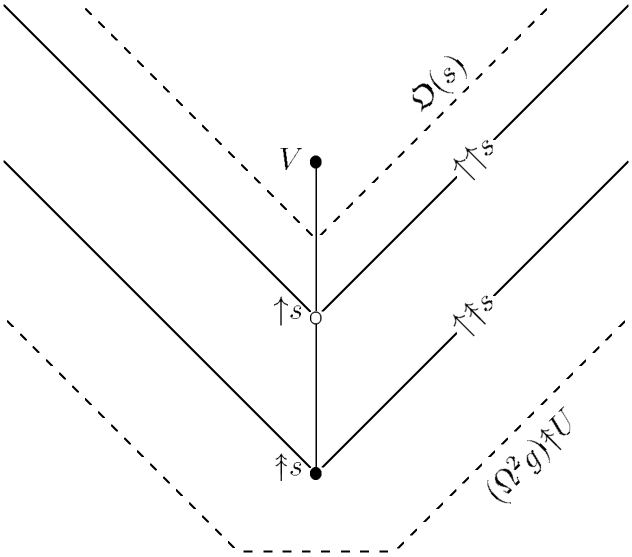
Stetigkeit und Ordnung in Funktionenräumen

Diplomarbeit
von
Thomas Erker

Betreuer: Prof. Dr. Klaus Keimel
Fachbereich Mathematik



Technische Universität Darmstadt
Oktober 1997

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Life is what happens while you
are making other plans.

JOHN LENNON

Der Titel dieser Arbeit hätte wahrscheinlich „Totale Mengen in Funktionenräumen stetiger Bereiche“ gelautet, hätten mich Totalitäten mehr interessiert. Zwar konnte ich *ein* Resultat von U. Berger über totale Mengen von Funktionen [Ber93] von algebraischen auf stetige Bereiche verallgemeinern, aber durch die besondere Konstruktion bedingt lassen sich z. B. die reellen Zahlen nicht in ihrer Gesamtheit als totale Teilmenge des Intervall-Bereichs auffassen. Eine Verallgemeinerung, die nicht in der Lage ist, eines der Standard-Beispiele stetiger Bereiche abzudecken, ist von zweifelhaftem Nutzen. Um die „richtige“ Verallgemeinerung zu finden, hätte ich aber Bergers Motivation besser verstehen müssen. Dafür fehlten mir aber die Grundlagen und zugegebenermaßen auch die Lust.

Zum Beweis des einen Resultats war es notwendig, die Approximationsordnung in Funktionenräumen zu betrachten. Da sich mein Beweis nach mehreren Wochen schließlich als erschreckend simpel und „offensichtlich“ herausstellte, lag der Verdacht nahe, daß ich von der Approximationsordnung in Funktionenräumen keine Ahnung hatte. Auf meine Anfrage, ob darüber nicht irgendwo schon etwas geschrieben stünde, drückte mir mein Betreuer Klaus Keimel ein Manuskript in die Hand. Darin wurden von ihm und Martín Hötzel Escardó einige so nicht richtige Aussagen des Compendiums [GHK+80] über die Approximationsordnung in Funktionenräumen korrigiert. Die im Manuskript noch offenen Fragen interessierten mich fortan viel mehr als ein weiteres Nachdenken über Bergersche totale Mengen.

Es gelang mir, einige der offenen Probleme zu lösen, und als sich die Gelegenheit bot, konnte ich für zwei Wochen Martín in London besuchen, um dort weiter über die Approximationsordnung im Funktionenraum nachzudenken. Die Ergebnisse dieser Bemühungen sind schließlich in den gemeinsamen Artikel [EEK97] eingeflossen; sie bilden die eine Hälfte dieser Arbeit.

Die andere Hälfte verdankt sich eines Problems, daß Martín während eines seiner Aufenthalte in Darmstadt stellte: die Frage, ob die Begriffe *injektive T_0-Raum* und *Rechts-Kan-Raum* zusammenfallen. Auch dieses Problem wurde auf einmal für mich viel spannender als all die anderen Dinge, die ich eigentlich untersuchen wollte.

Aus diesen Grunden kann meine Arbeit nicht für sich in Anspruch nehmen, homogen oder auch nur geplant gewesen zu sein. Aber spätestens seit Darwin gilt ein Verlust an Teleologie nicht mehr unbedingt als Mangel. Die Beschäftigung damit gestaltete sich dadurch zumindest abwechslungsreicher.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Klaus Keimel für die subtile und hilfreiche Betreuung bedanken, die es mir ermöglichte, den mich jeweils interessierenden Fragen nachzugehen.

Martín Hötzel Escardó hat durch seine unendliche Geduld und Gastfreundschaft meinen London-Aufenthalt zu einer fruchtbaren Unternehmung werden lassen. Seinen Anregungen durch Problemstellungen und Vermutungen verdankt diese Arbeit viel.

Durch ihr gemeinsames ARC-Programm haben the British Council und der DAAD meine Reise nach London ermöglicht.

Für das Korrekturlesen schulde ich Mathias Kegelmann, Michael Marz, Florence Micol und Alexander Rohr Dank. Insbesondere Mathias hat viel zur Verbesserung dieser Arbeit beigetragen; er hat sich der Mühe unterzogen, sämtliche Beweise zu kontrollieren und konnte viele nützliche Hinweise geben.

Nicht zuletzt danke ich meinen Eltern für ihre von Forderungen freie Unterstützung, die mein unbeschwertes Studieren erst möglich machte.

Darmstadt, im Oktober 1997

Einleitung

Ich will nicht den Versuch machen, den Teil über Rechts-Kan-Räume und den Teil über die Approximationsordnung im Funktionenraum in einen übergeordneten Zusammenhang zu stellen oder gar zu behaupten, sie hätten miteinander zu tun. Ein solches Unterfangen würde die Phantasie und Geduld jedes Lesers und jeder Leserin arg strapazieren. Alles, was sich an Gemeinsamkeiten nennen läßt, ist im Titel der vorliegenden Arbeit enthalten: Beide Male dreht es sich um Funktionenräume, die eine Ordnung tragen. Die Stetigkeit spielt insofern eine Rolle, als es sich natürlich um Räume stetiger Funktionen handelt. Im Fall der Approximationsordnung ist Stetigkeit auch im ordnungstheoretischen Sinne gemeint. Davon kann bei den Rechts-Kan-Räumen allerdings nicht die Rede sein; die dort vorkommenden Funktionenräume sind im allgemeinen nicht stetig.

Mangels größerer Verwandschaften verzichte ich an dieser Stelle auf ein näheres Eingehen auf die Thematik, ich werde dies an den jeweiligen Kapitelanfängen nachholen. In Kapitel 1 werden die Bezeichnungen fixiert und die Grundlagen gelegt, auf die später aufgebaut wird. Eine vollständige Einführung in die zum Verständnis notwendigen Gebiete der Topologie, Ordnungs- und Bereichstheorie kann und soll dieses Kapitel nicht liefern. Die Rechts-Kan-Räume sind Gegenstand des zweiten Kapitels, und Kapitel 3 handelt von der Approximationsordnung.

Es soll nicht der Eindruck erweckt werden, alle in dieser Arbeit formulierten Resultate stammen von mir. Für das Grundlagen-Kapitel ist das sicherlich falsch; auch wenn dort einiges bewiesen wird, so doch vor allem, weil die Sätze schon so bekannt sind, daß sich niemand mehr die Mühe macht, sie leicht zugänglich aufzuschreiben.

Während die Ergebnisse über Rechts-Kan-Räume (bis auf die dort angegebenen Ausnahmen) von mir sind, läßt sich eine strikte Trennung in Kapitel 3 nicht vornehmen, da es das Ergebnis einer gemeinsamen Arbeit ist. Eine Ausnahme bildet der Abschnitt über die Approximationsordnung im Stone-Dual, der neu ist und sich noch nicht in [EEK97] findet.

Wer bei dieser gemeinsamen Arbeit den maßgeblichen Beitrag zu einem Beweis oder der Formulierung einer Definition geliefert hat, wer an der richtigen Stelle die richtigen Fragen gestellt hat, laßt sich im nachhinein nicht mehr beantworten, zumal viele Formulierungen inzwischen ihre dritte oder vierte Reinkarnation durchmachen. So ist z. B. das Konzept der Normalform einer Stufenfunktion erst in der vorliegenden Arbeit zu finden, liefert aber nicht mehr als einen eleganteren Weg, gewisse Beweisteile zu formulieren. Lediglich bei den Abgrenzungsaussagen (Proposition 3.5, Bemerkung 3.15 und Proposition 3.16) und der Verallgemeinerung zu stetigen L-Bereichen (Abschnitt 3.6) bin ich mir sicher, daß sie *ursprünglich* von mir sind: die Abgrenzungsaussagen sind genau die Probleme, die ich vor meinem London-Aufenthalt gelöst hatte, und den L-Bereichen habe ich mich danach gewidmet.

Anläßlich dieser Niederschrift habe ich mich bemüht, Unebenheiten und Mängel der Darstellung in [EEK97] auszubessern, so wurde dort z. B. an mehreren Stellen unnötigerweise Nüchternheit vorausgesetzt.

1 Bezeichnungen und Grundlagen

Die Standardbezeichnungen und Grundlagen der Topologie, Kategorientheorie, Ordnungs- und Bereichstheorie werden stillschweigend benutzt; Referenz für Ordnungs- und Bereichstheorie ist dabei [AJ94, Sec. 2]. Im folgenden werden nur noch weniger übliche oder abweichende Bezeichnungen festgelegt, sowie einige benötigte Resultate wiederholt. Auf Beweise wird dabei weitestgehend verzichtet; sie finden sich in der jeweils angegebenen Literatur.

1.1 Allgemeine Bezeichnungen

Der Übersichtlichkeit wegen wird auf Klammern meistens verzichtet; fehlende Klammern sind von rechts nach links zu ergänzen. So ist z. B. fx als die Funktionsanwendung $f(x)$ zu lesen und $\uparrow\uparrow s$ als $\uparrow\big(\uparrow(s)\big)$.

Ist $p\colon X \rightharpoonup Y$ eine *partielle* Funktion, so bezeichnet $\operatorname{def} p$ den Definitionsbereich von p. Für eine Funktion $f\colon X \to Y$ sind $f[\cdot]\colon \mathfrak{P}X \to \mathfrak{P}Y$ und $f^{-1}[\cdot]\colon \mathfrak{P}Y \to \mathfrak{P}X$ die Bild- bzw. die Urbildfunktion; dabei ist $\mathfrak{P}X$ die Potenzmenge von X.

Ebenfalls um die Bezeichnung zu vereinfachen, werden Vergißfunktoren nach Set (Kategorie der Mengen) nicht angegeben. Es kann z. B. X sowohl für den topologischen Raum X als auch für die Menge der Punkte von X stehen.

Im weiteren Verlauf werden sich etwas verwickelte Indizierungen von Suprema und Infima ergeben. Sollte bei einem Operator unklar sein, was genau der Laufindex ist, so stellen wir diesen (durch Doppelpunkt abgetrennt) dem Indexausdruck explizit voran. So bedeutet beispielsweise

$$\bigvee_{i\,:\,x\in U_i} s_i \qquad \text{gerade} \qquad \bigvee\{s_i \mid \exists i \in I : x \in U_i\}.$$

Wie im Beispiel wird oft die Indexmenge nicht angegeben, wenn der Bezug klar ist.

1.2 Topologie I

Für einen topologischen Raum X ist ΩX der Verband der offenen Mengen von X, geordnet durch Inklusion. Inneres und topologischer Abschluß werden durch vorangestelltes int bzw. cl gekennzeichnet. Der Umgebungsfilter eines Elementes $x \in X$ oder einer Teilmenge $A \subseteq X$ wird mit $\mathfrak{U}(x)$ bzw. mit $\mathfrak{U}(A)$ bezeichnet. Die Menge aller *offenen* Umgebungen schreiben wir als $\mathfrak{O}(x)$ bzw. $\mathfrak{O}(A)$. Auch diese Mengen werden wir als Umgebungs*filter* bezeichnen, denn sie sind Filter in ΩX.

Ist eine Menge Schnitt ihrer Umgebungen, $A = \bigcap \mathfrak{U}(A)$, dann heißt sie *saturiert.* In Hausdorff-Räumen ergibt sich dadurch nichts Neues, da dort jede Menge saturiert ist. Für jede kompakte Menge K ist der Schnitt ihrer Umgebungen $\bigcap \mathfrak{U}(K)$ saturiert und kompakt. Die Menge der kompakt-saturierten (d. h. kompakten und saturierten) Teilmengen von X bezeichnen wir mit $\mathsf{K}_{\mathsf{sat}}\, X$. Dabei ist mit *kompakt* gemeint, daß die betreffende Menge die endliche Überdeckungseigenschaft besitzt, also *quasi-kompakt* ist im Sinne von [GHK⁺80].

Gelegentlich werden wir aus einer gegebenen Topologie auf einem Raum X neue gewinnen wollen: Die *co-kompakte Topologie* κX eines topologischen Raumes X ist die von den Mengen der Form $X \setminus K$ mit $K \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}}\, X$ erzeugte Topologie. Anders gesagt bildet $\mathsf{K}_{\mathsf{sat}}\, X$ eine

Basis der co-kompakt-abgeschlossen Mengen von X, denn endliche Vereinigungen kompakter Mengen sind kompakt.

Die *Patch-Topologie* πX auf X ist das Supremum von ΩX und κX, d. h. sie ist die von den Mengen der Form O und $X \setminus K$ mit $O \in \Omega X$ und $K \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}} X$ erzeugte Topologie. Weil ΩX gegenüber endlichen Schnitten und $\mathsf{K}_{\mathsf{sat}} X$ gegenüber endlichen Vereinigungen abgeschlossen ist, bilden die Mengen der Form $O \setminus K$ mit $O \in \Omega X$ und $K \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}} X$ eine Basis der Patch-Topologie.

Unter ΔX wollen wir den diskreten Raum mit Trägermenge X verstehen, wobei X ein topologischer Raum oder eine Menge sein darf.

Die Kategorie der T_0-Raume (mit stetigen Abbildungen) nennen wir Top. Objekte und Hom-Mengen tragen noch eine weitere Struktur: eine Ordnung. Die *Spezialisierungsordnung* $\sqsubseteq_X$ auf einem T_0-Raum X ist so definiert, daß $x \in X$ genau dann unter $y \in X$ liegt, wenn jede Umgebung von x auch Umgebung von y ist, d. h. $x \sqsubseteq_X y$ gilt genau dann, wenn $\mathfrak{U}(x) \subseteq \mathfrak{U}(y)$ erfüllt ist. Äquivalent dazu ist, daß x im Abschluß $\mathrm{cl}\{y\}$ liegt. (Ist X kein T_0-Raum, dann stellt die entsprechend definierte Relation $\sqsubseteq_X$ nur eine Präordnung dar.) Da in T_1-Räumen jeder Punkt durch eine Umgebung von jedem anderen getrennt werden kann, ist die Spezialisierungsordnung auf T_1-Räumen *diskret.*

Bezüglich der Spezialisierungsordnung sind offene Mengen Endstücke und abgeschlossene Mengen Anfangsstücke, denn eine Menge ist genau dann ein Endstück in der Spezialisierungsordnung, wenn sie saturiert ist. Man kann daher o. B. d. A. T_0-Räume als *geordnete Mengen mit Topologie* auffassen, in der die offenen Mengen Endstücke sind.

Der Funktionenraum $\mathsf{Top}(X, Y)$ läßt sich durch $\sqsubseteq_Y$ punktweise ordnen. Von zwei stetigen Funktionen $f, g \colon X \to Y$ liegt f genau dann unter g, wenn für jeden Punkt x jede Umgebung von fx eine Umgebung von gx ist:

$$f \leq g \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in X : fx \sqsubseteq_Y gx.$$

Derart geordnet bezeichnen wir $\big(\mathsf{Top}(X, Y), \leq\big)$ als $[X \to Y]$.

Die rechteckigen Ordnungssymbole $\sqsubseteq$, $\sqcup$, $\sqcap$, $\bigsqcup$ usw. werden wir *ausschließlich* für die Spezialisierungsordnung topologischer Räume verwenden.

Das folgende Lemma gibt eine erste Auskunft über die Struktur des Funktionenraumes:

Lemma 1.1 *Seien X und Y zwei T_0-Räume, wobei vorausgesetzt werde, daß die Topologie ΩY von Y gröber als die Scott-Topologie auf $(Y, \sqsubseteq_Y)$ sei. Existiert das punktweise gebildete Supremum einer gerichteten Familie stetiger Funktionen aus $[X \to Y]$, dann ist dieses Supremum stetig.*

Beweis: Sei $G \subseteq [X \to Y]$ eine gerichtete Familie stetiger Funktionen und f ihr punktweise berechnetes Supremum. Ist $x \in X$ ein Punkt, und liegt fx in der offenen Menge $O \in \Omega Y$, dann gibt es ein $g \in G$, so daß das Bild gx in O liegt, denn $\{gx \mid g \in G\}$ ist gerichtet und O ist Scott-offen. Wegen der Stetigkeit von g gibt es eine offene Umgebung $V \in \Omega X$ von x, so daß $g[V] \subseteq O$ erfüllt ist. Die Funktion f liegt oberhalb von g, und O ist ein Endstück von $(Y, \sqsubseteq_Y)$. Folglich gilt auch $f[V] \subseteq O$, und f ist somit im Punkt x stetig. ■

Zwei Objekte in Top spielen eine besondere Rolle: Das *terminale Objekt* $\mathsf{1}$ von Top ist der einpunktige Raum $\{*\}$. Eine Abbildung $x \colon \mathsf{1} \to X$ beschreibt nichts anderes als einen

Punkt x aus X. Somit ist $[\mathsf{1} \to X]$ als geordnete Menge isomorph zu $(X, \sqsubseteq_X)$.

Die offenen Mengen eines topologischen Raumes entsprechen den stetigen Abbildungen $X \to \mathsf{S}$ in den *Sierpinski-Raum* S, dessen Trägermenge $2 = \{0, 1\}$ und dessen einzige nicht-triviale offene Menge $\{1\}$ ist. Der Funktionenraum $[X \to \mathsf{S}]$ ist ordnungsisomorph zu ΩX.

1.3 Ordnungs- und Bereichstheorie

Unter einem *Bereich* wollen wir eine geordnete Menge verstehen, in der jede gerichtete Menge (solche sind per definitionem nicht-leer) ein Supremum hat (andere Bezeichnungen dafür sind *dcpo* und *cpo*). Bereiche müssen also nicht stetig sein. Die Kategorie der Bereiche zusammen mit den Scott-stetigen Abbildungen bezeichnen wir mit DCPO.

Für eine geordnete Menge $(P, \leq_P)$ ist $\top_P$ das größte und $\bot_P$ das kleinste Element von P, sofern es existiert. Für $x \in P$ bezeichnet wie üblich $\downarrow x$, $\uparrow x$, $\Downarrow x$ bzw. $\Uparrow x$ die Menge aller $y \in P$, für die $y \leq_P x$, $x \leq_P y$, $y \ll_P x$ bzw. $x \ll_P y$ gilt. Dabei ist $\ll_P$ die *Approximationsordnung* auf P: es gilt $x \ll_P y$ genau dann, wenn es für jede gerichtete Menge Y mit $y \leq \bigvee^{\uparrow} Y$ ein $y_0 \in Y$ mit $x \leq y_0$ gibt. Wir sagen dann auch, x *approximiert* y oder x liegt *weit-unter* y und dieses *weit-über* x. Wenn klar ist, auf welche geordnete Menge sich die Ordnungssymbole beziehen, so lassen wir den Index P fallen. Eine wichtige elementare Eigenschaft der Approximationsordnung ist die Verbindungsstabilität:

Lemma 1.2 *Sei $(P, \leq)$ eine geordnete Menge und $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in P$. Gilt $x_i \ll y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, dann auch $\bigvee_{i=1}^n x_i \ll \bigvee_{i=1}^n y_i$, sofern die Suprema existieren.*

Für stetige Bereiche läßt sich dies noch verschärfen:

Lemma 1.3 (Interpolation) *Sei $(L, \leq)$ ein stetiger Bereich und $x_1, \ldots, x_n, y \in L$. Gilt $x_i \ll y$ für alle $i = 1, \ldots, n$, dann gibt es ein $z \in L$, so daß $x_i \ll z \ll y$ für alle $i = 1, \ldots, n$ erfüllt ist. Das Element z kann so gewählt werden, daß es aus einer Basis von L liegt.*

Wir sagen auch, z ist ein *interpolierendes* Element zwischen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ und y.

Entgegen den sonst üblichen Gepflogenheiten beziehen sich die Pfeil-Operatoren $\downarrow$, $\uparrow$, $\Downarrow$ und $\Uparrow$ immer *nur auf Elemente* nie auf Mengen, d. h. sie haben stets den Typ $P \to \mathfrak{P}P$. So ist z. B. für $V \in \Omega X$ mit $\uparrow V$ nicht die Saturierung von V gemeint (welche gleich V wäre), sondern die Menge aller größeren offenen Mengen, also $\mathfrak{O}(V)$, d. h. V wird als Element von ΩX und nicht als Teilmenge von X aufgefaßt. Der Grund für diese Restriktion ist, daß wir uns u. U. auf mehreren Ebenen (L, ΩL und $\Omega^2 L$) gleichzeitig bewegen werden, und dabei muß der Bezug der Operatoren klar sein.

Ein Bereich L kann mehrere kanonische Topologien tragen: neben der *Scott-Topologie* σL kommt auch die *untere Topologie* ℓL vor, für die die Mengen der Form $\downarrow x$ mit $x \in L$ eine Subbasis der abgeschlossenen Mengen bilden.

Da Bereiche hin und wieder von der Scott-Topologie verschiedene Topologien tragen werden, sind sie nicht a priori mit der Scott-Topologie versehen. Falls erforderlich, bezeichnet ΣL den topologischen Raum $(L, \sigma L)$, oder wir werden explizit voraussetzen, daß L die Scott-Topologie trägt. Einzige Ausnahme von dieser Regel ist der Funktionenraum-Operator $[\cdot \to \cdot]$; in diesem wird Σ implizit angewendet. Z. B. ist für einen Raum X und einen Bereich L dann $[X \to L] := \mathsf{Top}(X, \Sigma L)$.

Sind L und M Bereiche, die zusätzlich Topologien ΩL bzw. ΩM tragen, so nennen wir eine Abbildung $f\colon L \to M$ (in Abgrenzung zur Scott-Stetigkeit) *topologisch stetig*, wenn sie ein Morphismus in $\mathsf{Top}\big((L,\Omega L),(M,\Omega M)\big)$ ist, nicht jedoch notwendigerweise ein Morphismus in $\mathsf{DCPO}(L,M)$. Eine partielle Abbildung $p\colon L \rightharpoonup M$ heißt topologisch stetig, wenn sie ein Morphismus in $\mathsf{Top}\big(\operatorname{def} p,(M,\Omega M)\big)$ ist, wobei man $\operatorname{def} p$ als Teilraum von $(L,\Omega L)$ auffaßt.

Ein wichtiger Spezialfall hiervon liegt vor, wenn L das Produkt $\prod_i L_i$ von Bereichen ist, denn im allgemeinen ist die Produkttopologie echt gröber als die Scott-Topologie auf $(L,\leq)$. Sind daher L_i Bereiche, die jeweils mit Topologien ΩL_i versehen sind, so soll unter der Topologie ΩL von $L = \prod_i L_i$ stets die Produkttopologie verstanden werden.

Für den Fall der Supremumsoperation fassen wir dies noch einmal zusammen: Ist $(L,\leq)$ ein vollständiger Verband, der mit einer Topologie ΩL versehen ist, so heißt die (I-stellige) Supremumsoperation

$$\begin{aligned}\bigvee\colon \qquad \prod_{i\in I} L &\to L\\ \langle x_i \mid i\in I\rangle &\mapsto \bigvee_{i\in I} x_i\end{aligned}$$

topologisch stetig, wenn sie als Abbildung $\prod_{i\in I}(L,\Omega L)\to(L,\Omega L)$ stetig ist. (In [GHK+80] wird diese Eigenschaft *joint continuity* genannt, falls $\Omega L = \sigma L$ gilt.) Ist $(L,\leq)$ lediglich eine geordnete Menge, so heißt die partielle Abbildung $\bigvee$ *topologisch stetig*, wenn es eine stetige Abbildung von $\operatorname{def}\bigvee \to L$ ist, wobei $\operatorname{def}\bigvee$ als Teilraum von $\prod_{i\in I}(L,\Omega L)$ aufgefaßt wird.

Unter Bedingungen, die z. B. für stetige Bereiche erfüllt sind, fallen beide Topologien und damit die Stetigkeitsbegriffe (Scott-stetig, topologisch stetig) zusammen:

Proposition 1.4 *Sind P und Q Bereiche und ist die Scott-Topologie σP auf P ein stetiger Verband, dann ist die Scott-Topologie auf $P\times Q$ die Produkttopologie, d. h. $\Sigma(P\times Q) = \Sigma P\times\Sigma Q$.*

Beweis: [GHK+80, Hint of Ex. II-4.23] ■

Korollar 1.5 *Sei $(L,\leq)$ ein vollständiger Halbverband, dessen Scott-Topologie σL ein stetiger Verband ist. Dann ist die Supremumsoperation $\vee\colon \Sigma L\times\Sigma L \rightharpoonup \Sigma L$ topologisch stetig.*

Beweis: Wegen Proposition 1.4 trägt $\Sigma L\times\Sigma L$ die Scott-Topologie. Wir wollen zunächst zeigen, daß die Spurtopologie von $\operatorname{def}\vee$ die Scott-Topologie von $(\operatorname{def}\vee,\leq)$ ist.

