Die Hyperlimeskonstruktion

Christian Haack

August 1993

Diplomarbeit am
Fachbereich Mathematik der
Technischen Hochschule Darmstadt

Betreuender Professor:

Prof. Klaus Keimel

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Vorgeschichte

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit einer dem Produkt von geordneten Mengen ähnlichen Konstruktion.
Die Motivation liegt ursprünglich in der Idee, Datenbanken ordnungstheoretisch zu modellieren. In der klassischen relationalen Datenbanktheorie faßt man eine Datenbank als Teilmenge eines Produktes von Mengen, also als Relation, auf. Jedem Attribut ordnet man die Menge aller möglichen Ausprägungen zu und nimmt als Datenbankbereich das Produkt dieser Mengen. Ein Eintrag in der Datenbank ist dann ein Element dieses Produktes und eine Datenbank eine Teilmenge desselben. Der Relationsbegriff wird einer Datenbank jedoch nicht gerecht. In einer Datenbank will man nämlich auch Einträge erlauben, die nicht jedem Attribut, sondern nur manchen, eine Ausprägung zuordnen. Die Idee von Peter Bunemann war es nun, aus jedem Faktor des Datenbankbereiches eine geordnete Menge zu machen, indem man ein kleinstes Element hinzufügt. Dieses Element hat die Bedeutung 'keine Information'. Man faßt eine Datenbank dann auf als Teilmenge (oder genauer: als endliche Antikette) eines Produktes von flachen Bereichen. In [BJO] werden Begriffe aus der relationalen Datenbanktheorie in dieses ordnungstheoretische Datenbankmodell übersetzt. Dabei werden die Begriffe nicht nur für Produkte von flachen Bereichen formuliert, sondern allgemeiner für Scottbereiche, und zwar so, daß sie in Produkten von flachen Bereichen die adäquate Übersetzung der Begriffe aus der relationalen Datenbanktheorie sind.
Was bedeutet in diesem allgemeineren Rahmen die Ordnung? Man kann sich dazu zwei verschiedene Vorstellungen machen. Einerseits kann man sich jedes Element eines Scott-Bereiches als Träger von Information vorstellen. Ein Element ist kleiner als ein anderes, wenn es eine Teilinformation des größeren trägt. Diese Vorstellung paßt zur Vorstellung eines Produktes von flachen Bereichen als Datenbankbereich. In diesem Fall ist ein Eintrag kleiner als ein anderer, wenn er in allen Attributen, in denen er eine Ausprägung hat, die gleiche Ausprägung hat wie der größere Eintrag. Andererseits kann man sich vorstellen, daß die maximalen Elemente eines Scott-Bereiches 'ideale' Elemente sind. Ein ideales Element wird von den darunterliegenden Elementen approximiert. Ein Element ist größer als ein anderes, wenn alle Elemente, die von ihm approximiert werden, auch vom kleineren approximiert werden, und zwar schlechter. Auch diese Vorstellung paßt zur Vorstellung eines Produktes von flachen Bereichen als Datenbankbereich. Die idealen Einträge einer Datenbank sind die, bei denen jedes Attribut eine Ausprägung hat. Vorsicht ist geboten, wenn man anfängt, Teilmengen von Scott-Bereichen (zum Beispiel Datenbanken) miteinander zu vergleichen. Dann führen diese beiden Vorstellungen nämlich auf verschiedene Ordnungen.
Ein wichtiger Begriff aus der Datenbanktheorie ist der der Projektion. Faßt man eine Datenbank als Relation auf, so ist das einfach eine Projektion auf einen oder mehrere Faktoren des Produktes. In unserem ordnungstheoretischen Datenbankmodell können wir jeden Faktor auf natürliche Weise mit einer Teilmenge des Produktes identifizieren. Den i-ten Faktor identifizieren wir nämlich mit der Menge, die aus den Elementen besteht, deren sämtliche Komponenten, außer der i-ten, das kleinste Element des jeweiligen Faktors sind. Solche Mengen sind Bilder von Ordnungsprojektionen. Sie haben jedoch Eigenschaften, die Bilder von Ordnungsprojektionen im allgemeinen nicht haben. So sind sie beispielsweise Anfangsstücke. Betrachten wir in einem Produkt zweier geordneter Mengen P, Q mit kleinstem Element ein Element x, dessen Q-Komponente das kleinste Element von Q ist, und ein anderes Element y, dessen P-Komponente kleiner ist als die P-Komponente von x, so existiert das Supremum von x und y. Eine Projektion p auf einen eingebetteten Faktor hat also die folgende Eigenschaft: Ist x ein Element des Bildes von p und ist y ein Element der zugrundeliegenden geordneten Menge, so daß $p(y)$ kleiner ist als x, dann existiert das Supremum von x und y. Diese Eigenschaft heißt in [BJO] Slide-Bedingung. In Produkten von flachen Bereichen charakterisiert sie, gemeinsam mit der Bedingung, daß das Bild ein Anfangsstück ist, die Projektionen auf die eingebetteten Faktoren. Projektionen, die die Slide-Bedingung erfüllen und deren Bild ein Anfangsstück ist,

werden deshalb zum Pendant der Projektionen aus der relationalen Datenbanktheorie erklärt. Herrmann Puhlmann nennt die Bilder solcher Projektionen in seiner Diplomarbeit 'lebendige Stümpfe' und zeigt, daß die Menge der lebendigen Stümpfe eines distributiven Scott-Bereiches einen distributiven, algebraischen Verband bildet. Suprema in diesem Verband werden elementweise gebildet, und endliche Infima sind Mengenschnitte. In einem distributiven Scott-Bereich, dessen kompakte Elemente endliche Hauptanfänge erzeugen, (solche Bereiche nennen wir dI-Bereiche), sind sogar beliebige Infima im Verband der lebendigen Stümpfe Mengenschnitte.
Achim Jung und Hermann Puhlmann interessierten sich nun für das Problem, Scott-Bereiche in ein Produkt von kleineren Scott-Bereichen zu zerlegen. Da die elementweisen Suprema der eingebetteten Faktoren eines Produktes von geordneten Mengen mit kleinstem Element einen distributiven, algebraischen Verband bilden, in dem Infima Mengenschnitte sind, bestand Hoffnung, daß man aus den lebendigen Stümpfen eines dI-Bereiches eine Produktzerlegung gewinnen kann. In einem Produkt von geordneten Mengen mit kleinstem Element gibt es zu einer Projektion p auf die Einbettung eines Faktors eine 'komplementäre' Projektion, die minimal ist mit der Eigenschaft, daß ihr punktweises Supremum mit p gleich der Identität ist. Hermann Puhlmann zeigte in seiner Diplomarbeit, daß es in einem dI-Bereich zu jeder Projektion auf einen lebendigen Stumpf eine in diesem Sinne komplementäre Projektion gibt. Allerdings muß ihr Bild kein Anfangsstück sein, und der zugrundeliegende Bereich ist deshalb nicht isomorph zum Produkt der Bilder der beiden Projektionen. Jedoch ist er isomorph zu einer Teilmenge dieses Produktes, welche sich mit Hilfe einer stetigen Funktion aus dem Bild der komplementären Projektion in den lebendigen Stumpf beschreiben läßt. Nennen wir die Projektion auf den lebendigen Stumpf p und die dazu komplementäre Projektion q, so ist er nämlich isomorph zur Menge aller Elemente des Produktes deren p-te Komponente größer ist als das Bild der q-ten Komponente unter p. Weil jeder lebendige Stumpf eines dI-Bereiches also 'fast' Faktor einer Produktzerlegung ist, benannte Achim Jung lebendige Stümpfe um in 'Semifaktoren'. Er definierte eine Konstruktion, die einer Familie von Bereichen und einer Familie von verbindenden Morphismen zwischen diesen die Menge aller Elemente des Produktes zuordnet, deren Bild der i-ten Komponente unter einem verbindenden Morphismus vom i-ten in den j-ten Faktor kleiner ist als die j-te Komponente. Diese Konstruktion nannte er Hyper-Limes. Er zeigte, daß sich jeder endliche distributive Scott-Bereich darstellen läßt als Hyperlimes von in gewissem Sinne irreduziblen Bereichen.
In dieser Arbeit wollen wir nun diese Hyperlimeskonstruktion genauer untersuchen. Gesondert betrachten werden wir die Kategorie, deren Objekte Hyperlimites von flachen Bereichen und deren Morphismen stetige Abbildungen sind. Man kann diese Kategorie auffassen als Kategorie der Datenbankbereiche. Jedoch hat sie auch Eigenschaften, die sie brauchbar machen zur Konstruktion von Lambda-Kalkül-Modellen. So ist sie kartesisch abgeschlossen, und sie hat Objekte, die isomorph sind zum Bereich ihrer stetigen Selbstabbildungen.

1.2 Aufbau der Arbeit

Wir beginnen damit, den Hyperlimes kategorientheoretisch zu definieren. Dazu müssen wir fordern, daß die Morphismenklassen der Kategorien, die wir betrachten, geordnete Mengen sind. Wir werden Diagramme betrachten, die zwar nicht kommutieren, bei denen aber der Pfeil 'links herum' kleiner ist als der Pfeil 'rechts herum'. Wir können solche Diagramme schwach kommutierend nennen. Damit wir zwei schwach kommutierende Diagramme hintereinanderzeichnen können und das resultierende Diagramm wieder schwach kommutiert, müssen wir fordern, daß die Verknüpfungsoperation monoton operiert.
Im zweiten Abschnitt der Arbeit betrachten wir Diagramme, die die Eigenschaft haben, daß jede Hyperlimesprojektion über dem Diagramm eine untere Adjungierte hat. Das sind gerade die Diagramme, für die man die Bilder der Hyperlimesprojektionen ins Hyperlimesobjekt einbetten kann,

also als Bilder von internen Projektionen im Hyperlimesobjekt wiederfindet. Wir können ein Diagramm angeben, das sich vollständig mit Hilfe dieser internen Projektionen beschreiben läßt und den gleichen Hyperlimes hat wie das ursprüngliche Diagramm. Wir werden zeigen, daß wir annehmen können, daß jede Hyperlimesprojektion über einem Diagramm von beschränkt vollständigen Mengen eine untere Adjungierte hat. Mit Hilfe dieser Erkenntniss können wir dann ein Reihe von Ergebnissen für Hyperlimites von beschränkt vollständigen Bereichen beweisen: Wir können Hyperlimites von flachen Bereichen intern charakterisieren. Wir können zeigen, daß die Kategorie der Hyperlimites von flachen Bereichen kartesisch abgeschlossen ist, und daß sie ein Objekt hat, welches isomorph ist zum Bereich seiner stetigen Selbstabbildungen. Und wir können zeigen, daß Hyperlimites von stetigen, beschränkt vollständigen Bereichen stetig sind, und daß Hyperlimites von Scott-Bereichen Scott-Bereiche sind.
Im vierten Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, ob sich bestimmte Eigenschaften von den Hyperlimesfaktoren auf das Hyperlimesobjekt vererben. Beschränkte Vollständigkeit vererbt sich immer. Distributivität vererbt sich, falls die verbindenden Morphismen Suprema erhalten. Damit ein Hyperlimes von dI-Bereichen wieder ein dI-Bereich ist, und damit ein Hyperlimes von bifiniten Bereichen wieder ein bifiniter Bereich ist, muß man Endlichkeitsforderungen an das Diagramm stellen. Wir werden uns auch mit der umgekehrten Frage beschäftigen und versuchen, aus den Eigenschaften des Hyperlimesobjektes Rückschlüsse auf das Diagramm zu ziehen.
Im fünften Abschnitt werden wir einige Ergebnisse von Achim Jung und Herrmann Puhlmann neu darstellen, und wir werden beweisen, daß sich jeder dI-Bereich darstellen läßt als Hyperlimes über einem zykelfreien Diagramm, dessen Objekte sich nicht weiter in zykelfreie Hyperlimites zerlegen lassen.
Im letzten Abschnitt werden wir die Zustandsmengen der in [Cur] definierten stabilen, konkreten Datenstrukturen charakterisieren als Hyperlimites von flachen Bereichen über Diagrammen, deren Indexkategorien geordnete Mengen mit endlichen Hauptenden sind, und deren verbindende Morphismen konstant sind auf den Mengen der 'Nicht-bottom-Elemente'.

