$$
$$[x \pm \varepsilon] \cdot (y, s) := (xy, \varepsilon\|y\| + s|x| + \varepsilon s)$$

Beachte, daß die zur Definition der skalaren Multiplikation benutzte Norm die Norm des Banachraums X ist. Der Nachweis, daß $\mathcal{B}X$ auf diese Weise zu einem Banach-Domain wird, erfolgt wie im Fall des Intervall-Domains. Ebenso stellt man fest, daß die beschränkten Elemente genau die formalen Kugeln mit endlichem Radius sind und daß die invertierbaren Elemente von $\mathcal{B}X$ den maximalen entsprechen. Man bemerke, daß der Intervall-Domain ein spezieller Bereich formaler Kugeln ist. Es gilt nämlich $\mathcal{I} = \mathcal{B}\mathbb{R}$.

Ist X ein Banachraum und $\mathcal{B}X$ der zugehörige Bereich der formalen Kugeln, so stellt sich die Frage, was der Banachraum $\mathsf{inv}(\mathcal{B}X)$ mit dem ursprünglichen Banachraum X zu tun hat. Die folgenden Sätze geben darauf eine Antwort.

2.2.1 Satz. *Die Banachräume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(\mathsf{inv}(\mathcal{B}X), \|\cdot\|_{\mathcal{B}X})$ sind homöomorph.*

Beweis. Nach [EH98, Theorem 13] ist die Einbettung $i\colon X \to \max(\mathcal{B}X)$ mit $x \mapsto (x, 0)$ ein Homöomorphismus, wobei X mit der Normtopologie und $\mathcal{B}X$ mit der relativen Scott-Topologie ausgestattet sind. Nach Satz 1.3.7 stimmt die relative Scott-Topologie auf $\mathsf{inv}(\mathcal{B}X) = \max(\mathcal{B}X)$ mit der Normtopologie auf $\mathsf{inv}(\mathcal{B}X)$ überein. Damit sind die Normtopologien auf X und $\mathsf{inv}(\mathcal{B}X)$ identisch, und die Räume sind homöomorph. □

Es gilt sogar noch mehr:

2.2.2 Satz. *In Banach-Domains formaler Kugeln unterscheiden sich die auf $\mathsf{bd}(D)$ induzierten Normen nur um einen konstanten Faktor.*

Beweis. Für alle Elemente $b \in \mathcal{B}X$ mit $b = -b$ gilt $b = (0, \varepsilon)$, denn aus $(x, \varepsilon) = b = -b = (-x, \varepsilon)$ folgt $x = 0$.

Wählt man nun zur Definition der Norm ein anderes $b' \ll \mathbf{0}$ mit $b' = [\pm 1]b'$, so gilt $b' = (0, \varepsilon') = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}(0, \varepsilon) = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} b$. Betrachtet man die auf $\mathsf{bd}(D)$ durch 1.3.5 definierte Norm, so stellt man fest:

$$\|x\|_{b'} = \inf\{s > 0 \mid sb' \sqsubseteq x\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf\{s > 0 \mid s(\tfrac{\varepsilon'}{\varepsilon} b) \sqsubseteq x\} \\
&= \tfrac{\varepsilon'}{\varepsilon} \inf\{s > 0 \mid sb \sqsubseteq x\} \\
&= \tfrac{\varepsilon'}{\varepsilon} \|x\|_b
\end{aligned}
$$

□

Damit ergibt sich

2.2.3 Korollar. *Die Normen der Banachräume X und $\mathsf{inv}(\mathcal{B}X)$ unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor.* □

2.3. Bimetrische Kugeln

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß 2.2.2 nicht in allen Banach-Domains gültig ist. Dazu betrachten wir in $X = \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 2$ die Einheitskugeln der euklidischen und der Maximumsnorm. Wir suchen einen Banach-Domain, der diese Kugeln enthält.

Addiert man eine euklidische Kugel mit Radius r und eine Maximumkugel mit Radius a, so erhält man das Gebilde aus Abbildung 2, eine *bimetrische Kugel*. Im folgenden zeigen wir, daß die Menge D dieser bimetrischen Kugeln einen Banach-Domain bilden.

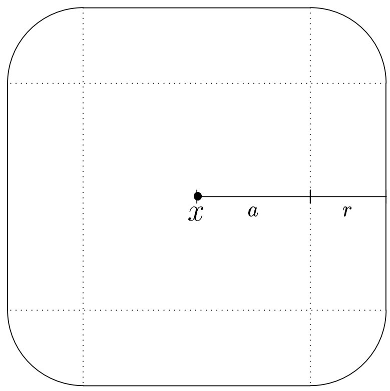


ABBILDUNG 2. Die bimetrische Kugel $(x, a, r) \in \mathbb{R}^2$

Die Elemente von D lassen sich formal als Tripel auffassen. Durch (x, a, r) mit $x \in \mathbb{R}^m$ und $a, r \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ ist eine bimetrische Kugel eindeutig festgelegt. Die Menge der bimetrischen Kugeln wird durch umgekehrte Inklusion geordnet, d.h.

$$(x, a, r) \sqsubseteq (y, b, s) :\iff (x, a, r) \supseteq (y, b, s)$$

Ist $a = \infty$ oder $r = \infty$, so erhält man das kleinste Element $\perp$ der Menge.

Durch geometrische Überlegungen stellt man fest:

2.3.1 Lemma. *Es sei $(x, a, r) \sqsubseteq (x, b, s)$. Dann gilt*

1. $a < b \implies s < r - \sqrt{m}(b - a)$
2. $a \geq b \implies s \leq r + (a - b)$

Diese Abschätzungen gelten natürlich erst recht, wenn die Mittelpunkte der Elemente verschieden sind. □

Bezeichnet man die Kugeln des $\mathbb{R}^m$ bzgl. der euklidischen Metrik durch $(x, r)_2$ und die bezüglich der Maximumsmetrik durch $(x, r)_\infty$, so lassen sich die bimetrischen Kugeln wie folgt mit ihnen in Verbindung setzen:

2.3.2 Lemma. 1. $(x, a+r)_\infty \sqsubseteq (x, a, r) \sqsubseteq (x, a+r)_2$

2. $(x, a, r) \sqsubseteq (y, b, s) \implies (x, a+r)_\infty \sqsubseteq (y, b+s)_\infty$ □

2.3.3 Lemma. $(D, \sqsubseteq)$ *ist ein Bereich.*

Beweis. Es sei $(x_n, a_n, r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Kette in D. Behauptung: Das Supremum dieser Kette ist (x, a, r) mit $x = \lim x_n$, $a = \lim a_n$ und $r = \lim r_n$. Dazu ist zunächst zu zeigen, daß diese Grenzwerte überhaupt existieren.

Betrachtet man die Maximumskugeln $(x_n, a_n + r_n)_\infty$, so bilden diese nach 2.3.2(2) ebenfalls eine Kette und haben damit ein Supremum. Nach [EH98, Theorem 5] ist dieses $\big(\lim x_n, \lim(a_n + r_n)\big)$. Damit exisitert x.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, d.h. wenn die Folge keinen Grenzwert hat, muß sie zwei verschiedene Häufungspunkte α und α' besitzen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $\alpha > \alpha'$. Sei nun ε so gewählt, daß $0 < \varepsilon < \frac{|\alpha-\alpha'|}{2}$ gilt. Da α ein Häufungspunkt der Folge ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Ebenso existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n+k} - \alpha'| < \varepsilon$. Nach der Wahl von ε gilt nun $a_{n+k} < a_n$, und aus 2.3.1(2) folgt

$$(*) \qquad r_{n+k} \leq r_n + (a_n - a_{n+k}).$$

Nun gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}$, so daß $|a_{n+k+\ell} - \alpha| < \varepsilon$ ist. Es gilt nun $a_{n+k+\ell} > a_{n+k}$ und damit

$$(**) \qquad r_{n+k+\ell} < r_{n+k} - \sqrt{m}(a_{n+k+\ell} - a_{n+k}).$$

nach 2.3.1(1). Mit $a_{n+k+\ell} > a_n - 2\varepsilon$ und $(*)$ erhält man aus $(**)$

$$\begin{aligned} r_{n+k+\ell} &< r_n - \big(\sqrt{m} - 1\big)(a_n - a_{n+k}) + 2\sqrt{m} \cdot \varepsilon \\ &\leq r_n - \big(\sqrt{m} - 1\big)(\alpha - \alpha') + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Insbesondere stellt man auf diese Art fest, daß mit jedem Pendeln zwischen den Häufungspunkten α und α' die Radien r_n mindestens um $\big(\sqrt{m} - 1\big)(\alpha - \alpha')$ kleiner werden, d.h. irgendwann wird ein Folgenglied r_n wegen $m \geq 2$ negativ sein. Dies ist jedoch nicht möglich, da die r_n nicht negativ sein dürfen. Folglich fallen die Häufungspunkte α und α' zusammen, und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muß gegen ein a konvergieren.

Da nun $\lim(a_n + r_n)$ und $\lim a_n$ existieren, muß auch $\lim r_n$ existieren, womit (x, a, r) ein Element aus D ist. Nach Konstruktion gilt $(x, a, r) \sqsupseteq (x_n, a_n, r_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß (x, a, r) eine obere Schranke für die Kette ist. Ist nun (y, b, s) eine weitere obere Schranke, so folgt, da $(y, b, s) \sqsupseteq (x_n, a_n, r_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, auch $(y, b, s) \sqsupseteq (\lim x_n, \lim a_n, \lim r_n) = (x, a, r)$, d.h. (x, a, r) ist die kleinste obere Schranke und damit das Supremum der Kette. □

2.3.4 Lemma. *Für die Weit-unter-Relation auf D gilt*

$$(x, a, r) \ll (y, b, s) \implies (y, b, s) \subseteq \operatorname{int}(x, a, r).$$

Damit ist der Bereich $(D, \sqsubseteq)$ stetig.

Beweis. Sei $(x, a, r) \ll (y, b, s)$ und $A = \{(y, b + \frac{1}{n}, s + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Kette in D. Das Supremum dieser Kette ist (y, b, s). Nach Voraussetzung gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $(x, a, r) \sqsubseteq (y, b + \frac{1}{n_0}, s + \frac{1}{n_0})$. Damit gilt $(y, b, s) \subseteq \operatorname{int}(x, a, r)$. □

Definiert man nun eine Addition und skalare Multiplikation ähnlich wie im Bereich der formalen Kugeln durch

$$\begin{aligned} (x, a, r) + (y, b, s) &:= (x + y, a + b, r + s) \\ [x \pm \varepsilon] \cdot (y, b, s) &:= (xy, \varepsilon\|y\| + b|x| + \varepsilon b, \varepsilon\|y\| + s|x| + \varepsilon s) \end{aligned}$$

und wählt als Nullelement $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, so erhält man:

2.3.5 Satz. *Die Menge der bimetrischen Kugeln bildet zusammen mit der umgekehrten Inklusionsordnung und obigen Operationen einen Banach-Domain.*

Beweis. Es verbleibt der Nachweis der Stetigkeit von $+$ und $\cdot$ sowie der Gültigkeit der algebraischen Axiome (1)–(8). Beides läßt sich wie im Fall der formalen Kugeln nachrechnen. □

Nach Konstruktion ist in diesem Bereich 2.2.2 nicht erfüllt, da die Norm nun deutlich von der Wahl von $b \ll \mathbf{0}$ abhängig ist. Wählt man in $X = \mathbb{R}^2$ nämlich $b_1 = (0, 1, 0)$ und $b_2 = (0, 0, 1)$, so gilt

$$\begin{aligned} \|(1,0)\|_{b_1} &= 1 & \qquad \|(1,0)\|_{b_2} &= 1 \\ \|(1,\tfrac{1}{2})\|_{b_1} &= 1 & \qquad \|(1,\tfrac{1}{2})\|_{b_2} &= \tfrac{\sqrt{5}}{2} \\ \|(1,1)\|_{b_1} &= 1 & \qquad \|(1,1)\|_{b_2} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

woran man deutlich sieht, daß die durch b_2 bestimmte Norm kein Vielfaches der b_1-Norm ist. Dies ist klar, da die durch b_1 und b_2 bestimmten Normen auf den invertierbaren Elementen gerade die Maximums- bzw. die euklidische Norm bestimmen. (So wurde der Bereich ja gerade gebaut.) Da die Maximumsnorm kein Vielfaches der euklidischen Norm darstellt, ist dies bei den hier konstruierten Normen somit auch nicht der Fall.