Die Teilmenge $\operatorname{def}\vee$ ist ein Anfangsstück, denn L ist ein vollständiger Halbverband (existiert $x\vee y$ und ist $\langle x',y'\rangle$ kleiner als $\langle x,y\rangle$, dann existiert auch $x'\vee y'$, denn x' und y' werden durch $x\vee y$ beschränkt). Ist $\big\{\langle x_i,y_i\rangle \bigm| i\in I\big\}$ eine gerichtete Familie von $\operatorname{def}\vee$, dann existiert $\{x_i\vee y_i \mid i\in I\}$ und ist gerichtet. Da L ein Bereich ist, existiert das Supremum $\bigvee^{\uparrow}_{i\in I}(x_i\vee y_i)$, dieses ist aber gleich $\bigvee^{\uparrow}_i x_i \vee \bigvee^{\uparrow}_i y_i$, denn Suprema kommutieren. Folglich ist $\operatorname{def}\vee$ eine Scott-abgeschlossene Teilmenge von $L\times L$. Also ist die Spurtopologie von $\operatorname{def}\vee$ die Scott-Topologie von $(\operatorname{def}\vee,\leq)$.

Wollen wir die topologische Stetigkeit von $\vee$ nachweisen, können wir daher über Suprema gerichteter Mengen argumentieren. Daß $\vee$ gerichtete Suprema erhält, haben wir aber schon im ersten Teil gezeigt. Also ist $\vee\colon L\times L\rightharpoonup L$ Scott- und damit topologisch stetig. ■

Neben *stetigen Verbänden* sind einige speziellere Arten von Bereichen für unsere Zwecke von Bedeutung: Ein *vollständiger Halbverband* ist ein Bereich, der alle nicht-leeren Infima besitzt. Äquivalent dazu ist die Forderung, daß beschränkte Suprema und gerichtete Suprema existieren. Ein vollständiger Halbverband besitzt somit immer ein kleinstes Element, oder er ist leer. Ein stetiger vollständiger Halbverband heißt kurz *stetiger Halbverband.* (Andere Bezeichnungen dafür sind *complete semilattice* in [GHK+80] für vollständiger Halbverband und *complete-continuous semilattice* in [GHK+80] bzw. *bounded-complete domain* in [AJ94] für stetiger Halbverband.) Ein Bereich $(D, \leq)$ heißt *L-Bereich,* falls für jedes $x \in D$ das Hauptideal $\downarrow x$ ein vollständiger Verband ist und falls D ein kleinstes Element $\perp_D$ hat. Vollständige Halbverbände (bis auf die leere Menge) sind immer auch L-Bereiche, die Umkehrung ist im allgemeinen nicht richtig.

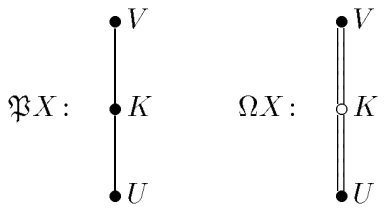
Die leere Menge ist ein stetiger Halbverband, aber kein vollständiger Verband, da vollständige Verbände mindestens $\bigvee \emptyset = \perp$ enthalten.

Nimmt man zu einer geordneten Menge $(P, \leq)$ ein *neues* größtes Element $\infty \notin P$ hinzu, so wird die resultierende geordnete Menge mit $P^\top$ bezeichnet.

Proposition 1.6 *Die vollständigen (stetigen) Halbverbände sind genau die Scott-abgeschlossenen Teilmengen von vollständigen (stetigen) Verbänden.*

Insbesondere ist ein Bereich L genau dann ein vollständiger (stetiger) Halbverband, wenn $L^\top$ ein vollständiger (stetiger) Verband ist.

Zur Veranschaulichung werden wir Ordnungsbeziehungen oft als Hasse-Diagramme darstellen. Dabei bedeutet eine Doppellinie, daß die verbundenen Elemente in $\ll$-Relation stehen.



Handelt es sich bei der geordneten Menge um ein Mengensystem $\mathfrak{M}$ auf Q, d. h. um eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathfrak{P}Q$, so deutet ein weißer Punkt an, daß das Objekt im Potenzmengenverband $\mathfrak{P}Q$ an der entsprechenden Stelle vorkommt, ohne jedoch notwendigerweise Element von $\mathfrak{M}$ sein zu müssen. Z. B. folgt aus der Existenz eines solchen „idealen" Elementes $K \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}}\, X$ an der angegebenen Stelle, daß U in ΩX weit-unter V liegt.

1.4 Stone-Dualität

Ein *Frame* ist eine geordnete Menge, in der alle Suprema und endliche Infima existieren und sich vertragen, d. h. ein Frame ist ein vollständiger Verband, in dem das *Frame-Distributiv-Gesetz*

$$x \wedge \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I} (x \wedge y_i)$$

gilt. Anders als bei vollständigen Verbänden müssen *Frame-Morphismen* nur *endliche* Infima und beliebige Suprema erhalten, und *Unterframes* müssen nur unter diesen beiden abgeschlossen sein. Völlig überraschend haben wir damit eine Kategorie: Frame.

Jede Potenzmenge ist in der Inklusionsordnung ein Frame, und definitionsgemäß sind Topologien genau die Unterframes von Potenzmengen. Der Rest dieses Abschnitts beschäftigt sich mit den (nicht-trivialen) Konsequenzen dieser Beobachtung; ausgelassene Details finden sich in [AJ94, Sec. 7.1, 7.2], Weitergehendes in [GHK+80, Chap. V] und [Joh82].

Für jeden topologischen Raum ist ΩX ein Frame, und jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ gibt Anlaß zu einem Frame-Morphismus $\Omega f := f^{-1}[\cdot]\colon \Omega Y \to \Omega X$. Somit haben wir einen kontravarianten Funktor $\Omega\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Frame}$.

Ist umgekehrt F ein Frame, so kann man daraus einen topologischen Raum konstruieren. Als Trägermenge wählt man die Menge $\mathsf{pt}\, F$ aller vollständig primen Filter von F; diese werden auch *(abstrakte) Punkte* von F genannt. Für jedes Element $o \in F$ definiert man $O_o := \{\mathcal{F} \in \mathsf{pt}\, F \mid o \in \mathcal{F}\}$ als die Menge aller Punkte, die o enthalten. Wegen $O_o \cap O_{o'} = O_{o \wedge o'}$ und $\bigcup_i O_{o_i} = O_{\bigvee_i o_i}$ ist $\{O_o \mid o \in F\}$ eine Topologie, die Topologie $\Omega\, \mathsf{pt}\, F$ von $\mathsf{pt}\, F$.

Ist $\varphi\colon F \to G$ ein Frame-Morphismus, dann ist das Urbild eines vollständig primen Filters unter φ wieder ein solcher. Durch die Festlegung $\mathsf{pt}\, \varphi := \varphi^{-1}[\cdot]\colon\ \mathsf{pt}\, G \to \mathsf{pt}\, F$ wird $\mathsf{pt}\colon \mathsf{Frame} \to \mathsf{Top}$ zu einem kontravarianten Funktor, denn $\mathsf{pt}\, \varphi$ ist stetig: wegen

$$\begin{aligned}
(\mathsf{pt}\, \varphi)\mathcal{F} \in O_o &\Leftrightarrow (\mathsf{pt}\, \varphi)\mathcal{F} \ni o && \text{Definition von } O_o \\
&\Leftrightarrow \mathcal{F} \ni \varphi o && \mathsf{pt}\, \varphi = \varphi^{-1}[\cdot] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{F} \in O_{\varphi o} && \text{Definition von } O_{\varphi o}
\end{aligned}$$

ist das Urbild der offenen Menge O_o unter $\mathsf{pt}\, \varphi$ die offene Menge $O_{\varphi o}$.

Ist F in Wirklichkeit eine Topologie ΩX eines geeigneten Raumes X, so ist jeder Umgebungsfilter $\mathfrak{O}(x)$ eines Punktes $x \in X$ ein vollständig primer Filter von F, also ein abstrakter Punkt in F. Außerdem liegt ein Punkt $x \in X$ genau dann in der offenen Menge $o \in \Omega X = F$, wenn o im Umgebungsfilter von x liegt, d. h. es gilt

$$x \in o \quad\Leftrightarrow\quad \mathfrak{O}(x) \ni o \quad\Leftrightarrow\quad \mathfrak{O}(x) \in O_o.$$

Satz 1.7 *Die kontravarianten Funktoren* $\Omega\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Frame}$ *und* $\mathsf{pt}\colon \mathsf{Frame} \to \mathsf{Top}$ *sind zueinander adjungiert;*

$$\mathsf{Top}(X, \mathsf{pt}\, F) \cong \mathsf{Frame}(F, \Omega X)$$

ist eine in X *und* F *natürliche Bijektion.*

Die im folgenden betrachteten Unterkategorien von Top bzw. Frame seien stets voll.

Ein topologischer Raum X heißt *nüchtern*, wenn er ein T_0-Raum ist und wenn die Komponente $\eta_X\colon X \to \mathsf{pt}\, \Omega X$ der Einheit η der Adjunktion aus Satz 1.7 ein Isomorphismus ist. Ein *spatialer Frame* ist ein Frame F, so daß die Komponente $\varepsilon_F\colon F \to \Omega\, \mathsf{pt}\, F$ der Co-Einheit ε ein Isomorphismus ist.

Satz 1.8 *Die Funktoren* Ω *und* pt *schränken sich ein zu einer dualen Äquivalenz zwischen nüchternen Räumen und spatialen Frames.*

Hausdorff-Räume und stetige Bereiche sind Beispiele nüchterner Räume, wie man an folgender Charakterisierung ablesen kann.

Proposition 1.9 *Ein T_0-Raum ist genau dann nüchtern, wenn jede nicht-leere abgeschlossene Menge, die nicht Vereinigung zweier abgeschlossener echter Teilmengen ist, der Abschluß eines Punktes ist.*

Wir nennen eine abgeschlossene Menge auch $\cup$-*irreduzibel*, wenn sie nicht-leer und nicht Vereinigung zweier abgeschlossener echter Teilmengen ist.

Nüchterne Räume zeichnen sich durch eine Reihe sehr nützlicher Eigenschaften aus:

Proposition 1.10 *Ist X ein nüchterner Raum, dann ist $(X, \sqsubseteq_X)$ ein Bereich und es gilt $\Omega X \subseteq \sigma(X, \sqsubseteq_X)$.*

Satz 1.11 (Hofmann-Mislove) *Sei X ein nüchterner Raum. Dann sind die Umgebungsfilter der kompakt-saturierten Mengen in $\mathsf{K}_{\mathsf{sat}} X$ genau die Scott-offenen Filter auf ΩX.*

Korollar 1.12 *Sei X ein nüchterner Raum. Dann ist der gefilterte Schnitt kompakt-saturierter (und nicht-leerer) Mengen kompakt-saturiert (und nicht-leer). Liegt der gefilterte Schnitt einer Familie kompakt-saturierter Mengen $\mathcal{K}$ in einer offenen Menge $O \in \Omega X$, dann gibt es ein $K \in \mathcal{K}$, das bereits in O liegt.*

Satz 1.13 *Die Funktoren Ω und pt schränken sich ein zu einer dualen Äquivalenz zwischen lokalkompakten, nüchternen Räumen und stetigen Frames.*

Nicht jeder lokalkompakte Raum ist nüchtern. Z. B. ist die Kette $\omega + 1 = \{0, 1, \ldots, \omega\}$ mit allen Endstücken als offenen Mengen lokalkompakt. Dieser Raum kann aber wegen Proposition 1.10 nicht nüchtern sein, denn $\uparrow\omega$ ist nicht Scott-offen.

Auch wenn ein lokalkompakter Raum X nicht nüchtern ist, so ist ΩX immer noch ein stetiger Frame, denn eine offene Menge V approximiert eine offene Menge O in ΩX genau dann, wenn eine kompakte Menge dazwischen liegt. Es gibt daher genügend viele approximierende Elemente.

Umgekehrt muß nicht jeder Raum, dessen Topologie ein stetiger Frame ist, lokalkompakt sein; trennende Beispiele sind allerdings sehr bizarr [GHK+80, Ex. V-5.22].

Ein topologischer Raum heißt *kohärent*, wenn er nüchtern und lokalkompakt ist und wenn jeder Schnitt von zwei kompakt-saturierten Mengen wieder kompakt ist (saturiert ist er ohnehin).

Die Approximationsordnung $\ll_L$ eines stetigen Verbandes L heißt *multiplikativ*, falls für alle $x, y, z \in L$ aus $x \ll y$ und $x \ll z$ bereits $x \ll y \wedge z$ folgt.

Satz 1.14 *Die Funktoren Ω und pt schränken sich ein zu einer dualen Äquivalenz zwischen kohärenten Räumen und stetigen Frames mit multiplikativer Approximationsordnung.*

1.5 Topologie II

Wir schieben in diesem Abschnitt noch einiges aus der Topologie nach, wofür uns vor der Stone-Dualität die Worte gefehlt haben.

Sind X und Y lokalkompakte und nüchterne Räume, dann heißt eine stetige Abbildung $h\colon X \to Y$ *eigentlich*, wenn Urbilder $h^{-1}[K]$ kompakt-saturierter Mengen $K \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}} Y$ kompakt (und saturiert) in X sind. Eigentliche Abbildungen sind daher stetig und co-kompakt-stetig; insbesondere sind eigentliche Abbildungen immer patch-stetig. Die Umkehrung gilt nur für kompaktes, kohärentes X (konstante Abbildungen sind in *jedem* Sinn stetig, aber nur für kompaktes X eigentlich; der Schnitt zweier kompakt-saturierter Mengen ist immer co-kompakt-abgeschlossen, braucht aber im allgemeinen nicht kompakt zu sein).

Andere Bezeichnungen sind *perfekte Abbildung* und *proper map*. Die Einschränkung auf lokalkompakte Räume kann — bei gleichzeitiger Modifikation der Definition — fallen gelassen werden; darauf verzichten wir an dieser Stelle.

Proposition 1.15 *Eine Abbildung $h\colon X \to Y$ zwischen lokalkompakten, nüchternen Räumen X und Y ist genau dann eigentlich, wenn $\Omega h\colon \Omega Y \to \Omega X$ die Approximationsordnung erhält.*

Beweis: [GHK+80, Lemma V-5.14 und Lemma V-5.15] ∎

Lemma 1.16 *Ist X kohärent, dann sind die kompakt-saturierten Mengen $\mathsf{K}_{\mathsf{sat}} X$ genau die co-kompakt-abgeschlossenen Mengen (wobei X ausgenommen werden muß, falls X nicht kompakt ist).*

Beweis: Endliche Vereinigungen kompakt-saturierter Mengen sind immer kompakt-saturiert, für endliche Schnitte gilt dies wegen der Kohärenz von X. Ein beliebiger Schnitt kompakt-saturierter Mengen kann daher o. B. d. A. als gefiltert angenommen werden. Als solcher ist er aber nach dem Satz von Hofmann-Mislove 1.11 kompakt-saturiert. ∎

Proposition 1.17 *Ist X ein kohärenter Raum und $K \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}} X$ eine kompakt-saturierte Menge, dann ist K auch patch-kompakt.*

Beweis: Wegen Alexanders Subbasis-Lemmas brauchen wir nur Überdeckungen von K zu betrachten, die aus offenen Mengen $O_i \in \Omega X$ und Komplementen $X \setminus K_j$ kompakt-saturierter Mengen $K_j \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}} X$ bestehen. Sei also $K \subseteq \bigcup_i O_i \cup \bigcup_j (X \setminus K_j)$; dies läßt sich zu $K \subseteq \bigcup_i O_i \cup \big(X \setminus \bigcap_j K_j\big)$ umformen.

Es muß $K \cap \bigcap_j K_j \subseteq \bigcup_i O_i$ gelten, andernfalls läge keine Überdeckung vor. Der Kohärenz wegen können wir o. B. d. A. $\{K \cap K_j\}_j$ als gefiltert annehmen. Nach Korollar 1.12 liegt dann ein $K \cap K_{j_0}$ ganz in $\bigcup_i O_i$ bzw. wird davon überdeckt. Somit reichen schon endlich viele Mengen $O_{i_1}, \ldots, O_{i_n}$ aus, um die kompakte Menge $K \cap K_{j_0}$ zu überdecken. Folglich wird K von $(X \setminus K_{j_0}) \cup O_{i_1} \cup \cdots \cup O_{i_n}$ überdeckt, und K ist somit patch-kompakt. ∎

1.6 Angereicherte Kategorien

In vielen natürlich vorkommenden Kategorien tragen die Hom-Mengen eine zusätzliche Struktur; die Kategorien sind angereichert. Wir benötigen nur den Spezialfall der Poset-angereicherten Kategorie und verzichten auf die allgemeine Definition (sie findet sich in [Bor94, 6.1, 6.2]), zumal schon die dafür notwendige Definition der monoidalen Kategorie sehr umfangreich ist.

Die Kategorie der geordneten Mengen zusammen mit den monotonen Abbildungen bezeichnen wir mit Poset. Eine (konkrete) Kategorie C heißt Poset-angereichert, wenn die Hom-Mengen $\mathsf{C}(A, B)$ geordnete Mengen, d. h. Objekte in Poset sind, und wenn die Komposition

$$\circ\colon \mathsf{C}(B,C) \times \mathsf{C}(A,B) \to \mathsf{C}(A,C)$$

für alle Objekte $A, B, C \in \mathsf{C}$ monoton, d. h. ein Morphismus in Poset ist. Ein Funktor $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ zwischen Poset-angereicherten Kategorien C und D heißt ein Poset-*Funktor*, wenn die Morphismen-Abbildungen

$$F_{A,B}\colon \mathsf{C}(A, B) \to \mathsf{D}(FA, FB)$$

für alle Objekte $A, B \in \mathsf{C}$ monoton sind.

Alle bisher betrachteten Kategorien geordneter Mengen — DCPO, Frame und Poset — sind Poset-angereicherte Kategorien. Die Funktionenräume tragen dabei jeweils die durch die Zielobjekte punktweise induzierte Ordnung. Da Morphismen in DCPO, Frame und Poset immer monoton sind, gilt dies auch für die Komposition: Denn gilt $f' \leq f$ in $[P \to Q]$ und $g' \leq g$ in $[Q \to R]$, so folgt

$$(g' \circ f')x = g'f'x \leq g'fx \leq gfx = (g \circ f)x$$

für alle $x \in P$. Also ist die Komposition monoton.

Auch Top ist Poset-angereichert. Die Ordnung auf den Hom-Mengen haben wir schon betrachtet; $[X \to Y]$ wurde so eingeführt. Damit die Komposition monoton ist, müssen wir nur nachweisen, daß jede stetige Abbildung monoton ist, die Monotonie der Komposition ergibt sich dann wie oben bei Poset.

Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, und sind $x, y \in X$ mit $x \sqsubseteq_X y$, dann gilt für die Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x) \subseteq \mathfrak{U}(y)$. Für die Monotonie müssen wir $\mathfrak{U}(fx) \subseteq \mathfrak{U}(fy)$ zeigen. Sei daher $O \in \mathfrak{O}(fx)$ eine offene Umgebung von fx. Der Stetigkeit von f wegen ist $f^{-1}[O]$ eine Umgebung von x, also auch von y. Das bedeutet aber gerade $fy \in O$, also $O \in \mathfrak{O}(fy)$ wie gewünscht.

Satz 1.18 *Die Funktoren* $\Omega\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Frame}$ *und* $\mathsf{pt}\colon \mathsf{Frame} \to \mathsf{Top}$ *sind* Poset-*Funktoren zwischen* Poset-*angereicherten Kategorien. Die natürliche Bijektion*

$$\psi_{X,F}\colon \mathsf{Top}(X, \mathsf{pt}\, F) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Frame}(F, \Omega X)$$

der Adjunktion ist ein Ordnungsisomorphismus für jedes $X \in \mathsf{Top}$ *und jedes* $F \in \mathsf{Frame}$.

Beweis: Wir betrachten einen allgemeineren Fall: Es seien P und Q geordnete Mengen und $f, g\colon P \to Q$ monotone Abbildungen, für die $f \leq g$ gelte. Definiert man $\mathfrak{E}P$ und $\mathfrak{E}Q$ als die Menge aller Endstücke von P bzw. Q, dann sind $f^{-1}[\cdot], g^{-1}[\cdot]\colon \mathfrak{E}Q \to \mathfrak{E}P$ monotone Abbildungen bzgl. der Inklusion. (Für jede Abbildung h ist $h^{-1}[\cdot]$ monoton bzgl. Inklusion. Ist h selbst monoton, dann läßt sich $h^{-1}[\cdot]$ auf Endstücke einschränken und co-einschränken.) Darüber hinaus gilt $f^{-1}[\cdot] \leq g^{-1}[\cdot]$, denn daß g größer als f ist, bedeutet nichts anderes, als daß mehr g-Bilder in einem vorgegebenem Endstück von Q liegen als f-Bilder.

Die Aussagen bleiben gültig, wenn man sich auf geeignete Teilmengen von $\mathfrak{E}P$ und $\mathfrak{E}Q$ einschränkt.

Dies findet nun Anwendung auf Ω und pt: Stetige Abbildungen und Frame-Morphismen sind monoton und ihre Ω- bzw. pt-Bilder werden über Urbilder von Endstücken (offene Mengen bzw. vollständig prime Filter) definiert. Es bleibt zu zeigen, daß die Inklusion von Endstücken die jeweils gewünschte Ordnung liefert. Bei Ω ist dies klar, denn die Inklusion offener Mengen *ist* die Ordnung im Frame ΩX. Seien umgekehrt $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ abstrakte Punkte des Frames F. Es ist $\mathcal{F}$ genau dann in $\mathcal{G}$ enthalten, wenn jedes $o \in F$, das in $\mathcal{F}$ liegt, auch in $\mathcal{G}$ liegt. Dies ist gleichbedeutend damit, daß jede offene Menge O_o von $\mathsf{pt}\,F$, die $\mathcal{F}$ enthält, auch $\mathcal{G}$ enthält. Also liegt $\mathcal{F}$ bzgl. $\sqsubseteq_{\mathsf{pt}\,F}$ genau dann unterhalb von $\mathcal{G}$, wenn $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ gilt.

Damit der erste Teil der Behauptung gezeigt: Ω und pt sind Poset-Funktoren.

Die natürliche Bijektion $\psi_{X,F}$ ist durch $f \mapsto \Omega f \circ \varepsilon_F$ gegeben, die Umkehrung $\psi^{-1}_{X,F}$ durch $\varphi \mapsto \mathsf{pt}\,\varphi \circ \eta_X$. Da nach dem ersten Teil Ω und pt Poset-Funktoren sind, sind Ωf und

Frame	Top	Top	Frame
$\begin{tikzcd} \Omega\,\mathsf{pt}\,F \arrow[d, dashed, "\Omega f"'] & F \arrow[l, "\varepsilon_F"'] \arrow[dl, "\forall\varphi"] \\ \Omega X & \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \mathsf{pt}\,F \\ X \arrow[u, dashed, "\exists! f"'] \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\forall f"'] & \mathsf{pt}\,\Omega X \arrow[d, dashed, "\mathsf{pt}\,\varphi"] \\ & \mathsf{pt}\,F \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \Omega X \\ F \arrow[u, dashed, "\exists!\varphi"'] \end{tikzcd}$

$\mathsf{pt}\,\varphi$ monoton, und die Kompositionen sind monoton, denn Top und Frame sind Poset-Kategorien. Folglich sind $\psi_{X,F}$ und $\psi^{-1}_{X,F}$ monotone Bijektionen, also zueinander inverse Ordnungsisomorphismen. ■

Korollar 1.19 *Seien X und Y zwei T_0-Räume. Ist Y nüchtern, dann sind $\mathsf{Top}(X,Y)$ und $\mathsf{Frame}(\Omega Y, \Omega X)$ ordnungsisomorph.*

Seien F und G Frames. Ist G spatial, dann sind $\mathsf{Frame}(F,G)$ und $\mathsf{Top}(\mathsf{pt}\,G, \mathsf{pt}\,F)$ ordnungsisomorph.

Beweis: Nach Satz 1.18 sind $\mathsf{Top}(X, \mathsf{pt}\,\Omega Y)$ und $\mathsf{Frame}(\Omega Y, \Omega X)$ ordnungisomorph, und die Zuordnung

$$(f\colon X \to Y) \ \mapsto\ (\eta_Y \circ f\colon X \to \mathsf{pt}\,\Omega Y)$$

ist ein Ordnungsisomorphismus, denn η_Y ist ein Isomorphismus. ■

2 Rechts-Kan-Räume

In seiner grundlegenden Arbeit [Sco72] hat D. S. Scott gezeigt, daß die injektiven T_0-Räume eine ordnungstheoretische Charakterisierung erlauben. Es handelt sich bei ihnen genau um die stetigen Verbände mit der Scott-Topologie.

Scotts elementarer Beweis wurde kürzlich von M. H. Escardó in einen abstrakten Rahmen übertragen [Esc97]. Dabei tauchte auch der Begriff des Rechts-Kan-Raumes auf, der dadurch entsteht, daß man den aus der Kategorientheorie bekannten Begriff der (Rechts-)Kan-Erweiterung von Funktoren auf geordnete Mengen (aufgefaßt als Kategorien) spezialisiert und dann zu Poset-angereicherten Kategorien verallgemeinert.

M. H. Escardó konnte zeigen, daß jeder injektive T_0-Raum auch ein Rechts-Kan-Raum ist (dies steht implizit schon in [Sco72]), und fragte sich, ob auch die Umkehrung zuträfe. Eine Antwort auf diese Frage konnte er jedoch nicht geben.

Im folgenden werden wir das Problem dadurch lösen, daß wir für die Rechts-Kan-Räume eine *interne Charakterisierung* angeben. Mit dieser läßt sich die Klasse der Rechts-Kan-Räume recht gut überblicken. Insbesondere können wir zeigen, daß sie die injektiven T_0-Räume echt umfaßt.