1.3 Einige Begriffe und Definitionen

Zunächst einige weniger übliche Bezeichnungen:
Eine geordnete Menge heiße *beschränkt vollständig*, falls jede beschränkte Teilmenge ein Supremum hat. Ein beschränkt vollständiger, algebraischer Bereich heiße *Scott-Bereich*.
Eine beschränkt vollständige geordnete Menge heiße *distributiv*, falls jeder Hauptanfang ein distributiver Verband ist.
Eine beschränkt vollständige geordnete Menge heiße *schnittstetig*, falls jeder Hauptanfang ein schnittstetiger vollständiger Verband ist.
Ein Bereich heiße *endlich algebraisch*, falls er algebraisch ist, und jeder von einem kompakten Element erzeugte Hauptanfang endlich ist.
Ein endlich algebraischer, distributiver Bereich heiße *dI-Bereich*.
Wir wollen sagen, daß eine Abbildung $f : P \to Q$ zwischen zwei geordneten Mengen *Suprema erhält*, falls $f(\bigvee M)$ Supremum von $f(M)$ ist für jede Teilmenge M von P, deren Supremum existiert.

Wir werden in dieser Arbeit häufig den Begriff der Adjunktion und den damit verwandten Begriff der Projektion brauchen:
Sind P und Q geordnete Mengen, und ist $(g : P \to Q, d : Q \to P)$ ein Paar von monotonen Abbildungen, so heißt dieses Paar *Adjunktion*, falls es eine der vier folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

(i) Für alle $p \in P, q \in Q$ ist $g(p) \geq q$ äquivalent zu $p \geq d(q)$.

(ii) $g \circ d \geq id_Q$ und $d \circ g \leq id_P$

(iii) Für alle $p \in P$ ist $g(p) = Max(d^{-1}(\downarrow p))$.

(iv) Für alle $q \in Q$ ist $d(q) = Min(g^{-1}(\uparrow q))$.

g heißt dann *obere Adjungierte*, und d heißt *untere Adjungierte*.
Eine obere Adjungierte erhält Infima, eine untere Adjungierte erhält Suprema.
Eine Adjunktion heiße *Projektions-Einbettungspaar*, falls die obere Adjungierte surjektiv ist (oder äquivalent: falls die untere Adjungierte injektiv ist).
Ist $(g : P \to Q, d : Q \to P)$ eine Adjunktion, so ist $d \circ g$ eine Retraktion von P, die punktweise kleiner ist als die Identität. Eine solche Abbildung wollen wir *interne Projektion* von P nennen.
$g \circ d$ ist eine Retraktion von Q, die größer ist als die Identität. Eine solche Abbildung wollen wir *Abschlußoperator* von Q nennen.
Ist P eine geordnete Menge, so bezeichne Q_P die geordnete Menge aller internen Projektionen von P mit der punktweisen Ordnung. Außerdem bezeichne $\tilde{Q}_P$ die geordnete Menge aller Bilder von internen Projektionen mit der Inklusionsordnung. Q_P und $\tilde{Q}_P$ sind zueinander isomorph. Der Isomorphismus von Q_P nach $\tilde{Q}_P$ bildet eine Projektion auf ihr Bild ab. Seine Inverse bildet ein A aus $\tilde{Q}_P$ ab auf die Abbildung p_A, welche gegeben ist durch $p_A(x) = \bigvee(\downarrow x \cup A)$. Bilder von internen Projektionen sind abgeschlossen gegen existierende Suprema. Ist P beschränkt vollständig, so besteht $\tilde{Q}_P$ *genau* aus den Teilmengen von P, welche abgeschlossen sind gegen existierende Suprema. Dann ist $\tilde{Q}_P$ ein vollständiger Verband, in dem Suprema elementweise gebildet werden, und Infima Mengenschnitte sind. In Q_P weden Suprema dann punktweise gebildet.
Eine interne Projektion heißt *stabil*, falls ihr Bild ein Anfangsstück ist. S_P bezeichne die Menge aller stabilen Projektionen einer geordneten Menge P und $\tilde{S}_P$ die Menge aller ihrer Bilder. Ist D ein distributiver, stetiger Bereich, so ist ein elementweises Supremum von Anfangsstücken wieder ein Anfangsstück. Deshalb ist dann S_D ein vollständiger Unterverband von Q_D.
Zwei Rechenregeln im Verband Q_P einer geordneten Menge P:

- Sind $p, q \in Q_P$, so ist

$$p \leq q \quad \Leftrightarrow \quad p \circ q = q \quad \Leftrightarrow \quad q \circ p = p$$

- Sind $p \in S_P$ und $q \in Q_P$, so ist auch $q \circ p \in Q_p$, und es ist

$$q \circ p = p \wedge_{Q_P} q$$

Noch einige Bezeichnungen für Kategorien von geordneten Mengen:

POSET: Kategorie der geordneten Mengen und der monotonen Funktionen

DCPO: Kategorie der Bereiche und der stetigen Funktionen

Volle Unterkategorien von POSET:

BC: Beschränkt vollständige geordnete Mengen

DIST: Distributive beschränkt vollständige geordnete Mengen

Volle Unterkategorien von DCPO:

CONT: Stetige Bereiche

ALG: Algebraische Bereiche

B: Bifinite Bereiche

dI: dI-Bereiche

HF: Hyperlimesobjekte über Diagrammen von flachen Bereichen

OHF: Hyperlimesobjekte über zykelfreien Diagrammen von flachen Bereichen.

Ist C irgendeine dieser Kategorien, so meinen wir mit $\mathbf{C}_\perp$ die volle Unterkategorie von C, deren Objekte gerade die Objekte von C sind, die ein kleinstes Element haben.

2 Die Hyperlimeskonstruktion

2.1 Die kategorientheoretische Definition

Definition 2.1 Eine Kategorie C heiße *O-Kategorie*, falls $[A \to B]$ eine geordnete Menge ist für jedes Paar (A, B) von Objekten , und

$$\circ : [A \to B] \times [B \to C] \to [A \to C] : (f, g) \mapsto g \circ f$$

eine montone Abbildung ist für jedes Tripel (A, B, C) von Objekten.

Versieht man in $POSET$ jede Morphismenmenge mit der punktweisen Ordnung, so ist $POSET$ eine O-Kategorie. Sicher ist auch jede Unterkategorie einer O-Kategorie eine O-Kategorie, wenn man den Morphismenmengen die Ordnungen der Oberkategoriemorphismenmengen gibt. Sämtliche Bereichskategorien mit der punktweisen Ordnung auf den Morphismenmengen sind also O-Kategorien.

Zwischen den verschiedenen Morphismenmengen einer O-Kategorie gibt es Beziehungen. Sind nämlich A, B und C Objekte von C und ist $\varphi \in [A \to B]$, so folgt aus der Monotonie von $\circ$, daß $f \mapsto \phi \circ f$ eine monotone Abbildung von $[C \to A]$ nach $[C \to B]$ ist. Ist ϕ ein C-Isomorphismus, so ist diese Abbildung ein Ordnungsisomorphismus. Genauso ist $f \mapsto f \circ \phi$ eine monotone Abbildung von $[B \to C]$ nach $[A \to C]$, falls ϕ ein C-Morphismus ist, und ein Ordnungsisomorphismus, falls ϕ ein C-Isomorphismus ist.

Definition 2.2 Sei I eine kleine Kategorie und C eine O-Kategorie. Ein *schwaches Diagramm* $D : I \to C$ besteht aus einem Paar von Abbildungen

$$(D_{ob} : Ob(I) \to Ob(C), D_{mor} : Mor(I) \to Mor(C)),$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Sind $i, j \in Ob(I)$, und ist $a \in [i \to j]$, so ist $D_{mor}(a) \in [D_{ob}(i) \to D_{ob}(j)]$.

(ii) Ist $i \in Ob(I)$, so ist $D_{mor}(id_i) = id_{D_{ob}(i)}$.

(iii) Sind $i, j, k \in Ob(I)$, $a \in [i \to j]$ und $b \in [j \to k]$, so ist

$$D_{mor}(b \circ a) \geq D_{mor}(b) \circ D_{mor}(a).$$

$$\begin{tikzcd} D(i) \arrow[d, "D(a)"'] \arrow[dr, "D(b \circ a)"] & \\ D(j) \arrow[r, "D(b)"'] & D(k) \end{tikzcd}$$

Die Elemente des Bildes von D_{ob} nennen wir *Diagrammobjekte* von D, die Elemente des Bildes von D_{mor} nennen wir *verbindende Morphismen* von D.
Eine *schwach natürliche Transformation* τ von $D : I \to C$ nach $E : I \to C$ ist eine Abbildung von $\mathrm{Ob}(I)$ nach $\mathrm{Mor}(C)$, derart daß

$$E(a) \circ \tau(i) \leq \tau(j) \circ D(a)$$

für alle $i, j \in Ob(I)$ und alle $a \in [i \to j]$.

$$\begin{tikzcd} D(i) \arrow[r, "D(a)"] \arrow[d, "\tau(i)"'] \arrow[dr, phantom, "\leq"] & D(j) \arrow[d, "\tau(j)"] \\ E(i) \arrow[r, "E(a)"'] & E(j) \end{tikzcd}$$

Wir definieren nun eine Kategorie $C^I_{schwach}$:

Objekte: schwache Diagramme von I nach C

Morphismen: schwach natürliche Transformationen

Verknüpfungsoperation: $(\tau \dot{\circ} \nu)(i) := \tau(i) \circ \nu(i)$

Proposition 2.1 ***a)*** *$C^I_{schwach}$ ist eine Katgorie.*

b) *Isomorphismen in der Kategorie $C^I_{schwach}$ sind gerade natürliche Isomorphismen.*

Beweis:

a) Seien $\tau : D \to E$ und $\nu : E \to F$ schwach natürliche Transformationen, und seien $i, j \in Ob(I)$ und $a \in [i \to j]$.

$$\begin{tikzcd} D(i) \arrow[r, "D(a)"] \arrow[d, "\tau(i)"'] \arrow[dr, phantom, "\leq"] & D(j) \arrow[d, "\tau(j)"] \\ E(i) \arrow[r, "E(a)"] \arrow[d, "\nu(i)"'] \arrow[dr, phantom, "\leq"] & E(j) \arrow[d, "\nu(j)"] \\ F(i) \arrow[r, "F(a)"'] & F(j) \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
F(a) \circ (\nu \dot{\circ} \tau)(i) &= F(a) \circ \nu(i) \circ \tau(i) \\
&\leq \nu(j) \circ E(a) \circ \tau(i) \\
&\leq \nu(j) \circ \tau(j) \circ D(a) \\
&= (\nu \dot{\circ} \tau)(j) \circ D(a).
\end{aligned}$$

Die Hintereinanderausführung zweier schwach natürlicher Transformationen ist also wieder eine schwach natürliche Transformation. Die Assoziativität von $\dot{\circ}$ folgt aus der Assoziativität von $\circ$. Die Transformation, die jedes Objekt von I auf die Identität von $D(i)$ abbildet, dient als Identität von D.

b) Sei $\tau : D \to E$ ein $C^I_{schwach}$-Isomorphismus. Wir stellen zunächst fest, daß $\tau^{-1}(i) = (\tau(i))^{-1}$ für alle $i \in Ob(I)$. Es ist

$$\begin{aligned}
E(a) \circ \tau(i) &= \tau(j) \circ \tau^{-1}(j) \circ E(a) \circ \tau(i) \\
&\geq \tau(j) \circ D(a) \circ \tau^{-1}(i) \circ \tau(i) \\
&= \tau(j) \circ D(a).
\end{aligned}$$

∎

Definition 2.3 Sei I eine kleine Kategorie und C eine O-Kategorie.
$\Delta : C \to C^I_{schwach}$ bezeichne den Diagonalfunktor.
Für ein Objekt A von C ist also $(\Delta A)(i) = A$ für alle Objekte i von I und $(\Delta A)(a) = id_A$ für alle Morphismen a von I.
Für einen Morphismus f von C ist $(\Delta f)(i) = f$ für alle Objekte i von I.
Sei nun ein schwaches Diagramm $D : I \to C$ gegeben.
Ein *schwacher Kegel* über D sei ein Paar (A, τ) von einem Objekt A aus C und einem Pfeil $\tau : \Delta A \to D$ aus $C^I_{schwach}$.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\tau(i)"'] \arrow[dr, "\tau(j)"] \arrow[d, phantom, "\leq"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(a)"'] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

Die Elemente des Bildes von τ wollen wir *Projektionen* von (A, τ) nennen, und das Objekt A nennen wir *Spitze* von (A, τ).
Ein schwacher Kegel (A, τ) heiße *Hyperlimeskegel* über D, falls er ein universeller Pfeil von Δ nach D ist, d.h. falls es für alle schwachen Kegel (B, ν) über D genau einen Pfeil f von B nach A gibt, so daß $\tau \dot{\circ} \Delta f = \nu$.