2.4. Der obere Potenzbereich

Sei $X = \mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Betrachtet man alle nichtleeren kompakten Teilmengen von X zusammen mit dem ganzen Raum X und ordnet diese wieder durch

$$A \sqsubseteq B :\iff A \supseteq B,$$

so erhält man einen stetigen Bereich (vgl. [Eda95, Propositionen 3.1 und 3.3]), den *oberen Potenzbereich* $\mathcal{U}X$. Stattet man diesen mit den punktweise fortgesetzten Operationen aus, d.h.

$$(*) \qquad A + B := \bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}} a + b \qquad\qquad [x \pm \varepsilon]\cdot A := \bigcup_{a\in A} \bigcup_{\substack{\delta\geq 0 \text{ mit}\\ a\pm\delta a\in A}} \big([x\pm\varepsilon][1\pm\delta]\big)a$$

für $A, B \in \mathcal{U}X$ und $[x \pm \varepsilon] \in \mathcal{I}$, so ergibt sich jedoch noch nicht notwendigerweise ein Banach-Domain: Betrachtet man die kompakte Menge $A = [1,2] \cup [10,11]$, so gilt

$$A + A = [2,4] \cup [11,13] \cup [20,22] \sqsubsetneq [2,4] \cup [20,22] = 2 \cdot A$$

Folglich ist (6) nicht erfüllt

Das Problem ist, daß im allgemeinen die Gleichung $\bigcup_{a\in A}(a + a) = \bigcup_{a\in A} a + \bigcup_{a\in A} a$ nicht gültig ist. Dies ändert sich jedoch, wenn man für A nur konvexe Mengen zuläßt. Sei daher $\mathcal{U}_c X$ die Menge aller nichtleeren, kompakten und konvexen Teilmengen von X.

2.4.1 Lemma. *Stattet man $\mathcal{U}_c X$ mit der umgekehrten Inklusionsordnung aus, so ergibt sich ein stetiger Bereich.*

Beweis. Daß $\mathcal{U}_c X$ ein Bereich ist, sieht man unmittelbar ein: Da der Schnitt von konvexen Mengen wieder konvex ist, ist das Supremum eines gerichteten Mengensystems der Schnitt darüber. Um die Stetigkeit des Bereiches zu zeigen, kann man den Beweis zu Proposition 3.3 aus [Eda95] fast übernehmen. Die einzige Stelle, an der sich eine leichte Änderung ergibt, ist die, an der eine relativ kompakte Umgebung einer Menge C gesucht wird, die einen gegebenen Punkt x nicht enthält. Von dieser Umgebung muß man nun fordern, daß sie konvex gewählt werden kann. Dies ist jedoch in $\mathbb{R}^n$ kein Problem. $\square$

Schränkt man den oberen Potenzbereich von $\mathbb{R}^n$ auf die konvexen Teilmengen ein, so sind nun auch die Banach-Domain-Axiome erfüllt:

2.4.2 Satz. *Für $X = \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist $(\mathcal{U}_c X, \sqsubseteq, +, \cdot, \mathbf{0})$ ein Banach-Domain. Die Addition und Multiplikation sind dabei wie in $(*)$ definiert, das Element $\mathbf{0}$ ist die einpunktige kompakte Menge $\{0\}$.*

Beweis. Durch die punktweise definierte Addition sind die Axiome (1)–(3) unmittelbar klar. Auch (4) und (5) sind nach Definition der Multiplikation sofort einsichtig. Die Gültigkeit von $A + \cdots + A = n \cdot A$ für $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{U}_c X$ folgt aus der Konvexität der Menge A:

$$\begin{aligned}
[n \pm 0]\cdot A &= \bigcup_{a\in A} \bigcup_{\substack{\delta\geq 0 \text{ mit}\\ a\pm\delta a\in A}} \big([n\pm 0][1\pm\delta]\big)a \\
&= \bigcup_{a\in A} \bigcup_{\substack{\delta\geq 0 \text{ mit}\\ a\pm\delta a\in A}} [1\pm\delta]a + \cdots + [1\pm\delta]a \\
&= \bigcup_{a\in A} a + \cdots + a
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcup_{a\in A} a + \cdots + \bigcup_{a\in A} a \\
&= A + \cdots + A
\end{aligned}
$$

Das Axiom (7) rechnet man wie folgt nach:

$$
\begin{aligned}
&[x\pm\varepsilon]A + [y\pm\vartheta]A \\
&= \bigcup_{a\in A} \bigcup_{\substack{\delta\geq 0 \text{ mit} \\ a\pm\delta a\in A}} \big([x\pm\varepsilon][1\pm\delta]\big)a + \bigcup_{a\in A} \bigcup_{\substack{\delta\geq 0 \text{ mit} \\ a\pm\delta a\in A}} \big([y\pm\vartheta][1\pm\delta]\big)a \\
&= \bigcup_{a\in A} \bigcup_{\substack{\delta\geq 0 \text{ mit} \\ a\pm\delta a\in A}} \big([x\pm\varepsilon][1\pm\delta]\big)a + \big([y\pm\vartheta][1\pm\delta]\big)a \\
&\sqsubseteq \bigcup_{a\in A} \bigcup_{\substack{\delta\geq 0 \text{ mit} \\ a\pm\delta a\in A}} \big([x\pm\varepsilon][1\pm\delta] + [y\pm\vartheta][1\pm\delta]\big)a \\
&= \bigcup_{a\in A} \bigcup_{\substack{\delta\geq 0 \text{ mit} \\ a\pm\delta a\in A}} \big([x\pm(\varepsilon+|x|+\varepsilon\delta)][y\pm(\vartheta+|y|+\vartheta\delta)]\big)a \\
&\sqsubseteq \bigcup_{a\in A} \bigcup_{\substack{\delta\geq 0 \text{ mit} \\ a\pm\delta a\in A}} \big([x\pm\varepsilon] + [y\pm\vartheta]\big)a \\
&= \bigcup_{a\in A} \big([x\pm\varepsilon] + [y\pm\vartheta]\big)a \\
&= \big([x\pm\varepsilon] + [y\pm\vartheta]\big)A
\end{aligned}
$$

Auf ähnliche Weise erhält man das Axiom (8):

$$
\begin{aligned}
&[x\pm\varepsilon]A + [x\pm\varepsilon]B \\
&= \bigcup_{a\in A} \bigcup_{\substack{\delta\geq 0 \text{ mit} \\ a\pm\delta a\in A}} [x\pm\varepsilon][1\pm\delta]a + \bigcup_{b\in B} \bigcup_{\substack{\vartheta\geq 0 \text{ mit} \\ b\pm\vartheta b\in B}} [x\pm\varepsilon][1\pm\vartheta]b \\
&= \bigcup_{a\in A} \bigcup_{\substack{\delta\geq 0 \text{ mit} \\ a\pm\delta a\in A}} \bigcup_{b\in B} \bigcup_{\substack{\vartheta\geq 0 \text{ mit} \\ b\pm\vartheta b\in B}} [x\pm\varepsilon][1\pm\delta]a + [x\pm\varepsilon][1\pm\vartheta]b \\
&\sqsubseteq \bigcup_{a\in A} \bigcup_{\substack{\delta\geq 0 \text{ mit} \\ a\pm\delta a\in A}} \bigcup_{b\in B} \bigcup_{\substack{\vartheta\geq 0 \text{ mit} \\ b\pm\vartheta b\in B}} [x\pm\varepsilon]\big([1\pm\delta]a + [1\pm\vartheta]b\big) \\
&\sqsubseteq \bigcup_{a\in A} \bigcup_{b\in B} [x\pm\varepsilon](a+b) \\
&= [x\pm\varepsilon]\Big(\bigcup_{a\in A} a + \bigcup_{b\in B} b\Big) \\
&= [x\pm\varepsilon](A+B)
\end{aligned}
$$

Damit ist $\big(\mathcal{U}_c X, \sqsubseteq, +, \cdot, \{0\}\big)$ ein Banach-Domain. $\square$

KAPITEL 3

Funktionenräume

In diesem Kapitel möchten wir durch den Übergang zu Funktionenräumen weitere Banach-Domains konstruieren. Von der algebraischen Seite gesehen stößt man dabei auf keine Probleme:

3.0.1 Lemma. *Sei D ein stetiger Bereich und E ein Banach-Domain. Definiert man auf $[D \to E]$ die Ordnung, Addition und skalare Multiplikation punktweise, d.h.*

$$f \sqsubseteq g :\Longleftrightarrow \forall x \in D.\ f(x) \sqsubseteq g(x)$$
$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(a \cdot f)(x) := a \cdot f(x)$$

und wählt als $\mathbf{0}$-Element die konstante $\mathbf{0}$-Funktion, so sind die algebraischen Axiome (1)–(8) *erfüllt, und die Addition und die skalare Multiplikation sind Scott-stetig.*

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, daß $f + g$ eine stetige Funktion ist. Dazu bemerken wir als erstes, daß $f + g$ monoton ist. Seien dazu $x, y \in D$ mit $x \sqsubseteq y$. Dann gilt $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \sqsubseteq f(y) + g(y) = (f + g)(y)$ aufgrund der Monotonie von f und g sowie der Monotonie von $+$ in E. Um die Verträglichkeit mit gerichteten Suprema einzusehen, wählen wir eine beliebige gerichtete Menge A und stellen fest:

$$\begin{aligned}(f+g)\big(\bigsqcup A\big) &= f\big(\bigsqcup A\big) + g\big(\bigsqcup A\big) \\ &= \bigsqcup f(A) + \bigsqcup g(A) && \text{aufgrund der Stetigkeit von } f \text{ und } g \\ &= \bigsqcup \big(f(A) + g(A)\big) && \text{aufgrund der Stetigkeit von } + \text{ in } E \\ &= \bigsqcup (f+g)(A)\end{aligned}$$

Die Nachweis für die Stetigkeit der Funktion $a \cdot f$ erfolgt analog.

Als nächstes weisen wir die Stetigkeit von $+$ und $\cdot$ nach. Seien $(f_i)_{i\in I}$ und $(g_i)_{i\in I}$ gerichtete Familien stetiger Funktionen von D nach E und $x \in D$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Big(\bigsqcup_{i\in I} f_i + \bigsqcup_{i\in I} g_i\Big)(x) &= \Big(\bigsqcup_{i\in I} f_i\Big)(x) + \Big(\bigsqcup_{i\in I} g_i\Big)(x) \\ &= \bigsqcup_{i\in I} f_i(x) + \bigsqcup_{i\in I} g_i(x) \\ &= \bigsqcup_{i\in I} \big(f_i(x) + g_i(x)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \bigsqcup_{i\in I}\big(f_i+g_i\big)(x)\\ &= \Big(\bigsqcup_{i\in I}(f_i+g_i)\Big)(x)\end{aligned}$$

Somit ist $+$ mit gerichteten Suprema verträglich. Die Monotonie der Addition auf E überträgt sich in ähnlicher Weise auf den Funktionenraum, so daß $+$ Scott-stetig ist. Analog weist man die Stetigkeit der skalaren Multiplikation nach.

Da die Addition und Multiplikation auf $[D \to E]$ punktweise definiert sind, übertragen sich die algebraischen Axiome (1)–(8) von E auf den Funktionenraum. Als Beispiel sei hier der Nachweis von (1) vorgeführt:

$$\begin{aligned}\big((f+g)+h\big)(x) &= (f+g)(x)+h(x)\\ &= \big(f(x)+g(x)\big)+h(x)\\ &= f(x)+\big(g(x)+h(x)\big) && \text{da (1) auf } E \text{ gilt}\\ &= f(x)+(g+h)(x)\\ &= \big(f+(g+h)\big)(x)\end{aligned}$$

Dies gilt für alle $x \in D$, also folgt $(f+g)+h = f+(g+h)$.

Analog lassen sich die restlichen Axiome überprüfen. □

Trotzdem ist nicht zu erwarten, daß $[D \to E]$ ein Banach-Domain ist, da der Bereich $[D \to E]$ im allgemeinen nicht stetig wird:

Proposition ([AJ94]). *Sind D und E stetige Bereiche mit $\perp$, so daß $[D \to E]$ stetig ist, so ist D kompakt bezüglich der Lawson-Topologie, oder E ist ein L-Domain.*

In Abschnitt 3.2 werden wir sehen, daß D und E im allgemeinen nicht diese Eigenschaften haben. Dort werden wir dann hinreichende Kriterien für D und E angeben, so daß $[D \to E]$ stetig ist. Für den folgenden Abschnitt seien D und E so beschaffen, daß dies der Fall ist.