Bevor wir uns dieser Charakterisierung widmen, betrachten wir jedoch die von ihrer Definition her einfacheren injektiven T_0-Räume. Dies wird auch den Bezug zu den stetigen Verbänden klären.

2.1 Injektive Räume

Gegeben sei eine Kategorie C, und $\mathcal{M}$ sei die Klasse der Monomorphismen von C. Ein Objekt I heißt *injektiv*, wenn sich jeder Morphismus $f\colon X \to I$ entlang jedes Morphismus

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, tail, "j \in \mathcal{M}"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, dashed, "\hat{f}"] \\ & I & \end{tikzcd} \tag{1}$$

$j\colon X \to Y$ aus $\mathcal{M}$ zu einem Morphismus $\hat{f}\colon Y \to I$ fortsetzen läßt, d. h. wenn es ein $\hat{f}$ gibt, so daß $f = \hat{f} \circ j$ gilt [Mac71, p. 114]. Der Morphismus $\hat{f}$ heißt auch eine *Fortsetzung von f entlang j*; er braucht nicht eindeutig zu sein.

Nimmt man statt $\mathcal{M}$ eine andere Klasse $\mathcal{J}$ von Morphismen — üblicherweise eine Teilklasse von $\mathcal{M}$ —, so gelangt zu dem Begriff des $\mathcal{J}$-injektiven Objekts: obiges Diagramm muß sich für alle $j \in \mathcal{J}$ schließen. Diese Modifikation des Begriffs hat ihren Grund, denn man sieht leicht, daß in Top die $\mathcal{M}$-injektiven Objekte genau die einpunktigen Räume sind: Angenommen I wäre ein $\mathcal{M}$-injektiver T_0-Raum und $s, t \in I$ verschiedene Elemente. Dann gibt es eine offene Menge $U \in \Omega I$, die s und t trennt; o. B. d. A. enthalte U das Element s. Für jeden beliebigen T_0-Raum Y und jede beliebige Teilmenge $A \subseteq Y$ läßt sich damit eine stetige „charakteristische Funktion" $\chi_A\colon \Delta Y \to I$ durch

$$\chi_A(y) := \begin{cases} s & \text{falls } y \in A \\ t & \text{sonst} \end{cases}$$

definieren. Die stetige Fortsetzung $\widehat{\chi_A}$ von χ_A entlang der Identität $\iota\colon \Delta Y \to Y$ unterscheidet sich (auf Elementen) nicht von χ_A. Das Urbild der offenen Menge U unter $\widehat{\chi_A}$, d. h.

$$\begin{tikzcd} \Delta Y \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\chi_A"'] & & Y \arrow[dl, dashed, "\widehat{\chi_A}"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

A muß daher offen sein. Da dies für alle A und alle Y gelten müßte, wäre unter obiger Annahme *jeder* Raum diskret. Aber das ist absurd.

D. S. Scott bewies in dem oben angegebenen Artikel, daß die $\mathcal{J}$-injektiven Objekte in Top genau die stetigen Verbände (versehen mit der Scott-Topologie) sind, wenn man für $\mathcal{J}$ die Klasse aller Einbettungen wählt. Ein überraschendes Zusammenfließen von Topologie und Ordnungstheorie. Damit hat er die *externe* Definition, d. h. eine Definition, die neben dem betrachteten Raum auch noch andere Räume und Morphismen benötigt, in eine *interne* Charakterisierung verwandelt, also in ein Kriterium, das „mit Bordmitteln“ entschieden werden kann, ohne Rückgriff auf andere Objekte.

Wir wiederholen an dieser Stelle Scotts Satz und skizzieren den Beweis. Es bezeichne $\mathcal{E}$ die Klasse aller Einbettungen und $\mathcal{E}_d$ die Klasse aller Einbettungen mit dichtem Bild in der Kategorie Top.

Satz 2.1 *Die $\mathcal{E}$-injektiven Räume in* Top *sind gerade die stetigen Verbände (versehen mit der Scott-Topologie) und die $\mathcal{E}_d$-injektiven Räume sind gerade die stetigen Halbverbände (mit der Scott-Topologie).*

Beweis (Skizze): Scotts Beweis verläuft entlang der folgenden Linie:

1. Der Sierpinski-Raum S ist $\mathcal{E}$-injektiv. — Dies ist einfach zu sehen, denn eine stetige Abbildung $X \to \mathsf{S}$ ist nichts anderes als die charakteristische Funktion einer offenen Menge.

2. Produkte und Retrakte von $\mathcal{E}$-injektiven Räumen sind $\mathcal{E}$-injektiv. — Allgemeiner Abstrakter Unsinn.

3. Jeder T_0-Raum X läßt sich in einen $\mathcal{E}$-injektiven Raum einbetten, nämlich das ΩX-fache Produkt $\mathsf{S}^{\Omega X}$. — Die Einbettung der Wahl ist $x \mapsto \mathfrak{O}(x)$, wobei man in naheliegender Weise $\mathsf{S}^{\Omega X}$ mit $\mathfrak{P}(\Omega X)$ identifiziert.

4. Ein Raum ist genau dann $\mathcal{E}$-injektiv, wenn er Retrakt jedes Raumes ist, dessen Unterraum er ist. — Allgemeiner Abstrakter Unsinn. Damit sind die $\mathcal{E}$-injektiven Räume genau die Retrakte von Potenzen des Sierpinski-Raumes S.

5. Der Sierpinski-Raum S ist ein stetiger Verband. — Trivial.

6. Produkte und Retrakte von stetigen Verbänden sind stetige Verbände. — Nicht trivial. Damit Produkte wieder stetige Verbände werden, muß die Scott-Topologie auf dem Produkt gleich der Produkttopologie sein, was im allgemeinen falsch ist.

7. Jeder stetige Verband ist $\mathcal{E}$-injektiv. — Man kann eine Fortsetzung von $f\colon X \to L$ entlang einer Einbettung $j\colon X \to Y$ direkt angeben: Die Funktion $\hat{f}\colon Y \to L$ mit

$$\hat{f}(y) := \bigvee_{O \in \mathfrak{O}(y)} \bigwedge f[j^{-1}[O]]$$

ist eine stetige Fortsetzung von f; sie ist unter allen möglichen Fortsetzungen sogar die größte.

Den Beweis der Behauptung über stetige Halbverbände findet sich noch nicht in [Sco72]. Wir vertagen ihn an dieser Stelle, da er sich später aus der komplizierteren analogen Behauptung für Rechts-Kan-Räume ergeben wird (vgl. Bemerkung 2.10). ■

Wegen obiger Beobachtung werden die $\mathcal{E}$-injektiven Objekte von Top auch *injektive* T_0-*Räume* genannt.

2.2 Rechts-Kan-Räume

Anstatt die Klasse der für j in Diagramm (1) erlaubten Morphismen von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{J}$ einzuschränken, kann man auch die Fortsetzungseigenschaft abschwächen. Für Rechts-Kan-Räume verlangt man lediglich, daß $\hat{f}$ die Ungleichung $f \geq \hat{f} \circ j$ erfüllen muß; Gleichheit wird nicht mehr verlangt. Da dann aber die konstante $\perp$-Funktion $c_\perp$ (sofern $\perp$ existiert) immer ein Kandidat für $\hat{f}$ wäre — der kleinste —, soll die Erweiterung auch noch die größte unter allen möglichen sein.

Definition Sind $f\colon X \to D$ und $j\colon X \to Y$ Morphismen in Top, so heißt $f/j \in \mathsf{Top}(Y, D)$ die *Rechts-Kan-Erweiterung* von f *entlang* j, falls die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Komposition $(f/j) \circ j$ liegt in $[X \to D]$ unter f.

2. Ist $g \in \mathsf{Top}(Y, Z)$ eine weitere Funktion mit $g \circ j \leq f$, so folgt bereits $g \leq f/j$, d. h. f/j ist die größte solche Erweiterung.

Ist $\mathcal{J}$ eine Klasse von Morphismen in Top, so heißt ein T_0-Raum D ein *Rechts-Kan-Raum*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\geq"] & Y \arrow[dl, dashed, "f/j"] \\ & D & \end{tikzcd} \tag{2}$$

über $\mathcal{J}$ oder kurz $\mathcal{J}$-Rechts-Kan-Raum, falls jeder Morphismus f nach D eine Rechts-Kan-Erweiterung entlang jedem $j \in \mathcal{J}$ mit $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} j$ besitzt.

Die allgemeine Definition der Rechts-Kan-Erweiterungen von Funktoren zwischen Kategorien findet sich in [Mac71, Chap. X, §3]; die Spezialisierung auf geordnete Mengen und anschließende Verallgemeinerung zu Poset-angereicherten Kategorien in [Esc97].

Es ist klar, daß jeder stetige Verband ein $\mathcal{E}$-Rechts-Kan-Raum und jeder stetige Halbverband ein $\mathcal{E}_d$-Rechts-Kan-Raum ist, da Scotts Formel (Punkt 7 im Beweis von Satz 2.1) die größte Erweiterung liefert. Setzt man jedoch $\mathcal{A}$ als die Klasse aller Morphismen und $\mathcal{A}_d$ als die Klasse aller Morphismen mit dichtem Bild in Top, so ist nicht offensichtlich, daß die stetigen Verbände und Halbverbände allesamt $\mathcal{A}$- bzw. $\mathcal{A}_d$-Rechts-Kan-Räume sind. Indem er den ersten Teil von Scotts Beweis übertrug, konnte M. H. Escardó dies zeigen. (Der Sierpinski-Raum S ist ein $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Raum, ebenso Produkte und Retrakte von $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Räumen.)

Einen alternativen Beweis dafür, daß jeder injektive T_0-Raum ein $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Ram ist, wird die interne Charakterisierung liefern.

$\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Räume sind immer vollständige Verbände in ihrer Spezialisierungsordnung [Esc97, Bemerkung nach Prop. 2.3.1], und ihre Topologie ist immer gröber als die Scott-Topologie (mündliche Mitteilung von M. H. Escardó). Auf einen Beweis der zweiten Behauptung verzichten wir an dieser Stelle, da sich im Rahmen der Charakterisierung von Rechts-Kan-Räumen ein Beweis dafür ergeben wird, der einfacher als der ursprüngliche ist.

Proposition 2.2 *Ist D ein $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Raum, so ist $(D, \sqsubseteq_D)$ ein vollständiger Verband.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, daß in $(D, \sqsubseteq_D)$ jede Teilmenge $X \subseteq D$ ein Infimum besitzt. Für die Menge $X \subseteq D$ sei $e\colon X \hookrightarrow D$ die Teilraum-Einbettung und $!\colon X \to \mathbf{1}$ der eindeutige

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "!"] \arrow[dr, hook, "e"'] & \arrow[d, phantom, "\geq"] & \mathbf{1} \arrow[dl, dashed, "e/!"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

Morphismus in das terminale Objekt $\mathbf{1} = \{*\}$. Ein Morphismus $d\colon \mathbf{1} \to D$ ist nichts anderes als ein Element von D; daran ändert auch die Komposition mit ! nichts. Folglich ist die Rechts-Kan-Erweiterung $e/!$ (bzw. $(e/!)(*)$) das größte Element in D, so daß für alle $x \in X$ die Ungleichung

$$x = ex \geq \big((e/!)\circ !\big)x = (e/!)(*)$$

gilt. Also ist $(e/!)(*) = \bigsqcap X$ das Infimum von X, dessen Existenz zu zeigen war. ∎

2.3 Interne Charakterisierung der Rechts-Kan-Räume

In gewisser Weise ist es irreführend, von $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Räumen, d. h. von Rechts-Kan-Räumen über *stetigen* Funktionen zu sprechen. Obwohl Rechts-Kan-Räume mit Hilfe von Dreiecken

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "\geq"] & Y \arrow[dl, dashed, "f/j"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

definiert wurden, handelt es sich in Wirklichkeit um eine Bedingung an den Funktionenraum $[Y \to D]$. Dies liegt daran, daß *beliebige* Abbildungen f und j stetig werden, sofern man X durch den diskreten Raum ΔX ersetzt.

Diese Beobachtung liefert in präzisierter Form zusammen mit Proposition 2.2 eine erste Charakterisierung der Rechts-Kan-Räume:

Lemma 2.3 *Ein T_0-Raum D ist genau dann ein $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Raum, wenn $(D, \sqsubseteq_D)$ ein vollständiger Verband ist und wenn es für jeden anderen T_0-Raum Y unter jeder beliebigen Abbildung $\beta\colon Y \to D$ eine größte stetige Abbildung $f\colon Y \to D$ gibt.*

Beweis: Ist D ein $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Raum, so folgt der erste Teil der Behauptung mittels Proposition 2.2.

Ist desweiteren $\beta\colon Y \to D$ eine beliebige Abbildung, so ist $\beta\colon \Delta Y \to D$ eine stetige Abbildung, die zusammen mit der identischen Abbildung $\iota\colon \Delta Y \to Y$ die Ausgangslage für

$$\begin{tikzcd}
\Delta Y \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\beta"'] & \arrow[d, phantom, "\geq"] & Y \arrow[dl, dashed, "\beta/\iota"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

die Rechts-Kan-Bedingung (Diagramm (2)) liefert. Die größte stetige Funktion von Y nach D unterhalb β ist dann gerade durch β/ι gegeben.

Gibt es umgekehrt unter jedem $\beta \in \mathsf{Set}(Y, D)$ eine größte stetige Funktion, so ergibt sich f/j für stetige Funktionen $f\colon X \to D$ und $j\colon X \to Y$ als die größte stetige Funktion unterhalb eines geeigneten β.

Eine stetige Funktion g erfüllt genau dann $g \circ j \leq f$, wenn für alle $x \in X$ die Ungleichung $gy \leq fx$ mit $y := jx$ gilt. Für festes $y \in j[X]$ ist damit gy eine untere Schranke von $f\big[j^{-1}[\{y\}]\big]$. Also gilt für g genau dann die Ungleichung $g \circ j \leq f$, wenn g unter der Funktion

$$\begin{aligned}
\beta\colon\ & Y \to D \\
& y \mapsto \bigsqcap f\big[j^{-1}[\{y\}]\big]
\end{aligned}$$

liegt. (Da $(D, \sqsubseteq_D)$ ein vollständiger Verband ist, ist β definiert. Für $y \in Y \setminus j[X]$ ist $\beta y = \bigsqcap \emptyset$ das größte Element von $(D, \sqsubseteq_D)$, d. h. für solche y stellt β keine Bedingung an g.) Damit ist die Rechts-Kan-Erweiterung f/j gerade die größte stetige Funktion unter β. ■

Diese erste Charakterisierung ist noch zu unhandlich, da sie mit Abbildungen operiert, die keine Morphismen sind, aber sie liefert den Schlüssel zum zentralen Resultat (Satz 2.4).

Satz 2.4 *Es sei D ein T_0-Raum. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *D ist ein $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Raum.*

2. *Für jeden T_0-Raum Y ist $[Y \to D]$ ein vollständiger Verband, in dem das punktweise gebildete Supremum stetiger Funktionen existiert und stetig ist.*

   Insbesondere ist also das Supremum einer Familie stetiger Funktionen $\{f_i\}_{i\in I}$ gegeben durch das punktweise berechnete Supremum: $(\bigvee_{i\in I} f_i)y = \bigsqcup_{i\in I} f_i y$.

3. *$(D, \sqsubseteq_D)$ ist ein vollständiger Verband, und für jede Indexmenge I ist die I-stellige Supremumsoperation $\bigsqcup_{i\in I}\colon \prod_{i\in I} D \to D$ topologisch stetig.*

4. *$(D, \sqsubseteq_D)$ ist ein vollständiger Verband, die binäre Supremumsoperation $\sqcup\colon D\times D \to D$ ist topologisch stetig, und jede offene Menge ist Scott-offen: $\Omega D \subseteq \sigma(D, \sqsubseteq_D)$.*

BEWEIS: (1) $\Rightarrow$ (2) Sei F eine (möglicherweise leere) Teilmenge von $[Y \to D]$. Das punktweise gebildete Supremum β von F existiert, denn $(D, \sqsubseteq_D)$ ist ein vollständiger Verband nach Proposition 2.2. Jede andere obere Schranke (stetig oder nicht) von F muß oberhalb von β liegen; es reicht daher die Stetigkeit von β nachzuweisen. Nach Lemma 2.3 gibt es eine größte stetige Funktion f unterhalb β. Dieses f ist eine obere Schranke von F, muß also gleich β sein.

(2) $\Rightarrow$ (3) Die Vollständigkeit von $(D, \sqsubseteq_D)$ ergibt sich aus der Isomorphie $[\mathbf{1} \to D] \cong (D, \sqsubseteq_D)$. Die I-stellige Supremumsoperation $\bigsqcup_{i\in I}\colon \prod_{i\in I} D \to D$ ist das punktweise berechnete Supremum der (stetigen) kanonischen Projektionen $\pi_i\colon \prod_{i\in I} D \to D$. Also ist sie topologisch stetig nach Voraussetzung.

(3) $\Rightarrow$ (4) Es bleibt lediglich zu zeigen, daß jede offene Menge Scott-offen ist. Sei daher $O \in \Omega D$ eine offene Menge und $\bigsqcup_{i\in I} x_i \in O$. Aus der topologischen Stetigkeit von $\bigsqcup$ folgt die Existenz einer basis-offenen Umgebung V von $\langle x_i \mid i \in I\rangle$ in $\prod_{i\in I} D$, die $\bigsqcup V := \left\{ \bigsqcup_{i\in I} z_i \;\middle|\; \langle z_i \mid i \in I\rangle \in V\right\} \subseteq O$ erfüllt.

Die Menge V ist das kartesische Produkt offener Mengen, die bis auf eine endliche Indexmenge $I_0 \subseteq I$ allesamt D sind. Folglich liegt $\langle y_i \mid i \in I\rangle$ mit

$$y_i := \begin{cases} x_i & \text{falls } i \in I_0 \\ \bot_D & \text{sonst} \end{cases}$$

ebenfalls in V. Damit haben wir

$$\bigsqcup_{i\in I_0} x_i = \bigsqcup_{i\in I} y_i \in \bigsqcup V \subseteq O,$$

also ist O Scott-offen.

(4) $\Rightarrow$ (1) Nach Lemma 2.3 muß nur gezeigt werden, daß es zu einer vorgegebenen beliebigen Funktion $\beta\colon Y \to D$ eine größte stetige Funktion darunter gibt. Sei $\hat{f}$ das punktweise gebildete Supremum der Menge $F := \left\{ f \in [Y \to D] \;\middle|\; f \leq \beta\right\}$. Falls $\hat{f}$ stetig ist, so ist es nach Konstruktion offensichtlich die gesuchte Funktion. Die Stetigkeit von $\hat{f}$ ergibt sich aus Lemma 1.1, sofern F gerichtet ist. Sind aber $f_1, f_2 \in F$ Funktionen, so ist ihr punktweise gebildetes Supremum darstellbar als die Komposition stetiger Funktionen:

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\langle f_1, f_2\rangle} & D\times D & \xrightarrow{\quad\sqcup\quad} & D \\ y & \longmapsto & \langle f_1 y, f_2 y\rangle & \longmapsto & f_1 y \sqcup f_2 y \end{array}$$

Also ist das punktweise berechnete Supremum zweier Funktionen aus F stetig und folglich wieder aus F, d. h. F ist gerichtet. Damit ist alles gezeigt. ∎

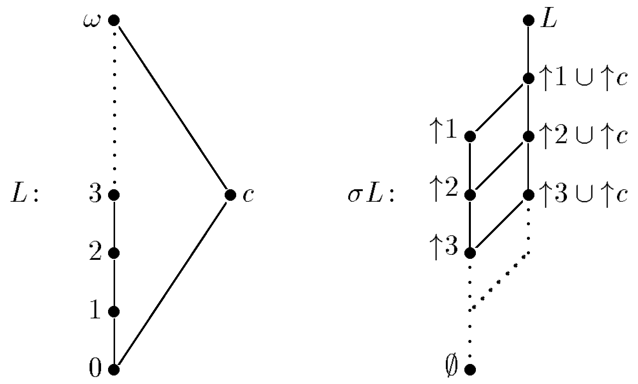
Korollar 2.5 *Ist L ein vollständiger Verband, dessen Scott-Topologie σL ein stetigen Verband ist, dann ist $(L, \sigma L)$ ein $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Raum. Insbesondere sind die injektiven T_0-Räume immer $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Räume.*

Beweis: Wenn σL stetig ist, so ist die binäre Supremumsbildung topologisch stetig nach Korollar 1.5.

Die injektiven Räume sind genau die stetigen Verbände versehen mit der Scott-Topologie; stetige Bereiche sind aber lokalkompakt, also ist ihre Topologie ein stetiger Verband. ∎

Dieses erste Korollar liefert einen alternativen Beweis für die Tatsache, daß die injektiven Räume stets $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Räume sind. Es erlaubt uns aber auch, ein erstes Beispiel eines $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Raumes anzugeben, der nicht injektiv ist. Die Begriffe *injektiver Raum* und *$\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Raum* fallen also nicht zusammen; damit ist die Frage nach der Gleichheit beider Klassen negativ beantwortet.

Beispiel Sei $(L, \leq)$ der unten skizzierte Verband, d. h. die Ordinalzahl $\omega+1 = \{0, 1, \ldots, \omega\}$ disjunkt vereinigt mit einem Element c, wobei $0 < c < \omega$ die einzigen neuen Ungleichungen seien. Der Verband L ist ein minimales Beispiel für einen nicht stetigen Verband (endliche



Verbände sind algebraisch!), denn $\twoheaddownarrow c = \{0\}$ reicht nicht aus, um c als Supremum zu erhalten. Die Scott-Topologie von L ist sogar algebraisch, denn jedes Element aus σL ist kompakt, da es keine unendlichen aufsteigenden Ketten gibt. Somit ist $(L, \sigma L)$ ein $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Raum nach Korollar 2.5.

Korollar 2.6 *Ist $(L, \leq)$ ein vollständiger Verband, dann ist $(L, \ell L)$, d. h. L versehen mit der unteren Topologie, ein $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Raum.*

Beweis: Es muß nur gezeigt werden, daß $\vee\colon L \times L \to L$ topologisch stetig ist. Eine beliebige subbasis-abgeschlossene Menge von ℓL ist von der Form $\downarrow x$. Das Urbild unter $\vee$ ist gerade $\downarrow x \times \downarrow x$, also eine in der Produkttopologie abgeschlossene Menge. ∎

Zwar kommen damit in der Klasse der Rechts-Kan-Räume auch unstetige Verbände vor und solche, die nicht die kanonische (Scott-)Topologie tragen, aber wie das nächste Korollar zeigt, sind Rechts-Kan-Räume wenigstens noch nüchtern. Der Beweis des dafür benötigten Lemmas findet sich in [GHK+80, Prop. II-1.11 (iii)]; wir geben ihn hier wieder, weil er recht instruktiv ist.

Lemma 2.7 *Sei L ein vollständiger Verband, versehen mit einer Topologie ΩL, die gröber als die Scott-Topologie auf L ist: $\Omega L \subseteq \sigma L$. Dann ist $(L, \Omega L)$ ein nüchterner Raum, falls die binäre Supremumsoperation $\vee\colon L \times L \to L$ topologisch stetig ist.*

Beweis: Wegen Proposition 1.9 ist es hinreichend zu zeigen, daß es für jede $\cup$-irreduzible abgeschlossene Menge $A \subseteq L$ ein $a \in A$ gefunden werden kann, so daß A der Punktabschluß von a ist. Sei A eine solche Menge, dann ist $\bigvee A$ der einzige Kandidat für a. Da A Scott-abgeschlossen ist, liegt $\bigvee A$ genau dann in A, wenn A gerichtet ist. Wir müssen also nur die Gerichtetheit von A nachweisen.

Angenommen, dem wäre nicht so. Dann gäbe es $x, y \in A$ mit $x \vee y \in O := L \setminus A$. Aus der topologischen Stetigkeit von $\vee$ würde die Existenz offener Umgebungen V, W von x bzw. y folgen, für die $V \vee W \subseteq O$ erfüllt wäre.

Allgemein gilt $V \vee W = V \cap W$. (Denn ist $u \in V \cap W$, so ist auch $u = u \vee u \in V \vee W$, und umgekehrt liegt $v \vee w$ oberhalb von v und w, womit die Behauptung aus der Tatsache folgt, daß V und W obere Mengen sind.) Damit wären aber $V \cap A$ und $W \cap A$ disjunkt und nicht-leer ($x \in V$, $y \in W$!). Folglich wäre A die Vereinigung der abgeschlossenen echten Teilmengen $A \setminus V$ und $A \setminus W$, im Widerspruch zur $\cup$-Irreduzibilität von A. ∎

Korollar 2.8 *Rechts-Kan-Räume sind nüchtern.*

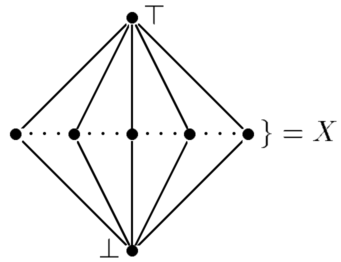
Beweis: Lemma 2.7 und Satz 2.4 (4). ∎

Die Bedingung $\Omega L \subseteq \sigma L$ in Lemma 2.7 stellt keine wirkliche Einschränkung dar, denn sie ist eine Folge der Nüchternheit (Proposition 1.10). Die Umkehrung des Lemmas gilt nicht: J. R. Isbell hat einen vollständigen Verband konstruiert, der zwar in seiner Scott-Topologie nüchtern ist, dessen Supremumsbildung jedoch nicht topologisch stetig ist [Isb85]. Damit haben wir ein Beispiel eines Raumes, der kein $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Raum ist.