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \arrow[ddl, "\nu(i)"'] \arrow[ddr, "\nu(j)"] & \\
& A \arrow[dl, "\tau(i)"] \arrow[dr, "\tau(j)"'] \arrow[d, phantom, "\leq"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(a)"'] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

Die Projektionen eines Hyperlimeskegels über D nennen wir *Hyperlimesprojektionen* über D, die Spitze eines Hyperlimeskegels über D nennen wir *Hyperlimesobjekt* über D. Schreiben wir $hypD$, so meinen wir damit irgendein Hyperlimesobjekt über D.

Aus der Definition eines Hyperlimeskegels als universellen Pfeil folgt, daß ein Hyperlimeskegel bis auf natürliche Isomorphie eindeutig ist. Das heißt: Sind (A, τ) und (B, ν) zwei Hyperlimeskegel über demselben schwachen Diagramm D, so gibt es einen Isomorphismus $\varphi : A \to B$, so daß $\nu \dot{\circ} \Delta\varphi = \tau$ und $\tau \dot{\circ} \Delta\varphi^{-1} = \nu$.

2.2 Hyperlimeskegel in POSET und DCPO

Alle Kategorien, die wir in der Einleitung definiert haben, fassen wir im weiteren als O-Kategorien auf, und zwar mit der punktweisen Ordnung auf den Morphismenmengen.
Einige Eigenschaften solcher O-Kategorien:

- In $POSET$, BC, und $DCPO$ sind die Morphismenmengen Objekte der Kategorie.
- Ist M eine Teilmenge von $[B \to C]$, deren punktweises Supremum existiert, und ist g ein Element von $[A \to B]$, so ist $(\bigvee M) \circ g = \bigvee(M \circ g)$.
  Insbesondere: In jeder vollen Unterkategorie von $DCPO$ ist $(\bigvee^{\uparrow} M) \circ g = \bigvee^{\uparrow}(M \circ g)$ für jede gerichtete Teilmenge M von $[B \to C]$.
  In jeder vollen Unterkategorie von BC ist $(\bigvee M) \circ g = \bigvee(M \circ g)$ für jede beschränkte Teilmenge M von $[B \to C]$, also für jede Teilmenge M, deren Supremum existiert.
- In $DCPO$ ist $\circ$ nicht nur monoton, sondern sogar stetig.

Proposition 2.2 *In POSET und DCPO existieren Hyperlimeskegel über beliebigen schwachen Diagrammen.*
Ist nämlich D ein schwaches Diagramm in einer dieser Kategorien, so ist ein Hyperlimeskegel (A, p) über D gegeben durch:

$$A := \left\{(x_i)_{i \in ObI} \in \prod_{i \in ObI} D(i) \mid \forall i, j \in ObI. \forall a \in [i \to j]. D(a)(x_i) \leq x_j\right\},$$

mit der komponentenweisen Ordnung.

$$p(j) : \begin{cases} A \to D(j) \\ (x_i)_{i \in ObI} \mapsto x_j \end{cases}$$

Den so definierten Hyperlimeskegel nennen wir kanonischen Hyperlimeskegel über D.

Beweis: Sei zunächst D ein Diagramm von I nach $POSET$. Daß die $p(i)$ monoton sind, ist äquivalent dazu, daß A die komponentenweise Ordnung trägt. Sei (B,g) ein schwacher Kegel über D. Die Funktion h von B nach A sei gegeben durch die Vorschrift $x \mapsto (g(i)(x))_{i \in ObI}$. Für jeden Pfeil a von i nach j und jedes x aus B ist $D(a) \circ g(i)(x) \leq g(j)(x)$, da $[B \to D(j)]$ punktweise geordnet ist. $h(x)$ ist also ein Element von A. Weil die $g(i)$ monoton sind, und die Ordnung auf A komponentenweise definiert ist, ist h monoton. Weil zwei Funktionen gleich sind, wenn sie an jeder Stelle den gleichen Funktionswert haben, ist $p(i) \circ h = g(i)$ für jedes Objekt i von I. Sei nun h' eine weitere monotone Abbildung von B nach A, so daß $p(i) \circ h' = g(i)$ für alle Objekte i von I. Dann ist $(h'(x))_i = g(i)(x) = (h(x))_i$ für alle Objekte i von I und alle Elemente x von B. Da zwei Elemente von A gleich sind, falls sämtliche Komponenten gleich sind, und da zwei Funktionen gleich sind, falls sie an jeder Stelle den gleichen Funktionswert haben, ist dann $h = h'$.
Sei nun D ein Diagramm nach $DCPO$. Sei M eine gerichtete Teilmenge von A, und sei a ein Pfeil von i nach j. Da $p(i)$ monoton ist, ist $p(i)(M)$ gerichtet. Es ist

$$D(a)(\bigvee{}^{\uparrow} p(i)(M)) = \bigvee{}^{\uparrow} D(a) \circ p(i)(M) \leq \bigvee{}^{\uparrow} p(j)(M)$$

A als Teilmenge von $\prod_{i \in ObI} D(i)$ ist also abgeschlossen gegen gerichtete Suprema. Das heißt A ist ein Bereich, und die $p(i)$ sind stetig. Für einen schwachen Kegel (B,g) über D ist das oben definierte h stetig, weil die $g(i)$ stetig sind, und weil gerichtete Suprema in A komponentenweise gebildet werden. ∎

Proposition 2.3 *Sei $D : I \to POSET$ ein schwaches Diagramm, $(hypD, p)$ ein Hyperlimeskegel über D und A eine geordnete Menge.*

a) *Für $f, g \in [A \to hypD]$ ist*

$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in ObI.\ p(i) \circ f \leq p(i) \circ g$$

Die Implikation von rechts nach links gilt auch in beliebigen O-Kategorien, die von links nach rechts jedoch nicht.

b) *Sogar mehr: Der Funktor $[A \to ..]$ erhält Hyperlimites.*
Genauer: Der Endofunktor F auf $POSET$ sei definiert durch:

$$\begin{aligned} F(B) &= [A \to B] && \textit{für Objekte } B \\ F(f : B \to C)(g) &= f \circ g && \textit{für Morphismen } f \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} {[A} \arrow[r, "g"] & {B]} \arrow[d, "f"] \\ {[A} \arrow[r] & {C]} \end{tikzcd}$$

Dann ist $(F(hypD), Fp)$ ein Hyperlimeskegel über $F \circ D$.

$$\begin{tikzcd} & {[A \to hypD]} \arrow[dl, "g \mapsto p(i) \circ g"'] \arrow[dr, "g \mapsto p(j) \circ g"] \arrow[d, phantom, "\leq"] & \\ {[A \to D(i)]} \arrow[rr, "g \mapsto D(a) \circ g"'] & {} & {[A \to D(j)]} \end{tikzcd}$$

c) *Aussagen a) und b) gelten auch in der Kategorie DCPO, falls D ein Diagramm in DCPO und A ein Bereich ist.*

Beweis:

a) Wir nehmen an $(hypD, p)$ sei der kanonische Hyperlimeskegel über D.

$$\begin{aligned}\forall i \in ObI.\, p(i) \circ f \leq p(i) \circ g \quad &\Leftrightarrow \quad \forall i \in ObI.\, \forall x \in A.\, (f(x))_i \leq (g(x))_i \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in A.\, f(x) \leq g(x) \\ &\Leftrightarrow \quad f \leq g\end{aligned}$$

Wir stellen fest, daß die Implikation von rechts nach links auch aus der Monotonie der Verknüpfungsoperation folgt,

b) Daraus, daß die Morphismenmengen von $POSET$ punktweise geordnet sind, folgt, daß $F(f)$ monoton ist, falls f monoton ist, und daß $F(f) \leq F(g)$, falls $f \leq g$. Also operiert F monoton auf den Morphismenmengen. $F \circ D$ ist ein schwaches Diagramm, denn

$$\begin{aligned}(F \circ D)(f \circ g) \quad &= \quad F(D(f \circ g)) \\ &\leq \quad F(D(f) \circ D(g)) \\ &= \quad F(D(f)) \circ F(D(g)) \\ &= \quad (F \circ D)(f) \circ (F \circ D)(g)\end{aligned}$$

$(F(hypD), Fp)$ ist ein schwacher Kegel über $F \circ D$, denn

$$F(D(f)) \circ F(p(i)) = F(D(f) \circ p(i)) \leq F(p(j))$$

Sei nun B das kanonische Hyperlimesobjekt über $F \circ D$,
also $B = \left\{(g_i)_{i \in ObI} \in \prod[A \rightarrow D(i)] \,|\, \forall a : i \rightarrow j.F(D(a))(g_i) \leq (g_j)\right\}$.
Wir zeigen, daß durch die Vorschrift $g \mapsto (g_i)_{i \in ObI}$ ein Isomorphismus ϕ von $[A \rightarrow hypD]$ nach B gegeben ist. Die Monotonie und die Injektivität von ϕ folgen aus a). Sei $(g_i)_{i \in ObI} \in B$. Wir definieren ein $g \in [A \rightarrow hypD]$ durch $p(i) \circ g = g_i$. Es ist $D(a) \circ g_i = F(D(a))(g_i) \leq g_j$ für alle Pfeile a von i nach j. Also ist g wohldefiniert. Damit ist ϕ surjektiv. Die Monotonie von ϕ^{-1} folgt aus a).

c) Weil $[A \rightarrow B]_{Dcpo}$ die von $[A \rightarrow B]_{Poset}$ induzierte Ordnung trägt, gilt a). Daraus, daß gerichtete Suprema in den Morphismenmengen punktweise gebildet werden, folgt, daß $F(B)$ ein Bereich ist, falls B ein Bereich ist, und daß $F(f)$ stetig ist, falls f stetig ist. $F \circ D$ ist also ein Diagramm in $DCPO$, falls D ein Diagramm in $DCPO$ ist. In Proposition 2.2 haben wir gesehen, daß ein schwacher Kegel eines Diagrammes in $DCPO$ genau dann ein Hyperlimeskegel in $DCPO$ ist, wenn er ein Hyperlimeskegel in $POSET$ ist. $(F(hypD), Fp)$ ist also ein Hyperlimeskegel in $DCPO$ über $F \circ D$.

■

Wir werden nun einige Beispiele für Hyperlimites in $POSET$ und $DCPO$ geben:

a)

Ein Limes über einem endlichen kogerichteten Diagramm ist isomorph zum maximalen Objekt des Diagramms. An dem ersten Beispiel sieht man, daß das bei Hyperlimites nicht so sein muß. So gesehen ähnelt ein zykelfreier Hyperlimes in $POSET$ mehr einem Produkt als einem Limes.

b) Lassen wir Zykel im Diagramm zu, so können wir gewisse Limites in $POSET$ auch als Hyperlimites über Diagrammen, die auf den Objekten mit den Limesdiagrammen übereinstimmen, beschreiben:

Proposition 2.4 *Sei $D : I \to POSET$ ein Diagramm, derart daß jeder verbindende Morphismus eine obere Adjungierte ist. Für eine obere Adjungierte f von A nach B bezeichne f^* die zugehörige untere Adjungierte von B nach A.*
Der gerichtete Graph G sei gegeben durch

$$V(G) := Ob(I) \;\; und \;\; E(i,j) := [i \to j] \dot\cup [j \to i] \;\; für\ i,j \in Ob(I)$$

$\tilde{I}$ sei die von diesem gerichteten Graphen erzeugte Kategorie. Das Diagramm $\tilde{D} : \tilde{I} \to POSET$ sei gegeben durch

$$\tilde{D}(i) := D(i) \;\; für\ i \in V(G)$$

$$\tilde{D}(a : i \to j) := \begin{cases} D(a) & falls\ a \in [i \to j]_I \\ D(a)^* & falls\ a \in [j \to i]_I \end{cases} \quad für\ a \in E(G)$$

Ist nun (P,p) ein Limeskegel über D, so ist (P,p) auch ein Hyperlimeskegel über $\tilde{D}$.