3.1. Allgemeine Betrachtungen

In Funktionenräumen gibt es nicht viele invertierbare Elemente. Für ein invertierbares $f \in [D \to E]$ muß $f - f = \mathbf{0}$ gelten, d.h. $f(x) - f(x) = \mathbf{0}$ für alle $x \in D$. Damit muß jedes Bildelement invertierbar sein, d.h. die Bildmenge von f ist eine Teilmenge der maximalen Elemente von D. Da f stetig und somit insbesondere monoton ist, muß f eine konstante Abbildung sein.

Der induzierte Banachraum $\big(\mathsf{inv}([D \to E]), \|\cdot\|\big)$ ist also relativ langweilig. Dies liegt daran, daß Invertierbarkeit in Funktionenräumen ein viel zu starker Begriff ist. Da die nichtinvertierbaren Elemente von D ohnehin nur eine Approximation an invertierbare Elemente darstellen, reicht es uns auch aus, wenn das Bild einer Approximation nur eine

Approximation an das wirkliche Bild ist. Wichtig ist, daß die Funktionen auf den interessanten Elementen – nämlich den invertierbaren – genaue Ergebnisse liefern. Deshalb betrachten wir die Teilmenge

$$\mathsf{tot}([D \to E]) := \{f \in \mathsf{bd}([D \to E]) \mid \forall x \in \mathsf{inv}(D).\ f(x) \in \mathsf{inv}(E)\}$$

der *totalen Funktionen* von D nach E, die invertierbare Elemente wieder auf invertierbare Elemente abbilden.

3.1.1 Lemma. *Die Menge* $\mathsf{tot}([D \to E])$ *ist unter Addition und skalarer Multiplikation mit reellen Zahlen abgeschlossen.*

Beweis. Es seien $f, g \in \mathsf{tot}([D \to E])$. Nach 1.2.7 ist $f + g \in \mathsf{bd}([D \to E])$. Ist nun $x \in \mathsf{inv}(D)$, so gilt $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in \mathsf{inv}(E)$ nach 1.3.1. Somit folgt $f + g \in \mathsf{tot}([D \to E])$.

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathsf{tot}([D \to E])$. Nach 1.2.7 ist $af \in \mathsf{bd}([D \to E])$. Aus $x \in \mathsf{inv}(D)$ folgt nun $(af)(x) = af(x) \in \mathsf{inv}(E)$ nach 1.3.1. Also gilt $af \in \mathsf{tot}([D \to E])$. □

Da die Elemente aus $\mathsf{tot}([D \to E])$ beschränkt sind, sind sie nach 1.3.5 normierbar. Für ein fest gewähltes $f \ll \mathbf{0}$ mit $f = [\pm 1]f$ gilt

$$\begin{aligned} \|g\|_f &= \inf\{s > 0 \mid sf \sqsubseteq g\} \\ &= \inf\{s > 0 \mid \forall x \in D.\ sf(x) \sqsubseteq g(x)\} \end{aligned}$$

Neben dieser Norm kann man auf Funktionenräumen eine weitere Norm erklären:

3.1.2 Lemma. *Es sei* $f \in \mathsf{bd}([D \to E])$ *eine konstante Abbildung mit* $f(x) \ll \mathbf{0}$ *und* $f(x) = [\pm 1]f(x)$ *für alle* $x \in D$. *Durch*

$$\wr g \wr_f := \inf\{s > 0 \mid \forall x \in D.\ sf(x) \sqsubseteq g(x)\}$$

wird ebenfalls eine Norm auf $\mathsf{tot}([D \to E])$ *definiert.*

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, daß die Menge $\{s > 0 \mid \forall x \in D.\ sf(x) \sqsubseteq g(x)\}$ für kein $g \in \mathsf{tot}([D \to E])$ leer ist. Dazu betrachten wir die Folge $\left(\frac{1}{n}g\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Diese konvergiert gegen die konstante $\mathbf{0}$-Funktion.

Wir fixieren nun ein $x \in D$. Wegen $f(x) \ll \mathbf{0}$ gilt $\mathbf{0} \in \mathrm{int}\big(\uparrow f(x)\big)$, d.h. $\uparrow f(x)$ ist eine Umgebung von $\mathbf{0}$. Somit existiert ein n_x mit $\frac{1}{n_x}g(x) \in \uparrow f(x)$. Da $g(\perp)$ in dem Bild von D unter g minimal und g beschränkt ist, gilt $n_\perp = \sup_{x \in D} n_x$. Damit gilt $f(x) \sqsubseteq \frac{1}{n_\perp}g(x)$ für alle $x \in D$, also $n_\perp b \sqsubseteq g(x)$, folglich $\wr g \wr_f \leq n_\perp$.

Der Nachweis der Normaxiome verläuft genau wie in 1.3.5. □

In dem folgenden Lemma halten wir einige Eigenschaften dieser Norm fest:

3.1.3 Lemma. *Für ein konstantes* f *mit* $f(x) \ll \mathbf{0}$ *und* $f(x) = [\pm 1]f(x)$ *sei* $\wr \cdot \wr_f$ *wie in 3.1.2 definiert.*

1. *Ist* $g \sqsubseteq g'$, *so gilt* $\wr g \wr \geq \wr g' \wr$.

2. *Für jedes $g \in \mathsf{tot}([D \to E])$ und jedes $x_0 \in D$ gibt es eine Norm auf $\mathsf{bd}(E)$ mit $\|g(x_0)\| \leq \wr g \wr_f$.*
3. *Es gibt ein $b \in \mathsf{bd}(E)$ mit $b \ll \mathbf{0}$ und $b = [\pm 1]b$, so daß $\wr g \wr_f = \|g(\bot)\|_b$ für alle $g \in \mathsf{bd}([D \to E])$ gilt.*

Beweis. 1. Wegen $g \sqsubseteq g'$ gilt $g(x) \sqsubseteq g'(x)$ für alle $x \in D$. Somit folgt

$$\begin{aligned} \wr g \wr_f &= \inf\{s > 0 \mid \forall x \in D.\ sf(x) \sqsubseteq g(x)\} \\ &\geq \inf\{s > 0 \mid \forall x \in D.\ sf(x) \sqsubseteq g'(x)\} \\ &= \wr g' \wr_f \end{aligned}$$

2. Die Norm $\|\cdot\|_{f(x_0)}$ hat genau die gewünschte Eigenschaft. Nach Wahl von f gilt nämlich $f(x_0) \ll \mathbf{0}$ und $f(x_0) = [\pm 1]f(x_0)$, so daß durch $f(x_0)$ eine Norm auf $\mathsf{bd}(E)$ definiert werden kann. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|g(x_0)\|_{f(x_0)} &= \inf\{s > 0 \mid sf(x_0) \sqsubseteq g(x_0)\} \\ &\leq \inf\{s > 0 \mid \forall x \in D.\ sf(x) \sqsubseteq g(x)\} \\ &= \wr g \wr_f \end{aligned}$$

3. Es gilt

$$\begin{aligned} \wr g \wr_f &= \inf\{s > 0 \mid \forall x \in D.\ sf(x) \sqsubseteq g(x)\} \\ &= \inf\{s > 0 \mid \forall x \in D.\ sf(\bot) \sqsubseteq g(x)\} && \text{da } f \text{ konstant ist} \\ &= \inf\{s > 0 \mid sf(\bot) \sqsubseteq g(\bot)\} && \text{da } g \text{ monoton ist} \\ &= \|g(\bot)\|_{f(\bot)} \end{aligned}$$

Wählt man $b = f(\bot)$, so ergibt sich die Behauptung. □

Den Abschluß dieses Abschnitts bildet eine Aussage über Beschränktheit in Funktionenräumen. Diese läßt sich auf die Beschränktheit ihrer Bilder zurückführen:

3.1.4 Lemma. *Ein $f \in [D \to E]$ ist genau dann beschränkt, wenn $f(\bot) \in E$ beschränkt ist.*

Beweis. Wir benutzen Lemma 1.2.6. Ist f beschränkt, so gilt $0 \cdot f = \mathbf{0}$. Durch die punktweise Definition der skalaren Multiplikation ist dies genau dann der Fall, wenn $0 \cdot f(x) = \mathbf{0}$ für alle $x \in D$. Insbesondere ist dann $0 \cdot f(\bot) = \mathbf{0}$, mithin $f(\bot)$ beschränkt.

Ist umgekehrt $f(\bot)$ beschränkt, also $0 \cdot f(\bot) = \mathbf{0}$, so gilt für jedes $x \in D$ aufgrund der Stetigkeit und der damit verbundenen Monotonie von f bzw. der skalaren Multiplikation, daß $0 \cdot f(x) \sqsupseteq \mathbf{0}$ ist. Aus der Maximalität der $\mathbf{0}$ folgt $0 \cdot f(x) = \mathbf{0}$. Durch die punktweise Definition der skalaren Multiplikation ergibt sich $0 \cdot f = \mathbf{0}$. Somit ist f beschränkt. □

Da die Menge der beschränkten Elemente eines Banach-Domains nach oben abgeschlossen ist, ergibt sich als direkte Folgerung aus dieser Aussage:

3.1.5 Korollar. *Eine stetige Funktion ist genau dann beschränkt, wenn alle ihre Bilder beschränkt sind.* □

3.2. L-Domains, BC-Domains und FS-Domains

Zu Beginn des Kapitels wurde bereits erwähnt, daß der Funktionenraum zweier stetiger Bereiche D und E nicht unbedingt wieder ein stetiger Bereich sein muß. Eine notwendige Bedingung wurde ebenfalls zitiert. In diesem Abschnitt zitieren wir nun zwei hinreichende Bedingungen für die Stetigkeit von $[D \to E]$ und geben Banach-Domains an, die diese Bedingungen erfüllen.

3.2.1 Definition. Es sei D ein stetiger Bereich mit $\perp$. Der Bereich D wird *L-Domain* genannt, wenn je zwei Elemente $e_1, e_2 \in D$, die durch ein $e \in D$ beschränkt sind, ein Supremum in $\downarrow e$ haben.

Haben die zwei Elemente e_1 und e_2 ein Supremum in D, so wird der Domain *beschränkt vollständig* oder *BC-Domain* genannt. Offensichtlich ist jeder BC-Domain ein L-Domain.

Da in Bereichen gerichtete Suprema existieren, sieht man leicht ein, daß in BC-Bereichen jede beschränkte Menge ein Supremum hat, womit auch die Bezeichnung „beschränkt vollständig“ gerechtfertigt ist.

Aus dieser Eigenschaft kann man eine alternative Charakterisierung für BC-Bereiche ableiten, die besagt, daß ein stetiger Bereich genau dann beschränkt vollständig ist, wenn Infima nichtleerer Mengen existieren: Man bildet nämlich einfach das Supremum aller unteren Schranken einer Menge.

Die Eigenschaft, daß in beschränkt vollständigen Bereichen Infima nichtleerer Mengen existieren, werden wir später noch benötigen.

L-Domains lassen sich zur Konstruktion stetiger Funktionenräume verwenden:

3.2.2 Proposition ([AJ94]). *Ist D ein stetiger Bereich und E ein L-Domain, so ist $[D \to E]$ ebenfalls ein L-Domain. Insbesondere ist $[D \to E]$ stetig.*

Eine analoge Aussage gilt für BC-Domains:

3.2.3 Proposition ([AJ94]). *Ist D ein stetiger Bereich und E ein BC-Domain, so ist $[D \to E]$ ebenfalls ein BC-Domain. Insbesondere ist $[D \to E]$ stetig.*

Wie das folgende Lemma zeigt, sind die Banach-Domains aus Abschnitt 2.4 beschränkt vollständig:

3.2.4 Lemma. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist der Banach-Domain $\mathcal{U}_c\mathbb{R}^n$ der konvexen, kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ein BC-Domain.*

Beweis. Seien $e_1, e_2 \in \mathcal{U}_c\mathbb{R}^n$ zwei konvexe, kompakte Teilmengen, die durch ein e beschränkt sind. Dies garantiert, daß der Schnitt der Mengen nicht leer ist, da er e enthalten muß. Da $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Topologie ein Hausdorff-Raum ist, ist der Schnitt der Mengen kompakt. Die Konvexität des Schnittes zweier konvexer Mengen gilt allgemein. Somit ist der Schnitt von e_1 und e_2 ein Element aus $\mathcal{U}_c\mathbb{R}^n$, und damit ist der Bereich beschränkt vollständig. □

Da die abgeschlossenen Intervalle in $\mathbb{R}$ genau die konvexen, kompakten Teilmengen sind, folgt aus obigem Lemma unmittelbar:

3.2.5 Korollar. *Der Intervall-Domain $\mathcal{I}$ ist ein BC-Domain.* □

In der Regel sind Banach-Domains jedoch keine L-Domains. Ein Gegenbeispiel ist recht leicht zu finden. Man wähle den Banachraum $\mathbb{R}^2$ mit der Maximumsnorm. Der Banach-Domain $\mathcal{B}\mathbb{R}^2$ besteht dann aus allen Quadraten. Betrachte nun Abbildung 3: Die Kugeln e_1 und e_2 sind durch e beschränkt, haben aber in $\downarrow e$ kein Supremum, da z.B. b_1 und b_2 zwei verschiedene maximale obere Schranken sind.