Wir haben gesehen, daß Rechts-Kan-Räume keine stetigen Verbände zu sein brauchen und daß sie nicht unbedingt die Scott-Topologie tragen. Die folgende Klasse von Beispielen — die dem in der Verbandstheorie benutzten Verband M_n nachempfunden ist — bezeugt darüber hinaus, daß nicht einmal die Topologie stetig sein muß.

Beispiel Sei X ein beliebiger T_0-Raum. Der Verband M_X entstehe aus X, indem man die Elemente von X als Anti-Kette anordnet und mit einem zusätzlichen größten ($\top$) und kleinsten ($\perp$) Element versieht. Dies macht M_X zu einem algebraischen Verband.

M_X:



Als Topologie auf M_X wählt man die von allen Mengen der Form $O \cup \{\top\}$ mit $O \in \Omega X \setminus \{\emptyset\}$ erzeugte Topologie. Nach Konstruktion ist dabei die Menge $\{\top\}$ genau dann offen, wenn ΩX wenigstens zwei disjunkte, nicht-leere Mengen enthält.

Die Topologie ΩM_X auf M_X ist offensichtlich gröber als die Scott-Topologie auf M_X. Gleichheit liegt genau dann vor, wenn X der diskrete topologische Raum ΔX ist. Der

Verband ΩM_X ist genau dann stetig, wenn dies ΩX ist, denn er entsteht aus letzterem durch Anfügen eines neuen größten Elementes (M_X) und eventuell eines neuen zweitkleinsten Elementes (wenn $\{\top\}$ offen ist, schiebt es sich zwischen $\emptyset$ und allen anderen bestehenden offenen Mengen), die beide kompakt sind.

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß X ein Hausdorff-Raum ist, zeigen wir, daß M_X ein $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Raum ist. Für einen nicht lokalkompakten Hausdorff-Raum ist ΩX nicht stetig (Satz 1.13), nach obiger Überlegung gilt Gleiches für ΩM_X. Wir haben damit ein Beispiel eines Rechts-Kan-Raumes, dessen Topologie kein stetiger Verband ist.

Sei also X ein T_2-Raum und $U \in \Omega M_X$ eine offene Menge, die $a \vee b$ für zwei $a, b \in M_X$ enthält. Ist a oder b Element von U, dann ist $U \times M_X$ bzw. $M_X \times U$ eine Umgebung von $\langle a, b\rangle$, die von $\vee$ ganz in U abgebildet wird. Liegen andererseits a und b nicht in U, dann müssen beide von $\perp$ und $\top$ verschieden sein, d. h. sie liegen in X. Dann gibt es aber disjunkte offene Mengen $O_a, O_b \in \Omega X$, so daß die in M_X offenen Mengen $O_a \cup \{\top\}$ und $O_b \cup \{\top\}$ Umgebungen von a bzw. b in M_X sind. Ihr Produkt $\big(O_a \cup \{\top\}\big) \times \big(O_b \cup \{\top\}\big)$ wird von $\vee$ ganz in $\{\top\} \subseteq U$ abgebildet. Also ist $\vee$ im Punkt $\langle a, b\rangle$ stetig.

Im Lichte von Korollar 2.8 und Proposition 1.10 kann man die Bedingung $\Omega D \subseteq \sigma(D, \sqsubseteq_D)$ von Satz 2.4 (4) ohne Einschränkung durch Nüchternheit ersetzen. Die $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Räume sind daher genau die nüchternen Räume D, die in ihrer Spezialisierungsordnung $\sqsubseteq_D$ vollständig sind und eine stetige binäre Supremumsoperation $\sqcup_D$ zulassen.

2.4 Rechts-Kan-Räume über stetigen Funktionen mit dichtem Bild

In Erweiterung der Bezeichnung $P^\top$ für geordnete Mengen P vor Proposition 1.6 bezeichnen wir mit $X^\top$ den topologischen Raum, der aus X durch Hinzunahme eines neuen größten Elements $\infty \notin X$ entsteht, so daß $\{\infty\}$ offen ist. Genauer: Sei ∞ ein neues Element, dann ist $X^\top$ der topologische Raum mit der Trägermenge $X \cup \{\infty\}$ und der Topologie $\Omega X^\top = \big\{O \cup \{\infty\} \bigm| O \in \Omega X\big\} \cup \{\emptyset\}$.

Insbesondere ist also ∞ das größte Element von $(X^\top, \sqsubseteq_{X^\top})$, und $\{\infty\}$ ist offen. Die Inklusionsabbildung $X \hookrightarrow X^\top$ ist sogar eine topologische Einbettung.

Wir erinnern uns, daß wir mit $\mathcal{A}$ die Klasse aller Morphismen in Top und mit $\mathcal{A}_d$ die Klasse aller solcher Morphismen mit dichtem Bild bezeichnet hatten.

Proposition 2.9 *Ein T_0-Raum D ist genau dann ein $\mathcal{A}_d$-Rechts-Kan-Raum, wenn $D^\top$ ein $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Raum ist.*

Beweis: Sei $D^\top$ ein $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Raum. Für eine beliebige stetige Funktion $f\colon X \to D$ suchen wir die Rechts-Kan-Erweiterung $f/j\colon Y \to D$ entlang der stetigen Funktion $j\colon X \to Y$, wobei $j[X]$ dicht in Y liege. Bezeichne $f'\colon X \to D^\top$ die Co-Fortsetzung von f. Sie ist

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rr, "j"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & & Y \arrow[dl, dashed, "f'/j"'] \arrow[dr, dashed, "\tilde{f} = f/j"] & \\
D \arrow[rr, hook] & & D^\top \arrow[u, phantom, "\geq"] & & D \arrow[ll, hook']
\end{tikzcd}$$

stetig, denn D ist ein Teilraum von $D^\top$, und besitzt daher eine Rechts-Kan-Erweiterung

f'/j. Da D abgeschlossen in $D^\top$ ist, gilt dies auch für das Urbild $(f'/j)^{-1}[D]$ in Y. Das Bild von X unter j liegt ganz in $(f'/j)^{-1}[D]$, da sonst für ein $x \in X$ im Widerspruch zur Erweiterungseigenschaft $\top = \big((f'/j) \circ j\big)x > f'x = fx \in D$ gälte. Weil $j[X]$ aber dicht in Y liegt, folgt, daß die abgeschlossene Menge $(f'/j)^{-1}[D]$ bereits ganz Y ist. Also läßt sich f'/j im Bild auf D einschränken; diese Co-Restriktion $\tilde{f}\colon Y \to D$ ist stetig, weil D ein Teilraum von $D^\top$ ist. Somit ist $\tilde{f}$ die gesuchte Funktion f/j, denn sie erfüllt die Eigenschaft $\tilde{f} \circ j \leq f$, und jedes anderen Kandidaten Co-Fortsetzung muß unter f'/j liegen.

Sei umgekehrt D ein Rechts-Kan-Raum über stetigen Funktionen mit dichtem Bild und $f\colon X \to D^\top$ und $j\colon X \to Y$ stetige Funktionen. Wir definieren $X' := f^{-1}[D]$ und $Y' := \operatorname{cl}\big(j[X']\big)$, und bezeichnen mit $f'\colon X' \to D$ und $j'\colon X' \to Y'$ die Restriktionen und Co-

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rrrr, "j"] \arrow[rrddd, "f"'] & & & & Y \arrow[llddd, dashed, "\tilde{f} = f/j"] \\
& X' \arrow[ul, hook] \arrow[rr, "j'"] \arrow[dr, "f'"'] & \arrow[d, phantom, "\geq"] & Y' \arrow[ur, hook'] \arrow[dl, dashed, "f'/j'"] & \\
& & D \arrow[d, hook] & & \\
& & D^\top & &
\end{tikzcd}
$$

Restriktionen von f bzw. j. Da j' ein dichtes Bild hat, existiert die Rechts-Kan-Erweiterung f'/j' von f' entlang j'. Wir definieren damit die Funktion $\tilde{f}\colon Y \to D^\top$ durch

$$
\tilde{f}(y) := \begin{cases} (f'/j')y & \text{falls } y \in Y' \\ \top & \text{sonst} \end{cases}.
$$

Es bleibt nachzuweisen, daß $\tilde{f}$ die gesuchte Erweiterung f/j ist.

Als erstes stellen wir fest, daß $\tilde{f}$ stetig ist: Ist A eine nicht-triviale abgeschlossene Teilmenge von $D^\top$, so gilt $\top \notin A$ und wegen der Stetigkeit von f'/j' ist somit $\tilde{f}^{-1}[A] = (f'/j')^{-1}[A]$ eine abgeschlossene Teilmenge von Y'. Da Y' ein Teilraum von Y ist, ist das Urbild von A in Y abgeschlossen. Folglich ist $\tilde{f}$ stetig.

Um die Bedingung $\tilde{f} \circ j \leq f$ nachzuprüfen, können wir uns auf $x \in X'$ beschränken, denn für alle anderen $x \in X$ gilt $fx = \top$ und nichts ist zu zeigen. Solche x erfüllen aber $(\tilde{f} \circ j)x = \big((f'/j') \circ j'\big)x \leq f'x = fx$ nach Konstruktion.

Sei nun $\tilde{g}\colon Y \to D^\top$ eine andere stetige Funktion mit $\tilde{g} \circ j \leq f$. Dann muß diese Ungleichung auch für die Einschränkung gelten, d. h. $\tilde{g}|_{Y'} \circ j' \leq f'$. Folglich liegt $\tilde{g}|_{Y'}$ unterhalb der Rechts-Kan-Erweiterung f'/j' und somit auf Y' unterhalb von $\tilde{f}$; überall sonst ist $\tilde{f}$ konstant $\top$. Demnach gilt $\tilde{g} \leq \tilde{f}$. ∎

Wir holen nun den ausgelassenen Beweis der zweiten Hälfte von Satz 2.1 nach.

Bemerkung 2.10 *Die stetigen Halbverbände sind genau die $\mathcal{E}_d$-injektiven T_0-Räume.*

Beweis: Im Beweis von Proposition 2.9 muß man nur in der Argumentation Ungleichungen durch Gleichungen ersetzen und erhält, daß L genau dann ein $\mathcal{E}_d$-injektiver T_0-Raum ist, wenn $L^\top$ ein $\mathcal{E}$-injektiver T_0-Raum ist. Mit Proposition 1.6 und der Charakterisierung der injektiven T_0-Räume (Satz 2.1) folgt dann die Behauptung. ∎

Korollar 2.11 *Ein T_0-Raum D ist genau dann ein $\mathcal{A}_d$-Rechts-Kan-Raum, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

1. *$(D, \sqsubseteq_D)$ ist ein vollständiger Halbverband.*
2. *Die Topologie ist gröber als die Scott-Topologie: $\Omega D \subseteq \sigma(D, \sqsubseteq_D)$.*
3. *Die Teilmenge $\operatorname{def} \sqcup$ von $D \times D$ ist abgeschlossen.*
4. *Die Abbildung $\sqcup\colon \operatorname{def} \sqcup \to D$ ist topologisch stetig, wenn man $\operatorname{def} \sqcup$ als Teilraum des (topologischen) Produkts $D \times D$ auffaßt.*

Beweis: Nach Proposition 2.9 müssen wir nur überprüfen, daß D genau dann die vier angegebenen Bedingungen erfüllt, wenn $D^\top$ den Bedingungen von Satz 2.4 (4) genügt.

Nach Proposition 1.6 ist $(D, \sqsubseteq_D)$ genau dann ein vollständiger Halbverband, wenn $(D^\top, \sqsubseteq_{D^\top})$ ein vollständiger Verband ist. Um diesen Punkt brauchen wir uns also nicht mehr zu kümmern.

Sei nun D ein $\mathcal{A}_d$-Rechts-Kan-Raum. Jede offene Menge $O \in \Omega D$ ist Scott-offen. Daher ist auch die Menge $O \cup \{\top\}$ Scott-offen in $D^\top$, denn sie bleibt unerreichbar für gerichtete Suprema. Da D ein Bereich ist, kann $\top$ nicht durch gerichtete Suprema erreicht werden, d. h. auch $\{\top\}$ ist Scott-offen. Somit ist $\Omega D^\top \subseteq \sigma(D^\top, \sqsubseteq_{D^\top})$ erfüllt.

Die Supremumsoperation $\sqcup_{D^\top} : D^\top \times D^\top \to D^\top$ ist topologisch stetig, denn keine nicht-triviale abgeschlossene Menge $A \subseteq D^\top$ enthält $\top$. Ihr Urbild unter $\sqcup_{D^\top}$ ist daher gerade

$$\begin{array}{ccc} D^\top \times D^\top & \xrightarrow{\ \sqcup_{D^\top}\ } & D^\top \\ \uparrow & & \uparrow \\ \operatorname{def} \sqcup_D & \xrightarrow[\ \sqcup_D\ ]{} & D \end{array}$$

das Urbild unter $\sqcup_D$, eine in $\operatorname{def} \sqcup_D$ abgeschlossene Menge, da $\sqcup_D$ topologisch stetig ist. Weil $\operatorname{def} \sqcup_D$ aber abgeschlossen ist, muß das Urbild von A abgeschlossen in $D^\top \times D^\top$ sein. Damit sind alle Bedingungen von Satz 2.4 (4) erfüllt.

Sei umgekehrt $D^\top$ ein $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Raum. In $D^\top$ ist D ein Anfangsstück und $D \hookrightarrow D^\top$ ist eine Einbettung. Damit ist jede offene Menge $O \in \Omega D$ Scott-offen, weil $O \cup \{\top\}$ eine Scott-offene und in $D^\top$ offene Menge ist.

Ebenfalls weil $D \hookrightarrow D^\top$ eine Einbettung ist, folgt, daß die Restriktion und Co-Restriktion $\sqcup_D\colon \operatorname{def} \sqcup_D \to D$ von $\sqcup_{D^\top} : D^\top \times D^\top \to D^\top$ topologisch stetig ist.

Die Abgeschlossenheit von $\operatorname{def} \sqcup_D$ schließlich folgt, weil diese Menge das Urbild der in $D^\top$ abgeschlossenen Menge D unter $\sqcup_{D^\top}$ ist. ∎

Korollar 2.12 *Rechts-Kan-Räume über stetigen Funktionen mit dichtem Bild sind nüchtern.*

BEWEIS: Sei D ein $\mathcal{A}_d$-Rechts-Kan-Raum und A eine $\cup$-irreduzible abgeschlossene Teilmenge von D. Da D in $D^\top$ abgeschlossen ist, muß A auch in $D^\top$ $\cup$-irreduzibel sein. Weil $D^\top$ nach Proposition 2.9 ein $\mathcal{A}$-Rechts-Kan-Raum ist (somit nüchtern nach Korollar 2.8), ist A der Abschluß eines Punktes in $D^\top$. Der einzig neue Punkt ist aber $\top$, und dessen Abschluß ist $D^\top$; folglich war A schon der Abschluß eines Punktes in D. ∎

3 Die Approximationsordnung im Funktionenraum

Die ordnungstheoretische Stetigkeit eines Bereiches besagt nichts anderes, als daß die Approximationsordnung reichhaltig genug ist.

Oft reicht die bloße, durch die Stetigkeit garantierte Existenz hinreichend vieler approximierender Elemente jedoch nicht aus; man will wissen, wie ein Element weit-unter einem anderen beschaffen ist bzw. ob von zwei vorgegebenen Elementen eines das andere approximiert. Daß die Situation für Funktionenräume sich noch verkompliziert, sieht man schon an dem ausgesprochenen einfachen Funktionenraum $\Omega X \cong [X \to \mathsf{S}]$. Ist X lokalkompakt, dann läßt sich die Approximationsordnung in ΩX durch kompakt-saturierte Mengen charakterisieren, also durch Objekte, die in ΩX *nicht vorkommen.*

Umgekehrt liefert eine Charakterisierung oder zumindest ein Kriterium dafür, wann Elemente einander approximieren, häufig erst den Beweis, daß ein Bereich stetig ist. Dies gilt insbesondere für Funktionenräume, wie wir sehen werden: Es wird erst ein Kriterium angegeben, wann eine Treppenfunktion eine stetige Funktion approximiert, dann wird damit die Stetigkeit des Funktionenraumes bewiesen. Zumindest für die Funktionenräume von Bereichen ist die Frage der *Stetigkeit* geklärt [AJ94, Sec. 4]. Diese Frage soll uns daher hier nicht interessieren. Worum es in diesem Kapitel gehen wird, ist gute *Charakterisierungen* der Approximationsordnung im Funktionenraum $[X \to L]$ zu finden.

Der Inhalt dieses Kapitels findet sich größtenteils in [EEK97]; lediglich Abschnitt 3.5 über die Approximationsordnung im Stone-Dual ist neu.

Wir setzen stets X als einen T_0-Raum voraus, dessen Topologie ΩX ein stetiger Verband ist, und L soll immer ein stetiger Halbverband sein (mit Ausnahme des letzten Abschnitts; dort ist L ein L-Bereich), ausgestattet mit der Scott-Topologie: $\Omega L = \sigma L$.

Diese Einschränkung auf sehr spezielle Funktionenräume $[X \to L]$ liegt darin begründet, daß andernfalls oft Stetigkeit sich nicht nur nicht beweisen läßt, sondern auch einfach nicht vorliegt.

3.1 Mögliche Grade der Allgemeinheit

Wann ist der Funktionenraum $[X \to Y]$ für zwei T_0-Räume X und Y ein stetiger Bereich? Auf diese Frage gibt es zwei Antworten — aus kollektiver Sicht und aus individueller Sicht — die zusammen in etwa unseren Blickwinkel rechtfertigen.

Kollektive Sicht

Angenommen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ wären Klassen von T_0-Räumen, so daß für alle $X \in \mathcal{X}$ und alle $Y \in \mathcal{Y}$ der Funktionenraum $[X \to Y]$ ein stetiger Bereich ist. Wie müssen dann $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ beschaffen sein?

Wenn das terminale Objekt $\mathbf{1}$ in $\mathcal{X}$ liegt, so muß jedes $Y \in \mathcal{Y}$ wegen $[\mathbf{1} \to Y] \cong (Y, \sqsubseteq_Y)$ ein stetiger Bereich in der Spezialisierungsordnung sein. Soll der Funktionenraum nicht notwendigerweise die diskrete Ordnung tragen, so muß es auch echte T_0-Räume in $\mathcal{Y}$ geben. Der Sierpinski-Raum liegt in jeder naheliegenden Klasse von Räumen, die nicht T_1 sein müssen. Wegen der Isomorphie $[X \to \mathsf{S}] \cong \Omega X$ kann dann die Klasse $\mathcal{X}$ nur Räume enthalten, deren Topologie ein stetiger Verband ist.

Somit haben wir Abschätzungen für die obere Grenze von $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ erhalten. Nehmen wir an, daß $\mathcal{X}$ die Klasse *aller* T_0-Räume ist, deren Topologie ein stetiger Verband ist, und daß $\mathcal{Y}$ nur solche Y enthält, für die $\Omega Y = \sigma(Y, \sqsubseteq_Y)$ gilt, d. h. $\mathcal{Y}$ ist eine Teilklasse aller stetigen Bereiche (mit der Scott-Topologie). Dann ist jedes $Y \in \mathcal{Y}$ ein stetiger L-Bereich (der jedoch kein kleinstes Element haben muß). Dies ist das Ergebnis von [YMJH96].

Individuelle Sicht

Betrachten wir nun X und Y für sich und fordern nur, daß $[X \to Y]$ stetig ist, ohne Bezug auf Klassen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$. Unter der Annahme, daß Y wenigstens ein Bereich ist, der die Scott-Topologie trägt, und ein kleinstes Element besitzt, können wir zu ähnlichen Ergebnissen wie in der kollektiven Sicht gelangen.

Der Sierpinski-Raum S ist ein stetiger Retrakt von Y, die erforderlichen Abbildungen sind leicht zu finden (die eine bildet ganz Y auf 0 ab, mit Ausnahme von $\bot_Y$). Also ist $[X \to \mathsf{S}]$ ein stetiger Retrakt von $[X \to Y]$. Wie oben folgt die Stetigkeit von ΩX.

Identifiziert man Y mit der Menge der konstanten Funktionen $\{\mathrm{c}_y \colon X \to Y \mid y \in Y\}$, so findet man Y in $[X \to Y]$ wieder. Hält man ein $a \in X$ fest, so erhält man zusammen mit der Auswertungsabbildung $\mathrm{eval}\, a \colon \big[X \to Y\big] \to Y,\ f \mapsto fa$ ein Paar von Abbildungen, die Y zu einem stetigen Retrakt von $[X \to Y]$ machen. Als solcher muß Y aber ein stetiger Bereich sein.

3.2 Stetigkeit des Funktionenraumes: Treppenfunktionen

Wir wollen zeigen, daß der Funktionenraum ein stetiger Halbverband ist, wobei die Stetigkeit durch explizite Angabe einer Basis gezeigt wird: den Treppenfunktionen.

Lemma 3.1 *Mit der von L induzierten Ordnung wird $[X \to L]$ zu einem vollständigen Halbverband, in dem Suprema punktweise berechnet werden.*

Beweis: Ist L trivial, dann ist nichts zu zeigen. Sei daher L nicht-leer. Wegen Lemma 1.1 ist $[X \to L]$ mit punktweise berechneten Suprema ein Bereich. Damit der Funktionenraum zu einem vollständigen Halbverband wird, müssen wir noch zeigen, daß er ein kleinstes Element besitzt und daß beschränkte binäre Suprema existieren.

Da L ein vollständiger Halbverband ist, besitzt er ein kleinstes Element $\bot$. Die konstante $\bot$-Funktion $\mathrm{c}_\bot : X \to L$ ist damit das kleinste Element von $[X \to L]$.

Seien f, g und h stetige Funktionen von X nach L, und sei h eine obere Schranke von $\{f, g\}$. Dann ist für jedes $x \in X$ das Supremum $\varphi(x) := fx \vee gx$ in L definiert, denn hx ist eine obere Schranke davon und L ist ein vollständiger Halbverband. Also läßt sich $\langle f, g\rangle \colon L \to L \times L$ auf $\operatorname{def} \vee$ co-einschränken. Die Funktion $\varphi \colon X \to L$ ist stetig, denn sie

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\langle f,g\rangle|^{\operatorname{def}\vee}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \operatorname{def}\vee \arrow[d, "\vee"] \\ & L \end{tikzcd}$$

ist die Komposition der stetigen Funktion $\langle f,g\rangle|^{\operatorname{def}\vee}\colon L \to \operatorname{def}\vee$ mit der Supremumsabbildung, welche topologisch stetig ist nach Korollar 1.5. ■

Definition Für jede offene Menge $U \in \Omega X$ und jedes $s \in L$ sei $(U\searrow s)\colon X \to L$ die durch

$$(U\searrow s)(x) := \begin{cases} s & \text{falls } x \in U \\ \bot_L & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion, sie heißt eine *Stufenfunktion*. Existiert das Supremum einer *endlichen* Familie von Stufenfunktionen, so heißt es eine Treppenfunktion.

Ist $u = \bigvee_{i=1}^{n}(U_i\searrow s_i)$ eine Treppenfunktion, so heißt die Menge $\big\{\langle U_i, s_i\rangle\big\}_{i=1}^{n}$ eine *Darstellung* der Treppenfunktion u.

Das punktweise berechnete Supremum der Stufenfunktionen $(U_i\searrow s_i)$, $i = 1,\ldots,n$, existiert genau dann, wenn für jedes $x \in X$ die Menge $\{s_i \mid x \in U_i,\ \ i = 1,\ldots,n\}$ in L beschränkt ist. Ein solches Supremum u ist stetig, denn offene Mengen sind Endstücke, und daher ist das Urbild einer offenen Menge unter u immer der Schnitt offener Mengen. Das punktweise berechnete Supremum von Stufenfunktionen ist also automatisch stetig, sofern es existiert; die Existenz einer stetigen oberen Schranke ist nicht erforderlich.

Eine Darstellung einer Treppenfunktion ist natürlich in keiner Weise eindeutig. Es gibt aber einen kanonischen Kandidaten: Zu der Treppenfunktion u definieren wir für jedes $s \in u[X]$ die Menge $U_s := u^{-1}[\uparrow s]$. Da L stetig ist und $u[X]$ endlich, läßt sich s so durch ein $t \in L$ approximieren, daß $u[X] \cap \uparrow s = u[X] \cap \twoheaduparrow t$ ist. Somit ist $U_s = u^{-1}[\twoheaduparrow t]$, also offen. Es ist dann $\big\{\langle U_s, s\rangle \bigm| s \in u[X]\big\}$ eine Darstellung von u. Wegen $U_\bot = X$ gibt es für jedes $x \in X$ genau ein $s_x \in u[X]$ — nämlich ux —, so daß $ux = (U_{s_x}\searrow s_x)x$ ist. Wir wollen diese Darstellung von u die *Normalform* von u nennen. Oft sagen wir auch verkürzend, daß die Treppenfunktion $u = \bigvee_{i=1}^{n}(U_i\searrow s_i)$ *in Normalform sei*, wenn $\big\{\langle U_i, s_i\rangle\big\}_{i=1}^{n}$ die Normalform von u ist.

Lemma 3.2 *Für alle $g \in [X \to L]$ gilt:*

1. *Für jedes $U \in \Omega X$ und $s \in L$ impliziert $U \ll (\Omega g)\twoheaduparrow s$ bereits $(U\searrow s) \ll g$.*
2. *Es ist $g = \bigvee\big\{(U\searrow s) \bigm| U \ll (\Omega g)\twoheaduparrow s,\ \ U \in \Omega X,\ \ s \in L\big\}$ erfüllt.*

Beweis: Sei $U \ll (\Omega g)\twoheaduparrow s$. Wir wollen $(U\searrow s) \ll g$ zeigen. Sei daher $H \subseteq [X \to L]$ eine gerichtete Familie stetiger Funktionen mit $g \leq \bigvee^{\uparrow} H$, d. h. für alle $x \in X$ gilt $gx \leq \bigvee^{\uparrow}_{h\in H} hx$. Ist x aus $(\Omega g)\twoheaduparrow s$, dann gilt folglich die Beziehung

$$s \ll gx \leq \bigvee_{h\in H}^{\uparrow} hx.$$

Daher gibt es für jedes solche x ein $h_x \in H$ mit $s \ll h_x x$, was gleichbedeutend mit $x \in (\Omega h_x)\twoheaduparrow s$ ist. Insbesondere gilt $(\Omega g)\twoheaduparrow s \subseteq \bigcup_{x\in(\Omega g)\twoheaduparrow s}(\Omega h_x)\twoheaduparrow s$.