Beweis: Bezeichne $hyp\tilde{D}$ das kanonische Hyperlimesobjekt über $\tilde{D}$. Zunächst zeigen wir, daß $hyp\tilde{D}$ durch die verbindenden Morphismen über dem die Indexkategorie erzeugenden Graphen schon festgelegt ist. Wir zeigen also, daß

$$\left\{(x_i)_{i\in V(G)} \in \prod_{i\in V(G)} \tilde{D}(i) \,|\, \forall a : i \to j \in E(G).\ \tilde{D}(a)(x_i) \le x_j\right\} = hyp\tilde{D}$$

Die Inklusion '$\supseteq$' ist trivial.
Sei nun $x = (x_i)_{i\in Ob(\tilde{I})}$ ein Element der linken Menge. Sei $a : i \to j$ ein Pfeil aus $\tilde{I}$. Dann gibt es Pfeile $b_1 : i \to k_1$, $b_2 : k_1 \to k_2, .., b_n : k_{n-1} \to j$, so daß $a = b_n \circ b_{n-1} \circ .. \circ b_1$. Es ist

$$\tilde{D}(a)(x_i) \le \tilde{D}(b_n) \circ .. \circ \tilde{D}(b_1)(x_i) \le \tilde{D}(b_n) \circ .. \circ \tilde{D}(b_2)(x_{k_1}) \le .. \le x_j$$

Da diese Ungleichung für alle Pfeile a von $\tilde{I}$ gilt, ist x ein Element von $hyp\tilde{D}$.
Bezeichne nun $limD$ das kanonische Hyperlimesobjekt über D. Sei $x = (x_i)_{i\in ObI}$ ein Element von $limD$ und sei $a : i \to j$ ein Pfeil aus G.
Falls a aus $[i \to j]_I$ kommt, so ist $\tilde{D}(a)(x_i) = D(a)(x_i) = x_j$.
Falls a aus $[j \to i]_I$ kommt, so folgt aus $D(a)(x_j) = x_i$, daß $x_j \ge D(a)^*(x_i)$.
Also ist $\tilde{D}(a)(x_i) = D(a)^*(x_i) \le x_j$.
Für alle Pfeile $a : i \to j$ aus G ist also $\tilde{D}(a)(x_i) \le x_j$. Also ist x Element von $hyp\tilde{D}$.
Sei nun $x = (x_i)_{i\in ObI}$ ein Element von $hyp\tilde{D}$, und sei $a : i \to j$ ein Pfeil aus I.
Einerseits ist $D(a)(x_i) = \tilde{D}(a)(x_i) \le x_j$.
Andererseits ist $D(a)^*(x_j) = \tilde{D}(a)(x_j) \le x_i$, also $D(a)(x_i) \ge x_j$.
Es ist also $D(a)(x_i) = x_j$ für alle Pfeile $a : i \to j$ aus I. Das heißt x ist ein Element von $limD$.
■

c) Eine disjunkte Summe von Bereichen mit kleinstem Element kann man auch als Hyperlimes beschreiben.
Ist nämlich $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Bereichen mit kleinstem Element, und ist das Diagramm $D : I_\perp^{op} \to DCPO$ gegeben durch

$$\begin{aligned} &D(i) = A_i \\ &D(\perp) = I_\perp \\ &D(\perp \leftarrow i)(x) = \begin{cases} \perp & falls\ x = \perp \\ i & sonst, \end{cases} \end{aligned}$$

so ist $hypD \simeq \bigoplus_{i\in I} A_i$.

d) In der Kategorie **SET** ist $[M \to N]$ isomorph zu $\prod_{m\in M} N$.
Das Pendant in der Kategorie $POSET$: Seien P,Q Objekte von $POSET$. Das Diagramm D von P nach $POSET$ sei gegeben durch:

$$\begin{aligned} &D(x) = Q && \textit{für alle } x \in P \\ &D(y \leftarrow x) = id_Q && \textit{für alle } (x, y) \in \le_P \end{aligned}$$

Bezeichne weiterhin ev_x die Evaluierung einer Funktion f aus $[P \to Q]$ an der Stelle x. Dann ist $([P \to Q], ev)$ ein Hyperlimeskegel über D.
Folgerung: Sei A ein algebraischer Bereich und B ein Bereich. Das Diagramm D von $K(A)$ nach $DCPO$ sei gegeben durch

$$\begin{array}{ll} D(k) = B & \textit{für alle } k \in K(A) \\ D(h \leftarrow k) = id_B & \textit{für alle } (k,h) \in \leq_{K(A)} \end{array}$$

Dann ist $([A \to B]_{Dcpo}, ev)$ ein Hyperlimeskegel über D.

e) Wir haben in der Einleitung erläutert, daß man eine Datenbank auffassen kann als eine Antikette in einem Produkt flacher Bereiche. Oft will man jedoch gewisse Einträge von vorneherein nicht zulassen. In einer Datenbank mit den Attributen 'NAME', 'TELEFON(ja/nein?)' und 'TELEFONNUMMER' will man beispielsweise einen Eintrag, bei dem in der Spalte 'TELEFON' ein 'nein', in der Spalte 'TELEFONNUMMER' aber eine Nummer steht, nicht zulassen. Man würde als Datenbankbereich für so eine Datenbank das Hyperlimesobjekt über folgendem Diagramm wählen:

Wir schließen diesen Abschnitt ab mit der einfachen, aber nützlichen, Feststellung, daß Hyperlimesprojektionen über schwachen Diagrammen nach $POSET$ in gewissem Sinne Infima erhalten.

Proposition 2.5 *Sei $D : I \to POSET$ ein schwaches Diagramm und (P, p) ein Hyperlimeskegel über D.*

a) *Sei M eine Teilmenge von P, so daß das Infimum von $p_i(M)$ für jedes i aus ObI existiert. Dann existiert auch das Infimum von M, und es ist $p_i(\bigwedge M) = \bigwedge p_i(M)$ für alle i aus ObI.*
Insbesondere: Sind sämtliche Objekte von D beschränkt vollständig, so ist auch P beschränkt vollständig.

b) *D habe die zusätzliche Eigenschaft, daß verbindende Morphismen (endliche) Suprema erhalten. Sei M eine (endliche) Teilmenge von P, so daß für alle i aus ObI das Supremum von $p_i(M)$ existiert. Dann existiert das Supremum von M, und es ist $p_i(\bigvee M) = \bigvee p_i(M)$ für alle i aus ObI.*

Beweis:

a) Sei $a : i \to j \in MorI$. Für alle m aus M ist

$$D(a)(\bigwedge p_i(M)) \leq D(a)(p_i(m)) \leq p_j(m)$$

Also ist $D(a)(\bigwedge p_i(M)) \leq \bigwedge p_j(M)$.
Das kanonische Hyperlimesobjekt über D ist also eine gegen Infima abgeschlossene Teilmenge des Produktes der Diagrammobjekte.

b) Sei $a : i \to j \in MorI$.

$$D(a)(\bigvee p_i(M)) = \bigvee D(a)(p_i(M)) \leq \bigvee p_j(M)$$

Das kanonische Hyperlimesobjekt über D ist also eine gegen (endliche) Suprema abgeschlossene Teilmenge des Produktes der Diagrammobjekte.

■

3 Hyperlimeskegel, deren Projektionen obere Adjungierte sind

Wir haben bis jetzt keine Anforderungen an die Beschaffenheit von schwachen Diagrammen gestellt. So haben wir beispielsweise mehrere verbindende Morphismen zwischen zwei Objekten erlaubt. Andererseits kann man zu einer gegebenen Familie von Objekten oft mehrere Familien von verbindenden Morphismen angeben, die den gleichen Hyperlimes spezifizieren. Hat nun ein schwaches Diagramm die Eigenschaft, daß jede Hyperlimesprojektion obere Adjungierte ist, so kann man die ursprünglichen verbindenden Morphismen durch eine neue Familie von verbindenden Morphismen ersetzen, so daß es nur jeweils einen verbindenden Morphismus von einem Objekt zu einem anderen gibt. Wie diese Konstruktion genau funktioniert, beschreibt die nächste Proposition.
Zunächst noch eine Schreibweise: Ist $f : A \to B$ eine Abbildung und C eine Teilmenge von A, so schreiben wir für die Restriktion von f auf C einfach f', falls aus dem Zusammenhang klar ist, was die Menge C ist. Ist C eine Teilmenge von B, die das Bild von f enthält, so schreiben wir $'f$ für die Korestriktion von f auf C.

Proposition 3.1 *Sei $D : I \to POSET$ ein schwaches Diagramm, derart daß Hyperlimesprojektionen über D obere Adjungierte sind. Sei (P, p) ein Hyperlimeskegel über D. Für jedes Objekt i von I bezeichne d_i die untere Adjungierte zu p_i. Die Indexkategorie $\tilde{I}$ habe die gleichen Objekte wie I, und von jedem Objekt gebe es genau einen Pfeil zu jedem anderen Objekt. (Die Verknüpfungsoperation liegt dann bereits fest.) Das schwache Diagramm $\tilde{D} : \tilde{I} \to POSET$ sei gegeben durch*

$$\begin{aligned} \tilde{D}(i) &= im(p_i) && f\ddot{u}r\ i \in Ob(I) \\ \tilde{D}(j \leftarrow i) &= {}'p_j \circ d_i' && f\ddot{u}r\ (i,j) \in (Ob(I))^2 \end{aligned}$$

Dann ist $(P, ('p_i)_{i \in ObI})$ ein Hyperlimeskegel über $\tilde{D}$.

Beweis: $\tilde{D}$ ist ein schwaches Diagramm, denn

$$\tilde{D}(k \leftarrow j) \circ \tilde{D}(j \leftarrow i) = {}'p_k \circ d_j' \circ {}'p_j \circ d_i' \leq {}'p_k \circ d_i' = \tilde{D}(k \leftarrow i)$$

Das Ungleicheitszeichen steht, weil $d_j' \circ {}'p_j$ kleiner ist als die Identität.
$(P, 'p)$ ist ein schwacher Kegel, denn

$$\tilde{D}(j \leftarrow i) \circ {}'p_i = {}'p_j \circ d_i' \circ {}'p_i \leq {}'p_j$$

Sei nun (Q, q) ein weiterer schwacher Kegel über $\tilde{D}$. $(Q, p\dot{\circ}d'\dot{\circ}q)$ ist ein schwacher Kegel über D, denn für jeden Pfeil $a : i \to j$ von I ist:

$$\begin{tikzcd}
& Q \arrow[dl, "q_i"'] \arrow[dr, "q_j"] \arrow[d, phantom, "\leq"] & \\
im(p_i) \arrow[rr, "'p_j \circ d'_i"'] \arrow[d, "d'_i"'] & {} & im(p_j) \arrow[d, "d'_j"] \\
P \arrow[d, "p_i"'] \arrow[drr, "p_j"] & & P \arrow[d, "p_j"] \\
D(i) \arrow[rr, "D(a)"'] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
D(a) \circ p_i \circ d'_i &\leq p_j \circ d'_i \\
&= p_j \circ d'_j \circ {}'p_j \circ d_i \\
D(a) \circ p_i \circ d'_i \circ q_i &\leq p_j \circ d'_j \circ {}'p_j \circ d'_i \circ q_i \\
&= p_j \circ d'_j \circ \tilde{D}(j \leftarrow i) \circ q_i \\
&\leq p_j \circ d'_j \circ q_j
\end{aligned}$$

Das Gleicheitszeichen in der ersten Ungleichungskette steht, weil $p_j \circ d_j \circ p_j = p_j$. In der zweiten Ungleichungskette verwenden wir die erste Ungleichung.
Da (P, p) ein Hyperlimeskegel über D ist:

$$(*) \qquad \exists! g : Q \to P.\ p\dot{\circ}d'\dot{\circ}q = p\dot{\circ}\Delta g$$

Dann ist aber

$$q = {}'p\dot{\circ}d'\dot{\circ}q = {}'p\dot{\circ}\Delta g,$$

wobei das erste Gleichheitszeichen steht, weil ${}'p_i\dot{\circ}d'_i = id_{im(p_i)}$.
Sei $f : Q \to P$ ein Morphismus, so daß ${}'p\dot{\circ}\Delta f = q$. Dann ist

$$p\dot{\circ}d'\dot{\circ}q = p\dot{\circ}d'\dot{\circ}{}'p\dot{\circ}\Delta f = p\dot{\circ}\Delta f$$

Wegen $(*)$ ist dann $f = g$. ∎

Definition 3.1 Ein schwaches Diagramm heiße *einfach*, falls es von jedem Diagrammobjekt zu jedem anderen höchstens einen verbindenden Morphismus gibt.