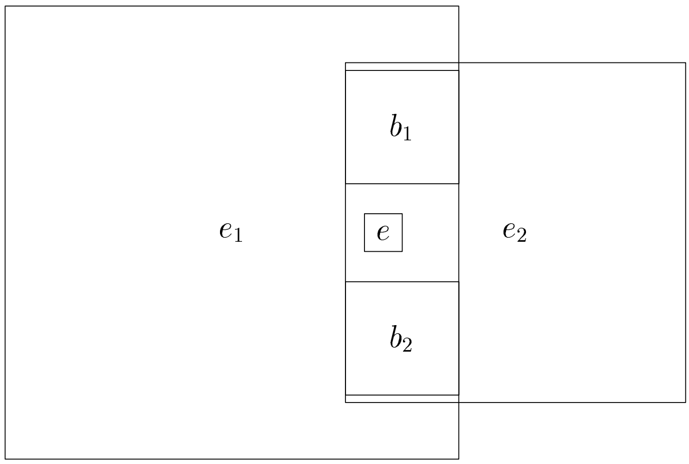


ABBILDUNG 3. Der Kugelbereich von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ ist kein L-Domain

Es gibt jedoch noch eine weitere interessante Klasse von Bereichen:

3.2.6 Definition. Ein stetiger Bereich D mit $\perp$ heißt *FS-Domain*, wenn eine gerichtete Familie $(f_i)_{i\in I}$ von stetigen Funktionen $D \to D$ existiert mit

1. $\bigsqcup_{i\in I} f_i = \mathrm{id}_D$
2. Alle f_i sind *endlich separiert* von id_D, d.h. für jedes f_i gibt es eine endliche Menge M, so daß für jedes $x \in D$ ein $m \in M$ mit $f(x) \sqsubseteq m \sqsubseteq x$ existiert.

Diese Domains lassen sich ebenfalls zur Konstruktion von stetigen Funktionenräumen verwenden:

3.2.7 Proposition ([AJ94]). *Ist D ein FS-Domain und E ein stetiger Bereich mit einem kleinsten Element $\perp$, so ist der Bereich $[D \to E]$ stetig.*

Für endlich-dimensionale Banachräume über $\mathbb{R}$ gilt nun:

3.2.8 Lemma. *Ist X ein endlich-dimensionaler Banachraum über $\mathbb{R}$, so ist $\mathcal{B}X$ ein FS-Domain.*

Beweis. Definiere für jedes $\varepsilon > 0$ eine Abbildung $f_\varepsilon \colon \mathcal{B}X \to \mathcal{B}X$ durch

$$f_\varepsilon(x,d) = \begin{cases} \left(x, d + \frac{1}{\varepsilon}\right) & \text{für } (0,\varepsilon) \ll (x,d) \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

Offensichtlich gilt $\bigsqcup_{\varepsilon>0} f_e = \mathrm{id}_{\mathcal{B}X}$. Zu zeigen bleibt, daß jedes f_ε endlich separiert von der Identität auf $\mathcal{B}X$ ist. Sei also $\varepsilon > 0$.

Da X endlich-dimensional ist, ist die abgeschlossene ε-Kugel um 0 kompakt. Daher kann man aus einer Überdeckung mit offenen $\frac{1}{3\varepsilon}$-Kugeln endlich viele auswählen. Betrachte die Menge

$$M' := \left\{ \left(x_1, \tfrac{1}{3\varepsilon}\right), \ldots, \left(x_n, \tfrac{1}{3\varepsilon}\right) \right\}$$

der entsprechenden formalen Kugeln und setze

$$M := \left\{ \left(x_i, \tfrac{j}{3\varepsilon}\right) \;\middle|\; i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, \lceil 3\varepsilon^2 + 2 \rceil \right\} \cup \{\bot\}$$

Ist $f_\varepsilon(x,d) = \bot$, so existiert mit $m = \bot$ ein Element mit $f_\varepsilon(x,d) \sqsubseteq m \sqsubseteq (x,d)$.

Sei also $f_\varepsilon(x,d) \neq \bot$. Wegen $(0,\varepsilon) \ll (x,d)$ gilt $d < \varepsilon$, und x liegt in einer der endlich vielen ausgewählen $\frac{1}{3\varepsilon}$-Kugeln. Damit existiert ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $d(x, x_i) \leq \frac{1}{3\varepsilon}$. Zu zeigen ist nun, daß es ein $j \in \{1, \ldots, \lceil 3\varepsilon^2 + 2 \rceil\}$ mit $(x, d + \frac{1}{\varepsilon}) \sqsubseteq (x_i, \frac{j}{3\varepsilon}) \sqsubseteq (x,d)$ gibt. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn $d + \frac{2}{3\varepsilon} \geq \frac{j}{3\varepsilon} \geq d + \frac{1}{3\varepsilon}$ bzw. $3\varepsilon d + 2 \geq j \geq 3\varepsilon d + 1$ gilt. Ein passendes natürliches j_0 in diesem Intervall läßt sich finden, da aufgrund $d < \varepsilon$ auf jeden Fall $j \leq 3\varepsilon^2 + 2 \leq \lceil 3\varepsilon^2 + 2 \rceil$ gilt. Damit ist mit $(x_i, \frac{j_0}{3\varepsilon})$ ein $m \in M$ mit $f_\varepsilon(x,d) \sqsubseteq m \sqsubseteq (x,d)$ gefunden. □

3.3. Die Räume $[D \to \mathcal{I}]$

3.3.1 Satz. *Ist D ein Banach-Domain, so ist $[D \to \mathcal{I}]$ ebenfalls ein Banach-Domain. Dabei werden die Ordnung, Addition und skalare Multiplikation punktweise definiert.*

Beweis. Mit 3.2.3 und 3.2.5 erhalten wir die Stetigkeit des Bereichs $[D \to \mathcal{I}]$. Mit 3.0.1 folgt die Gültigkeit der Axiome (1)–(8), so daß $[D \to \mathcal{I}]$ zu einem Banach-Domain wird. □

Ein solcher Banach-Domain belegt auch, daß in Lemma 1.2.4 die Umkehrung nicht gilt:

3.3.2 Beispiel. Wir betrachten den Banach-Domain $[\mathcal{I} \to \mathcal{I}]$ und darin die maximale Fortsetzung der Identität von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Diese Funktion $\mathrm{id} \colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ ist maximal, aber nicht invertierbar. Wäre sie invertierbar, d.h. gälte $\mathrm{id} - \mathrm{id} = \mathbf{0}$, so folgte durch die punktweise Definition der Addition, daß $x - x = \mathbf{0}$ für jedes $x \in \mathcal{I}$ erfüllt wäre. Das hieße jedoch, daß jedes $x \in \mathcal{I}$ invertierbar sein müßte, was allerdings nicht der Fall ist.

Es stellt sich nun die Frage, ob man aus dem Banach-Domain $[D \to \mathcal{I}]$ einen Banachraum zurückgewinnen kann, der aus mehr Elementen als nur den konstanten Funktionen $\mathsf{inv}(D) \to \mathbb{R}$ besteht. Die zugrundeliegende Idee ist, daß man Funktionen identifiziert, die sich auf den invertierbaren Elementen nicht unterscheiden:

3.3.3 Lemma. *Die Relation $\sim$, die durch*

$$g \sim g' :\iff g|_{\mathsf{inv}(D)} = g'|_{\mathsf{inv}(D)}$$

auf $\mathsf{tot}([D \to \mathcal{I}])$ *definiert ist, ist eine Kongruenzrelation.*

Beweis. Daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, ist unmittelbar einsichtig. Gelte nun $g \sim g'$ und $h \sim h'$, d.h. $g(x) = g'(x)$ und $h(x) = h'(x)$ für alle $x \in \mathsf{inv}(D)$. Dann gilt für ein $x \in \mathsf{inv}(D)$ auch

$$(g + h)(x) = g(x) + h(x) = g'(x) + h'(x) = (g' + h')(x),$$

also $(g+h)|_{\mathsf{inv}(D)} = (g'+h')|_{\mathsf{inv}(D)}$ und damit $g + h \sim g' + h'$. Ebenso rechnet man nach, daß $\lambda g \sim \lambda g'$ für $g \sim g'$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, so daß $\sim$ eine Kongruenzrelation ist. $\square$

Durch die Identifikation der totalen Elemente bezüglich $\sim$ und Einschränkung der Banach-Domain-Operationen erhält man nun einen Vektorraum:

3.3.4 Lemma. *Der Raum* $\mathsf{tot}([D \to \mathcal{I}])/\!\sim$ *ist mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation ein* $\mathbb{R}$*-Vektorraum.*

Beweis. Nach 3.1.1 ist $\mathsf{tot}([D \to \mathcal{I}])$ bezüglich Addition und skalarer Multiplikation mit reellen Zahlen abgeschlossen. Dies überträgt sich natürlich auch auf den Faktorraum. Zu zeigen bleibt, daß in den Axiomen (5), (7) und (8) Gleichheit gilt.

Da nach Konstruktion von $\mathsf{tot}([D \to \mathcal{I}])$ alle Elemente beschränkt sind, gilt $0 \cdot f = \mathbf{0}$ nach 1.2.6 für alle f. Es folgt $0 \cdot [f] = [\mathbf{0}]$ für alle $[f] \in \mathsf{tot}([D \to \mathcal{I}])/\!\sim$.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $[f] \in \mathsf{tot}([D \to \mathcal{I}])/\!\sim$ und $f \in [f]$. Das Element $af + bf$ bildet invertierbare Elemente auf invertierbare Elemente ab, d.h. für jedes $x \in \mathsf{inv}(D)$ ist $(af + bf)(x)$ invertierbar, also maximal. Nun gilt nach der Ungleichung in (7): $af + bf \sqsubseteq (a + b)f$, also $(af + bf)(x) \sqsubseteq ((a + b)f)(x)$. Da $(af + bf)(x)$ maximal ist, muß Gleichheit gelten, d.h. $af + bf = (a + b)f$. Damit ist die Gleichheit in (7) gezeigt. Die Gleichheit in (8) folgt analog. $\square$

Wir wollen nun den Vektorraum $\mathsf{tot}([D \to \mathcal{I}])/\!\sim$ normieren. Leider ist die Norm der Elemente einer Äquivalenzklasse nicht konstant, d.h. aus $g \sim g'$ folgt nicht notwendigerweise $\wr g \wr_f = \wr g' \wr_f$:

3.3.5 Beispiel. Betrachten wir den Banach-Domain $[\mathcal{I} \to \mathcal{I}]$ und darin die Funktionen

$$g([x \pm \varepsilon]) = \left[\tfrac{\arctan(x+\varepsilon)+\arctan(x-\varepsilon)}{2} \pm \tfrac{\arctan(x+\varepsilon)-\arctan(x-\varepsilon)}{2}\right]$$

und

$$g'([x \pm \varepsilon]) = \left[\tfrac{\arctan(x+\varepsilon)+\arctan(x-\varepsilon)}{2} \pm \big(\arctan(x+\varepsilon) - \arctan(x-\varepsilon)\big)\right]$$

(Die Funktion g ist die maximale Fortsetzung der stetigen Funktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf den Bereich $[\mathcal{I} \to \mathcal{I}]$ und damit stetig. Die Funktion g' ist eine nicht-maximale Fortsetzung.)