Da $U \ll (\Omega g)\twoheaduparrow s$ vorausgesetzt wurde, reichen endlich viele $x_1,\ldots,x_n \in (\Omega g)\twoheaduparrow s$ aus, um $U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(\Omega h_{x_i})\twoheaduparrow s$ zu erfüllen. Für eine obere Schranke $h \in H$ von $\{h_{x_1},\ldots,h_{x_n}\}$ gilt daher $(U\searrow s) \leq h$, denn aus $x \in U$ folgt $(U\searrow s)x = s \leq hx$ und sonst gilt $(U\searrow s)x = \bot \leq hx$.

Für den zweiten Teil muß gezeigt werde, daß es genügend Stufenfunktionen gibt, um g zu approximieren. Sei dazu ein $x \in X$ gewählt, und $s \in L$ weit-unter gx. Dann ist $(\Omega g)\dagger s$ eine offene Umgebung von x, und der Stetigkeit von ΩX wegen gibt es ein offene Umgebung $U \in \Omega X$ von x, die weit-unter $(\Omega g)\dagger s$ liegt. Damit ist $(U\searrow s)$ eine Stufenfunktion der gesuchten Art, für die auch noch $(U\searrow s)x = s$ gilt.

Der Bereich L ist stetig, es ist daher möglich mit s beliebig dicht an gx heranzukommen. Also läßt sich g durch Stufenfunktionen der angegebenen Art an der Stelle x approximieren. Man beachte, daß $(U\searrow s)$ wegen $U \subseteq (\Omega g)\dagger s$ an jeder Stelle unterhalb g liegt, nicht nur an der Stelle x. Folglich ist g das Supremum der angegebenen Stufenfunktionen. ∎

Proposition 3.3 *Der Funktionenraum $[X \to L]$ ist ein stetiger Halbverband; die Treppenfunktionen bilden eine Basis.*

Beweis: Der Funktionenraum ist ein vollständiger Halbverband nach Lemma 3.1. Man kann daher die Menge der Stufenfunktionen aus Lemma 3.2 (2) in eine gerichtete Menge durch Hinzunahme endlicher Suprema überführen. Nach Lemma 1.2 sind diese Treppenfunktionen immer noch weit-unter g, und g ist somit das gerichtete Supremum von Treppenfunktionen weit-unter g. ∎

Korollar 3.4 *Liegt eine stetige Funktion $f \in [X \to L]$ weit-unter einer stetigen Funktion $g \in [X \to L]$, dann liegt f auch punktweise weit-unter g, d. h. $f \ll g$ impliziert $fx \ll gx$ für alle $x \in X$.*

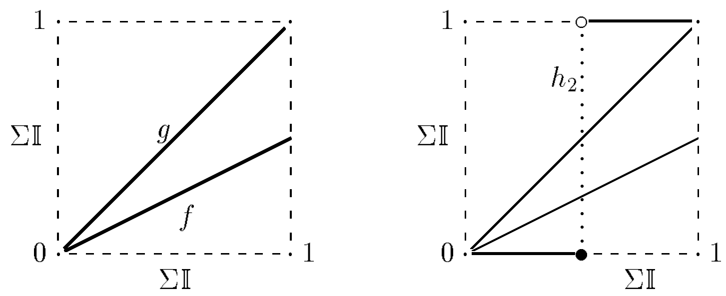
Beweis: Wenn $f \ll g$ gilt, dann liegt nach Lemma 3.2 eine interpolierende Treppenfunktion $u = \bigvee_{i=1}^{n}(U_i\searrow s_i)$ zwischen f und g, die $U_i \ll (\Omega g)\dagger s_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ erfüllt. Für $x \in X$ folgt daher aus $x \in U_i$, daß s_i weit-unter gx liegt. Nach Lemma 1.2 liegt dann auch $\bigvee_{i:\, x\in U_i} s_i$ weit-unter gx, d. h. es ist

$$fx \leq ux = \bigvee_{i:\, x\in U_i} s_i \ll gx.$$

Liegt x in keinem U_i, dann ist $fx \leq ux = \bot$ weit-unter allem. ∎

Daß für jedes $x \in X$ das f-Bild weit-unter dem g-Bild liegt, ist nicht hinreichend für $f \ll g$, wie das folgende Beispiel zeigt. Wir werden aber im nächsten Abschnitt mit den Co-Treppenfunktionen eine adäquate Weise kennenlernen, punktweise zu argumentieren (Proposition 3.7).

Beispiel Sei g die Identität auf $\Sigma\mathbb{I}$, dem Einheitsintervall versehen mit der Scott-Topologie. Dann liegt die Abbildung $f := \frac{1}{2}g\colon \Sigma\mathbb{I} \to \Sigma\mathbb{I}$ zwar an jeder Stelle x weit-unter g, aber das



gerichtete Supremum der durch $h_n := (\uparrow\frac{1}{n}\searrow 1)$ definierten Folge $h_1, h_2, \ldots$ liegt über g, ohne daß man je mit einem Element der Folge über f gelangt. Also liegt f nicht weit-unter g.

Grenzen des Ansatzes über Treppenfunktion

Gilt für eine Darstellung $\{\langle U_i, s_i\rangle\}_{i=1}^n$ einer Treppenfunktion $u = \bigvee_{i=1}^n (U_i\searrow s_i)$, daß jedes U_i weit-unter $(\Omega g)\Uparrow s_i$ liegt,

$$U_i \ll (\Omega g)\Uparrow s_i, \tag{3}$$

so approximiert u die Funktion g, wie wir soeben gesehen haben. Daraus kann aber nicht geschlossen werden, daß auch für die Normalform der Treppenfunktion die Eigenschaft (3) gilt. Auch kann es Treppenfunktionen geben, die zwar weit-unter g liegen, für die aber *keine* Darstellung Bedingung (3) erfüllt.

Als Konsequenz davon bilden zwar die Treppenfunktionen eine Basis B des Funktionenraums $[X \to L]$, aber nicht alle Treppenfunktionen aus $B_g := B \cap \Downarrow g$ sind von der Form, wie sie in Lemma 3.2 und Proposition 3.3 ausgenutzt wurde.

Im folgenden wird eine Antwort darauf gegeben, inwieweit sich die Aussage von Lemma 3.2 (1) umdrehen läßt.

Definition Eine geordnete Menge $(P, \leq)$ heißt *baumartig*, wenn für jedes $x \in P$ das Hauptideal $\downarrow x$ eine Kette ist.

Ein T_0-Raum X, dessen Topologie ΩX ein stetiger Verband ist, heißt *stabil*, wenn die Approximatonsordnung $\ll_{\Omega X}$ multiplikativ ist.

Zwar sind baumartige Bereiche sehr spezielle geordnete Mengen, aber es fallen doch so wichtige Beispiele wie das Einheitsintervall $\mathbb{I} = [0, 1]$ oder die erweiterten reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ darunter. Damit ist z. B. für jeden T_0-Raum X der Raum der von unten halbstetigen Funktionen $\mathrm{LSC}(X, \overline{\mathbb{R}})$ abgedeckt, denn es ist $\mathrm{LSC}(X, \overline{\mathbb{R}}) = [X \to \Sigma\overline{\mathbb{R}}]$.

Proposition 3.5 *Aus $(U\searrow s) \ll g$ folgt $U \ll (\Omega g)\Uparrow s$ genau dann für jedes $U \in \Omega X$, jedes $s \in L \setminus \{\bot\}$ und jedes $g \in [X \to L]$, wenn X stabil oder wenn L baumartig ist.*

Der Ausschluß von $s = \bot$ erklärt sich daher, daß unabhängig von U die Stufenfunktion $(U\searrow\bot)$ immer gleich der konstanten $\bot$-Funktion $\mathrm{c}_\bot$ ist, die weit-unter jeder Funktion liegt. Ist X jedoch kompakt, so kann man $s = \bot$ zulassen, denn $U \subseteq X \ll X = (\Omega g)\Uparrow\bot$ ist dann gültig.

Beweis von Proposition 3.5: Sei unter den angegebenen Voraussetzungen $(U\searrow s) \ll g$. Wir wollen $U \ll (\Omega g)\Uparrow s$ zeigen.

Nach Lemma 3.2 gibt es eine Treppenfunktion $\bigvee_{i=1}^n (U_i\searrow s_i)$ zwischen $(U\searrow s)$ und g, die für alle i die Bedingung $U_i \ll (\Omega g)\Uparrow s_i$ erfüllt. Für ein $x \in U$ sei $I_x := \{i \mid x \in U_i\}$. Da wir $s = \bot$ ausgeschlossen hatten, verschwindet u nirgends auf U; insbesondere muß jedes $x \in U$ in wenigstens einem U_i enthalten sein. Schreiben wir dann noch U_I für $\bigcap_{i \in I} U_i$ und s_{I_x} für $\bigvee_{i \in I_x} s_i$, so erhalten wir die Ungleichung

$$s = (U\searrow s)x \leq \bigvee_{i=1}^n (U_i\searrow s_i)x = \bigvee_{i\,:\,x \in U_i} s_i = s_{I_x}.$$

Nach Definition gilt $U_{I_x} \subseteq U_i \ll (\Omega g)\Uparrow s_i$ für jedes $i \in I_x$.

Wenn X stabil ist, können wir daher

$$U_{I_x} \ll \bigcap_{i\in I_x} (\Omega g)\Uparrow s_i = (\Omega g) \bigcap_{i\in I_x} \Uparrow s_i = (\Omega g)\Uparrow s_{I_x} \subseteq (\Omega g)\Uparrow s$$

folgern.

Ist hingegen L baumartig, dann ist das Hauptideal $\downarrow s_{I_x} = \downarrow \bigvee_{i\in I_x} s_i$ eine Kette, und folglich gibt es ein $i_x \in I_x$ mit $s_{i_x} = s_{I_x}$. Somit können wir erneut

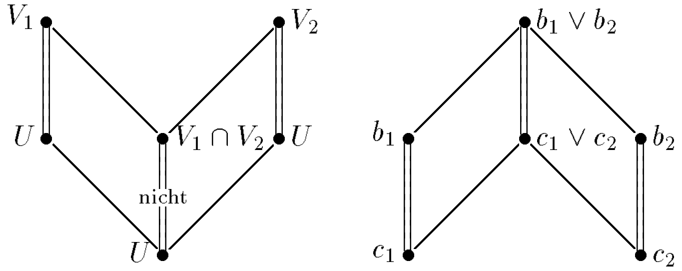
$$U_{I_x} \subseteq U_{i_x} \ll (\Omega g)\Uparrow s_{i_x} = (\Omega g)\Uparrow s_{I_x} \subseteq (\Omega g)\Uparrow s$$

folgern.

In beiden Fällen gilt demnach $U_{I_x} \ll (\Omega g)\Uparrow s$. Nach Lemma 1.2 ist dann auch wie gewünscht $U \subseteq \bigcup_{x\in U} U_{I_x} \ll (\Omega g)\Uparrow s$, denn die Vereinigung ist endlich.

Nehmen wir nun umgekehrt an, X sei nicht stabil und L nicht baumartig, und versuchen wir, ein Gegenbeispiel zu konstruieren.

Wir haben offene Mengen $U, V_1, V_2 \in \Omega X$, für die $U \ll V_1, V_2$ und $U \not\ll V_1 \cap V_2$ gilt, und zwei unvergleichbare, beschränkte Elemente b_1, b_2 in L. Da L ein stetiger Halbverband ist,



existiert das (beschränkte) Supremum $b_1 \vee b_2$. Außerdem gibt es approximierende Elemente $c_1 \ll b_1$ und $c_2 \ll b_2$, so daß das beschränkte Supremum $c := c_1 \vee c_2$ nicht unter b_1 oder b_2 liegt. (Andernfalls könnte man nicht sowohl b_1 als auch b_2 als gerichtetes Supremum von approximierenden Elementen erhalten.) Nach Lemma 1.2 gilt aber $c_1 \vee c_2 \ll b_1 \vee b_2$.

Damit definieren wir die Funktionen $f_i := (U \searrow c_i)$ und $g_i := (V_i \searrow b_i)$ für $i = 1, 2$ und $f := f_1 \vee f_2$ und $g := g_1 \vee g_2$. Wegen $U \ll V_i = g^{-1}[\Uparrow b_i] = (\Omega g)\Uparrow c_i$ gilt $f_i \ll g_i$ nach Lemma 3.2 (1) und somit $f \ll g$ nach Lemma 1.2. Desweiteren ist

$$(\Omega g)\Uparrow c = (\Omega g)\Uparrow(c_1 \vee c_2) = g^{-1}\big[\{b_1 \vee b_2\}\big] = V_1 \cap V_2 \not\gg U$$

erfüllt, d. h. wir haben ein Gegenbeispiel gefunden. ∎

Korollar 3.6 *Sei u eine Treppenfunktion weit-unter g, und X sei stabil oder L baumartig. Dann gilt für jedes Paar $\langle U_s, s\rangle$ der Normalform von u die Bedingung $U_s \ll (\Omega g)\Uparrow s$, wobei im Falle von nicht-kompaktem X das Paar $\langle U_\perp, \perp\rangle = \langle X, \perp\rangle$ ausgenommen werden muß.*

3.3 Approximationsordnung mittels Co-Treppenfunktionen

Treppenfunktionen sind etwas unhandlich: um mit ihnen effektiv arbeiten zu können, muß man immer Bedingung (3) im Auge behalten. Eine elegante Alternative stellen die Co-Treppenfunktionen dar, die in ganz analoger Weise definiert werden.

Definition Für jede kompakt-saturierte Menge $K \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}}\, X$ und jedes $s \in L$ sei $\langle K\searrow s\rangle$ die durch

$$\langle K\searrow s\rangle(x) := \begin{cases} s & \text{falls } x \in K \\ \bot_L & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion von X nach L. Sie heißt *Co-Stufenfunktion* und endliche Suprema von solchen heißen *Co-Treppenfunktionen* — sofern sie existieren.

Die *Darstellungen* einer Co-Treppenfunktion k werden analog zu Treppenfunktionen definiert.

Natürlich sind Co-Treppenfunktionen nur ausnahmsweise stetig, denn kompakt-saturierte Mengen brauchen nicht offen zu sein. Bezüglich der co-kompakten Topologien ist dies jedoch richtig, Co-Treppenfunktionen sind stetig als Abbildung $(X, \kappa X) \to (L, \kappa L)$ — daher ihr Name.

Es soll nicht verschwiegen werden, daß auch Co-Treppenfunktionen das Problem, das wir mit der Normalform von Treppenfunktionen in bezug auf Bedingung (3) hatten, nicht umgehen. Die *Normalform* $\{\langle K_s, s\rangle \mid s \in k[X]\}$ einer Co-Treppenfunktion k, wobei $K_s := k^{-1}[\uparrow s]$ gesetzt werde, muß nicht existieren, denn sie besteht nicht unbedingt aus Co-Stufenfunktionen $\langle K_s\searrow s\rangle$: Es muß $X = K_\bot$ nicht kompakt sein. Auch wenn man das Paar $\langle K_\bot, \bot\rangle$ der Normalform außen vor ließe, so sind doch die anderen K_s für $s \in k[X]$ als Schnitte kompakt-saturierter Mengen nicht unbedingt kompakt. Wegen Satz 1.14 ist das (für nüchterne Räume) genau dann der Fall, wenn X stabil ist, also wenn auch die Treppenfunktionen keine Probleme machen.

In einem lokalkompakten Raum X approximiert eine offene Menge U genau dann eine größere offene Menge V, wenn dazwischen eine kompakte-saturierte Menge K liegt. Identifiziert man Teilmengen von X mit ihren charakteristischen Funktionen $X \to \mathsf{S}$, so besagt dies nichts anderes, als daß die Stufenfunktion $(U\searrow 1)$ genau dann die Stufenfunktion $(V\searrow 1)$ approximiert, wenn dazwischen eine Co-Treppenfunktion $\langle K\searrow 1\rangle$ liegt. Diese Beobachtung ist verallgemeinerungsfähig:

Proposition 3.7 *Es sei X ein lokalkompakter Raum, und $f, g \in [X \to L]$ seien stetige Funktionen. Dann gilt $f \ll g$ genau dann, wenn es eine Co-Treppenfunktion $k\colon X \to L$ gibt, so daß*

$$fx \leq kx \ll gx$$

für alle $x \in X$ erfüllt ist.

Beweis: Sei $k = \bigvee_{i=1}^n \langle K_i\searrow t_i\rangle$ eine Co-Treppenfunktion der geforderten Art. Wir wollen $f \ll g$ zeigen.

Wegen $kx \ll gx$ folgt $K_i \subseteq k^{-1}[\uparrow t_i] \subseteq (\Omega g)\Uparrow t_i$. Außerdem gilt $(\Omega g)\Uparrow t_i = \bigcup_{h \ll g} (\Omega h)\Uparrow t_i$. Es genügen daher schon endliche viele h's, nennen wir sie $h_{i,1}, \ldots, h_{i,n_i}$, um K_i durch $\bigcup_{j=1}^{n_i} (\Omega h_{i,j})\Uparrow t_i$ zu überdecken, denn K_i ist kompakt. Folglich liegt $\langle K_i\searrow t_i\rangle$ unterhalb von $\bigvee_{j=1}^{n_i} h_{i,j}$, und damit gilt $f \leq k \leq \bigvee_{i=1}^n \bigvee_{j=1}^{n_i} h_{i,j} \ll g$ nach Lemma 1.2.

Liegt umgekehrt f weit-unter g, dann gibt es eine interpolierende Treppenfunktion $u = \bigvee_{i=1}^n (U_i\searrow s_i)$ zwischen ihnen, die $U_i \ll (\Omega g)\Uparrow s_i$ für $i = 1, \ldots, n$ erfüllt. Da X lokalkompakt ist, gibt es eine kompakt-saturierte Menge K_i zwischen U_i und $(\Omega g)\Uparrow s_i$. Dies ergibt

$(U_i \backslash s_i)x \leq \langle K_i \backslash s_i \rangle x \ll gx$ für alle $x \in X$. Folglich ist $\bigvee_{i=1}^{n} \langle K_i \backslash s_i \rangle$ die gesuchte Co-Treppenfunktion. ■

Durch diese Charakterisierung der Approximationsordnung haben wir zusätzlich die adäquate Umkehrung von Korollar 3.4 formuliert.

Als erste Anwendung betrachten wir die Komposition von Funktionen.

Proposition 3.8 *Sei X ein kompakter, kohärenter Raum und L, L' stetige Halbverbände. Sind $f, g \in [X \to L]$ und $f', g' \in [L \to L']$, dann verträgt sich die Approximationsordnung mit Komposition: $f \ll g$ und $f' \ll g'$ impliziert $f' \circ f \ll g' \circ g$.*

Beweis: Proposition 3.7 liefert uns eine Co-Treppenfunktion $k = \bigvee_{i=1}^{n} \langle K_i \backslash t_i \rangle$ zwischen f und g, und nach Korollar 3.4 liegt f' punktweise weit-unter g'. Also haben wir für alle $x \in X$ die Beziehung

$$f'fx \leq f'kx \ll g'kx \leq g'gx.$$

Wie wir gleich sehen werden, ist $f' \circ k$ eine Co-Treppenfunktion, was uns dann $f' \circ f \ll g' \circ g$ liefert, wieder nach Proposition 3.7.

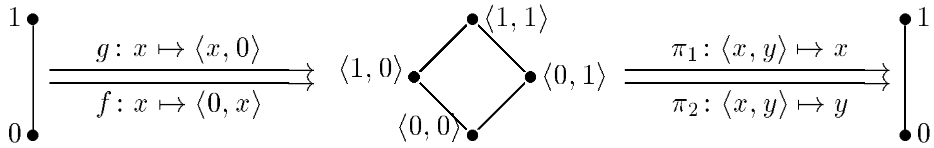
Da X kompakt und kohärent ist, existiert die Normalform $\{\langle K_s, s \rangle \mid s \in k[X]\}$ von k; jedes K_s (einschließlich $K_\perp$) ist eine kompakt-saturierte Menge. Es läßt sich dann $f' \circ k$ als

$$f' \circ k = f' \circ \bigvee_{s \in k[X]} \langle K_s \backslash s \rangle = \bigvee_{s \in k[X]} \langle K_s \backslash f's \rangle \tag{4}$$

schreiben, und dies ist eine Co-Treppenfunktion. Dabei wurde für die Gleichheit (4) benutzt, daß es sich um eine Darstellung in Normalform handelt: Für jedes x gibt es genau ein K_s mit $kx = \langle K_s \backslash s \rangle x$ (vgl. die analoge Diskussion für Treppenfunktionen vor Lemma 3.2). Folglich ist $f'kx = \langle K_s \backslash f's \rangle x$; jedes andere $t \in k[X]$ spielt keine Rolle, denn aus $kx \geq \langle K_t \backslash t \rangle$ folgt $f'kx \geq \langle K_t \backslash f't \rangle x$ der Monotonie von f' wegen. ■

Die Umkehrung von Proposition 3.8 gilt nicht, wie man an folgendem Beispiel sieht:

Beispiel Es seien $f, g \colon \mathsf{S} \to \mathsf{S} \times \mathsf{S}$ mit $f(x) := \langle 0, x \rangle$ und $g(x) := \langle x, 0 \rangle$ und $f' := \pi_2$, $g' := \pi_1$ die kanonischen Projektionen $\mathsf{S} \times \mathsf{S} \to \mathsf{S}$. Weder f und g noch f' und g' sind vergleichbar,



geschweige denn weit-unter einander. Die Komposition ist $g' \circ g = f' \circ f = \mathrm{id}_{\mathsf{S}}$, die Identität auf S. Da der Funktionenraum $[\mathsf{S} \to \mathsf{S}]$ endlich ist, ist id_{S} kompakt. Insbesondere gilt damit $f' \circ f \ll g' \circ g$.

In ähnlicher Weise kann man Beispiele konstruieren, bei denen entweder $f \ll g$ oder $f' \ll g'$ gilt und bei denen die Komposition $f' \circ f$ weit-unter $g' \circ g$ liegt.

3.4 Charakterisierung über patch-offene Mengen

Wir haben bisher die Approximationsordnung durch stetige Treppenfunktionen und durch co-kompakt-stetige Co-Treppenfunktionen charakterisiert. Eine Kombination beider Ansätze, d. h. unter anderem eine Beschreibung durch patch-offene Mengen liefert der folgende Satz 3.9. Er ist eine Modifikation von [GHK$^+$80, Ex. II-4.20]; die dort angegebene Form ist allerdings so nicht korrekt.

„Historisch“ gesehen war es umgekehrt: Satz 3.9 führte zur Entwicklung der Co-Treppenfunktionen, die im Gegenzug einige der nötigen Beweise durchsichtiger werden ließen.

Definition Der *Träger* einer Funktion $f\colon X \to L$ ist die Menge

$$\operatorname{supp} f := \{x \in X \mid fx \neq \perp_L\} = f^{-1}\big[L \setminus \{\perp_L\}\big].$$

Ist f stetig oder eine Co-Treppenfunktion, dann ist der Träger von f offen bzw. kompakt-saturiert.

Falls X ein lokalkompakter Raum ist, dann ist für ein stetiges $f\colon X \to L$ die Bedingung $\operatorname{supp} f \ll X$ mit der Existenz einer kompakten (und saturierten) Menge zwischen $\operatorname{supp} f$ und X gleichbedeutend.

Approximiert f die Funktion g, dann liegt auch $\operatorname{supp} f$ weit-unter $\operatorname{supp} g$, denn dazwischen liegt $\operatorname{supp} k$, der Träger einer geeigneten Co-Treppenfunktion. (Ist X nicht lokalkompakt, so muß man über Funktionen g_U argumentieren, die auf offenem U mit g übereinstimmen und sonst konstant $\perp$ sind. Diese Funktionen sind stetig. Ist $\mathfrak{U}$ eine gerichtete Familie offener Mengen, deren Supremum über $\operatorname{supp} g$ geht, dann ist $\bigvee^{\uparrow}_{U \in \mathfrak{U}} g_U = g$. Folglich gibt es ein $\tilde{U} \in \mathfrak{U}$ mit $f \leq g_{\tilde{U}}$, was $\operatorname{supp} f \subseteq \tilde{U}$ impliziert.)

Satz 3.9 *Sei X ein kohärenter Raum, L ein stetiger Halbverband und $f, g \in [X \to L]$ stetige Funktionen. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. $f \ll g$.
2. (a) $\operatorname{supp} f \ll X$ *und*

   (b) *es gibt endlich viele Mengen $V_i \in \Omega X$, $Q_i \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}} X$ und Elemente $t_i \in L$, für $i = 1, \ldots, n$, so daß*

      i. $t_i \ll gx$ *für alle* $x \in V_i$,

      ii. $fx \leq t_i$ *für alle* $x \notin Q_i$ *und*

      iii. $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \setminus Q_i$

      erfüllt sind.
3. *Es gibt patch-offene Mengen $W_i \in \pi X$ und Elemente $t_i \in L$, für eine beliebige Indexmenge I, und eine Menge $Q \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}} X$, so daß*

   (a) $\operatorname{supp} f \subseteq Q \subseteq \bigcup_{i \in I} W_i$ *und*

   (b) $fx \leq t_i \ll gx$ *für alle* $x \in W_i$

   erfüllt ist.