Folgerung 3.1 *Zu einem schwachen Diagramm D in $POSET$, dessen Hyperlimesprojektionen obere Adjungierte sind, gibt es ein einfaches schwaches Diagramm E, dessen Objekte die Bilder der Hyperlimesprojektionen über D sind, so, daß $hypD \simeq hypE$.*

Hyperlimesprojektionen über einem schwachen Diagramm von geordneten Mengen, müssen nicht surjektiv sein. Man kann im allgemeinen auch nicht die verbindenen Morphismen durch Morphismen zwischen den Bildern der Hyperlimesprojektionen ersetzen, ohne den Hyperlimes zu ändern. Sind die Hyperlimesprojektionen jedoch obere Adjungierte, so geht das, wie wir in Proposition 3.1 gesehen haben:

Folgerung 3.2 *Zu einem schwachen Diagramm D in $POSET$, dessen Hyperlimesprojektionen obere Adjungierte sind, gibt es ein schwaches Diagramm E mit surjektiven Hyperlimesprojektionen, so, daß die Bilder der Hyperlimesprojektionen über D gerade die Objekte von E sind und daß $hypD \simeq hypE$.*

Betrachten wir noch einmal das schwache Diagramm D aus Proposition 3.1. Falls es keinen verbindenden Morphismus von einem Objekt $D(i)$ nach einem anderen Objekt $D(j)$ gibt, so können wir auch im Diagramm $\tilde{D}$ auf den verbindenden Morphismus von $\tilde{D}(i)$ nach $\tilde{D}(j)$ verzichten:

Proposition 3.2 *Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in Proposition 3.1. Bezeichne außerdem $|I|$ die durch die Kategorie I definierte Präordnung $\{(i,j) \in (ObI)^2 \mid [i \to j] \neq \emptyset\}$ auf ObI. Dann ist $(P, {}'p)$ ein Hyperlimeskegel über der Restriktion von $\tilde{D}$ auf $|I|$.*

Beweis: gleicher Beweis wie für Proposition 3.1. ∎

Definition 3.2 Ein schwaches Diagramm D heiße *zykelfrei*, falls es keine zwei verschiedenen Objekte i und j gibt, so daß es sowohl einen verbindenden Morphismus von $D(i)$ nach $D(j)$ als auch einen von $D(j)$ nach $D(i)$ gibt, und D außer den Identitäten keine verbindenden Endomorphismen hat.

Folgerung 3.3 *Zu einem zykelfreien schwachen Diagramm D in $POSET$, dessen Hyperlimesprojektionen obere Adjungierte sind, gibt es ein zykelfreies, einfaches schwaches Diagramm E, dessen Objekte die Bilder der Hyperlimesprojektionen über D sind, so, daß $hypD \simeq hypE$.*

Noch eine weitere kleine Ergänzung zu Proposition 3.1:

Proposition 3.3 *Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in Proposition 3.1. Für beliebige Objekte i, j von $\tilde{I}$ ist dann*

$$d'_j \circ \tilde{D}(j \leftarrow i) \leq d'_i.$$

(P, d) ist also ein schwacher Kokegel über $\tilde{D}$.

Beweis: $d'_j \circ \tilde{D}(j \leftarrow i) = d'_j \circ {}'p_j \circ d'_i \leq d'_i$ ∎

Haben sämtliche Hyperlimesprojektionen über einem schwachen Diagramm geordneter Mengen untere Adjungierte, so findet man die Bilder der Hyperlimesprojektionen als Bilder interner Projektionen im Hyperlimesobjekt wieder. Nicht nur das, auch die verbindenden Morphismen des Diagrammes aus Proposition 3.1 sind nichts weiter als Restriktionen und Korestriktionen interner Projektionen des Hyperlimesobjektes.
Sei nun umgekehrt eine Menge M interner Projektionen einer geordneten P gegeben. Zu dieser Menge definieren wir ein schwaches Diagramm $D_M : I_M \rightarrow POSET$. Dabei sei I_M die Kategorie, deren Objektmenge gleich M ist, und bei der es von jedem Objekt zu jedem anderen genau einen Pfeil gibt.Es seien

$$\begin{aligned} D_M(p) &:= im(p) && f\ddot{u}r\ p \in M \\ D_M(p \leftarrow q) &:= {}'p' && f\ddot{u}r\ (p,q) \in M^2. \end{aligned}$$

Was für Bedingungen muß man an M stellen, damit P isomorph ist zu $hyp(D_M)$?

Proposition 3.4

a) *Sei $D : I \rightarrow POSET$ ein schwaches Diagramm derart, daß Hyperlimesprojektionen über D obere Adjungierte sind. Sei (P, p) ein Hyperlimeskegel über D, und für jedes Objekt i von I bezeichne d_i die untere Adjungierte zu p_i. Bezeichne M die Menge $\{d_i \circ p_i \mid i \in ObI\}$.*
Dann hat M folgende Eigenschaften:

- *(i) id_P ist punktweises Supremum von M.*
- *(ii) Ist $(x_p)_{p \in M} \in \prod_{p \in M} im(p)$, derart daß $p(x_q) \leq x_p$ für alle $p, q \in M$, dann hat $\{x_p \mid p \in M\}$ ein Supremum.*
- *(iii) Ist $(x_p)_{p \in M} \in \prod_{p \in M} im(p)$, derart daß $p(x_q) \leq x_p$ für alle $p, q \in M$, dann ist $q(\bigvee_{p \in M} x_p) = x_q$ für alle $q \in M$.*

Ist D ein Diagramm in DCPO, so sind alle Elemente von M stetig.

b) *Umgekehrt: Sei P eine geordnete Menge und M eine Menge interner Projektionen von P, welche Bedingungen (i) bis (iii) erfüllt. Dann ist $(P, ({}'p)_{p \in M})$ ein Hyperlimeskegel über D_M. Sind sämtliche Elemente von M stetig, so ist D_M ein Diagramm in DCPO.*

Beweis:

a) (i) Sei $x \in P$. Sicher ist x eine obere Schranke von $\{d_i \circ p_i(x) \mid i \in Ob(I)\}$. Sei $y \in P$ eine weitere obere Schranke dieser Menge. Dann ist $p_i(y) \geq p_i \circ d_i \circ p_i(x) = p_i(x)$ für alle Objekte i von I. Also ist $y \geq x$.

(ii),(iii) Sei $\tilde{D}$ das Diagramm aus Proposition 3.1. Da $'d_i'$ ein Isomorphismus von $im(p_i)$ nach $im(d_i)$ ist mit der Inversen $'p_i'$, ist durch $\tau(i) = {}'d_i'$ ein natürlicher Isomorphismus von $\tilde{D}$ nach D_M gegeben.

$$\begin{tikzcd}
im(p_i) = \tilde{D}(i) \arrow[r, "'p_j \circ d_i' = \tilde{D}(j \leftarrow i)"] \arrow[d, shift right, "'d_i'"'] & im(p_j) = \tilde{D}(j) \arrow[d, shift right, "'d_j'"'] \\
im(d_i) = D_M(i) \arrow[r, "'d_j \circ p_j' = D_M(j \leftarrow i)"'] \arrow[u, shift right, "'p_i'"'] & im(d_j) = D_M(j) \arrow[u, shift right, "'p_j'"']
\end{tikzcd}$$

Bezeichne (Q, q) den kanonischen Hyperlimeskegel über D_M.
Durch $q\dot{\circ}\Delta\varphi = {}'d\dot{\circ}p$ ist ein Isomorphismus φ von P nach Q gegeben, dessen Umkehrabbildung gegeben ist durch $'p\dot{\circ}\varphi^{-1} = {}'p'\dot{\circ}q$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "'p_i"'] & Q \arrow[d, "q_i"] \\
\tilde{D}(i) \arrow[r, "'d_i'"'] & D_M(i)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "q_i"'] & P \arrow[d, "'p_i"] \\
D_M(i) \arrow[r, "'p_i'"'] & \tilde{D}(i)
\end{tikzcd}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1} &= id \circ \varphi^{-1} \\
&= (\bigvee_{i \in ObI} d_i \circ p_i) \circ \varphi^{-1} \\
&= \bigvee_{i \in ObI} (d_i \circ p_i \circ \varphi^{-1}) \\
&= \bigvee_{i \in ObI} (d_i \circ p_i' \circ q_i)
\end{aligned}$$

Sei $x = (x_i)_{i \in ObI} \in \prod im(d_i \circ p_i)$, so daß $d_i \circ p_i(x_j) \leq x_i$ für alle $i, j \in Ob(I)$.
Wir müssen zeigen, daß $\{x_i \mid i \in I\}$ eine kleinste obere Schranke hat. Wir behaupten, daß diese gegeben ist durch $\varphi^{-1}(x)$. Es ist $x \in Q$ und

$$\varphi^{-1}(x) = \bigvee_{i \in ObI} d_i \circ p_i' \circ q_i(x) = \bigvee_{i \in ObI} d_i \circ p_i'(x_i) = \bigvee_{i \in ObI} x_i$$

Nun zu Eigenschaft (iii):

$$d_j \circ p_j(\bigvee_{i \in ObI} x_i) = {}'d_j \circ p_j \circ \varphi^{-1}(x) = q_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(x) = q_j(x) = x_j$$

b) Bezeichne $(\tilde{P}, (\tilde{p})_{p\in M})$ den kanonischen Hyperlimeskegel über D_M. Wir zeigen, daß

$$\varphi : P \to \tilde{P}, \quad \tilde{p} \circ \varphi = {}'p$$

ein Isomorphismus ist mit der Umkehrabbildung

$$\psi : \tilde{P} \to P, \quad \psi(x) = \bigvee_{p\in M} \tilde{p}(x).$$

'φ wohldefiniert':
Seien $p, q \in M$. Dann ist ${}'q' \circ \tilde{p} \circ \psi = {}'q' \circ {}'p \leq {}'q$.
'ψ wohldefiniert':
Sei $x = (x_p)_{p\in M} \in \tilde{P}$. Wegen (ii) existiert dann $\bigvee_{p\in M} x_p = \bigvee_{p\in M} \tilde{p}(x)$.
'$\varphi \circ \psi = id_{\tilde{P}}$':
Sei $x \in \tilde{P}$. Es ist

$$\tilde{p} \circ \varphi \circ \psi = {}'p \circ \psi(x) = {}'p(\bigvee_{q\in M} \tilde{q}(x)) = {}'p(\bigvee_{q\in M} x_q) = x_p.$$

Das letzte Gleichheitszeichen steht wegen (iii).
'$\psi \circ \varphi = id_P$':
Sei $x \in P$. Es ist

$$\psi \circ \varphi(x) = \bigvee_{p\in M} \tilde{p} \circ \varphi(x) = \bigvee_{p\in M} {}'p(x) = x.$$

Das letzte Gleichheitszeichen steht wegen (i).

■

Für keine Menge M von internen Projektionen ist D_M zykelfrei. Es gibt jedoch sicher zykelfreie Diagramme, deren Hyperlimesprojektionen obere Adjungierte sind. Man betrachte nur ein Produkt von geordneten Mengen mit kleinstem Element. Wie kann man sehen, ob M von einem zykelfreien Diagramm herrührt?

Proposition 3.5 *Sei $D : I \to POSET$ ein schwaches Diagramm, so daß Hyperlimesprojektionen über D obere Adjungierte sind. Sei (P, p) ein Hyperlimeskegel über D, und für jedes Objekt i von I bezeichne d_i die untere Adjungierte zu p_i. Seien weiterhin i und j Objekte von I, so daß es keinen Pfeil von j nach i gibt.*
Dann ist $d_i \circ p_i \circ d_j \circ p_j$ kleinstes Element der Menge Q_P aller internen Projektionen von P.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß $p_i \circ d_j$ auf jeder Zusammenhangskomponente des Bildes von p_j konstant ist.
Für zwei Elemente u, v von P mit $u \leq v$ sei das Element $u \star v$ von P definert durch

$$p_k(u \star v) = \begin{cases} p_k(v) & falls \ [j \to k] \neq \emptyset \\ p_k(u) & falls \ [j \to k] = \emptyset \end{cases}$$

Da es keinen Pfeil von einem Objekt k mit $[j \longrightarrow k] \neq \emptyset$ nach einem Objekt h mit $[j \longrightarrow h] = \emptyset$ gibt, ist dadurch ein Element des Produktes der Diagrammobjekte definiert, welches 'verträglich' ist mit den verbindenden Morphismen.
Seien $x, y \in im(p_j)$, so daß $x \leq y$. Dann ist $p_j(d_j(x) \star d_j(y)) = p_j \circ d_j(y) = y$, denn $[j \longrightarrow j]$ ist nichtleer. Weil d_j die untere Adjungierte zu p_i ist, ist dann $d_j(x) \star d_j(y) \geq d_j(y)$.
Da wir $[j \longrightarrow i]$ als leer vorausgesetzt haben, ist $p_i(d_j(x) \star d_j(y)) = p_i \circ d_j(x)$,
und es ist $p_i \circ d_j(x) = p_i(d_j(x) \star d_j(y)) \geq p_i \circ d_j(y)$.
Mit der Monotonie von $p_i \circ d_j$ erhalten wir dann $p_i \circ d_j(x) = p_i \circ d_j(y)$.
Da diese Gleichung für alle $x, y \in im(p_j)$ mit $x \leq y$ gilt, ist $p_i \circ d_j$ auf jeder Zusammenhangskomponente des Bildes von p_j konstant.
Da p_j, als monotone Abbildung, Zusammenhangskomponenten von P auf zusammenhängende Teilmengen von $D(j)$ abbildet, ist dann $p_i \circ d_j \circ p_j$ konstant auf den Zusammenhangskomponenten von P. Also ist auch $d_i \circ p_i \circ d_j \circ p_j$ konstant auf den Zusammenhangskomponenten von P. Da $d_i \circ p_i \circ d_j \circ p_j$ kleiner ist als die Identität, hat dann jede Zusammenhangskomponente von P ein kleinstes Element, und $d_i \circ p_i \circ d_j \circ p_j$ bildet ein Element x ab auf das kleinste Element der Zusammenhangskomponente von x. Diese Abbildung ist sicher das kleinste Element von Q_P. ■

Definition 3.3 Sei P eine geordnete Menge und M eine Teilmenge von Q_P. Wir definieren eine Präordnung $\leq^*$ auf M:
Falls Q_P kein kleinstes Element hat, so sei $\leq^* = M^2$. Falls Q_P ein kleinstes Element hat, so sei

$$pRq \overset{def}{\Leftrightarrow} q \circ p \neq \perp_{Q_P}$$

und $\leq^*$ sei die reflexive und transitive Hülle von R.