Offensichtlich gilt $g \sim g'$, da für $\varepsilon = 0$ das Bildintervall in beiden Fällen den Radius 0 hat. Wählt man zur Konstruktion der Norm die konstante Funktion $f\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}$, die jedes Intervall $[x \pm \varepsilon]$ auf $[\pm 1]$ abbildet, so gilt

$$\begin{aligned} \wr g \wr_f &= \inf\{s > 0 \mid \forall x \in \mathcal{I}.\ [\pm s] \sqsubseteq g(x)\} = \tfrac{\pi}{2} \\ \wr g' \wr_f &= \inf\{s > 0 \mid \forall x \in \mathcal{I}.\ [\pm s] \sqsubseteq g'(x)\} = \pi \end{aligned}$$

Trotzdem ist der Raum $\mathsf{tot}([D \to \mathcal{I}])/\!\sim$ normierbar:

3.3.6 Lemma. *Durch*

$$\|[g]_\sim\|_f := \inf_{g \in [g]_\sim} \wr g \wr_f$$

wird auf den Kongruenzklassen von $\sim$ eine Norm definiert.

Beweis. Ist $[g] = [\mathbf{0}]$, so gilt $\mathbf{0} \in [g]$. Damit ist $\inf_{g \in [g]} \wr g \wr_f \leq \wr \mathbf{0} \wr_f = 0$. Da die Norm auf jeden Fall größer oder gleich 0 ist, folgt $\|[g]\|_f = 0$.

Ist umgekehrt $[g] \neq [\mathbf{0}]$, so existiert ein $x_0 \in \mathsf{inv}(D)$ mit $g(x_0) \neq \mathbf{0}$ für alle $g \in [g]$. Es gilt $\|g(x_0)\|_{f(x_0)} \neq 0$, und damit folgt $\wr g \wr_f \geq \|g(x_0)\|_{f(x_0)} > 0$ für alle g nach Lemma 3.1.3(2), d.h. $\|[g]\|_f = \inf_{g \in [g]} \wr g \wr_f \geq \|g(x_0)\|_{f(x_0)} > 0$. Insbesondere ist $\|[g]\|_f \neq 0$.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\|\lambda[g]\|_f = \inf_{g \in [g]} \wr \lambda g \wr_f = \inf_{g \in [g]} |\lambda| \wr g \wr_f = |\lambda| \cdot \inf_{g \in [g]} \wr g \wr_f = |\lambda| \cdot \|[g]\|_f$.

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} \|[g + g']\|_f &= \inf_{h \in [g+g']} \wr h \wr_f \\ &= \inf_{g \in [g]} \inf_{g' \in [g']} \wr g + g' \wr_f \\ &\leq \inf_{g \in [g]} \inf_{g' \in [g']} \wr g \wr_f + \wr g' \wr_f \\ &= \inf_{g \in [g]} \wr g \wr_f + \inf_{g' \in [g']} \wr g' \wr_f \\ &= \|[g]\|_f + \|[g']\|_f, \end{aligned}$$

so daß auch die Dreiecksungleichung erfüllt ist. □

3.3.7 Satz. *Wählt man zur Definition der Norm die konstante Funktion $f\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}$, die jedes Intervall auf $[\pm 1]$ abbildet, so sind die Räume $\big(\mathsf{tot}([\mathcal{I} \to \mathcal{I}])/\!\sim, \|\cdot\|_f\big)$ und der Raum $\big(\mathsf{bd}\,\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup}\big)$ der beschränkten stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm isometrisch isomorph.*

Beweis. Sei $[g] \in \big(\mathsf{tot}([\mathcal{I} \to \mathcal{I}])/\!\sim, \|\cdot\|_f\big)$. Wählt man einen Repräsentanten $g \in [g]$ und schränkt seinen Definitionsbereich auf die invertierbaren Elemente von $\mathcal{I}$ ein, so erhält man eine Funktion $\bar{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (Aufgrund der Definition der Äquivalenzklassen erhält man durch die Wahl eines anderen Repräsentanten dieselbe Funktion $\bar{g}$.) Dieses $\bar{g}$ ist stetig, da die auf $\mathsf{inv}(\mathcal{I})$ eingeschränkte Scott-Topologie mit der Normtopologie auf $\mathbb{R}$ übereinstimmt. Da g beschränkt war und somit $g(\bot) \neq \bot$ ist, ist auch $\bar{g}$ beschränkt, da $g[\mathbb{R}]$ ein beschränktes Intervall ist. Folglich ist $\bar{g} \in \big(\mathsf{bd}\,\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\text{sup}}\big)$.

Sei nun umgekehrt $g \in \big(\mathsf{bd}\,\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\text{sup}}\big)$. Betrachte nun die Abbildung $\tilde{g}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}$, die durch $\tilde{g}([x \pm \varepsilon]) := \{g(y) \in \mathbb{R} \mid y \in [x \pm \varepsilon]\}$ definiert wird. Dies ist nach [Eda97] die maximale Erweiterung von g auf den Raum $[\mathcal{I} \to \mathcal{I}]$. Da g beschränkt und somit $g[\mathbb{R}] \neq \mathbb{R}$ ist, ist $\tilde{g}(\bot) \neq \bot$. Nach 3.1.4 ist $\tilde{g}$ also beschränkt. Folglich ist $[\tilde{g}]$ ein Element von $\big(\mathsf{tot}([\mathcal{I} \to \mathcal{I}])/\!\sim, \|\cdot\|_f\big)$.

Es gilt $\tilde{\bar{g}} = g$ und $\bar{\tilde{h}} = h$ für alle $[g] \in \big(\mathsf{tot}([\mathcal{I} \to \mathcal{I}])/\!\sim, \|\cdot\|_f\big)$ und alle $h \in \big(\mathsf{bd}\,\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\text{sup}}\big)$, da die maximale Erweiterung einer Funktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $[\mathcal{I} \to \mathcal{I}]$ maximale Elemente auf maximale Elemente abbildet. Somit sind die eben konstruierten Einbettungen bijektiv.

Es verbleibt der Nachweis der Isometrie der beiden Räume. Dazu stellen wir fest, daß

$$\|[g]\|_f = \inf_{g \in [g]} \wr g \wr_f = \wr \tilde{g} \wr_f$$

gilt, da $\tilde{g}$ die maximale Fortsetzung von $g|_{\mathsf{inv}(\mathcal{I})}$ ist. Nach Lemma 3.1.3(1) hat $\tilde{g}$ somit die kleinste Norm. Damit folgt

$$\|[g]\|_f = \inf\{s > 0 \mid \forall x \in \mathcal{I}.\ [\pm s] \sqsubseteq \tilde{g}(x)\} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| = \|g\|_{\text{sup}}$$

□

Das bedeutet, daß der Banach-Domain $[\mathcal{I} \to \mathcal{I}]$ tatsächlich ein Modell für den Raum der beschränkten stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ liefert.

Wie sieht dies nun aus, wenn man anstelle des Intervall-Domains einen anderen Banach-Domain D benutzt und dann den Banach-Domain $[D \to \mathcal{I}]$ betrachtet? Man stellt fest, daß der Bereich D „genügend viele“ invertierbare Elemente haben muß:

3.3.8 Satz. *Es sei D ein Banach-Domain mit $\mathsf{inv}(D) = \max(D)$. Mit der Norm aus Lemma 3.3.6 ist der Raum $\big(\mathsf{tot}([D \to \mathcal{I}])/\!\sim, \|\cdot\|\big)$ ein Banachraum.*

Beweis. Es verbleibt nur noch der Nachweis der Vollständigkeit bzgl. der induzierten Norm. Sei daher $([g_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathsf{tot}([D \to \mathcal{I}])/\!\sim$. Wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $g_n \in [g_n]$ und definiere $\bar{g}\colon \mathsf{inv}(D) \to \mathsf{inv}(\mathcal{I})$ durch $\bar{g}(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn wegen

$$\|g_n(x) - g_m(x)\|_{f(x)} \leq \wr g_n - g_m \wr_f < \varepsilon$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$ und $n, m \geq N$ ist $\big(g_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathsf{inv}(\mathcal{I})$ und damit aufgrund der Vollständigkeit von $\mathsf{inv}(\mathcal{I})$ konvergent. Da $\bar{g}$ nur auf den invertierbaren

Elementen von D definiert wird, ist die obige Definition auch von der Wahl der g_n unabhängig.

Als nächstes ist zu zeigen, daß $\bar{g}$ sich zu einem Element $g \in \mathsf{tot}([D \to \mathcal{I}])$ fortsetzen läßt. Wir definieren $g\colon D \to \mathcal{I}$ durch

$$(*)\qquad \begin{aligned} g(d) &:= \bigsqcup\{x \in \mathcal{I} \mid \forall y \in {\uparrow} d \cap \mathsf{inv}(D).\ x \sqsubseteq \bar{g}(y)\} \\ &= \bigsqcap\{\bar{g}(y) \in \mathcal{I} \mid y \in {\uparrow} d \cap \mathsf{inv}(D)\} \end{aligned}$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, wenn ${\uparrow} d \cap \mathsf{inv}(D)$ für alle $d \in D$ nicht leer ist. Dies ist insbesondere der Fall, wenn $\mathsf{inv}(D) = \max(D)$. Desweiteren gilt $g|_{\mathsf{inv}(D)} = \bar{g}$, so daß g wirklich eine Fortsetzung von $\bar{g}$ ist.

Ist $d \sqsubseteq e$, so folgt ${\uparrow} d \supseteq {\uparrow} e$ und somit $g(d) \supseteq g(e)$, also $g(d) \sqsubseteq g(e)$, so daß g monoton ist. Die Verträglichkeit mit gerichteten Suprema sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned} \bigsqcup g(A) &= \bigsqcup_{a \in A} \bigsqcup\{x \in \mathcal{I} \mid \forall y \in {\uparrow} a \cap \mathsf{inv}(D).\ x \sqsubseteq \bar{g}(y)\} \\ &= \bigsqcup \bigsqcup_{a \in A}\{x \in \mathcal{I} \mid \forall y \in {\uparrow} a \cap \mathsf{inv}(D).\ x \sqsubseteq \bar{g}(y)\} \\ &= \bigsqcup \Big\{x \in \mathcal{I} \;\Big|\; \forall y \in {\uparrow}\big(\bigsqcup A\big) \cap \mathsf{inv}(D).\ x \sqsubseteq \bar{g}(y)\Big\} \\ &= g\big(\bigsqcup A\big) \end{aligned}$$

Es ist noch zu zeigen, daß g beschränkt ist. Dazu benutzen wir die Charakterisierung beschränkter Funktionen aus Lemma 3.1.4: Nach Voraussetzung sind alle g_n beschränkt, d.h. es gilt $g_n(\bot) \neq \bot$. Insbesondere sind damit die $g_n|_{\mathsf{inv}(D)}$ beschränkte Funktionen im üblichen Sinn. Da der Raum der beschränkten Funktionen von einer Menge in einen Banachraum vollständig ist (siehe z.B. [Alt92, Abschnitt 1.4]), ist auch $\bar{g}$ beschränkt. Nach Konstruktion von g ist daher $g(\bot) \neq \bot$. Somit ist g ein beschränktes Element in $[D \to \mathcal{I}]$. Da g invertierbare Elemente auf invertierbare Elemente abbildet, folgt insgesamt also $g \in \mathsf{tot}([D \to \mathcal{I}])$.

Schließlich ist noch zu zeigen, daß die Folge $([g_n])_{n \in \mathbb{N}}$ auch tatsächlich gegen $[g]$ bzgl. der Norm aus Lemma 3.3.6 konvergiert. Nach [Alt92] gilt, daß für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n > N$ gilt $\|g_n|_{\mathsf{inv}(D)} - g|_{\mathsf{inv}(D)}\|_\infty < \varepsilon$. Setzt man die Funktion $g_n|_{\mathsf{inv}(D)} - g|_{\mathsf{inv}(D)}$ wie in $(*)$ fort, so erhält man eine Funktion $h_n\colon D \to \mathcal{I}$, die in der selben Äquivalenzklasse wie $g_n - g$ liegt. Für diese Funktion gilt dann $h_n(\bot) \sqsupseteq [\pm\varepsilon]$. Somit ist

$$\begin{aligned} \|[g_n] - [g]\|_f &= \inf_{h \in [g_n]-[g]} \wr\!\wr h \wr\!\wr_f \\ &\leq \wr\!\wr h_n \wr\!\wr_f \\ &= \inf\{s > 0 \mid \forall d \in D.\ sf(d) \sqsubseteq h_n(d)\} \\ &\leq \inf\{s > 0 \mid \forall d \in D.\ sf(d) \sqsubseteq [\pm\varepsilon]\} \\ &\leq \frac{1}{\sup_{d \in D} \|f(d)\|_{[\pm 1]}} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Folglich haben wir $\lim_{n\to\infty} \|[g_n] - [g]\|_f = 0$, und $([g_n])_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $[g]$. □

3.4. Die Räume $[\mathcal{U}X \to \mathcal{I}]$

Betrachtet man die Aussagen aus dem vorangegangenen Abschnitt, so stellt man fest, daß man keine spezielle Struktur des Bereichs D benutzt hat. Tatsächlich gelten die Aussagen aus 3.1 und 3.3 auch in einem allgemeineren Rahmen.