4. *Es gibt endlich viele Mengen $V_i \in \Omega X$, $Q_i \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}} X$ und Elemente $t_i \in L$, für $i = 1, \ldots, n$, so daß*

   (a) $V_i \ll (\Omega g)\Uparrow t_i$,

   (b) $fx \leq t_i$ *für alle* $x \notin Q_i$ *und*

   (c) $\operatorname{supp} f \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i \setminus Q_i$

   erfüllt ist.

Ist X nur ein lokalkompakter Raum, dann sind zumindest die Implikationen

$$(4) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$$

erfüllt.

Den Beweis des Satzes zerlegen wir in mehrere Lemmata. Dafür setzen wir voraus, daß X stets ein lokalkompakter Raum und L stets ein stetiger Halbverband ist. (Wenn X kohärent sein soll, werden wir dies explizit fordern.)

Als Abkürzungen schreiben wir $f \ll_2 g$, $f \ll_3 g$ bzw. $f \ll_4 g$, wenn f und g stetige Funktionen aus $[X \to L]$ sind und Bedingung (2), (3) bzw. (4) aus Satz 3.9 erfüllen.

Lemma 3.10 *Aus $f \ll g$ folgt $f \ll_2 g$.*

Beweis: Sei $f \ll g$. Das liefert Bedingung (2 a). Es gibt dann nach Proposition 3.7 eine Co-Treppenfunktion $k = \bigvee_{j=1}^n \langle K_j \backslash s_j \rangle$ oberhalb von f und punktweise weit-unter g.

Wir werden nun $V_x \in \Omega X$, $Q_x \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}} X$ und $t_x \in L$ für jedes $x \in X$ konstruieren, so daß erstens die Bedingung (2 b i–iii) erfüllt sind und zweitens die Menge $\{V_x, Q_x, t_x \mid x \in X\}$ endlich ist; beides zusammen ergibt (2 b).

Wir definieren $t_x := kx$ und $V_x := (\Omega g)\Uparrow t_x$. Offensichtlich ist V_x eine Umgebung von x, die (2 b i) erfüllt. Um (2 b iii) sicher zu stellen, setzen wir $Q_x := \bigcup_{j\,:\, x \notin K_j} K_j$; denn wegen $x \in V_x \setminus Q_x$ wird X von $\bigcup_{x \in X} V_x \setminus Q_x$ überdeckt. Wir brauchen damit nur noch (2 b ii) einzusehen. Sei daher $w \notin Q_x$. Nach Definition von Q_x impliziert $w \in K_j$ dann bereits $x \in K_j$. Wir haben somit die Ungleichung

$$fw \leq kw = \bigvee_{j\,:\, w \in K_j} s_j \leq \bigvee_{j\,:\, x \in K_j} s_j = kx = t_x. \tag{5}$$

Damit ist auch (2 b) erfüllt, denn die Endlichkeitsbedingung ist klar: das Bild von k ist endlich und damit auch die Menge $\{t_x \mid x \in X\}$, die V_x waren durch t_x definiert, und von den Q_x gibt es nicht mehr, als es mögliche Auswahlen aus der endlichen Menge $\{K_1, \ldots, K_n\}$ gibt. ∎

Lemma 3.11 *Aus $f \ll_3 g$ folgt $f \ll g$, falls X kohärent ist.*

Beweis: Sei $f \ll_3 g$. Wir können annehmen, daß die patch-offenen Mengen $W_i \in \pi X$ allesamt basis-offen, d. h. von der Form $W_i = V_i \setminus Q_i$ mit $V_i \in \Omega X$ und $Q_i \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}} X$ sind.

Da $t_i \ll gw$ für alle $w \in W_i$ erfüllt ist, ist die Menge W_i in $V_i \cap (\Omega g)\Uparrow t_i$ enthalten. Die Stetigkeit von ΩX gibt uns für jedes $w \in W_i$ ein $V_{i,w}$ mit $w \in V_{i,w} \ll V_i \cap (\Omega g)\Uparrow t_i$. Die

Menge $W_i = V_i \setminus Q_i$ wird von $\{V_{i,w} \mid w \in W_i\}$ nach Konstruktion überdeckt, also auch von $\{V_{i,w} \setminus Q_i \mid w \in W_i\}$.

In kohärenten Räumen sind kompakt-saturierte Mengen immer auch patch-kompakt (Proposition 1.17), also reichen schon endlich viele der patch-offenen Mengen $V_{i,w} \setminus Q_i$ aus, um $Q \supseteq \operatorname{supp} f$ zu überdecken; nennen wir sie $V_{i_k,w_k} \setminus Q_{i_k}$ mit $k = 1, \ldots, n$.

Damit ist jedes $x \in \operatorname{supp} f$ in einem $V_{i_k,w_k} \setminus Q_{i_k}$ enthalten, und es gilt $fx \leq t_{i_k}$, denn $V_{i_k,w_k} \setminus Q_{i_k}$ ist eine Teilmenge von W_{i_k}. Somit haben wir

$$f \leq \bigvee_{k=1}^{n} (V_{i_k,w_k} \searrow t_{i_k}).$$

Diese Treppenfunktion liegt aber weit-unter g nach Lemma 3.2 (1) und Lemma 1.2, denn $V_{i_k,w_k} \ll (\Omega g)\Uparrow t_{i_k}$ ist durch die Konstruktion gesichert. ∎

Lemma 3.12 *Aus $f \ll_2 g$ folgt $f \ll_4 g$, falls X kohärent ist.*

Beweis: Alles was wir tun müssen, ist Bedingung (2 b i) in Bedingung (4 a) zu verwandeln, wobei wir $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \setminus Q_i$ zu $\operatorname{supp} f \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i \setminus Q_i$ abschwächen dürfen.

Dafür setze man $W_i := V_i \setminus Q_i$ und verwandele wie im Beweis von Lemma 3.11 die Mengen V_i und Q_i und die Elemente t_i in endlich viele Mengen V_{i_k,w_k} und Q_{i_k} und Elemente t_{i_k}. Da dabei die Q_i's und t_i's nicht verändert, sondern nur umbenannt und einige eventuell weggelassen werden, ist Bedingung (2 b ii) bzw. (4 b) nach wie vor gültig.

Alle übrigen Bedingungen werden durch die Konstruktion im Beweis von Lemma 3.11 wie dort angegeben erfüllt. ∎

Lemma 3.13 *Aus $f \ll_4 g$ folgt $f \ll g$.*

Beweis: Seien V_i, Q_i und t_i für $i = 1, \ldots, n$ wie in Bedingung (4). Dann ist die Treppenfunktion $v := \bigvee_{i=1}^{n} (V_i \searrow t_i)$ weit-unter g nach Lemma 3.2 (1) und Lemma 1.2. Es bleibt noch $f \leq v$ zu zeigen. Ist $x \in \operatorname{supp} f$, dann gibt es ein i_x mit $x \in V_{i_x} \setminus Q_{i_x}$. Dies hat nach Voraussetzung $fx \leq t_{i_x}$ zur Folge. Es ist aber gerade $t_{i_x} = (V_{i_x} \searrow t_{i_x})x \leq vx$. ∎

Beweis von Satz 3.9: Mit den Lemmata 3.10, 3.12 und 3.13 wurde die Äquivalenz von (1), (2) und (4) gezeigt.

Aus den Lemmata 3.10 und 3.11 folgt die Äquivalenz von (1), (2) und (3), vorausgesetzt, daß (2) immer (3) impliziert. Letzteres sieht man leicht: Die Mengen $V_i \setminus Q_i$ sind basis-offene Mengen der patch-Topologie, die X überdecken. Wegen $\operatorname{supp} f \ll X$ gibt es eine kompakte Menge $Q \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}} X$, die zwischen $\operatorname{supp} f$ und X liegt. Alles übrige ist klar.

Die Kohärenz von X wurde nur in den Beweisen der Lemmata 3.11 und 3.12 benötigt, deshalb sind wie angegeben gewisse Implikationen ohne diese Bedingung gültig. ∎

Das folgende Korollar verallgemeinert Korallar 3.4, denn jede Abbildung $\mathbf{1} \to X$ ist trivialerweise eigentlich.

Korollar 3.14 *Sind X und Y kohärente Räume, $f, g \colon X \to L$ stetig und $h \colon Y \to X$ eine eigentliche Abbildung, dann impliziert $f \ll g$ bereits $f \circ h \ll g \circ h$.*

BEWEIS: Seien W_i, t_i und Q wie in Satz 3.9 (3), und es sei $P_i := h^{-1}[W_i]$. Wir haben dann $fhy \leq t_i \ll ghy$ für alle $y \in P_i$. Außerdem gilt

$$\operatorname{supp}(f \circ h) = h^{-1}[\operatorname{supp} f] \subseteq h^{-1}[Q] \subseteq h^{-1}\big[\bigcup_i W_i\big] = \bigcup_i P_i.$$

Die Menge $h^{-1}[Q]$ ist kompakt-saturiert, denn h ist eigentlich. Als eigentliche Abbildung ist h patch-stetig, folglich sind die Mengen P_i alle patch-offen. Damit sind aber die Bedingungen von Satz 3.9 (3) erfüllt, wenn man $f \circ h$, $g \circ h$, $h^{-1}[Q]$ und P_i für f, g, Q bzw. W_i einsetzt, und somit gilt $f \circ h \ll g \circ h$. ∎

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß die eigentlichen Abbildungen im wesentlichen genau die Funktionen sind, die die in Korollar 3.14 angegebene Eigenschaft haben (vgl. Proposition 3.23). Zuvor werden wir jedoch die Notwendigkeit der Kohärenz-Bedingungen untersuchen.

Abgrenzung der Nebenbedingungen in der Charakterisierung

Wie wir beim Beweis der verschiedenen Lemmata zu Satz 3.9 gesehen haben, gelten für lokalkompakte Räume X die Implikationen

$$(4) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3).$$

Im folgenden soll gezeigt werden, daß die ersten beiden Implikationen strikt sind.

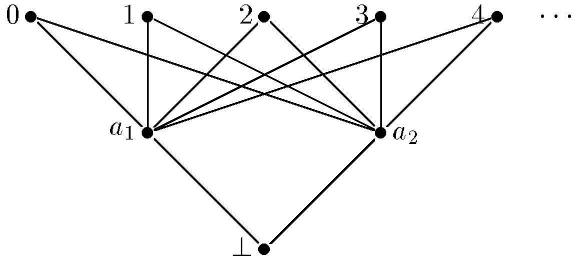
Bemerkung 3.15 *Besitzt X eine offene, nicht kompakte Menge, die Schnitt von endlich vielen kompakt-saturierten Mengen ist, und ist L nicht-trivial, dann gibt es stetige Funktionen $f, g \colon X \to L$, für die $f \ll_2 g$, aber nicht $f \ll g$ erfüllt ist.*

BEWEIS: Seien $K_1, \ldots, K_n \in \mathsf{K_{sat}}\, X$ kompakt-saturierte Mengen, und sei $O := \bigcap_{i=2}^n K_i \in \Omega X$ offen aber nicht kompakt. (Man beachte, daß der Index bei 2 beginnt.) Außerdem wähle man a und b so aus L, daß $\perp < a \ll b$ gilt. (Dies ist immer möglich, wenn L nicht-trivial, d. h. $L \supset \{\perp\}$ ist.)

Die Funktionen $f := (O \searrow a)$ und $g := (O \searrow b)$ erfüllen $f \ll_2 g$, denn man kann $V_1 := O$, $Q_1 := \emptyset$, $t_1 := a$ setzen und $V_i := X$, $Q_i := K_i$, $t_i := \perp$ für alle $i = 2, \ldots, n$. Damit sind dann die Bedingungen für $f \ll_2 g$ erfüllt.

Daß $f \ll g$ nicht zutrifft, sieht man so: Da O nicht kompakt ist, gibt es eine gerichtete Familie von offenen Mengen $\{O_j\}_{j \in J}$, deren Vereinigung O überdeckt, von denen aber keine Obermenge von O ist. Somit haben wir $g = (O \searrow b) \leq \bigvee_{j \in J} (O_j \searrow b)$ und $(O_j \searrow b) \not\geq (O \searrow a) = f$ für jedes $j \in J$, was $f \ll g$ entgegensteht. ∎

Beispiel Sei P die unten abgebildete geordnete Menge, d. h. P ist $\mathbb{N} \cup \{a_1, a_2, \perp\}$, durch $\perp < a_i < n$ für $i = 1, 2$ und $n \in \mathbb{N}$ geordnet. Es ist P ein stetiger Bereich (sogar ein



algebraischer L-Bereich), also ist der Raum $X := \Sigma P$ lokalkompakt und nüchtern. Kohärenz ist X aber nicht eigen, denn der Schnitt der beiden kompakten Mengen $\uparrow a_1$ und $\uparrow a_2$, d. h. $\mathbb{N}$, ist nicht kompakt. Da aber $\mathbb{N} = \uparrow a_1 \cap \uparrow a_2$ offen ist, treffen die von Bemerkung 3.15 geforderten Bedingungen auf X zu.

Proposition 3.16 *Sei X lokalkompakt und nüchtern und L ein stetiger Halbverband. Dann impliziert $f \ll g$ genau dann $f \ll_4 g$ für jedes $f, g \in [X \to L]$, wenn X kohärent ist oder L baumartig.*

Beweis: Sei $f \ll g$. Wir brauchen nach Satz 3.9 nur den Fall von baumartigem L zu betrachten. Da die Treppenfunktionen eine Basis bilden, gibt es eine interpolierende Treppenfunktion u mit $f \leq u \ll g$. Um $f \ll_4 g$ zu zeigen ist es ausreichend, $u \ll_4 g$ nachzuweisen.

Wir werden im folgenden V_t und Q_t für endlich viele $t \in L$ konstruieren, so daß die Bedingungen aus Satz 3.9 (4) erfüllt sind. Es sei $\{\langle U_t, t\rangle \mid t \in u[X]\}$ die Normalform von u. Damit haben wir für jedes $t \in u[X]$ die Ungleichung

$$(U_t \searrow t) \leq \bigvee_{s \in u[X]} (U_s \searrow s) = u \ll g.$$

Mit Korollar 3.6 folgt $U_t \ll (\Omega g)\Uparrow t$ für jedes $t \in u[X]$ mit $t \neq \bot$. Um im folgenden die Anomalie von $\bot$ zu umgehen, setzen wir $B_u := u[X] \setminus \{\bot\}$; es ist dann $\{\langle U_t, t\rangle \mid t \in B_u\}$ immer noch eine Darstellung von u. Dann gibt es für jedes $t \in B_u$ eine interpolierende offene Menge $V_t \in \Omega X$ zwischen U_t und $(\Omega g)\Uparrow t$ und eine kompakt-saturierte Menge $K_t \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}}\, X$, so daß

$$U_t \subseteq K_t \subseteq V_t \ll (\Omega g)\Uparrow t$$

erfüllt ist, denn X ist lokalkompakt. Wir definieren daraus für jedes solche t die Menge

$$Q_t := \bigcup_{s \in B_u \setminus \downarrow t} K_s = \bigcup \{K_s \mid s \not\leq t, s \in B_u\}.$$

Da die Vereinigung endlich ist, gilt $Q_t \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}}\, X$. Wir haben schon $V_t \ll (\Omega g)\Uparrow t$, und $uw \leq t$ für jedes $w \notin Q_t$ gilt nach Konstruktion der Mengen Q_t. Es bleibt also nur noch $\operatorname{supp} u \subseteq \bigcup_{t \in B_u} V_t \setminus Q_t$ nachzuweisen. Dazu werden wir den Ausdruck $V_t \setminus Q_t$ genauer analysieren.

Da L baumartig ist, folgt aus $s \not\leq t$ entweder, daß $s > t$ gilt, oder die Menge $\{s, t\}$ ist unbeschränkt. Im zweiten Fall sind $(\Omega g)\Uparrow s$ und $(\Omega g)\Uparrow t$ disjunkt und folglich auch V_t und K_s. Zieht man von V_t die Menge $Q_t = \bigcup_{s \in u[X] \setminus \downarrow t} K_s$ ab, so kann man sich also auf solche K_s beschränken, für die $s > t$ gilt. Eine weitere Abschätzung liefert

$$\begin{aligned} V_t \setminus Q_t &= V_t \setminus \bigcup \{K_s \mid s > t, s \in B_u\} \\ &\supseteq V_t \setminus \bigcup \{V_s \mid s > t, s \in B_u\} \\ &=: H_t. \end{aligned}$$

Läßt sich $\operatorname{supp} u$ bereits mit den Mengen H_t überdecken, so ist alles gezeigt.

Dafür zeigen wir zunächst, daß $\bigcup_{t \in B_u} H_t$ gleich $\bigcup_{t \in B_u} V_t$ ist. Dies sieht man durch Ordnungsinduktion so: Ist t in B_u maximal, d. h. gibt es kein $s \in B_u$ mit $s > t$, so ist H_t gleich V_t.

Gelte $\bigcup_{t\in T} H_t = \bigcup_{t\in T} V_t$ bereits für ein Endstück T von B_u, und sei r in $B_u \backslash T$ maximal bzgl. der Ordnung in B_u. Dann ist

$$\begin{aligned}
H_r \;\cup\; \bigcup_{t\in T} H_t &= V_r \setminus \bigcup \{V_s \mid s > r, s \in B_u\} \;\cup\; \bigcup_{t\in T} H_t \\
&\supseteq V_r \setminus \bigcup \{V_s \mid s \in T\} \;\cup\; \bigcup_{t\in T} H_t \\
&= V_r \setminus \bigcup_{t\in T} V_t \;\cup\; \bigcup_{t\in T} V_t \\
&= V_r \;\cup\; \bigcup_{t\in T} V_t.
\end{aligned}$$

Da B_u endlich ist, erhalten wir $\bigcup_{t\in B_u} H_t = \bigcup_{t\in B_u} V_t$. Somit haben wir

$$\bigcup_{t\in B_u} V_t \setminus Q_t \supseteq \bigcup_{t\in B_u} H_t = \bigcup_{t\in B_u} V_t \supseteq \bigcup_{t\in B_u} U_t = \operatorname{supp} u$$

gezeigt, also sind wir fertig.

Nehmen wir umgekehrt an, weder L ist baumartig noch X kohärent. Nach Satz 1.14 ist X nicht stabil, und Proposition 3.5 versieht uns daher mit $U \in \Omega X$, $s \in L \setminus \{\bot\}$ und $g \in [X \to L]$, so daß die Stufenfunktion $(U \searrow s)$ weit-unter g liegt, aber $U \ll (\Omega g)\!\uparrow\! s$ nicht erfüllt ist. Diese beiden Funktionen erfüllen auch nicht $(U \searrow s) \ll_4 g$, wie wir sogleich sehen werden.

Angenommen, es wäre $(U \searrow s) \ll_4 g$. Dann gibt es $V_i \in \Omega X$, $Q_i \in \mathsf{K_{sat}}\, X$ und $t_i \in L$ für $i = 1, \ldots, n$, so daß die Bedingungen von Satz 3.9 (4) erfüllt sind. Folglich gibt es für jedes $x \in U$ einen Index i_x, so daß $x \in V_{i_x} \setminus Q_{i_x}$ gilt und sowohl

$$s = (U \searrow s)x \le t_{i_x} \quad \text{als auch} \quad (\Omega g)\!\uparrow\! t_{i_x} \gg V_{i_x}$$

erfüllt sind. Dies ergibt $(\Omega g)\!\uparrow\! s \supseteq (\Omega g)\!\uparrow\! t_{i_x} \gg V_{i_x}$. Da die Menge $\{i_x \mid x \in U\}$ aller möglichen Indizes endlich ist, folgt $(\Omega g)\!\uparrow\! s \gg \bigcup_{x\in U} V_{i_x} \supseteq U$ mit Lemma 1.2, was der Wahl von $(U \searrow s)$ und g widerspricht. ■

3.5 Die Approximationsordnung im Stone-Dual

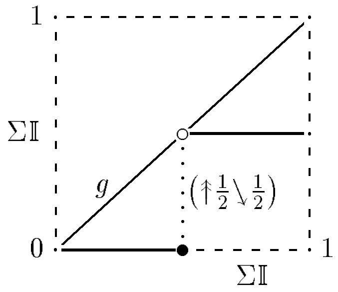
Die für den Nachweis, daß die Treppenfunktionen eine Basis von $[X \to L]$ bilden, zentrale Bedingung ist von der Form

$$U \ll (\Omega g)\!\uparrow\! s. \tag{6}$$

Diese Bedingung ist insofern unbefriedigend, als sie auf die spezielle Definition der Stufenfunktion zugeschnitten ist und sich nicht auf andere Funktionen übertragen läßt. Wir wollen versuchen, diese spezielle Darstellung der Bedingung zu umgehen.

Ist u die Stufenfunktion $(U \searrow s)$, dann folgt aus Bedingung (6), daß g von u approximiert wird, und folglich liegt u punktweise weit-unter g nach Korollar 3.4. Außerdem liegt Ωu punktweise weit-unter Ωg, wie man leicht durch Einsetzen nachrechnet (dabei muß man L ausnehmen, wenn $X = (\Omega u)L = (\Omega g)L$ nicht kompakt ist). Die Umkehrung gilt nicht, selbst wenn X kohärent und L baumartig ist, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel Sei g die Identität auf $\Sigma\mathbb{I}$, dem Einheitsintervall versehen mit der Scott-Topologie, und u die Stufenfunktion $\left(\uparrow\frac{1}{2}\searrow\frac{1}{2}\right)\colon \Sigma\mathbb{I} \to \Sigma\mathbb{I}$. Es ist ux an jeder Stelle x echt kleiner als gx



oder gleich 0, also liegt u punktweise weit-unter g. Das Urbild einer offenen Menge V unter u liegt auch immer weit-unter $(\Omega g)V$, wie man leicht sieht. Da aber die durch $h_n := \frac{n-1}{n}g$ definierte Folge $h_1, h_2, \ldots$ die Funktion g als ihr Supremum hat, ohne daß ein h_n oberhalb von u liegt, kann u nicht weit-unter g liegen. Insbesondere erfüllen u und g Bedingung (6) nicht.

Bedingung (6) läßt sich also nicht dadurch ersetzen, daß sowohl u als auch Ωu die Funktion g bzw. Ωg punktweise approximiert. Da aber Bedingung (6) nur mit offenen Mengen und deren Urbildern opperiert, scheint es zumindest lohnend zu sein, die Approximationsordnung unter dem Gesichtspunkt der Stone-Dualität anzuschauen. Dem werden wir uns für den Rest des Abschnitts widmen und müssen die Frage nach der Bedeutung von Bedingung (6) unbeantwortet lassen.

Als stetiger Bereich ist L nüchtern, nach Korollar 1.19 ist daher $[X \to L] = \mathsf{Top}(X, \Sigma L)$ ordnungsisomorph zu $\mathsf{Frame}(\Omega L, \Omega X)$. Folglich gilt genau dann $f \ll g$ in $[X \to L]$, wenn $\Omega f \ll \Omega g$ in $\mathsf{Frame}(\Omega X, \Omega L)$ erfüllt ist.

Auf Ωf und Ωg in $\mathsf{Frame}(\Omega X, \Omega L)$ können wir unsere bisherigen Resultate über die Approximationsordnung *im Funktionenraum* jedoch nicht anwenden, denn Ωf liegt nicht *als Scott-stetige Funktion* weit-unter Ωg, sondern *als Frame-Morphismus.*

Dies haben wir oben implizit bereits festgestellt: Ist X nicht kompakt, dann gilt

$$(\Omega f)L = X \not\ll X = (\Omega g)L;$$

somit liegt Ωf nicht punktweise weit-unter Ωg, insbesondere daher auch nicht weit-unter Ωg als Scott-stetige Funktion (Korroloar 3.4).

Erweitern wir daher unseren Blick, und betrachten wir die $\mathsf{Frame}(\Omega L, \Omega X)$ echt umfassende Menge $\mathsf{DCPO}(\Omega L, \Omega X)$. Unter der Bedingung, daß X kompakt ist — dies ist, wie wir gesehen haben, unvermeidbar —, versuchen wir die Approximationsordnung in $[X \to L]$ durch die Approximationsordnung in $\mathsf{DCPO}(\Omega L, \Omega X)$ zu beschreiben. Aus diesem Grund seien alle Frames mit der Scott-Topologie versehen. Insbesondere ist dann $\Omega^2 X$ als $\Omega\Omega X = \Omega\Sigma\Omega X$ zu lesen, d. h. als $\sigma\Omega X$. Zuvor müssen wir jedoch zwei kleinere Lemmata über die Struktur von Frames einschieben.