Betrachten wir die Situation aus Proposition 3.4 a). Wir haben die $*$-Präordnung auf $\{d_i \circ p_i \mid i \in Ob(I)\}$ so definiert, daß sie eine Teilmenge der Präordnung ist, welche durch $|I|$ auf $\{d_i \circ p_i \mid i \in Ob(I)\}$ induziert wird:

Proposition 3.6 *Voraussetzungen wie in Proposition 3.4 a).*
Sind i und j Objekte der Indexkategorie I, so daß $d_i \circ p_i \leq^* d_j \circ p_j$, so ist $[i \longrightarrow j]$ nichtleer.
Insbesondere: Ist D zykelfrei, so ist die $*$-Präordnung auf $\{d_i \circ p_i \mid i \in Ob(I)\}$ eine Ordnung.

Beweis: Nach Proposition 3.5 ist

$$\{(d_i \circ p_i, d_j \circ p_j) \mid d_i \circ p_i \circ d_j \circ p_j \neq \perp_{Q_P}\} \subseteq \{(d_i \circ p_i, d_j \circ p_j) \mid [i \longrightarrow j] \neq \emptyset\}$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist reflexiv und transitiv. Die $*$-Präordnung ist die reflexive und transitive Hülle der linken Seite der Ungleichung, ist also in der rechten Seite enthalten.
Ist D zykelfrei, so ist die rechte Seite der Ungleichung eine Ordnung. Als Teilmenge einer Ordnung, ist die $*$-Präordnung dann antisymmetrisch. ■

Betrachten wir umgekehrt die Situation aus Proposition 3.4 b). Hat $D_{M|\leq^*}$ den gleichen Hyperlimes wie D_M?

Proposition 3.7 *Voraussetzungen wie in 3.4 b). Zusätzlich sei P ordnungszusammenhängend. Dann ist $(P, ('p)_{p \in M})$ ein Hyperlimeskegel über $D_{M|\leq^*}$.*

Beweis: Ist P zusammenhängend und Q_P hat ein kleinstes Element, so hat P ein kleinstes Element. Das kleinste Element von Q_P ist gleich dem kleinsten Element von $[P \longrightarrow P]$, nämlich die konstante Abbildung auf das kleinste Element von P. Sei (p, q) aus $M^2 \setminus \leq^*$. Nach Definition der $*$-Präordnung ist $q \circ p$ die konstante $\perp$-Abbildung. Also ist $D_M(q \longleftarrow p) = 'q_{|im(p)}$ die konstante $\perp$-Abbildung. In POSET ist $\perp \circ f = \perp$ für jeden Morphismus f. Also ist jeder schwache Kegel über $D_{M|\leq^*}$ ein schwacher Kegel über D_M. ■

Wir können nicht auf die Voraussetzung, daß P ordnungszusammenhängend ist, verzichten. Zum Beispiel:

$\tilde{M} = \{\{a, a', b, b'\}, \{a, a', c, c'\}\}$, $M = \left\{p_A \,|\, A \in \tilde{M}\right\}$.
Für stabile Projektionen p, q ist $im(p \circ q) = im(p) \cap im(q)$. Der Schnitt der beiden Elemente von $\tilde{M}$ ist aber gerade das Bild des kleinsten Elementes von Q_P. Die $*$-Präordnung auf M besteht also nur aus der Diagonalen. P ist aber nicht isomorph zu

Wie muß ein Diagramm nun beschaffen sein, damit sämtliche Hyperlimesprojektionen über dem Diagramm untere Adjungierte haben? In der nächsten Proposition geben wir ein Kriterium für Diagramme von beschränkt vollständigen geordneten Mengen an, und ein anderes für Diagramme von beliebigen geordneten Mengen.

Proposition 3.8

a) *Sei $D : I \longrightarrow BC$ ein schwaches Diagramm, so daß für jeden Hyperlimeskegel (P, p) über D folgendes gilt:*

- $\forall i \in Ob(I).\ \forall x \in D(i).\ \ p_i^{-1}(\uparrow x) \neq \emptyset$

Dann sind Hyperlimesprojektionen über D obere Adjungierte.

b) *Sei $D : I \longrightarrow POSET$ ein schwaches Diagramm, so daß*

- *Für beliebige Objekte i, j von I existiert das punktweise Supremum von $\{D(a) \,|\, a \in [i \longrightarrow j]\}$.*
- *Für beliebige Objekte i, j, k von I und für alle $b \in [j \longrightarrow k]$ ist*

$$D(b) \circ (\bigvee \{D(a) \,|\, a \in [i \longrightarrow j]\}) \leq \bigvee \{D(c) \,|\, c \in [i \longrightarrow k]\}.$$

Dann sind Hyperlimesprojektionen über D obere Adjungierte.
Ist (P, p) ein Hyperlimeskegel über D, so ist die untere Adjungierte d_i zu p_i gegeben durch

$$p_j \circ d_i = \bigvee \{D(a) \,|\, a \in [i \longrightarrow j]\}$$

Beweis:

a) Sei i ein Objekt von I, und sei x ein Element von $D(i)$. Zu zeigen ist, daß $p_i^{-1}(\uparrow x)$ ein Minimum hat. Da wir $p_i^{-1}(\uparrow x)$ als nichtleer und P als beschränkt vollständig vorausgesetzt haben, hat $p_i^{-1}(\uparrow x)$ ein Infimum. Da p_i Infima erhält (nach Propositon 2.5), ist dieses Infimum ein Element von $p_i^{-1}(\uparrow x)$.

b) ' d_i ist wohldefiniert':
Seien j, k Objekte von I, und sei $b \in [j \to k]$.

$$\begin{aligned} D(b) \circ p_j \circ d_i &= D(b) \circ (\bigvee \{D(a) \mid a \in [i \to j]\}) \\ &\leq \bigvee \{D(c) \mid c \in [i \to k]\} \\ &= p_k \circ d_i \end{aligned}$$

'$p_i \circ d_i \geq id_{D(i)}$':

$$p_i \circ d_i = \bigvee \{D(a) \mid a \in [i \to i]\} \geq D(id_i) = id_{D(i)}$$

'$d_i \circ p_i \leq id_P$':

$$\begin{aligned} p_j \circ d_i \circ p_i &= \bigvee \{D(a) \mid a \in [i \to j]\} \circ p_i \\ &= \bigvee \{D(a) \circ p_i \mid a \in [i \to j]\} \\ &\leq p_j \end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für jedes Objekt j von I gilt, ist $d_i \circ p_i \leq id_P$

■

Wir formulieren einen Spezialfall des zweiten Teiles der letzten Proposition:

Folgerung 3.4 *Sei $D : I \to POSET$ ein einfaches Diagramm, so daß*

- *Jedes Objekt von D hat ein kleinstes Element.*
- *Jeder verbindende Morphismus von D erhält das kleinste Element.*

Dann sind Hyperlimesprojektionen über D obere Adjungierte.
Ist (P, p) ein Hyperlimeskegel über D, so ist die untere Adjungierte d_i zu p_i gegeben durch

$$p_j \circ d_i = \begin{cases} \bot & falls\ [i \to j] = \emptyset \\ D(j \leftarrow i) & falls\ [i \to j] \neq \emptyset \end{cases}$$

Hyperlimesprojektionen über D sind surjektiv. Eine Hyperlimesprojektion und ihre untere Adjungierte bildet also ein Projektions-Einbettungspaar.

Beweis: Wir weisen nach, daß die Bedingungen aus Proposition 3.8 b) erfüllt sind.
Seien i, j Objekte von I. Da D einfach ist, ist $[i \to j]$ entweder einelementig oder leer. Im ersten Fall ist $\{D(a) \mid a \in [i \to j]\}$ einelementig, und das punktweise Supremum existiert trivialerweise. Im zweiten Fall ist $\{D(a) \mid a \in [i \to j]\}$ leer, und das punktweise Supremum ist die konstante Abbildung auf das kleinste Element.
Seien i, j, k Objekte von I und b ein Element von $[j \to k]$. Falls $[i \to j]$ einelementig ist, so ist die zweite Bedingung aus Proposition 3.8 trivialerweise erfüllt. Falls $[i \to j]$ leer ist, so ist sie erfüllt, weil $D(b)$ das kleinste Element erhält.
Zur Surjektivität der Hypelimesprojektonen: Sei i ein Objekt von I und x ein Element von $D(i)$. Dann ist $p_i \circ d_i(x) = D(i \leftarrow i)(x) = id(x) = x$. ∎

Wir haben im ersten Teil von Proposition 3.8 eine Bedingung an ein Diagramm von beschränkt vollständigen geordneten Mengen gestellt, unter der Hyperlimesprojektionen über dem Diagramm obere Adjungierte sind. Ohne diese Bedingung kommen wir nicht aus. Jedoch können wir das Diagramm 'einschränken' auf ein Diagramm, dessen Objekte Anfangsstücke der Objekte des ursprünglichen Diagrammes sind. Dieses Diagramm erfüllt dann die Bedingung aus Proposition 3.8.

Proposition 3.9

a) *Seien P, Q beschränkt vollständige geordnete Mengen und sei p eine Abbildung von P nach Q, die nichtleere Infima erhält. Bezeichne A die Menge $\{x \in Q \mid p^{-1}(\uparrow x) \neq \emptyset\}$.*
Dann ist A ein Anfangsstück von Q, enthält das Bild von p, und die Korestriktion von p auf A ist eine obere Adjungierte.
Sind P und Q Bereiche und ist p stetig, so ist A abgeschlossen gegen gerichtete Suprema.

b) *Sei $D : I \to BC$ ein Diagramm und (P, p) ein Hyperlimeskegel über D.*
Für ein Objekt i von I sei $A_i = \{x \in D(i) \mid p_i^{-1}(\uparrow x) \neq \emptyset\}$.
Für jeden Pfeil $a : i \to j$ von I ist dann $D(a)(A_i) \subseteq A_j$.

c) *$\tilde{D} : I \to BC$ sei definiert durch:*

$$\begin{array}{ll} \tilde{D}(i) = A_i & \text{für } i \in Ob(I) \\ \tilde{D}(a) = {}'D(a)' & \text{für } a \in Mor(I) \end{array}$$

Dann ist $(P, {}'p)$ ein Hyperlimeskegel über $\tilde{D}$.