Sei X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum. Dann ist der obere Potenzbereich $\mathcal{U}X$ ein stetiger Bereich [Eda95]. Nach 3.0.1, 3.2.3 und 3.2.5 gilt somit:

3.4.1 Satz. *Ist X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum, so ist $[\mathcal{U}X \to \mathcal{I}]$ mit punktweiser Ordnung, Addition und skalarer Multiplikation ein Banach-Domain.* □

Da auf $\mathcal{U}X$ keine algebraische Struktur definiert ist und wir somit keine invertierbaren Elemente haben, betrachten wir im folgenden den Teilraum

$$\mathsf{tot}([\mathcal{U}X \to \mathcal{I}]) := \{f \in \mathsf{bd}([\mathcal{U}X \to \mathcal{I}]) \mid \forall x \in \max(\mathcal{U}X).\ f(x) \in \mathsf{inv}(\mathcal{I})\}$$

Darauf definieren wir wieder durch

$$g \sim g' :\iff g|_{\max(\mathcal{U}X)} = g'|_{\max(\mathcal{U}X)}$$

eine Kongruenzrelation, nach der wir den Raum $\mathsf{tot}([\mathcal{U}X \to \mathcal{I}])$ faktorisieren. Der entstehende Raum ist wieder ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, auf dem wir analog zu 3.3.6 durch

$$\|[g]_\sim\|_f := \inf_{g\in[g]_\sim} \wr g \wr_f$$

eine Norm definieren können. Wir erhalten:

3.4.2 Satz. *Der Raum $\big(\mathsf{tot}([\mathcal{U}X \to \mathcal{I}])/\!\sim, \|\cdot\|\big)$ ist ein Banachraum.*

Der Beweis läßt sich direkt übernehmen, indem man $\mathsf{inv}(D)$ durch $\max(\mathcal{U}X)$ ersetzt. □

3.5. Weitere Funktionenräume

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse aus den Abschnitten 3.3 und 3.4 zusammengefaßt und so weit wie möglich verallgemeinert werden.

3.5.1 Satz. *Es sei D ein stetiger Bereich und E ein Banach-Domain. Zusätzlich sei D ein FS-Domain oder E ein L-Domain. Dann ist der Raum $[D \to E]$ mit punktweiser Ordnung, Addition und skalarer Multiplikation ein Banach-Domain.*

Beweis. Die Stetigkeit des Bereichs $[D \to E]$ folgt aus 3.2.2 bzw. 3.2.7. Mit 3.0.1 wird $[D \to E]$ zu einem Banach-Domain. □

Die folgenden Konzepte gehen zurück auf [Nor98] und wurden für die Verwendung in Banach-Domains reformuliert.

3.5.2 Totale Elemente. Es sei X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum. Dann ist der obere Potenzbereich $\mathcal{U}X$ – also der Raum der kompakten Teilmengen von X mit der umgekehrten Inklusion als Ordnung – ein stetiger Bereich [Eda95]. Sei weiterhin D ein Banach-Domain. Wir erklären rekursiv auf diesen Bereichen die Menge der *totalen Elemente* wie folgt:

- Im Falle des oberen Potenzbereichs $\mathcal{U}X$ seien die totalen Elemente genau die maximalen: $\mathsf{tot}(\mathcal{U}X) := \max(\mathcal{U}X)$.
- Im Falle eines Banach-Domains D seien die totalen Elemente genau die invertierbaren: $\mathsf{tot}(D) := \mathsf{inv}(D)$. Für spätere Zwecke beschränken wir uns ab sofort auf die Banach-Domains, bei denen die invertierbaren Elemente mit den maximalen übereinstimmen. Bei allen Beispielen aus Kapitel 2 war dies der Fall.
- Sei E ein Raum, für den schon totale Elemente definiert wurden, und E' ein Banach-Domain. Dann sind die totalen Elemente von $[E \to E']$ beschränkte Abbildungen, die totale Elemente auf totale Elemente abbilden:

$$\mathsf{tot}([E \to E']) := \{f \in \mathsf{bd}([E \to E']) \mid \forall x \in \mathsf{tot}(E).\ f(x) \in \mathsf{tot}(E')\}$$

3.5.3 Lemma. *Ist D ein Banach-Domain, so ist die Menge $\mathsf{tot}(D)$ unter Addition und skalarer Multiplikation mit reellen Zahlen abgeschlossen.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über den Aufbau von D. Der Fall $\mathsf{tot}(D) = \mathsf{inv}(D)$ wurde schon in Lemma 1.3.1 behandelt. Sei daher $D = [E \to E']$ und $f, g \in \mathsf{tot}([E \to E'])$. Nach 1.2.7 ist $f + g \in \mathsf{bd}([E \to E'])$. Ist nun $x \in \mathsf{tot}(E)$, so gilt nach Induktionsvoraussetzung $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \in \mathsf{tot}(E')$. Somit folgt $f + g \in \mathsf{tot}([E \to E'])$. Ähnlich argumentiert man für die skalare Multiplikation. □

3.5.4 Identifizierung totaler Elemente. Es sei D ein stetiger Bereich mit totalen Elementen.

- Ist D ein Banach-Domain oder $D = \mathcal{U}X$ für einen lokalkompakten Hausdorff-Raum X, dann sei für $x, x' \in \mathsf{tot}(D)$

$$x \sim_D x' :\iff x = x'.$$

- Ist D ein Funktionenraum $[E \to E']$ und sind E und E' beschränkt vollständig, dann sei für $g, g' \in \mathsf{tot}([E \to E'])$

$$g \sim_{[E \to E']} g' :\iff \big(\forall x, x' \in \mathsf{tot}(E).\ x \sim_E x' \implies g(x) \sim_{E'} g'(x')\big).$$

  Ist $\sim_E$ die Gleichheitsrelation, so kann auf die beschränkte Vollständigkeit der Bereiche E und E' verzichtet werden.

Lemma. *Die Relation $\sim_D$ ist eine Kongruenzrelation auf $\mathsf{tot}(D)$.*

Beweis. Offensichtlich ist in den beiden Grundfällen die Relation $\sim_D$ eine Kongruenzrelation.

Die Reflexivität der Relation $\sim_{[E\to E']}$ ist offensichtlich, wenn $\sim_E$ die Gleichheitsrelation ist. Ansonsten wird sie sich aus Teil 2 des folgenden Lemmas ergeben, für das die beschränkte Vollständigkeit der Bereiche E und E' benötigt wird.

Die Symmetrie von $\sim_{[E\to E']}$ sieht man direkt durch die Symmetrie von $\sim_{E'}$ ein: Sei $g \sim_{[E\to E']} g'$, d.h. für alle $x, x' \in \mathsf{tot}(E)$ mit $x \sim_E x'$ gilt $g(x) \sim_{E'} g'(x')$. Da $\sim_{E'}$ eine Äquivalenzrelation ist, folgt $g'(x') \sim_{E'} g(x)$. Damit ergibt sich $g' \sim_{[E\to E']} g$. Auf ähnliche Weise stellt man die Transitivität von $\sim_{[E\to E']}$ fest.

Die Kongruenzeigenschaft von $\sim_{[E\to E']}$ folgt unmittelbar: Gelten $f \sim_{[E\to E']} f'$ und $g \sim_{[E\to E']} g'$, so folgen für alle $x, x' \in \mathsf{tot}(E)$, daß $f(x) \sim_{E'} f'(x')$ und $g(x) \sim_{E'} g'(x')$. Da $\sim_{E'}$ nach Induktionsvoraussetzung eine Kongruenzrelation ist, folgt $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \sim_{E'} f'(x') + g'(x') = (f'+g')(x')$. Somit ist $f + g \sim_{[E\to E']} f' + g'$. Analog stellt man die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation fest. □

3.5.5 Lemma. *Es sei D ein stetiger Bereich mit totalen Elementen $\mathsf{tot}(D)$.*

1. *Die Menge $\mathsf{tot}(D)$ ist nach oben abgeschlossen, d.h. aus $x \in \mathsf{tot}(D)$ und $x' \sqsupseteq x$ folgt $x' \in \mathsf{tot}(D)$.*
2. *Ist D beschränkt vollständig, so gilt $x \sim_D x'$ genau dann, wenn $x \sqcap x' \in \mathsf{tot}(D)$.*

Beweis. Wir induzieren über den Aufbau von D. Da in den Grundfällen die totalen Elemente von D mit den maximalen übereinstimmen und $x \sim_D x'$ genau dann gilt, wenn $x = x'$ ist, sind die Behauptungen offensichtlich. Sei daher $D = [E \to E']$.

1. Ist $g \in \mathsf{tot}([E \to E'])$ und $g' \sqsupseteq g$, so gilt nach Definition der Ordnung $g'(x) \sqsupseteq g(x)$ für alle $x \in E$. Dies gilt insbesondere für alle totalen Elemente $x \in \mathsf{tot}(E)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathsf{tot}(E')$ nach oben abgeschlossen, d.h. $g'(x)$ ist ein totales Element, da $g(x)$ ein totales Element ist. Somit bildet g' totale Elemente auf totale Elemente ab, und es folgt $g' \in \mathsf{tot}([E \to E'])$.
2. Es sei $g \sim_{[E\to E']} g'$. Zu zeigen ist, daß $g \sqcap g'$ totale Elemente auf totale Elemente abbildet. Sei $x \in \mathsf{tot}(E)$. Nach Induktionsvoraussetzung für E gilt $x \sim_E x$. Aus $g \sim_{[E\to E']} g'$ folgt $g(x) \sim_{E'} g'(x)$. Mit der Induktionsvoraussetzung für E' ergibt sich $g(x) \sqcap g'(x) = (g \sqcap g')(x) \in \mathsf{tot}(E')$. Damit gilt $g \sqcap g' \in \mathsf{tot}([E \to E'])$.

   Sei umgekehrt $g \sqcap g' \in \mathsf{tot}([E \to E'])$ und $x \sim_E x'$. Aus der Induktionsvoraussetzung für E folgt $x \sqcap x' \in \mathsf{tot}(E)$, und mit $g \sqcap g' \in \mathsf{tot}([E \to E'])$ ergibt sich $(g \sqcap g')(x \sqcap x') \in \mathsf{tot}(E')$. Es gilt $(g \sqcap g')(x \sqcap x') \sqsubseteq g(x)$ und $(g \sqcap g')(x \sqcap x') \sqsubseteq g'(x)$ aufgrund der Monotonie von g und g'. Da $\mathsf{tot}(E')$ nach oben abgeschlossen ist, sind $g(x)$ und $g'(x')$ aus $\mathsf{tot}(E')$. Somit ist auch $g(x) \sqcap g(x') \in \mathsf{tot}(E')$ und nach Induktionsvoraussetzung für E' folgt $g(x) \sim_{E'} g'(x')$, mithin $g \sim_{[E\to E']} g'$. □

Ist aus dem Kontext heraus offensichtlich, welche Relation $\sim_D$ betrachtet wird, so verzichten wir auf die Angabe des Bereichs und schreiben einfach $\sim$.

3.5.6 Der Faktorraum. Wir faktorisieren nun die Menge der totalen Elemente von D nach der Kongruenzrelation. Der entstehende Raum $\mathsf{tot}(D)/\!\sim$ ist ein Vektorraum.

Beweis. Nach 3.5.3 ist $\mathsf{tot}(D)$ bezüglich Addition und skalarer Multiplikation mit reellen Zahlen abgeschlossen. Dies überträgt sich natürlich auch auf den Faktorraum. Zu zeigen bleibt die Gleichheit in den Axiomen (5), (7) und (8).