Lemma 3.17 *Ist $(F, \leq)$ ein Frame, dann ist die Infimumsoperation $\wedge\colon F \times F \to F$ Scott-stetig.*

BEWEIS: Sei $D = \{\langle x_i, y_i\rangle \mid i \in I\}$ eine gerichtete Familie in $F \times F$. Dann ist die Menge aller möglichen Paare $\Delta := \{\langle x_i, y_j\rangle \mid i, j \in I\}$ eine gerichtete Obermenge von D, und D ist cofinal in Δ. Insbesondere gilt $\bigvee^{\uparrow} D = \bigvee^{\uparrow} \Delta$. Schreiben wir $(\cdot\wedge\cdot)$ für die Infimumsoperation in Präfixnotation, so haben wir

$$
\begin{aligned}
\bigvee^{\uparrow}(\cdot\wedge\cdot)[D] &= \bigvee^{\uparrow}_{i\in I}(x_i \wedge y_i) && \\
&= \bigvee^{\uparrow}_{i,j\in I}(x_i \wedge y_j) && D \text{ ist cofinal in } \Delta;\ \wedge \text{ ist monoton} \\
&= \bigvee^{\uparrow}_{i\in I}\Big(x_i \wedge \bigvee^{\uparrow}_{j\in I} y_j\Big) && \text{Frame-Distributivität } (x_i \text{ fest}) \\
&= \Big(\bigvee^{\uparrow}_{i\in I} x_i\Big) \wedge \Big(\bigvee^{\uparrow}_{j\in I} y_j\Big) && \text{Frame-Distributivität } (\textstyle\bigvee_j y_j \text{ fest}) \\
&= (\cdot\wedge\cdot)\bigvee^{\uparrow}\Delta && \\
&= (\cdot\wedge\cdot)\bigvee^{\uparrow} D && D \text{ ist cofinal in } \Delta.
\end{aligned}
$$

Somit erhält $(\cdot\wedge\cdot)$ gerichtete Suprema, d. h. ist Scott-stetig. ∎

Lemma 3.18 *Sind F und G Frames, und ist Φ eine gerichtete Teilmenge von $\mathsf{Frame}(F, G)$, dann ist das punktweise berechnete Supremum von Φ ein Frame-Morphismus.*

BEWEIS: Sei φ das punktweise berechnete Supremum von Φ. Wir müssen die Verträglichkeit von φ mit beliebigen Suprema und endlichen Infima nachweisen. Sei daher $X \subseteq F$. Wir haben dann

$$
\begin{aligned}
\varphi\bigvee X &= \bigvee^{\uparrow}_{\psi\in\Phi}\Big(\psi\bigvee_{x\in X} x\Big) && \text{Definition von } \varphi \\
&= \bigvee^{\uparrow}_{\psi\in\Phi}\bigvee_{x\in X}\psi x && \psi \text{ ist Frame-Morphismus} \\
&= \bigvee_{x\in X}\bigvee^{\uparrow}_{\psi\in\Phi}\psi x && \text{Suprema kommutieren} \\
&= \bigvee_{x\in X}\varphi x && \text{Definition von } \varphi.
\end{aligned}
$$

Also erhält φ alle Suprema.

Das Infimum der leeren Menge, d. h. $\top_F$ muß von φ auf $\top_G$ abgebildet werden. Das ist aber der Fall, da dies alle $\psi \in \Phi$ tun und φ punktweise definiert wurde. Für $x, y \in F$ gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi(x \wedge y) &= \bigvee^{\uparrow}_{\psi\in\Phi} \psi(x \wedge y) \\
&= \bigvee^{\uparrow}_{\psi\in\Phi} \psi x \wedge \psi y && \psi \text{ ist Frame-Morphismus} \\
&= \Big(\bigvee^{\uparrow}_{\psi\in\Phi} \psi x\Big) \wedge \Big(\bigvee^{\uparrow}_{\psi\in\Phi} \psi y\Big) && \text{Scott-Stetigkeit von } \wedge \text{ (Lemma 3.17)} \\
&= \varphi x \wedge \varphi y.
\end{aligned}$$

Damit erhält φ auch alle endlichen Infima und ist somit ein Frame-Morphismus. ■

Als Konsequenz des letzten Lemmas ist es für eine gerichtete Familie $\Phi \subseteq \mathsf{Frame}(\Omega L, \Omega X)$ von Frame-Morphismen unerheblich, ob wir ihr Supremum in $\mathsf{Frame}(\Omega L, \Omega X)$ oder in der echt größeren geordneten Menge $\mathsf{DCPO}(\Omega L, \Omega X)$ berechnen: Denn das punktweise berechnete Supremum von Φ ist unter *allen* Abbildungen die kleinste obere Schranke. Nach Lemma 3.18 ist es aber ein Frame-Morphismus und damit insbesondere auch Scott-stetig.

Proposition 3.19 *Ist $u = \bigvee_{s\in u[X]}(U_s \searrow s)$ eine Treppenfunktion in Normalform, dann ist ihr Stone-Dual durch*

$$\Omega \bigvee_{s\in u[X]} (U_s \searrow s) = \bigvee_{s\in u[X]} \Omega(U_s \searrow s)$$

gegeben. Das Stone-Dual einer Stufenfunktion $(U \searrow s)$ ist dabei

$$\Omega(U \searrow s) = \big(\mathfrak{O}(\bot) \searrow X\big) \vee \big(\mathfrak{O}(s) \searrow U\big),$$

eine Treppenfunktion zweiter Stufe.

Beweis: Wir diskutieren zunächst den Fall einer Stufenfunktion $v = (U \searrow s)$. Offensichtlich ist

$$(\Omega(U \searrow s))V = \begin{cases} X & \text{falls } \bot \in V, \text{ d. h. falls } V = L \\ U & \text{falls } s \in V \not\ni \bot \\ \emptyset = \bot_{\Omega X} & \text{falls } s \notin V \end{cases}$$

erfüllt. Jetzt wollen wir zeigen, daß dies eine Treppenfunktion von $\Sigma\Omega L$ nach $\Sigma\Omega X$ definiert. Die Bedingung $V = L$ kann man auch als $V \in \mathfrak{O}(\bot)$ schreiben, denn L ist die einzige Umgebung von $\bot$. Ebenso bedeutet $s \in V$ gerade, daß V eine Umgebung von s ist, also gilt $V \in \mathfrak{O}(s)$. Umgebungsfilter von Punkten sind immer Scott-offen. Somit haben wir $\Omega(U \searrow s)$ als die Treppenfunktion

$$\Omega(U \searrow s) = \big(\mathfrak{O}(\bot) \searrow X\big) \vee \big(\mathfrak{O}(s) \searrow U\big)$$

erkannt. Dabei fällt der Stufenfunktion $\big(\mathfrak{O}(\bot) \searrow X\big)$ nur die Aufgabe zu sicherzustellen, daß die entsprechende Abbildung ein Frame-Morphismus ist. Sie garantiert eine der Bedingungen, die jeder Frame-Morphismus erfüllen muß: $L = \top_{\Omega L}$ wird auf $X = \top_{\Omega X}$ abgebildet. Insbesondere ist die Gleichheit $\varphi = \varphi \vee \big(\mathfrak{O}(\bot) \searrow X\big)$ für jeden Frame-Morphismus erfüllt. Davon werden wir im folgenden Gebrauch machen.

Sei jetzt u eine Treppenfunktion und $\{\langle U_s, s\rangle \mid s \in u[X]\}$ ihre Normalform. Wir haben damit für u und eine beliebige offene Menge $V \in \Omega L$ die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}
(\Omega u)V &= \Big(\Omega \bigvee_{s\in u[X]} (U_s \searrow s)\Big)V && \text{Normalform von } u \\
&= \bigcup_{s\in V\cap u[X]} U_s && U_s := u^{-1}[\uparrow s] \\
&= \bigcup_{s\in u[X]:\, V\in\mathfrak{O}(s)} U_s && \\
&= \Big(\bigvee_{s\in u[X]} \big(\mathfrak{O}(s)\searrow U_s\big)\Big)V && \text{Definition der Treppenfunktion} \\
&= \Big(\big(\mathfrak{O}(\bot)\searrow X\big) \vee \bigvee_{s\in u[X]} \big(\mathfrak{O}(s)\searrow U_s\big)\Big)V && \big(\mathfrak{O}(\bot)\searrow X\big) \text{ leistet keinen Beitrag} \\
&= \Big(\bigvee_{s\in u[X]} \big(\mathfrak{O}(\bot)\searrow X\big) \vee \big(\mathfrak{O}(s)\searrow U_s\big)\Big)V && \\
&= \Big(\bigvee_{s\in u[X]} \Omega(U_s\searrow s)\Big)V && \text{Diskussion für die Stufenfunktionen.}
\end{aligned}$$

Also gilt $\Omega u = \bigvee_{s\in u[X]} \Omega(U_s\searrow s)$. ■

Lemma 3.20 *Sei X kompakt. Ist $(U\searrow s)$ eine Stufenfunktion, für die $U \ll (\Omega g)\twoheaduparrow s$ gilt, dann liegt $\Omega(U\searrow s)$ in $\mathsf{DCPO}(\Omega L, \Omega X)$ weit-unter Ωg.*

Beweis: Nach Proposition 3.19 hat $\Omega(U\searrow s)$ die Form $\big(\mathfrak{O}(\bot)\searrow X\big) \vee \big(\mathfrak{O}(s)\searrow U\big)$. Wir werden zeigen, daß beide Stufenfunktionen weit-unter Ωg liegen, mit Lemma 1.2 folgt dann die Behauptung.

Als erstes nehmen wir $\big(\mathfrak{O}(\bot)\searrow X\big) \ll \Omega g$ in Angriff. Da X kompakt ist, gilt $\twoheaduparrow X = \uparrow X = \{X\}$, also haben wir

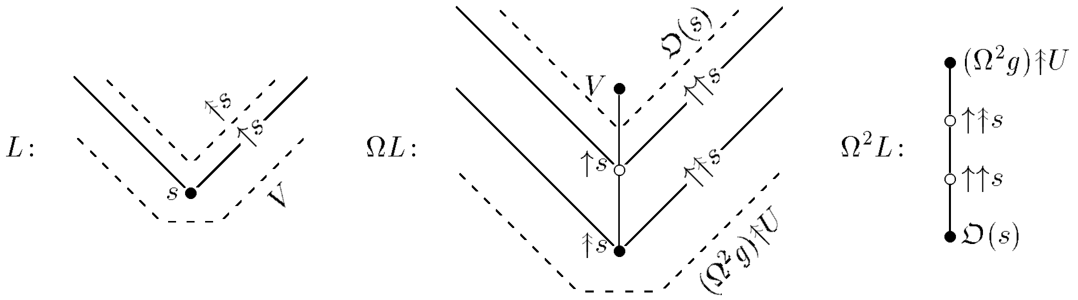
$$\begin{aligned}
(\Omega^2 g)\twoheaduparrow X &= (\Omega^2 g)\uparrow X \\
&= \big\{V \in \Omega L \;\big|\; (\Omega g)V \in \uparrow X\big\} \\
&= \big\{V \in \Omega L \;\big|\; (\Omega g)V = X\big\} \\
&\supseteq \{L\} = \mathfrak{O}(\bot).
\end{aligned}$$

Als endliche Menge ist $\mathfrak{O}(\bot)$ kompakt, folglich gilt $\mathfrak{O}(\bot) \ll \mathfrak{O}(\bot) \subseteq (\Omega^2 g)\twoheaduparrow X$. Nach Lemma 3.2 (1) ist daher $\big(\mathfrak{O}(\bot)\searrow X\big) \ll \Omega g$ erfüllt.

Um $\big(\mathfrak{O}(s)\searrow U\big) \ll \Omega g$ zu zeigen, beobachten wir zunächst, daß

$$\begin{aligned}
(\Omega^2 g)\twoheaduparrow U &= \big\{V \in \Omega L \;\big|\; (\Omega g)V \in \twoheaduparrow U\big\} \\
&= \big\{V \in \Omega L \;\big|\; U \ll (\Omega g)V\big\} \\
&\ni \twoheaduparrow s
\end{aligned}$$

gilt, wobei die Elementbeziehung wegen $U \ll (\Omega g)\twoheaduparrow s$, d. h. nach Voraussetzung folgt. Jede Umgebung $V \in \mathfrak{O}(s) \subseteq \Omega L$ von s enthält $\uparrow s$ und ist wegen $\twoheaduparrow s \subseteq \uparrow s$ größer als $\twoheaduparrow s$. Das reicht aus, um $\mathfrak{O}(s) \ll (\Omega^2 g)\dagger U$ zu beweisen: Mit dem Element $\dagger s \in \Omega L$ enthält $(\Omega^2 g)\dagger U$ auch das größere Element V. Somit ist $(\Omega^2 g)\dagger U$ eine Obermenge von $\mathfrak{O}(s)$. Die kompakte



Menge $\uparrow\dagger s \in \mathsf{K_{sat}}\,\Omega L$ liegt aber zwischen ihnen. Folglich gilt $\mathfrak{O}(s) \ll (\Omega^2 g)\dagger U$ und damit erneut $\big(\mathfrak{O}(s)\backslash U\big) \ll \Omega g$.

Beide Bestandteile von $\Omega(U\backslash s)$ liegen weit-unter Ωg, also auch $\Omega(U\backslash s)$. ∎

Satz 3.21 *Sei X kompakt, und zwei stetige Funktionen $f, g \in [X \to L]$ seien gegeben. Gilt $\Omega f \ll \Omega g$ in $\mathsf{DCPO}(\Omega L, \Omega X)$, dann auch $f \ll g$ in $[X \to L]$. Die Umkehrung gilt genau dann für alle f und g aus $[X \to L]$, wenn X stabil oder L baumartig ist.*

BEWEIS: Liege Ωf in $\mathsf{DCPO}(\Omega L, \Omega X)$ weit-unter Ωg. Wir wollen $f \ll g$ nachweisen, dies ist aber — via Stone-Dualität — äquivalent zu $\Omega f \ll \Omega g$ in $\mathsf{Frame}(\Omega L, \Omega X)$.

Sei daher Φ eine gerichtete Familie von Frame-Morphismen aus $\mathsf{Frame}(\Omega L, \Omega X)$ mit $\Omega g \le \bigvee^{\uparrow} \Phi$. Wo wir dieses Supremum berechnen, braucht uns nach den Überlegungen, die wir hinter Lemma 3.18 angestellt hatten, nicht zu kümmern.

So sieht man, daß Ωf auch in $\mathsf{Frame}(\Omega L, \Omega X)$ weit-unter Ωg liegt.

Sei umgekehrt $f \ll g$. Dann liegt eine interpolierende Treppenfunktion u oberhalb von f und weit-unter g.

Ist X stabil oder L baumartig, dann gilt für jedes Paar $\langle U_s, s\rangle$ der Normalform von u nach Korollar 3.6 die Bedingung $U_s \ll (\Omega g)\dagger s$. Also liegt $\Omega(U_s\backslash s)$ weit-unter Ωg in $\mathsf{DCPO}(\Omega L, \Omega X)$ nach Lemma 3.20. Wegen Proposition 3.19 ist Ωu das Supremum der Funktionen $\Omega(U_s\backslash s)$ für $s \in u[X]$, also liegt Ωu weit-unter Ωg in $\mathsf{DCPO}(\Omega L, \Omega X)$ nach Lemma 1.2. Da Ωu aber oberhalb von Ωf liegt, wird Ωg auch von Ωf approximiert.

Ist weder X stabil noch L baumartig, dann läßt sich wie im Beweis von Proposition 3.5 ein Gegenbeispiel konstruieren. Für die dort angegebenen Funktionen $f := (U\backslash c)$ und $g := (V_1\backslash b_1) \vee (V_2\backslash b_2)$ gilt $f \ll g$. Das Element c liegt nicht unter b_1 oder b_2, es gibt daher eine offene Umgebung O von c, die weder b_1 noch b_2 enthält, denn L ist stetig. Es ist dann $(\Omega f)O = U$ und $(\Omega g)O = V_1 \cap V_2$. Es waren aber die Mengen so gewählt, daß $U \not\ll V_1 \cap V_2$ erfüllt ist. Es kann daher Ωf in $\mathsf{DCPO}(\Omega L, \Omega X)$ nicht weit-unter Ωg liegen, denn es liegt nicht einmal punktweise weit-unter Ωg. ∎

Als Konsequenz von Satz 3.21 liegt unter den angegebenen Bedingungen Ωf punktweise weit-unter Ωg. Für kohärentes X läßt sich dies auch ohne Kompaktheit erreichen; Satz 3.21 wird dafür nicht benutzt.

Proposition 3.22 *Sei X ein kohärenter Raum, und $f, g \in [X \to L]$ seien stetige Funktionen. Dann impliziert $f \ll g$ für alle $V \in \Omega L \setminus \{L\}$ auch $(\Omega f)V \ll (\Omega g)V$.*

Beweis: Nach Proposition 3.7 gibt es eine Co-Treppenfunktion k mit $f \leq k \leq g$. Anwendung auf $V \in \Omega L \setminus \{L\}$ liefert $(\Omega f)V \subseteq k^{-1}[V] \subseteq (\Omega g)V$. Wir müssen nur nachweisen, daß $k^{-1}[V]$ für jedes offene $V \neq L$ kompakt ist.

Da X kohärent ist, existiert die Normalform $\{\langle K_s, s\rangle \mid s \in k[X]\}$, wobei wir $K_\perp$ ausnehmen müssen. Sei daher $B_k := k[X] \setminus \{\perp\}$; für jedes $s \in B_k$ ist dann $\langle K_s \searrow s\rangle$ eine Co-Stufenfunktion. Es gilt somit

$$k^{-1}[V] = k^{-1}\big[V \cap k[X]\big] = k^{-1}[V \cap B_k] = \bigcup_{s \in V \cap B_k} K_s,$$

denn V enthält $\perp$ nicht. Folglich ist $k^{-1}[V]$ als endliche Vereinigung kompakter Mengen kompakt. ■

Wir greifen nun Korollar 3.14 wieder auf, und charakterisieren auf diese Weise die eigentlichen Abbildungen zwischen kohärenten Räumen.

Proposition 3.23 *Seien X und Y kohärente Räume und L ein nicht-trivialer stetiger Halbverband. Für eine stetige Funktion $h\colon Y \to X$ sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:*

1. *Die Abbildung h ist eigentlich.*
2. *Für je zwei stetige Funktionen $f, g \in [X \to L]$ folgt aus $f \ll g$ schon $f \circ h \ll g \circ h$.*

Beweis: Ist h eigentlich, so liefert Korollar 3.14 das Gewünschte.

Nehmen wir umgekehrt an, h sei nicht eigentlich. Dann gibt es nach Proposition 1.15 zwei in X offene Mengen U und V, von denen zwar U weit-unter V liegt, diese Beziehung von Ωh jedoch nicht erhalten wird, d. h. es gilt $(\Omega h)U \not\ll (\Omega h)V$.

Da L nicht-trivial ist, gibt es dort Elemente s und t, die $\perp < s \ll t$ erfüllen. Definieren wir $f := (U \searrow s)$ und $g := (V \searrow t)$, dann liegt f weit-unter g, denn es gilt $V \ll U = (\Omega g){\uparrow}s$.

Es kann aber $f \circ h \ll g \circ h$ nicht gelten, denn nach Proposition 3.22 steht

$$\big(\Omega(f \circ h)\big)\big(L \setminus \{\perp\}\big) = (\Omega h)U \not\ll (\Omega h)V = \big(\Omega(g \circ h)\big)\big(L \setminus \{\perp\}\big)$$

im Widerspruch dazu. ■

Die Approximationsordnung im Stone-Dual für lokalkompakte Räume

Wir werden nun versuchen, die Einschränkung auf kompakte Räume zu umgehen. Dabei soll Satz 3.21 auf geeignete kompakte Approximationen eines lokalkompakten Raumes angewendet werden.

Lemma 3.24 *Sei X ein lokalkompakter Raum. Für zwei Funktionen $f, g \in [X \to L]$ sind die folgenden zwei Bedingungen äquivalent:*

1. *$f \ll g$.*

2. *Es gibt eine kompakt-saturierte Menge $K \in \mathsf{K_{sat}}\,X$, die $\operatorname{supp} f$ enthält, so daß die Restriktion $f|_K$ weit-unter $g|_K$ in $[K \to L]$ ist.*

Beweis: Approximiert f die Funktion g, dann liegt $\operatorname{supp} f$ weit-unter $\operatorname{supp} g$. Es gibt daher eine Treppenfunktion u, die weit-über f liegt und g approximiert. Folglich gibt es eine kompakt-saturierte Menge K zwischen $\operatorname{supp} u$ und $\operatorname{supp} g$, insgesamt ist daher

$$\operatorname{supp} f \ll \operatorname{supp} u \subseteq K \subseteq \operatorname{supp} g$$

erfüllt.

Wir behaupten $f|_K$ liege in $[K \to L]$ weit-unter $g|_K$. Sei daher $H \subseteq [K \to L]$ eine gerichtete Familie stetiger Funktionen mit $\bigvee^{\uparrow} H \geq g|_K$. Dann kann man zu jeder Funktion $h \in H$ eine Funktion $h'\colon X \to L$ durch

$$h'(x) := \begin{cases} hx & \text{falls } x \in \operatorname{supp} u \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

definieren. Jedes h' ist stetig, denn für jede offene Menge $U \in \Omega L \setminus \{L\}$ ist das Urbild ${h'}^{-1}[U] = h^{-1}[U] \cap \operatorname{supp} u$ offen.

Aus $\bigvee^{\uparrow}_{h\in H} h \geq g|_K$ folgt $\bigvee^{\uparrow}_{h\in H} h' \geq u$. Also gibt es ein $h_0 \in H$ mit $f \leq h'_0$, denn u liegt weit-über f. Dann liegt aber auch schon h_0 über $f|_K$, und somit wird $g|_K$ durch $f|_K$ approximiert.

Werde umgekehrt $g|_K$ durch $f|_K$ für eine kompakt-saturierte Obermenge K von $\operatorname{supp} f$ approximiert, und sei H eine gerichtete Familie stetiger Funktionen in $[X \to L]$ mit $\bigvee^{\uparrow} H \geq g$. Dann liegt auch $\bigvee^{\uparrow}_{h\in H} h|_K$ über $g|_K$, also gibt es ein $h \in H$ mit $h|_K \geq f|_K$. Wegen $\operatorname{supp} f \subseteq K$ ist dann aber auch $f \leq h$ gültig. ■

Leider hilft uns Lemma 3.24 im allgemeinen nur wenig weiter: Zwar haben wir die Situation für nicht-kompaktes X in eine Situation transformiert, wo $X' := K$ kompakt ist, damit wir Satz 3.21 anwenden können, muß die Spurtopologie ΩK jedoch einen stetigen Verband bilden. Ist L nicht baumartig, dann muß darüber hinaus K auch noch stabil sein. Es ist a priori nicht klar, warum ein Raum genügend viele kompakt-saturierte Mengen mit dieser Eigenschaft besitzen sollte.

Definition Sei $\mathcal{K} \subseteq \mathfrak{P}X$ eine Menge von Teilmengen eines Raumes X. Wir sagen, $\mathcal{K}$ *trennt die offenen Mengen* von X, wenn es für je zwei offene Mengen O und O', wovon O weit-unter O' liege, eine Menge K aus $\mathcal{K}$ gibt, die $O \subseteq K \subseteq O'$ erfüllt.

In jedem lokalkompakten Raum X trennt $\mathsf{K_{sat}}\,X$ die offenen Mengen.

Proposition 3.25 *Ist X ein kohärenter Raum, dann trennen die kompakten und kohärenten Teilräume die offenen Mengen.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, daß in X jede kompakt-saturierte Menge in der Spurtopologie kohärent ist, denn $\mathsf{K_{sat}}\,X$ trennt die offenen Mengen. Sei daher $K \in \mathsf{K_{sat}}\,X$ eine kompakt-saturierte Menge. Wir zeigen nacheinander, daß K lokalkompakt, $\mathsf{K_{sat}}\,K$ schnittabgeschlossen und K nüchtern ist.

Ist $x \in K$ ein Punkt und $V \cap K \in \Omega K$ eine Umgebung von x für $V \in \Omega X$, dann gibt es eine kompakt-saturierte Umgebung Q von x in X, die ganz in V liegt, denn X ist lokalkompakt. Die Menge $K \cap \operatorname{int} Q$ ist offen in ΩK, und $K \cap Q$ ist eine kompakt-saturierte Menge in X, denn X ist kohärent. Damit ist $K \cap Q$ auch kompakt in ΩK und somit eine kompakte Umgebung von x in ΩK.

Eine Teilmenge von K ist genau dann kompakt in K, wenn sie es in X ist, und da K saturiert ist sind somit die kompakt-saturierten Teilmengen von K genau die Teilmengen von K, die in X kompakt-saturiert sind. Damit vererbt sich aber die Schnittabgeschlossenheit von $\mathsf{K}_{\mathsf{sat}}\, X$ auf $\mathsf{K}_{\mathsf{sat}}\, K$.

Die Nüchternheit eines saturierten Teilraumes eines nüchternen Raumes wird durch Proposition 3.28 gesichert. ∎

Wir können nun einen alternativen Beweis von Proposition 3.22 angeben, indem wir Proposition 3.25 und das folgende Resultat zusammennehmen.

Proposition 3.26 *Sei X ein lokalkompakter Raum und $\mathcal{K} \subseteq \mathsf{K}_{\mathsf{sat}}\, X$ sei eine Menge kompakt-saturierte Mengen, deren Spurtopologien stetige Verbände sind und die die offenen Mengen trennen. Seien $f, g \in [X \to L]$ stetige Funktionen. Ist jedes $K \in \mathcal{K}$ stabil oder L baumartig, dann impliziert $f \ll g$ für alle $V \in \Omega L \setminus \{L\}$ auch $(\Omega f)V \ll (\Omega g)V$.*

Beweis: Nach Lemma 3.24 gibt es eine kompakt-saturierte Menge $K \in \mathsf{K}_{\mathsf{sat}}\, X$, die $\operatorname{supp} f$ umfaßt, so daß $f|_K$ weit-unter $g|_K$ in $[K \to L]$ liegt. Da $\mathcal{K}$ die offenen Mengen trennt, hätten wir im Beweis von Lemma 3.24 K auch so wählen können, daß es in $\mathcal{K}$ liegt. Sei daher o. B. d. A. dies angenommen. Ist K stabil oder L baumartig, dann können wir Satz 3.21 auf $[K \to L]$ anwenden.