Beweis:

a) 'A ist ein Anfangsstück':
Seien x aus A und y aus Q, so daß $y \leq x$. Nach Definition von A ist $p^{-1}(\uparrow x)$ nichtleer. Da $p^{-1}(\uparrow x)$ eine Teilmenge von $p^{-1}(\uparrow y)$ ist, ist dann auch $p^{-1}(\uparrow y)$ nichtleer. Also ist y in A.
'$im(p) \subseteq A$':
Wenn x im Bild von p enthalten ist, ist offensichtlich $p^{-1}(\uparrow x)$ nichtleer.
'${}'p$ ist eine obere Adjungierte':
Sei x aus A. Nach Definition von A gibt es ein y in P, so daß $p(y) \geq x$. Dann ist ${}'p^{-1}(\uparrow x)$ nichtleer. Da P beschränkt vollständig ist, existiert dann das Infimum von ${}'p^{-1}(\uparrow x)$. Da ${}'p$ Infima erhält ist es ein Element von ${}'p^{-1}(\uparrow x)$.
'Ist p stetig, so ist A abgeschlossen gegen gerichtete Suprema':
Sei d die untere Adjungierte der Korestriktion von p auf A. Sei M eine gerichtete Teilmenge von A. Es ist

$$p(\bigvee{}^{\uparrow} d(M)) = \bigvee{}^{\uparrow} p \circ d(M) = \bigvee{}^{\uparrow} {}'p \circ d(M) \geq \bigvee{}^{\uparrow} M$$

Also ist $p^{-1}(\uparrow \bigvee{}^{\uparrow} M)$ nichtleer.

b) Sei x aus A_i. Das heißt, es gibt ein y in P, so daß $p_i(y) \geq x$.
Dann ist $D(a)(x) \leq D(a) \circ p_i(y) \leq p_j(y)$. Also ist $p_i^{-1}(\uparrow D(a)(x))$ nichtleer.

c)

$$
\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[ddl, "q_i"'] \arrow[ddr, "q_j"] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] & \\
 & P \arrow[dl] \arrow[dr, "'p_j"] \arrow[ddl, "p_i"] \arrow[ddr, "p_j"'] & \\
A_i \arrow[rr, "'D(a)'"] \arrow[d, hook] & & A_j \arrow[d, hook] \\
D(i) \arrow[rr, "D(a)"'] & & D(j)
\end{tikzcd}
$$

Daß $(P, 'p)$ ein schwacher Kegel ist, kann man nicht am Diagramm sehen, folgt aber daraus, daß die Ordnung auf den Morphismenmengen punktweise gegeben ist. Sei (Q, q) ein schwacher Kegel über $\tilde{D}$. Dann ist $(Q, incl\dot{\circ}q)$ ein schwacher Kegel über D, denn $D(a)\circ incl\circ q_i = incl\circ' D(a)' \circ q_i \leq incl\circ q_i$. Also gibt es genau einen Pfeil f von Q nach P, so daß $p\dot{\circ}f = incl\dot{\circ}q$. Da $p = incl\dot{\circ}'p$ und da $incl$ injektiv ist, ist dann $'p\dot{\circ}f = q$. Sei g ein weiterer Pfeil von P nach Q, so daß $'p\dot{\circ}g = q$. Dann ist $p\dot{\circ}g = incl\dot{\circ}'p\dot{\circ}g = incl\dot{\circ}q$. Weil f der einzige Pfeil ist, für den $p\dot{\circ}f$ gleich $incl\dot{\circ}q$ ist, ist $f = g$. ∎

Wir bemerken, daß Anfangsstücke von beschränkt vollständigen geordneten Mengen beschränkt vollständig sind. Anfangstücke von flachen Bereichen sind flache Bereiche. Ein Anfangsstück A eines Bereiches B, welches abgeschlossen ist gegen gerichtete Suprema, ist ein Bereich. Ist B stetig (algebraisch, dI), so ist auch A stetig (algebraisch,dI).

4 Die Kategorie der Hyperlimites flacher Bereiche

Definition 4.1 HF bezeichne die volle Unterkategorie von *DCPO*, deren Objekte Hyperlimites flacher Bereiche sind.
OHF bezeichne die volle Unterkategorie von *DCPO*, deren Objekte Hyperlimesobjekte über zykelfreien Diagrammen von flachen Bereichen sind. ('O' für 'ordered'.)

In der Einleitung und in Beispiel e) im zweiten Kapitel haben wir erläutert, wie man Hyperlimites flacher Bereiche zum Modellieren von Datenbanken benutzen kann. In diesem Kapitel werden wir sehen, daß die Kategorien HF und OHF auch Eigenschaften haben, die sie brauchbar machen zur Konstruktion von Lambda-Kalkül-Modellen. So sind beide Kategorien kartesisch abgeschlossen, und die Kategorie HF hat Objekte, die isomorph sind zum Bereich ihrer stetigen Selbstabbildungen. Zunächst jedoch werden wir als Folgerung der Ergebnisse aus dem letzten Kapitel die Hyperlimites flacher Bereiche intern charakterisieren:

Proposition 4.1

a) *Ein Bereich B ist ein HF-Objekt, genau dann wenn es eine Teilmenge M der Menge Q_B aller Projektionen von B gibt, welche Bedingungen (i) bis (iii) aus Propsition 3.4 erfüllt, so daß jedes Bild eines Elementes von M ein flacher Bereich ist.*

b) *Ein Bereich B ist ein OHF-Objekt, genau dann wenn es eine Teilmenge M der Menge Q_B aller Projektionen von B gibt, welche Bedingungen (i) bis (iii) aus Proposition 3.4 erfüllt, und deren $*$-Präordnung antisymetrisch ist, so daß jedes Bild eines Elementes von M ein flacher Bereich ist.*

Beweis:

a) 'wenn': folgt direkt aus Proposition 3.4 b).
'nur dann wenn':
Ist B Hyperlimesobjekt über einem Diagramm von flachen Bereichen, so gibt es, nach Proposition 3.9 ein Diagramm D, dessen Objekte Anfangsstücke von flachen Bereichen sind, so daß B Hyperlimesobjekt über D ist, und Hyperlimesprojektionen über D obere Adjungierte sind. Als Anfangsstück eines flachen Bereiches, ist jedes Objekt von D ein flacher Bereich.
Nach Proposition 3.4 a) gibt es eine Teilmenge M von Q_B, die Bedingungen (i) bis (iii) erfüllt. Das Bild jedes beliebigen Elementes von M ist isomorph zum Bild eines Abschlußoperators eines Objektes von D. Der einzige Abschlußoperator eines flachen Bereiches ist aber die Identität.

b) 'wenn': Nach Proposition 3.4 b) ist B Hyperlimesobjekt über D_M. Das Bild jedes Elementes von M ist nach Voraussetzung ein flacher Bereich, hat also ein kleinstes Element. Man überlegt sich leicht, daß dieses auch das kleinste Element von B sein muß. B hat also ein kleinstes Element, ist also insbesondere ordnungszusammenhängend. Nach Proposition 3.7 ist B dann Hyperlimesobjekt über $D_{|\leq^*}$. Die $*$-Präordnung ist nach Voraussetzung antisymmetrisch. Als Kategorie aufgefaßt, ist $\leq^*$ also zykelfrei.
'nur dann wenn': Ist B Hyperlimesobjekt über einem zykelfreien Diagramm, so ist auch das Diagramm D aus dem Beweis von Teil a) zykelfrei. Nach Propsition 3.6 ist dann die $*$-Präordnung auf der Menge M aus dem Beweis von Teil a) antisymetrisch.

■

Wir wollen nun zeigen, daß die Kategorien HF und OHF kartesisch abgeschlossen sind. Dazu benutzen wir, daß wir nach Beispiel d) aus dem zweiten Kapitel den Bereich der stetigen Abbildungen zwischen zwei algebraischen Bereichen auffassen können als Hyperlimes eines Diagrammes, dessen sämtliche Objekte Kopien des Definitionsbereiches sind. Wir stoßen dann auf die Frage, ob ein Hyperlimes von Hyperlimites flacher Bereiche wieder ein Hyperlimes flacher Bereiche ist.
Oder etwas allgemeiner formuliert:

Gegeben sei eine Familie $(E_k)_{k\in K}$ von Diagrammen, und ein Diagramm D, dessen Objekte gerade die Hyperlimesobjekte über den Diagrammen E_k sind. Gibt es dann ein Diagramm F, dessen Objekte gerade die Elemente von $\{E_k(i) \mid k \in K,\ i \in ObI_k\}$ sind, so daß $hypD \simeq hypF$?

Definition 4.2 Sei K eine kleine Kategorie und $(I_k)_{k\in ObK}$ eine Familie von kleinen Katgorien. Wir wollen daraus eine neue Kategorie $\biguplus_K I_k$ konstruieren:

Objektmenge: $\biguplus_{k\in ObK} Ob(I_k)$

Pfeilmengen: Falls $i, j \in Ob(I_k)$:

$$[i \to j]_{\uplus I_k} := [i \to j]_{I_k} \uplus ([k \to k]_K \setminus \{id_k\})$$

Falls $i \in Ob(I_h), j \in Ob(I_k)$ und $h \neq k$:

$$[i \to j]_{\uplus I_k} := [h \to k]_K$$

Ist a ein K-Pfeil von h nach k, so gibt es in $\biguplus_K I_k$ mehrere Pfeile, die mit a bezeichnet werden, nämlich für jedes Paar (i, j) aus $Ob(I_h) \times Ob(I_k)$ einen. Wir kennzeichnen deshalb mit einem Index die Quelle und das Ziel von a.

Verknüpfung:

(i) Falls $i, j, l \in Ob(I_h)$, $a \in [i \to j]$, $b \in [j \to l]$:

$$b \circ a := b \circ_{I_h} a$$

(ii) Falls $i \in Ob(I_h)$, $j \in Ob(I_k)$, $l \in Ob(I_r)$, $a \in [h \to k]_K$, $b \in [k \to r]_K$:

$$b_{[j\to l]} \circ a_{[i\to j]} := (b \circ_K a)_{[i\to l]}$$

(iii) Falls $i, j \in Ob(I_h)$, $l \in Ob(I_k)$, $a \in [i \to j]_{I_h}$, $b \in [h \to k]_K$:

$$b_{[j\to l]} \circ a := b_{[i\to l]}$$

(iv) Falls $i \in ObI_h$, $j, l \in ObI_k$, $a \in [h \to k]_K$, $b \in [j \to l]_{I_k}$:

$$b \circ a_{[i\to j]} := a_{[i\to l]}$$

Beispiel: $K = 1 \longrightarrow 2$, $\quad I_1 = I_2 = a \longrightarrow b$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & a \arrow[d] \\
b \arrow[r] \arrow[ur] & b
\end{tikzcd}$$

Man prüft leicht nach, daß die Verknüpfungsoperation von $\biguplus_K I_k$ assoziativ ist, und daß für ein Objekt i von I_k die Identität auf i in I_k auch Identität in $\biguplus_K I_k$ ist. $\biguplus_K I_k$ ist also eine Kategorie. Falls K zykelfrei ist, und sämtliche I_k zykelfrei sind, so ist auch $\biguplus_K I_k$ zykelfrei.

Proposition 4.2 *Sei K eine kleine Kategorie, $(E_k : I_k \to POSET)_{k \in ObK}$ eine Familie von schwachen Diagrammen und $D : K \to POSET$ ein schwaches Diagramm, so daß es für alle Objekte k von K einen Hyperlimeskegel $(D(k), p_k)$ über E_k gibt.*
Jedes Diagramm E_k erfülle die folgenden Bedingungen:

- *Für jedes Objekt i von I_k hat $p_{k,i}$ eine untere Adjungierte $d_{k,i}$.*
- *Für jeden Pfeil $a : i \to j$ von I_k sei $d_{k,j} \circ E_k(a) \leq d_{k,i}$.*

Das Diagramm $\biguplus_D E_k : \biguplus_K I_k \to POSET$ sei gegeben durch:

***Für** $i \in ObI_h$**:** $(\biguplus_D E_k)(i) := E_h(i)$*

***Für** $a \in Mor(I_h)$**:** $(\biguplus_D E_k)(a) := E_h(a)$*

***Für** $i \in Ob(I_h)$, $j \in Ob(I_r)$, $a \in [h \to r]_K$**:** $(\biguplus_D E_k)(a_{[i \to j]}) := p_{r,j} \circ D(a) \circ d_{h,i}$*

Behauptung: $\biguplus_D E_k$ ist ein schwaches Diagramm.

Zusätzlich soll nun gelten:

- *Verbindende Morphismen von D erhalten Suprema.*
- *Für jedes $k \in Ob(K)$ erhalten verbindende Morphismen von E_k Suprema.*

Sei (P, π) ein Hyperlimeskegel über D.
Behauptung: $(P, (p_{k,i} \circ \pi_k)_{k \in ObK, i \in ObI_k})$ ist ein Hyperlimeskegel über $\biguplus_D E_k$.

Beweis:

'$\biguplus_D E_k$ ist ein schwaches Diagramm':

Seien a, b wie in Definition 4.2 (i) bis (iv).