Die Gleichheit in (5) ist offensichtlich, da nach Konstruktion die totalen Elemente beschränkt sind und sich die Gleichheit in $\mathsf{tot}(D)$ auf $\mathsf{tot}(D)/\!\sim$ überträgt. Die Gleichheit in (7) sieht man schnell durch Induktion ein. Für den Grundfall wurde sie in 1.3.2 gezeigt. Sei daher $D = [E \to E']$, $[f] \in \mathsf{tot}([E \to E'])/\!\sim$, $f \in [f]$ und $x \in \mathsf{tot}(E)$. Dann gilt für $a, b \in \mathbb{R}$, daß $(af + bf)(x)$ in $\mathsf{tot}(E')$ ist. Nun gilt in $\mathsf{tot}(E')$ nach Induktionsvoraussetzung $(af + bf)(x) = ((a + b)f)(x)$. Damit haben wir $af + bf = (a + b)f$ und somit die Gleichheit in (7) gezeigt. Analog folgt die Gleichheit in (8). $\square$

3.5.7 Normierbarkeit. Sei D ein Banach-Domain. Wähle $f \in \mathsf{bd}(D)$ mit $f \ll \mathbf{0}$ und $f = [\pm 1]f$. Ist D ein Funktionenraum $[E \to E']$, so ist auch die Wahl einer konstanten Funktion f mit $f(x) \ll \mathbf{0}$ möglich. Setze nun für $g \in \mathsf{bd}(D)$:

$$\wr g \wr_f := \inf\{s > 0 \mid sf \sqsubseteq g\}$$

Dies erklärt eine Norm auf $\mathsf{bd}(D)$. Der Raum $\mathsf{tot}(D)/\!\sim$ läßt sich durch

$$\|[g]_\sim\|_f := \inf_{g \in [g]_\sim} \wr g \wr_f$$

normieren.

Beweis. Ist D kein Funktionenraum, so ist die Norm $\wr \cdot \wr_f$ und damit auch die Norm $\|[\cdot]\|_f$ mit der Norm aus 1.3.5 identisch. Da die Äquivalenzrelation $\sim_D$ die Identität ist, sind die Äquivalenzklassen einelementig, d.h. $\|[g]_\sim\|_f = \wr g \wr_f$ für alle $g \in [g]$.

Ist D von der Form $[E \to E']$, so ist nach 1.3.5 bzw. 3.1.2 durch $\wr g \wr_f$ eine Norm erklärt. Mit der selben Argumentation wie in 3.3.6 sieht man ein, daß $\mathsf{tot}(D)/\!\sim$ durch $\|[\cdot]\|_f$ zu einem normierten Raum wird. $\square$

Wir zeigen nun für einen Banachraum D die Vollständigkeit des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathsf{tot}(D)$. Der Fall, daß D kein Funktionenraum ist, wurde bereits behandelt, so daß wir uns im folgenden auf den Fall $D = [E \to E']$ beschränken. Dabei wird jedoch benötigt, daß der Bereich E' beschränkt vollständig und die Funktion f, durch die die Norm auf $[E \to E']$ definiert wird, konstant ist. Außerdem wollen wir verlangen, daß die totalen Elemente von E so dicht liegen, daß sich jedes $e \in E$ durch Elemente approximieren läßt, die unter einem totalen Element von E liegen.

3.5.8 Vollständigkeit. *Es sei E ein stetiger Bereich mit totalen Elementen, so daß sich jedes $e \in E$ durch Elemente approximieren läßt, die unter einem totalen Element von E liegen. Weiterhin sei E' ein beschränkt vollständiger Banach-Domain, so daß $\big(\mathsf{tot}(E')/\!\sim_{E'}, \|\cdot\|\big)$ ein Banachraum ist. Sei weiterhin f eine konstante Funktion in $\mathsf{bd}([E \to E'])$ mit $f(x) \ll \mathbf{0}$ und $f = [\pm 1]f$.*

Dann ist der Raum $\big(\mathsf{tot}([E \to E'])/{\sim_{E\to E'}}, \|\cdot\|_f\big)$ *ein Banachraum.*

Beweis. Es verbleibt nur noch der Nachweis der Vollständigkeit bezüglich der induzierten Norm. Sei $([g_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathsf{tot}([E \to E'])/{\sim}$. Wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $g_n \in [g_n]$ und definiere $\bar{g}\colon \mathsf{tot}(E) \to \mathsf{tot}(E')$ durch $\bar{g}(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn wegen

$$\|g_n(x) - g_m(x)\|_{f(x)} \leq \wr g_n - g_m \wr_f \leq \varepsilon$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$ und $n, m \geq N$ ist $\big(g_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathsf{tot}(E')$ und damit aufgrund der Vollständigkeit von $\mathsf{tot}(E')$ konvergent. Da $\bar{g}$ nur auf den totalen Elementen von E definiert wird, ist die obige Definition von der Wahl der g_n unabhängig.

Wie in dem Beweis zu 3.3.8 setzen wir die Abbildung $\bar{g}$ zu einem $g \in \mathsf{tot}([E \to E'])$ fort. Wir definieren zunächst eine Abbildung $g_0\colon E \to E'$ durch

$$(*)\qquad \begin{aligned} g_0(e) &:= \bigsqcup\{x \in E \mid \forall y \in {\uparrow} e \cap \mathsf{tot}(E).\ x \sqsubseteq \bar{g}(y)\} \\ &= \bigsqcap\{\bar{g}(y) \mid y \in {\uparrow} e \cap \mathsf{tot}(E)\} \end{aligned}$$

Es kann passieren, daß für ein $e \in E$ die Menge ${\uparrow} e \cap \mathsf{tot}(E)$ leer ist, da nicht über jeder stetigen Funktion h ein totales Element liegt, das größer ist als h (siehe dazu die dem Beweis folgende Bemerkung). Die Folge ist, daß g_0 an einigen Stellen nicht definiert ist, da in beschränkt vollständigen Bereichen nur nichtleere Infima existieren müssen. Daher definieren wir

$$(**)\qquad g(e) := \bigsqcup_{a \ll e} g_0(a) = \bigsqcup_{a \ll e} \bigsqcap\{\bar{g}(y) \mid y \in {\uparrow} a \cap \mathsf{tot}(E)\}$$

und erhalten eine Funktion $g\colon E \to E'$, da wir vorausgesetzt haben, daß sich jedes $e \in E$ durch Elemente a approximieren läßt, über denen ein totales Element liegt. Nach Konstruktion gilt $g|_{\mathsf{tot}(D)} = \bar{g}$, so daß g wirklich eine Fortsetzung von $\bar{g}$ ist.

Man bemerke, daß die Funktion g_0 stetig ist. Der Beweis läßt sich direkt aus dem Beweis zu Satz 3.3.8 übernehmen. Zur Stetigkeit von g: Es sei A eine gerichtete Teilmenge von E. Da g monoton ist, gilt $g(\bigsqcup A) \sqsupseteq \bigsqcup g(A)$. Die andere Ungleichung sieht man wie folgt ein: Es gilt

$$g\big(\bigsqcup A\big) = \bigsqcup_{a \ll \bigsqcup A} g_0(a) \sqsubseteq \bigsqcup_{a \ll e} g_0(a)$$

für jedes $e \in A$. Somit folgt

$$g\big(\bigsqcup A\big) \sqsubseteq \bigsqcup_{e\in A} \bigsqcup_{a \ll e} g_0(a) = \bigsqcup g(A).$$

Es ist noch zu zeigen, daß g beschränkt ist. Dazu benutzen wir die Charakterisierung beschränkter Funktionen aus Lemma 3.1.4: Nach Voraussetzung sind alle g_n beschränkt, d.h. $g_n(\bot)$ ist beschränkt. Insbesondere sind damit die $g_n|_{\mathsf{tot}(D)}$ beschränkte Funktionen im üblichen Sinn. Da der Raum der beschränkten Funktionen von einer Menge in einen Banachraum vollständig ist (siehe z.B. [Alt92, Abschnitt 1.4]), ist auch $\bar{g}$ beschränkt. Nach Konstruktion von g ist daher $g(\bot)$ beschränkt, so daß g ein beschränktes Element in $[E \to E']$ ist. Da g totale Elemente auf totale Elemente abbildet, folgt insgesamt also $g \in \mathsf{tot}([E \to E'])$.

Nun fehlt noch der Nachweis, daß $[g]$ der Grenzwert der Folge $([g_n])_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Nach [Alt92] existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n > N$

$$\|g_n|_{\mathsf{tot}(E)} - g|_{\mathsf{tot}(E)}\|_{\sup} = \sup_{e\in\mathsf{tot}(E)} \|g_n(e) - g(e)\| < \varepsilon$$

ist. Wir setzen nun die Funktionen $g_n|_{\mathsf{tot}(E)} - g|_{\mathsf{tot}(E)}$ wie in $(**)$ fort und erhalten Funktionen $h_n\colon E \to E'$, die in den entsprechenden Äquivalenzklassen liegen. Mit dem folgenden Lemma gilt nun

$$\wr h_n \wr_f \leq \|h_n\|_{\sup} + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

so daß $\lim_{n\to\infty} \|[h_n]\|_f = \lim_{n\to\infty} \|[g_n] - [g]\|_f = 0$ gilt. □

Bemerkungen.

- Die beschränkte Vollständigkeit von E' garantiert, daß sich die Funktion $\bar{g}\colon \mathsf{tot}(E) \to \mathsf{tot}(E')$ zu einer Funktion $g\colon E \to E'$ fortsetzen läßt, da die Fortsetzung als Supremum einer beschränkten Menge gebildet wird. Ist E' nur ein L-Domain, so kann das Supremum von der gewählten oberen Schranke abhängen, d.h. für verschiedene obere Schranken man erhält unter Umständen verschiedene Fortsetzungen. Ist E ein FS-Domain und E' ein beliebiger Banach-Domain, so ist nicht klar, ob eine Fortsetzung überhaupt existiert.

- Ein Bereich mit totalen Elementen hat nicht die Eigenschaft, daß über jedem Element f noch ein totales Element g liegt. Betrachten wir dazu den Bereich $[\mathcal{I} \to \mathcal{I}]$ und darin die Funktion f, die wie folgt definiert ist:

$$f([a,b]) := \begin{cases} 0 & \text{falls } [a,b] \subseteq \,]-\infty, 0[\\ 1 & \text{falls } [a,b] \supseteq \,]-\infty, 0[\\ [0,1] & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig, jedoch gibt es keine stetige Erweiterung von f, die totale Elemente auf totale Elemente abbildet.

Im Sinne von [DG82] ist die Funktion $f|_{\mathsf{tot}(\mathcal{I})}$ als mengenwertige Funktion betrachtet *oberhalbstetig*: Die Menge $\{x \in \mathsf{tot}(\mathcal{I}) \mid f(x) \subseteq U\}$ ist für jedes offene $U \subseteq \mathsf{tot}(\mathcal{I})$ offen. Sie ist jedoch nicht *unterhalbstetig*, was bedeuten würde, daß $\{x \in \mathsf{tot}(\mathcal{I}) \mid f(x) \subseteq B\}$ für jedes abgeschlossene $B \subseteq \mathsf{tot}(\mathcal{I})$ abgeschlossen wäre. Der **Selektionssatz** von E.A. Michael besagt:

Ist X ein parakompakter Raum, E ein Banachraum und $\Gamma\colon X \to \mathfrak{P}(E)$ eine unterhalbstetige Funktion, so daß $\Gamma(x)$ für jedes $x \in X$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge ist, dann gibt es eine stetige Auswahlfunktion $\varphi\colon X \to E$.

Das heißt: Für Funktionen $f\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}$, deren Einschränkung auf $\mathsf{tot}(\mathcal{I})$ unterhalbstetig sind, gibt es eine stetige Auswahlfunktion $g\colon \mathsf{tot}(\mathcal{I}) \to \mathsf{tot}(\mathcal{I})$, eine notwendige Voraussetzung für die Erweiterung von f zu einem totalen Element in $[\mathcal{I} \to \mathcal{I}]$. (Bemerkung: $\mathbb{R}$ ist als metrischer Raum parakompakt.)

Man stellt leicht fest, daß Lawson-stetige Funktionen unterhalbstetig sind. Die Scott-stetigen Funktionen lassen sich in $[\mathcal{I} \to \mathcal{I}]$ durch Lawson-stetige Funktionen approximieren, so daß die Definition von g in $(**)$ gerechtfertigt erscheint.

Ist $D = [E \to E']$ ein Funktionenraum, so steht die in 3.5.7 definierte Norm in enger Verbindung mit der Supremumsnorm $\|g\|_{\text{sup}} := \sup_{e \in \mathsf{tot}(E)} \|g(e)\|_{\mathsf{tot}(E')}$ auf dem Banachraum der beschränkten Funktionen von $\mathsf{tot}(E)$ nach $\mathsf{tot}(E')$.