Für jede offene Menge $V \in \Omega L$ haben wir daher, daß $\big(\Omega(f|_K)\big)V = K \cap (\Omega f)V$ die Menge $\big(\Omega(g|_K)\big)V = K \cap (\Omega g)V$ in ΩK approximiert. Liegt $\bot_L$ nicht in V, dann ist $(\Omega f)V$ eine Teilmenge von $\operatorname{supp} f \subseteq K$. Ist $\mathcal{O}$ eine gerichtete Menge offener Mengen in ΩX mit $\bigcup^{\uparrow} \mathcal{O} \supseteq (\Omega g)V$, dann ist $\bigcup^{\uparrow}_{O \in \mathcal{O}} K \cap O \supseteq K \cap (\Omega g)V = \big(\Omega(g|_K)\big)V$, und folglich gibt es ein $O_1 \in \mathcal{O}$ mit $K \cap O_1 \supseteq \big(\Omega(f|_K)\big)V$. Also gilt $(\Omega f)V \subseteq O_1$. ∎

Wir müssen noch den Beweis nachtragen, daß jede saturierte Teilmenge eines nüchternen Raumes nüchtern ist; er wurde mir von M. Kegelmann mitgeteilt. Zugegebenermaßen ist es unbefriedigend, daß der Beweis auf einer unveröffentlichten Arbeit von Ph. Sünderhauf beruht, für einen Beweis mit alternativen Mitteln fehlte mir aber bisher die Zeit.

Definition Sei T ein topologischer Raum und $\alpha\colon I \to T$ ein Netz. Das Netz α *liegt schließlich* in der offenen Menge $O \in \Omega T$, wenn es ein $j \in I$ gibt, so daß für alle $i \in I$ aus $i \geq j$ bereits $\alpha_i \in O$ folgt.

Das Netz α heißt *beobachtend*, wenn für jedes $i \in I$ und für jedes $O \in \Omega T$ aus $\alpha_i \in O$ folgt, daß α schließlich in O liegt.

Ein Netz α *konvergiert stark* gegen einen Punkt $x \in T$, wenn α im üblichen Sinn gegen x konvergiert und x in jeder offenen Menge enthalten ist, in der α schließlich liegt.

Satz 3.27 *Ein topologischer Raum ist genau dann nüchtern, wenn jedes beobachtende Netz stark gegen genau einen Punkt konvergiert.*

Beweis: [Sü95] ∎

Proposition 3.28 *Jeder saturierte Teilraum eines nüchternen Raumes ist nüchtern.*

Beweis: Sei S ein saturierter Teilraum eines nüchternen Raumes X und α ein beobachtendes Netz in S. Wir müssen zeigen, daß α einen eindeutigen starken Konvergenzpunkt in S besitzt.

Ist α_i ein Element von $O \in \Omega X$, dann ist es auch ein Element von $O \cap S \in \Omega S$, denn α ist ein Netz in S. Da α in S beobachtend ist, liegt α schließlich in der offenen Menge $O \cap S$ von ΩS. Damit liegt α insbesondere auch schließlich in O. Folglich ist α beobachtend in X und besitzt dort einen eindeutigen starken Konvergenzpunkt x.

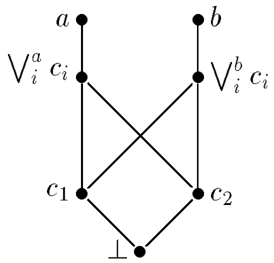
Angenommen x läge nicht in S. Dann ist $X \setminus \mathrm{cl}\{x\} \in \Omega X$ eine Umgebung von S, denn S ist saturiert. Diese Umgebung enthält das ganze Netz α, also muß sie nach der Definition der starken Konvergenz auch x enthalten. Widerspruch!

Wir zeigen, daß α auch in S stark gegen x konvergiert. Da S ein Teilraum von X ist, vererbt sich die Konvergenzeigenschaft. Liegt das Netz α schließlich in der offenen Menge $O \cap S \in \Omega S$, dann muß x auch in O und damit in $O \cap S$ liegen, denn x ist der starke Konvergenzpunkt von α in X. Folglich konvergiert α stark gegen x.

Es ist x auch der einzige starke Konvergenzpunkt, denn S ist durch Erbschaft ein T_0-Raum. ■

3.6 Verallgemeinerung zu stetigen L-Bereichen

Viele Resultate über die Approximationsordnung — insbesondere Satz 3.9 — bleiben auch dann noch gültig, wenn man für L stetige L-Bereiche zuläßt. Stetige L-Bereiche sind Bereiche mit kleinstem Element, bei denen jedes Hauptideal $\downarrow a$ ein vollständiger Verband ist. Negativ ausgedrückt bedeutet dies, daß im Unterschied zu stetigen Halbverbänden das Supremum einer durch a beschränkten Menge M nur in $\downarrow a$ existieren muß und nur bzgl. $\downarrow a$ Gültigkeit hat: es kann durchaus von dem Supremum in $\downarrow b$ verschieden sein. Man muß also



bei jedem Supremum buchführen, in welchem Hauptideal es berechnet werden soll. Ist M eine Teilmenge des L-Bereichs L, die durch $a \in L$ nach oben beschränkt wird, so soll daß in $\downarrow a$ berechnete Supremum mit $\bigvee^a M$ bezeichnet werden. Sind z. B. $(U_i \searrow s_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ Stufenfunktionen unterhalb von $g \in [X \to L]$, dann wird das in $\downarrow g$ berechnete Supremum als $\bigvee^g_{i=1,\ldots,n}(U_i \searrow s_i)$ geschrieben und ist durch

$$\bigvee^g_{i=1,\ldots,n} (U_i \searrow s_i)x = \bigvee^{gx}_{i:\, x \in U_i} s_i$$

gegeben. Die Vielfalt möglicher Suprema wird glücklicherweise durch das folgende Lemma beschränkt, so daß sich mit L-Bereichen gut arbeiten läßt.

Lemma 3.29 *Sei L ein L-Bereich und a und b obere Schranken von $M \subseteq L$. Sind $\bigvee^a M$ und $\bigvee^b M$ beschränkt, dann sind sie gleich.*

BEWEIS: Sei c eine obere Schranke von $\bigvee^a M$ und $\bigvee^b M$, d.h. $\bigvee^a M$ und $\bigvee^b M$ liegen in $\downarrow c$. Dann ist das Supremum $\bigvee^c M$ in $\downarrow c$ kleiner als die oberen Scranken $\bigvee^a M$ und $\bigvee^b M$ von M. Insbesondere liegt $\bigvee^c M$ unterhalb von a und b, ist also eine obere Schranke von M in $\downarrow a$ und in $\downarrow b$. ■

Für unsere Zwecke müssen wir oft nur Suprema betrachten, die innerhalb eines festen Hauptfilters gebildet werden, so daß wir *wie in stetigen Halbverbänden* argumentiert können.

Als erstes beweisen wir eine Variante von Lemma 1.2 für L-Bereiche. Danach wird gezeigt, daß $[X \to L]$ ein stetiger L-Bereich ist.

Lemma 3.30 *Sind $x_1, \ldots, x_n$ Elemente eines L-Bereichs L, die weit-unter $y \in L$ liegen, dann liegt auch $\bigvee^y_{i=1,\ldots,n} x_i$ weit-unter y.*

BEWEIS: Sei A eine gerichtete Familie aus L mit $y \leq a := \bigvee^{\uparrow} A$, dann gibt es $a_1, \ldots, a_n$ aus A, die $x_i \leq a_i$ erfüllen. Der Gerichtetheit von A wegen gibt es somit ein $a_0 \in A$, das über jedem x_i liegt. Daher existiert $\bigvee^{a_0}_{i=1,\ldots,n} x_i$; nach Lemma 3.29 stimmt es mit $\bigvee^y_{i=1,\ldots,n} x_i$ überein, denn beide werden durch a beschränkt. Folglich ist a_0 eine obere Schranke von $\bigvee^y_{i=1,\ldots,n} x_i$. ■

Lemma 3.31 *Ist L ein stetiger L-Bereich und ΩX stetig, dann ist $[X \to L]$ ein L-Bereich.*

BEWEIS: [YMJH96, Lemma 2.7] ■

Proposition 3.32 *Ist L ein stetiger L-Bereich und ΩX stetig, dann ist $[X \to L]$ ein stetiger L-Bereich, der eine Basis aus Treppenfunktionen besitzt. Für alle $g \in [X \to L]$ gilt:*

1. *Für jedes $U \in \Omega X$ und $s \in L$ impliziert $U \ll (\Omega g)\uparrow s$ bereits $(U \searrow s) \ll g$.*
2. *Es ist $g = \bigvee^g \left\{(U \searrow s) \;\middle|\; U \ll (\Omega g)\uparrow s,\ \ U \in \Omega X,\ \ s \in L\right\}$ erfüllt.*

BEWEIS: Nach Lemma 3.31 ist $[X \to L]$ ein L-Bereich. Für die Aussage über Treppenfunktionen muß in Lemma 3.2 (2) nur das Supremumszeichen mit g beschriftet werden. Einzige Schwierigkeit ist, daß das Supremum in $\downarrow g$ von Stufenfunktionen, die g approximieren, eine Treppenfunktion ergibt, die weit-unter g liegt. Dies wird jedoch durch Lemma 3.30 sichergestellt.

Weitere Resultate, die auf stetige *Halbverbände* zugeschnitten sind, wurden nicht benutzt. ■

Proposition 3.33 *Sei L ein stetiger L-Bereich und X ein lokalkompakter, nüchterner Raum, und $f, g \in [X \to L]$ seien stetige Funktionen. Dann approximiert f genau dann g, wenn es eine Co-Treppenfunktion $k = \bigvee^g_{i=1,\ldots,n} \langle K_i \searrow s_i \rangle$ gibt, die oberhalb von f und punktweise weit-unter g liegt.*

BEWEIS: Ebenfalls durch Beschriften der Suprema wird der Beweis von Lemma 3.7 in einen Beweis der Behauptung transformiert. ■

In dieser Weise — durch Beschriften der Suprema — lassen sich fast alle Resultate, die zum Beweis von Satz 3.9 benötigt wurden, modifizieren. Einzige Ausnahme bildet Lemma 3.10, denn gleich an zwei Stellen bricht der Beweis zusammen.

Um zu verstehen, wieso dies der Fall ist, betrachten wir noch einmal das Beispiel $(P, \leq)$ von Seite 42: Die Elemente a_1 und a_2 sind kompakt, folglich sind $\uparrow a_1$ und $\uparrow a_2$ offene und kompakte Mengen. Die (Co-)Stufenfunktionen $(\uparrow a_1 \searrow a_1)$ und $(\uparrow a_2 \searrow a_2)$ liegen unterhalb der Identität id von P, man kann daher ihr Supremum in $\downarrow$id berechnen. Erstaunlicherweise ist dieses Supremum die Identität selbst:

$$\mathrm{id} = (\uparrow a_1 \searrow a_1) \vee^{\mathrm{id}} (\uparrow a_2 \searrow a_2).$$

Man hat hier also den Fall einer (Co-)Treppenfunktion mit unendlichem Bild! Zwar ist ΣP nicht kohärent, weshalb der Funktionenraum $[\Sigma P \to \Sigma P]$ nicht von einer Verallgemeinerung von Satz 3.9 erfaßt werden müßte, aber das prinzipielle Problem bleibt bestehen. Die Endlichkeit des Bildes der Co-Treppenfunktion k im Beweis von Lemma 3.10 kann nicht mehr angenommen werden.

Die zweite Beweislücke ist in Gleichung (5) des Beweises lokalisiert. Beschriftet man dort die Suprema in naiver Weise, dann erhält man zum einen $kw = \bigvee^{gw}_{j\,:\, w \in K_j} s_j$ und zum anderen $kx = \bigvee^{gx}_{j\,:\, x \in K_j} s_j$. Die Suprema werden also in verschiedenen Hauptidealen berechnet ($\downarrow gw$ und $\downarrow gx$), und es ist im allgemeinen falsch, daß sie vergleichbar wären. Damit ist aber Gleichung (5) für L-Bereiche nicht gültig. Auch an dieser Stelle wird darum eine subtilere Argumentation notwendig sein; die Grundidee des Beweises bleibt jedoch unverändert.

Lemma 3.34 *Ist L ein stetiger L-Bereich und X ein kohärenter Raum, und sind $f, g \in [X \to L]$ stetige Funktionen, dann folgt aus $f \ll g$ auch $f \ll_2 g$.*

Beweis: Nach Proposition 3.33 gibt es eine Co-Treppenfunktion $k = \bigvee^{g}_{i=1,\ldots,n} \langle K_i \searrow s_i \rangle$, die für alle $x \in X$ die Bedingung $fx \leq kx \ll gx$ erfüllt. Im Beweis von Lemma 3.10 hatten wir an dieser Stelle t_x als kx und V_x als $(\Omega g)\Uparrow t_x$ definiert. Da wir nicht sicher sein können, daß $k[X]$ endlich ist, werden wir zunächst eine Funktion $\gamma\colon X \to X$ mit endlichem Bild konstruieren, um darauf t_x als $k\gamma x$ usw. festzulegen.

Für jedes $z \in X$ ist $(\Omega g)\Uparrow kz$ eine Umgebung von z. Da X lokalkompakt ist, können wir eine offene Menge $O_z \in \Omega X$ und eine kompakt-saturierte Menge $C_z \in \mathsf{K_{sat}}\, X$ auswählen, so daß

$$z \in O_z \subseteq C_z \subseteq (\Omega g)\Uparrow kz \tag{7}$$

erfüllt ist. Für jedes $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ definieren wir $K_I := \bigcap_{i \in I} K_i$ und für jedes $y \in X$ die Indexmenge I_y als $\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid y \in K_i\}$. Insbesondere ist dann K_{I_y} der Schnitt aller K_i's, die y enthalten. Da X kohärent ist, ist jedes K_I kompakt, mit eventueller Ausnahme des leeren Schnitts.

Nehmen wir für den Augenblick an, X sei kompakt. Dann sind alle K_{I_y} kompakt.

Die Menge O_z ist eine Umgebung für jedes $z \in X$; da K_I kompakt ist, gibt es folglich endlich viele $z^I_1, \ldots, z^I_m \in K_I$, so daß K_I von

$$\bigcup_{i=1}^{m} O_{z^I_i}$$

überdeckt wird. Für jedes $y \in X$ wählen wir ein

$$\gamma(y) \in \{z_1^{I_y}, \dots, z_m^{I_y}\} \subseteq K_{I_y}$$

so aus, daß y in $O_{\gamma(y)}$ liegt. Da die Menge $\{I_y \mid y \in X\}$ in Wirklichkeit endlich ist, definiert dies eine Funktion $\gamma \colon X \to X$ mit endlichem Bild.

Später wird wichtig werden, daß $I_y \subseteq I_{\gamma y}$ erfüllt ist. Dies ist aber wegen $\gamma y \in K_{I_y}$ der Fall.

Wir definieren nun $t_x := k\gamma x$ und $V_x := O_{\gamma x}$. Damit erfüllen t_x und V_x die Bedingung (2 b i) von Satz 3.9, denn $O_{\gamma x} \subseteq (\Omega g)\dagger k\gamma x$ gilt nach Gleichung (7).

Um die zweite Beweislücke zu schließen, müssen wir Q_x etwas größer als in Lemma 3.10 definieren:

$$Q_x := \bigcup_{i \notin I_x} K_i \cup \bigcup \{C_{\gamma z} \mid x \notin C_{\gamma z}, z \in X\}.$$

Auch hier gibt es nur endlich viele verschiedene Q_x's, denn die Menge $\gamma[X]$ ist endlich. Aus dem gleichen Grund ist Q_x kompakt-saturiert. Da offensichtlich x nicht in Q_x enthalten ist, haben wir damit Bedingung (2 b iii) erfüllt.

Wir müssen daher nur noch $fw \leq t_x$ für alle $w \in X$ mit $w \notin Q_x$ nachweisen. Dafür zeigen wir zunächst $kx \leq k\gamma x$ für alle $x \in X$ und anschließend $kw \leq kx$, wobei wir $kw \leq k\gamma w$ benutzen. Dies ist sicherlich hinreichend, denn fw ist kleiner als kw nach Vorraussetzung, und $k\gamma x = t_x$ gilt nach Definition.

Die Ungleichung

$$\bigvee_{i \in I_x}^{gx} s_i = kx \leq gx \tag{8}$$

gilt nach Definition, und

$$\bigvee_{i \in I_x}^{g\gamma x} s_i \leq \bigvee_{i \in I_{\gamma x}}^{g\gamma x} s_i = k\gamma x \leq gx \tag{9}$$

ist wegen $I_x \subseteq I_{\gamma x}$ und $x \in O_{\gamma x} \subseteq (\Omega g)\dagger k\gamma x$ erfüllt. Nach Lemma 3.29 sind die linken Seiten der Ungleichungen (8) und (9) gleich, denn sie werden beide durch gx beschränkt. Folglich gilt $kx \leq k\gamma x$ für alle $x \in X$.

Ist $w \notin Q_x$, dann kann nach Definition von Q_x das Element w nur in solchen K_i's liegen, die auch x enthalten. Folglich ist $I_w \subseteq I_x$ erfüllt, was uns die Gültigkeit von

$$\bigvee_{i \in I_w}^{gx} s_i \leq \bigvee_{i \in I_x}^{gx} s_i = kx \leq gx \tag{10}$$

garantiert. Ebenfalls nach Definition von Q_x gilt $x \in C_{\gamma w}$, denn andernfalls würde $C_{\gamma w} \subseteq Q_x$ und damit $w \in Q_x$ folgen. Dies impliziert $x \in C_{\gamma w} \subseteq (\Omega g)\dagger k\gamma w$, daher ist gx eine obere Schranke von $k\gamma w$. Die Vergrößerung der Menge Q_x gegenüber dem Beweis von Lemma 3.10 stellt daher die Gültigkeit der Ungleichung

$$\bigvee_{i \in I_w}^{gw} s_i = kw \leq k\gamma w \leq gx, \tag{11}$$

sicher, wobei die mittlere Ungleichheit oben bewiesen wurde. Erneute Anwendung von Lemma 3.29 auf die Ungleichungen (10) und (11) liefert $kw \leq kx$. Damit haben wir aber alles gezeigt.

Wenn X nicht kompakt ist, dann ist $\bigcup_{i=1}^{n} K_i \subset X$, und folglich gibt es mindestens ein Element $\hat{y} \in X$ mit $k\hat{y} = \bot$ und $I_{\hat{y}} = \emptyset$. Für jedes $u \notin \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ definieren wir $\gamma u := \hat{y}$ und $O_{\gamma u} := C_{\gamma u} := X$. Zwar ist die Menge $C_{\gamma u}$ nicht kompakt, da sie aber nicht für die Konstruktion eines Q_x benutzt wird, hat dies keinen Einfluß.

Mit dieser Ergänzung läßt sich daher obiger Beweis auch für solche Räume X durchführen, die nicht kompakt sind. ∎

Satz 3.35 *Satz 3.9 bleibt gültig, wenn man ihn von stetigen Halbverbänden zu stetigen L-Bereichen verallgemeinert.*

Beweis: Die Adaption von Lemma 3.10 wurde soeben mit Lemma 3.34 geliefert. In den Lemmata 3.11, 3.12 und 3.13 sind jeweils vorkommende Suprema ($\bigvee$) durch Suprema in $\downarrow g$ zu ersetzen ($\bigvee^g$); der Rest des Beweises von Satz 3.9 kann wortwörtlich übernommen werden. ∎

Ausblicke

„Woran arbeiten Sie?“ wurde Herr K. gefragt. Herr K. antwortete: „Ich habe viel Mühe, ich bereite meinen nächsten Irrtum vor.“

Bertolt Brecht

Obwohl Charakterisierungen eher End- denn Ausgangspunkte sind, sind in der vorliegenden Arbeit einige Fragen unbeantwortet geblieben. Aus Zeitgründen konnte ich mich ihnen bisher nicht widmen, zum Teil sind sie sogar erst in letzter Minute in meinen Wahrnehmungshorizont gedrungen. Jeder aufkommenden Idee sofort bis ins kleinste Detail zu folgen, hieße aber zu nichts zu kommen. Notgedrungen bleiben daher Fragen offen. Mit einer nicht unbedingt vollständigen Aufzählung dieser Fragen schließe ich diese Arbeit.

Rechts-Kan-Räume sind vollständige Verbände, deren binäre Supremumsoperation stetig ist, wie wir aus ihrer Charakterisierung wissen. Es handelt sich dabei somit um spezielle $\vee$-Halbverbände in Top (zur Definition eines Halbverbandes in einer Kategorie vgl. [Mac71, Chap. III, §6] bzw. [Sch93, Sec. 5.1]). Solche $\vee$-Halbverbände traten in der Dissertation von A. Schalk als Algebren zu Monaden gewisser Potenzkonstruktionen auf [Sch93]. In [Esc97] wiederum werden injektive Räume zu ähnlichen Algebren in Beziehung gesetzt. Es bleibt zu prüfen, was die genauen Zusammenhänge sind. Möglicherweise kommt dabei heraus, daß die Charakterisierung der Rechts-Kan-Räume aus abstrakten Gründen so sein muß, wie sie ist.

Rechts-Kan-Erweiterungen von Funktoren lassen sich punktweise beschreiben [Mac71, Chap. X, §5]. Dies führt zu einer abweichenden Definition der Rechts-Kan-Räume. M. H. Escardó mutmaßte, daß diese Klasse von Räumen mit den injektiven T_0-Räumen zusammenfallen könnte.

Die Charakterisierung der Approximationsordnung im Funktionenraum über Co-Treppenfunktionen (Proposition 3.7) ist eine Verallgemeinerung der Situation im Verband der offenen Mengen ΩX eines lokalkompakten Raumes X: eine offene Menge O liegt genau dann weit-unter O', wenn dazwischen eine kompakt-saturierte Menge $K \in \mathsf{K_{sat}}\, X$ liegt. Für lokalkompakte und nüchterne Räume gilt zusätzlich die duale Aussage: $(\mathsf{K_{sat}}\, X, \supseteq)$ ist ein stetiger Bereich und eine kompakt-saturierte Menge K liegt genau dann weit-unter K', wenn dazwischen eine offene Menge $O \in \Omega X$ liegt. Inwieweit läßt sich eine ähnliche Dualität für stetige Funktionen und Co-Treppenfunktionen formulieren? Ein Kandidat dafür wäre der Raum aller co-kompakt-stetigen Funktionen, für den die Treppenfunktionen eine trennende Menge bilden könnten.

Im Abschnitt über die Approximationsordnung im Stone-Dual sind viele Fragen unbeantwortet geblieben. Die Bedeutung der Bedingung $U \ll (\Omega g){\uparrow}s$ ist immer noch nicht befriedigend analysiert. Auch fehlt eine äquivalente Formulierung der Bedingung, die sich auf beliebige stetige Funktionen verallgemeinern läßt.

Für die Charakterisierung der eigentlichen Funktion zwischen kohärenten Räumen wurde Satz 3.21 über die Approximationsordnung im Stone-Dual nicht benutzt. Fruchtbare Anwendungen dieses Satzes stehen somit noch aus, wenn man davon absieht, daß der Satz als heuristischer Wegweiser dienen kann.

Desweiteren garantiert Satz 3.21, daß aus $\Omega f \ll \Omega g$ in $\mathsf{DCPO}(\Omega L, \Omega X)$ folgt, daß g von f approximiert wird. Man kann daher eine Relation $\lll$ auf $[X \to L]$ durch

$$f \lll g :\Leftrightarrow \Omega f \ll \Omega g$$

definieren. Diese Relation ist echt stärker als die Approximationsordnung (für nicht kompaktes X ist sie leer). Besitzt $\lll$ ähnliche Eigenschaften wie die Approximationsordnung? Was bedeutet diese Relation?

In kohärenten Räumen trennen die kompakten und kohärenten Teilräume die offenen Mengen. Was kann man unter schwächeren Voraussetzungen sagen? Können tragfähige Bedingungen angegeben werden, die hinreichend viele z. B. stabile Teilräume garantieren? Hier wird deutlich, daß der Begriff des lokalkompakten Raumes doch recht schwach ist. Was geeignete Ergänzungen sein könnten, die nicht so stark wie Kohärenz sind, bleibt der weiteren Untersuchung überlassen.

Literatur

[AJ94] S. Abramsky and A. Jung. Domain theory. In S. Abramsky, D. M. Gabbay, and T. S. E. Maibaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 3, pages 1–168. Clarendon Press, 1994.

[Ber93] U. Berger. Total sets and objects in domain theory. *Annals of Pure and Applied Logic*, 60:91–117, 1993.

[Bor94] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 2, Categories and Structures*, volume 51 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1994.

[EEK97] Th. Erker, M. H. Escardó, and K. Keimel. The way-below relation of function spaces over semantic domains. *Topology and Its Applications*, 1997. To appear.

[Esc97] M. H. Escardó. Properly injective spaces and function spaces. *Topology and Its Applications*, 1997. To appear.

[GHK+80] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove, and D. S. Scott. *A Compendium of Continuous Lattices*. Springer Verlag, Berlin, 1980.

[Isb85] J. R. Isbell. Discontinuity of meets and joins. In R.-E. Hoffmann and K. H. Hofmann, editors, *Continuous Lattices and Their Applications*, volume 101 of *Lecture notes in pure and applied mathematics*, pages 151–154. Marcel Dekker, Inc., 1985.

[Joh82] P. T. Johnstone. *Stone Spaces*, volume 3 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[Mac71] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer Verlag, Berlin, 1971.

[Sch93] A. Schalk. *Algebras for Generalized Power Constructions*. Doctoral thesis, Technische Hochschule Darmstadt, 1993. 174 pp.

[Sco72] D. S. Scott. Continuous lattices. In E. Lawvere, editor, *Toposes, Algebraic Geometry and Logic*, volume 274 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 97–136. Springer Verlag, 1972.

[Sü95] Ph. Sünderhauf. Sobriety in terms of nets. 4 pages, December 1995.

[YMJH96] Liu Ying-Ming and Liang Ji-Hua. Solutions to two problems of J. D. Lawson and M. Mislove. *Topology and its Applications*, 69(2):153–164, 1996.