3.5.9 Lemma. *Es sei $f \in \mathsf{bd}([E \to E'])$ eine konstante Funktion mit $f(x) \ll \mathbf{0}$ und $f = [\pm 1]f$. Sei $g \in \mathsf{tot}([E \to E'])$ mit $g(\bot) = \bigsqcap_{e \in \mathsf{tot}([E \to E'])} \bar{g}(e)$, wobei $\bar{g} := g|_{\mathsf{tot}(E)}$ die Einschränkung von g auf die totalen Elemente von E bezeichne. Schließlich sei $\|g\|_{\text{sup}} := \sup_{e \in \mathsf{tot}(E)} \|g(e)\|_{f(\bot)}$.*

1. *Es gilt $\|g\|_{\text{sup}} \leq \wr g \wr_f$.*
2. *Umgekehrt existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $e \in \mathsf{tot}(E)$, so daß $\wr g \wr_f \leq \|g(e)\| + \varepsilon$, d.h. es gilt $\wr g \wr_f \leq \|g\|_{\text{sup}} + \varepsilon$.*

Da g in der Klasse $[g]$ maximal ist, gilt $\wr g \wr_f = \|[g]\|_f$.

Beweis. 1. Da g monoton und $\bot$ das kleinste Element von E ist, gilt $g(\bot) \sqsubseteq g(e)$ für alle $e \in \mathsf{tot}(E)$. Daraus folgt $\|g(\bot)\|_{f(\bot)} \geq \|g(e)\|_{f(\bot)}$ für alle $e \in \mathsf{tot}(E)$. Mit 3.1.3(3) ergibt sich

$$\wr g \wr_f = \|g(\bot)\|_{f(\bot)} \geq \sup_{e \in \mathsf{tot}(E)} \|g(e)\|_{f(\bot)} = \|g\|_{\text{sup}}.$$

2. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $b = f(\bot)$ und $t = \|g(\bot)\|_b - \varepsilon$. Nach Definition der Norm gilt dann $tb \not\sqsubseteq g(\bot) = \bigsqcap_{e \in \mathsf{tot}(E)} \bar{g}(e)$. Damit existiert ein $e \in \mathsf{tot}(E)$ mit $tb \not\sqsubseteq \bar{g}(e)$. Somit ist $\|\bar{g}(e)\|_b > t$, d.h. es gilt insbesondere $\sup_{e \in \mathsf{tot}(E)} \|\bar{g}(e)\|_b > t$. Somit erhalten wir

$$\|g\|_{\text{sup}} + \varepsilon > \|g(\bot)\|_{f(\bot)} = \wr g \wr_f$$

mit 3.1.3(3). □

Dieses Lemma liefert nun einen Beweis für die Verallgemeinerung von Satz 3.3.7:

3.5.10 Satz. *Es seien E, E' Bereiche, die die Voraussetzungen von Satz 3.5.8 erfüllen. Dann sind die Banachräume $\big(\mathsf{tot}([E \to E'])/\!\sim_{E \to E'}, \|\cdot\|_f\big)$ und der Raum der beschränkten stetigen Funktionen $\big(\mathsf{bd}\,\mathcal{C}(\mathsf{tot}(E)/\!\sim_E, \mathsf{tot}(E')/\!\sim_{E'}), \|\cdot\|_{\text{sup}}\big)$ isometrisch isomorph.*

Beweis. Sei g eine beschränkte stetige Funktion von $\mathsf{tot}(E)/\!\sim_E$ nach $\mathsf{tot}(E)/\!\sim_{E'}$. Diese läßt sich wie in 3.5.8$(**)$ zu einer Funktion $\hat{g}\colon E \to E'$ fortsetzen. Man erhält ein totales Element des Bereichs $[E \to E']$ und somit auch eine Äquivalenzklasse in $\big(\mathsf{tot}([E \to E'])/\!\sim_{E \to E'}\big)$. Ist umgekehrt $[g] \in \big(\mathsf{tot}([E \to E'])/\!\sim_{E \to E'}\big)$ eine Äquivalenzklasse, so kann man aus ihr einen Repräsentanten $g\colon E \to E'$ auswählen und erhält eine stetige beschränkte Funktion von $\bar{g}\colon \mathsf{tot}(E)/\!\sim_E \to \mathsf{tot}(E)/\!\sim_{E'}$. Die Isometrie der Räume folgt aus Lemma 3.5.9. □

KAPITEL 4

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit ist das Konzept der Banach-Domains eingeführt und gezeigt worden, wie sich aus einem Banach-Domain ein Banachraum konstruieren läßt. Dazu haben wir die Teilmenge der invertierbaren Elemente betrachtet und gezeigt, daß diese einen vollständigen reellen Vektorraum bilden. Da in Funktionenräumen nur die konstanten Funktionen invertierbar sind, haben wir in Banach-Domains totale Elemente definiert: Ausgehend von der Menge der invertierbaren bzw. maximalen Elemente des Domains, betrachten wir in Funktionenräumen die Menge Funktionen, die totale Elemente auf totale Elemente abbilden. Diese Teilmenge bildet – nachdem wir in Funktionenräumen die Elemente identifiziert haben, die auf den totalen Elementen dasselbe tun – einen reellen Vektorraum. Durch die in 3.5.7 erklärte Abbildung wird dieser zu einem normierten Vektorraum. Im Fall der Funktionenräume haben wir die Vollständigkeit nur zeigen können, wenn der Bildbereich beschränkt vollständig ist und die totalen Elemente des Urbildraums hinreichend dicht liegen. Letzteres ist, wie bereits angemerkt, im Raum $[\mathcal{I} \to \mathcal{I}]$ der Fall, so daß z.B. der Raum $\left[[\mathcal{I} \to \mathcal{I}] \to \mathcal{I}\right]$ vollständig ist.

Eine offene Frage ist, ob Banach-Domains generell diese Eigenschaft haben. Konkret gesagt:

> Lassen sich in einem Banach-Domain D alle Elemente durch andere Elemente approximieren, die unter einem totalen Element von D liegen, d.h. gibt es für jedes $x \in D$ eine Menge von Elementen $y_i \in D$ $(i \in I)$ mit der Eigenschaft, daß es für jedes y_i ein $z_i \in \mathsf{tot}(D)$ mit $y_i \sqsubseteq z_i$ gibt, so daß $x = \bigsqcup_{i \in I} y_i$ ist?

Wäre dies der Fall, so bräuchte in 3.5.2 nicht gefordert zu werden, daß in den Banach-Domains, die keine Funktionenräume sind, alle maximalen Elemente invertierbar sein müssen.

Ein weiteres Anliegen dieser Arbeit ist der Vergleich von Banachräumen mit den Banachräumen, die aus Banach-Domains entstanden sind. Wir haben in Abschnitt 2.2 gesehen, daß sich jeder Banachraum X in einen Banach-Domain einbetten läßt, nämlich in den zugehörigen Bereich der formalen Kugeln $\mathcal{B}X$. Das Hauptergebnis des Abschnitts ist, daß die Räume X und $\mathsf{inv}(\mathcal{B}X)$ homöomorph sind und daß sich die induzierte Norm auf $\mathsf{inv}(\mathcal{B}X)$ nur um einen konstanten Faktor von der Norm in X unterscheidet.

Für den Funktionenraum $\mathsf{tot}([\mathcal{I} \to \mathcal{I}])$ und den Raum $\mathsf{bd}\,\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der beschränkten stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm haben wir in 3.3.7 eine ähnliche Aussage treffen können. Satz 3.5.10 verallgemeinert diesen Sachverhalt: Hat man einen stetigen Bereich E mit obiger Approximationseigenschaft und einen beschränkt vollständigen Banach-Domain E' gegeben, bildet den Banach-Domain $[E \to E']$ und konstruiert daraus einen Banachraum, so ist dieser Raum – bei geeigneter Wahl der beteiligten Normen – isometrisch isomorph zu dem Raum, den man erhält, wenn man aus E und E' erst einen topologischen Raum bzw. einen Banachraum konstruiert und dann den Raum der beschränkten stetigen Funktionen zwischen diesen beiden Räumen betrachtet.

Dualräume

Hat man einen Banachraum X über dem Körper $\mathbb{R}$ gegeben, so interessiert man sich in der Funktionalanalysis auch für den zugehörigen Dualraum X^*, der aus allen linearen stetigen Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ besteht. Es stellt sich nun die Frage, ob sich diese Konstruktion auf der Domainseite nachspielen läßt, d.h. ob ein Banach-Domain einen zugehörigen Dual-Domain besitzt. Dazu führen wir zunächst den Begriff der Linearität einer Funktion von einem Banach-Domain D in den Intervall-Domain $\mathcal{I}$ ein:

Definition. Ist D ein Banach-Domain, so wird eine Funktion $f\colon D \to \mathcal{I}$ *linear* genannt, wenn für alle $x, y \in D$ und $a \in \mathcal{I}$ gilt

$$f(x) + f(y) \sqsubseteq f(x+y)$$
$$f(ax) \sqsubseteq a \cdot f(x)$$

Die Menge aller linearer Funktionen von D nach $\mathcal{I}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(D, \mathcal{I})$.

Die Ungleichungen in dieser Definition rühren daher, daß die punktweise Addition zweier linearer Funktionen f und g ebenso wie die punktweise Multiplikation einer linearen Funktion mit einem Element aus $\mathcal{I}$ wieder eine lineare Funktion liefern sollte. Nun stellt man aber schon beim Nachweis von $(f+g)(ax) \sqsubseteq a \cdot (f+g)(x)$ fest, daß Gleichheit nicht haltbar wäre, da diese in Axiom (8) nicht gefordert wurde. Aus ähnlichem Grund kann in der ersten Forderung keine Gleichheit gelten. Durch leichte Rechungen ergibt sich:

Satz. *Die Menge $\mathcal{L}(D, \mathcal{I})$ der linearen Funktionen von einem Banach-Domain D in den Intervall-Domain $\mathcal{I}$ ist unter Addition und skalarer Multiplikation abgeschlosssen.* $\square$

Die zweite Ungleichung sichert zugleich die Existenz linearer Abbildungen.

Beispiel. Sei X ein Banachraum und $\mathcal{B}X$ der zugehörige Bereich der formalen Kugeln. Ist eine lineare stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ gegeben, so läßt sich diese durch

$$\bar{f}(x, d) := [f(x) \pm d \cdot \|f\|]$$

zu einer Funktion $\bar{f}\colon \mathcal{B}X \to \mathcal{I}$ fortsetzen, wobei $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ die Norm von f in X^* bezeichnet. Unter Verwendung der Aussagen aus [EH98] rechnet man leicht nach, daß die Funktion $\bar{f}$ stetig ist. Die Linearität von $\bar{f}$ ergibt sich ebenfalls aus einfachen Rechungen.

Die Frage, die sich jetzt natürlich stellt, ist:

Bildet die Menge $\mathcal{L}(D, \mathcal{I})$ für jeden Banach-Domain D einen stetigen Bereich?

In diesem Fall hätte man zu jedem Banach-Domain D einen weiteren Banach-Domain $D^* := \mathcal{L}(D, \mathcal{I})$ gefunden, den zugehörigen Dual-Domain. Die weitere Überlegung wäre dann, ob man in D^* wieder totale Elemente definiert und versucht, durch Faktorisierung einen Banachraum mit der Eigenschaft $\mathsf{tot}(D^*) \cong \mathsf{tot}(D)^*$ zu gewinnen.

Literaturverzeichnis

[AJ94] S. Abramsky und A. Jung: *Domain Theory*. In: S. Abramsky, D. M. Gabbay und T. S. E. Maibaum (Herausgeber): *Handbook of Logic in Computer Science*, Band 3, Seiten 1–168. Clarendon Press, 1994.

[Alt92] H. Alt: *Lineare Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, 2. Auflage, 1992.

[Ber90] U. Berger: *Totale Objekte und Mengen in der Bereichstheorie*. Doktorarbeit, Universität München, 1990.

[DG82] J. Dugundji und A. Granas: *Fixed Point Theory*, Band 1. Polish Scientific Publishers, 1982.

[Eda95] A. Edalat: *Dynamical systems, measures and fractals via domain theory*. Information and Computation, 120(1):32–48, 1995.

[Eda97] A. Edalat: *Domains for Computation in Mathematics, Physics and Exact Real Arithmetic*. Bulletin of Symbolic Logic, 3(4):401–452, 1997.

[EH98] A. Edalat und R. Heckmann: *A Computational Model for Metric Spaces*. Theoretical Computer Science, 193:53–73, 1998.

[Nor98] D. Normann: *The continuous functionals of finite types over the reals*, 27. November 1998.

[Sco70] D. S. Scott: *Outline of a mathematical theory of computation*. In: *4th Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems*, Seiten 169–176, 1970.

[Sü98] P. Sünderhauf: *Banach domains*. Preliminary notes, 24. Juli 1998.