(i)

$$\begin{array}{c} h \\ \\ i \\ {\scriptstyle E_h(a)}\downarrow \\ j \\ {\scriptstyle E_h(b)}\downarrow \\ l \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\biguplus_D E_k)(b) \circ (\biguplus_D E_k)(a) &= E_h(b) \circ E_h(a) \\ &\leq E_h(b \circ a) \\ &= (\biguplus_D E_k)(b \circ a) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{tikzcd} h & k & r \\ i \arrow[r, "p_{k,j} \circ D(a) \circ d_{h,i}"'] & j \arrow[r, "p_{r,l} \circ D(b) \circ d_{k,j}"'] & l \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} (\biguplus_D E_k)(b_{[j\to k]}) \circ (\biguplus_D E_k)(a_{[i\to j]}) &= p_{r,l} \circ D(b) \circ d_{k,j} \circ p_{k,j} \circ D(a) \circ d_{h,i} \\ &\leq p_{r,l} \circ D(b) \circ D(a) \circ d_{h,i} \\ &\leq p_{r,l} \circ D(b \circ a) \circ d_{h,i} \\ &= (\biguplus_D E_k)((b \circ a)_{[i\to l]}) \\ &= (\biguplus_D E_k)(b_{[j\to l]} \circ a_{[i\to j]}) \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{tikzcd} h & k \\ i \arrow[d, "E_h(a)"'] & \\ j \arrow[r, "p_{k,l} \circ D(b) \circ d_{h,j}"'] & l \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} (\biguplus_D E_k)(b_{[j\to l]}) \circ (\biguplus_D E_k)(a) &= p_{k,l} \circ D(b) \circ d_{h,j} \circ E_h(a) \\ &\leq p_{k,l} \circ D(b) \circ d_{h,i} \\ &= (\biguplus_D E_k)(b_{[i\to l]}) \\ &= (\biguplus_D E_k)(b_{[j\to l]} \circ a) \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{tikzcd} h & k \\ i \arrow[r, "p_{k,j} \circ D(a) \circ d_{h,i}"] & j \arrow[d, "E_k(b)"] \\ & l \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} (\biguplus_D E_k)(b) \circ (\biguplus_D E_k)(a_{[i\to j]}) &= E_k(b) \circ p_{k,j} \circ D(a) \circ d_{h,i} \\ &\leq p_{k,l} \circ D(a) \circ d_{h,i} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\textstyle\biguplus_D E_k)(a_{[i \to l]}) \\
&= (\textstyle\biguplus_D E_k)(b \circ a_{[i \to j]})
\end{aligned}
$$

'$(P, (p_{h,i} \circ \pi_h)_{h \in ObK, i \in ObI_h})$ **ist Hyperlimeskegel über** $(\biguplus_D E_k)$':

Sei (Q, q) ein schwacher Kegel über $\biguplus_D E_k$.

$$
\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[d, dashed, "\exists! s"] & \\
 & P \arrow[dl, "\pi_h"'] \arrow[dr, "\pi_k"] & \\
D(h) \arrow[rr, "D(f)"'] & & D(k)
\end{tikzcd}
$$

$$
E_h(i) \xrightarrow[E_h(a)]{} E_h(l) \qquad E_k(j) \xrightarrow[E_k(b)]{} E_k(m)
$$

Dann ist (Q, q_h) ein schwacher Kegel über E_h für alle Objekte h von K.
Also: $\exists! r_h : Q \to D(h).\ p_h \dot{\circ} \Delta r_h = q_h$ $(*)$
Sei $f : h \to k \in MorK$. Dann ist für alle $j \in ObI_k$

$$
\begin{aligned}
p_{k,j} \circ D(f) \circ r_h &= p_{k,j} \circ D(f) \circ id \circ r_h \\
&= p_{k,j} \circ D(f) \circ \Big(\bigvee_{i \in ObI_h} d_{h,i} \circ p_{h,i} \Big) \circ r_h \\
&= p_{k,j} \circ D(f) \circ \bigvee (d_{h,i} \circ p_{h,i} \circ r_h) \\
&= p_{k,j} \circ \bigvee_{i \in ObI_h} D(f) \circ d_{h,i} \circ p_{h,i} \circ r_h \\
&= \bigvee_{i \in ObI_h} p_{k,j} \circ D(f) \circ d_{h,i} \circ p_{h,i} \circ r_h \\
&= \bigvee_{i \in ObI_h} (\textstyle\biguplus_D E_k)\,(f_{[i \to j]}) \circ q_{h,i} \\
&\leq q_{k,i}
\end{aligned}
$$

Die vierte Gleichung der Gleichungskette gilt, weil $D(f)$ nach Voraussetzung Suprema erhält. Die fünfte Gleichung gilt, weil mit den verbindenden Morphismen von E_k auch die Hyperlimesprojektionen über E_k Suprema erhalten, nach Proposition 2.5.
Da die eben hergeleitete Ungleichung für alle k aus $Ob(K)$ gilt, ist $D(f) \circ r_h \leq r_k$.
(Q, r) ist also ein schwacher Kegel über D.
Also: $\exists! s : Q \to P.\ \pi \dot{\circ} \Delta s = r$ $(**)$
Dann ist aber für alle $h \in ObK$ und alle $i \in ObI_h$

$$
p_{h,i} \circ \pi_h \circ s \overset{**}{=} p_{h,i} \circ r_h \overset{*}{=} q_{h,i}
$$

Sei $t : Q \to P$ ein Pfeil, so daß $p_{h,i} \circ \pi_h \circ t = q_{h,i}$ für alle $h \in ObK$ und alle $i \in ObI_h$.
Wegen $(*)$ ist dann $\pi_h \circ t = r_h$ für alle $h \in ObK$. Wegen $(**)$ ist dann $t = s$.

∎

Satz 4.1 *Die Kategorien HF und OHF sind kartesich abgeschlossene Unterkategorien von $DCPO$.*

Beweis: Der einelementige Bereich ist ein flacher Bereich, also ein OHF-Objekt.
Sind A, B HF-Objekte (OHF-Objekte), dann sicher auch $A \times B$.
Bleibt zu zeigen, daß für HF-Objekte (OHF-Objekte) A, B auch $[A \to B]$ ein HF-Objekt (OHF-Objekt) ist: Seien also $D : I \to DCPO$ und $E : J \to DCPO$ schwache Diagramme von flachen Bereichen, (A, p) ein Hyperlimeskegel über D und (B, q) ein Hyperlimeskegel über E. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß A als Hyperlimes von beschränkt vollständigen, algebraischen Bereichen algebraisch ist. Nach Beispiel d) aus Kapitel 2 ist dann $([A \to B], (ev_k)_{k \in K(A)})$ ein Hyperlimeskegel über $F : K(A) \to DCPO$, wobei

$$\begin{array}{ll} F(k) = B & \textit{für alle } k \in K(A) \\ F(k \leftarrow h) = id_B & \textit{für alle } (h,k) \in \leq_{K(A)} \end{array}$$

Wegen Proposition 3.9 und weil Anfangsstücke von flachen Bereichen flache Bereiche sind, können wir annehmen, daß Hyperlimesprojektionen über E obere Adjungierte sind. Nach Proposition 3.2 ist dann $(B, {}'q)$ ein Hyperlimeskegel über der Restriktion des Diagrammes $\tilde{E}$ aus Proposition 3.1 auf $|J|$. Die Objekte von $\tilde{E}_{||J|}$ sind Bilder von Abschlußoperatoren auf flachen Bereichen, sind also flache Bereiche. Wegen Proposition 3.3 und Propsition 4.2 ist $\biguplus_F \tilde{E}_{||J|}$ ein schwaches Diagramm.
Die verbindenden Morphismen von F sind Identitäten, erhalten also sicher Suprema. Die verbindenden Morphismen von $\tilde{E}_{||J|}$ sind monotone Abbildungen mit flachem Definitionsberich und erhalten als solche Suprema. Nach 4.2 ist $([A \to B], ({}'q_j \circ ev_k)_{k \in K(A), j \in ObJ})$ dann ein Hyperlimeskegel über $\biguplus_F \tilde{E}_{||J|}$. Die Objekte von $\biguplus_F \tilde{E}_{||J|}$ sind die gleichen wie die Objekte von $\tilde{E}_{||J|}$, sind also flache Bereiche.
Da F zykelfrei ist, ist $\biguplus_F \tilde{E}_{||J|}$ zykelfrei, falls J zykelfrei ist. ∎

Satz 4.2 *In der Kategorie HF gibt es Objekte A, für die $A \simeq [A \to A]$.*

Beweis: Wir beschreiben zunächst eine Konstruktion, welche in der Kategorie $DCPO$ ein Objekt liefert, welches isomorph ist zum Bereich seiner stetigen Selbstabbildungen:
Sei A ein Bereich und $h : [A \to A] \to A$ eine stetige obere Adjungierte. $DCPO^{gd}$ sei die Unterkategorie von $DCPO$, deren Objekte die gleichen wie die von $DCPO$ und deren Morphismen die stetigen oberen Adjungierten sind. Der Endofunktor F auf $DCPO^{gd}$ sei gegeben durch

$$\begin{array}{ll} F(A) = [A \to A] & \textit{für Objekte } A \\ F(g)(f) = g \circ f \circ d & \textit{für Morphismen } g : A \to B \end{array}$$

wobei d die untere Adjungierte zu g bezeichnet.

$$\begin{tikzcd} {[A} \arrow[r, "f"] & {A]} \arrow[d, "g"] \\ {[B} \arrow[u, "d"] \arrow[r] & {B]} \end{tikzcd}$$

Das Diagramm $D_{A,h} : N^{op} \to DCPO^{gd}$ sei gegeben durch

$$\begin{array}{ll} D_{A,h}(0) = A & D_{A,h}(0 \leftarrow 1) = h \\ D_{A,h}(n) = F^n A & D_{A,h}(n \leftarrow n+1) = F^n h \end{array}$$

$$A \xleftarrow{h} FA \xleftarrow{Fh} F^2A \xleftarrow{F^2h} \ldots$$

Dann ist das Limesobjekt $limD_{A,h}$ isomorph zu $[limD_{A,h} \to limD_{A,h}]$. (Für vollständige Verbände folgt das aus Satz 3.19 in [COMP]. Da im Beweis dieses Satzes nur Eigenschaften von Adjunktionen und die Stetigkeit der oberen Adjungierten verwendet werden, läßt sich der Satz auf Bereiche verallgemeinern.)
Sei nun A ein beliebiges HF-Objekt. Wir definieren $h : [A \to A] \to A$ durch

$$h(f) = f(\perp)$$

und $e : A \to [A \to A]$ durch

$$e(x) = const_x$$

Wir zeigen, daß (h, e) ein Projektions-Einbettungspaar ist:
Für f aus $[A \to A]$ und x aus A ist

$$(e \circ h(f))(x) = e(f(\perp))(x) = const_{f(\perp)}(x) = f(\perp) \leq f(x)$$

Also ist $e \circ h \leq id_{[A \to A]}$.
Für x aus A ist

$$h \circ e(x) = h(const_x) = const_x(\perp) = x$$

Also $h \circ e = id_A$.
A ist Hyperlimes von flachen Bereichen, also beschränkt vollständig. Suprema in $[A \to A]$ werden also punktweise gebildet. Dann erhält h aber Suprema.

Erhält $g : A \to B$ Suprema, und sind A, B beschränkt vollständig, so erhält auch $F(g) : [A \to A] \to [B \to B]$ Suprema, denn

$$F(g)(\bigvee M) = g \circ \bigvee M \circ d = \bigvee g \circ M \circ d = \bigvee F(g)(M)$$

Sämtliche verbindende Morphismen von $D_{A,h}$ erhalten also Suprema.
Wir zeigen nun, daß ein Limesobjekt über $D_{A,h}$ ein HF-Objekt ist: Nach Satz 4.1 sind die Objekte von $D_{A,h}$ HF-Objekte. Es gibt also eine Familie $(E_n)_{n \in N}$ von Diagrammen von flachen Bereichen, so daß $D_{A,h}(n)$ Hyperlimesobjekt über E_n ist für jede natürliche Zahl n. Nach Proposition 3.9 können wir annehmen, daß Projektionen über E_n obere Adjungierte sind. Bezeichne $\tilde{D}_{A,h}$ das Diagramm aus Proposition 2.4. Nach besagter Proposition ist ein Limesobjekt $limD_{A,h}$ über $D_{A,h}$ Hyperlimesobjekt über $\tilde{D}_{A,h}$. Jeder verbindende Morphismus von $\tilde{D}_{A,h}$ entsteht durch Komposition von verbindenden Morphismen von $D_{A,h}$ und unteren Adjungierten von verbindenden von $D_{A,h}$. Untere Adjungierte erhalten Suprema, und die verbindenden Morphismen von $D_{A,h}$ erhalten nach Konstruktion von $D_{A,h}$ Suprema. Also erhalten sämtliche verbindenden Morphismen von $\tilde{D}_{A,h}$ Suprema. Für jedes $n \in N$ sind die verbindenden Morphismen von E_n monotone Abildungen mit flachem Definitionsbereich, erhalten also Suprema. Nach Proposition 4.2 ist dann $limD_{A,h}$ Hyperlimesobjekt über $\biguplus_{\tilde{D}_{A,h}} E_n$. ■

Eine weitere Abgeschlossenheitseigenschaft der Kategorien HF und OHF:

Proposition 4.3 *Ist $(A_k)_{k \in K}$ eine Familie von HF-Objekten (OHF-Objekten), so ist auch die disjunkte Summe $\bigoplus_{k \in K} A_k$ ein HF-Objekt (OHF-Objekt).*

Beweisidee: Sei $(D_k : I_k \to DCPO)_{k \in K}$ eine Familie von Diagrammen, und für jedes k aus K sei (A_k, p_k) ein Hyperlimeskegel über D_k.
Die Kategorie $\bigoplus_K I_k$ entstehe aus den Kategorien I_k durch disjunkte Vereingung von Objektmengen und Pfeilmengen und Hinzufügen eines finalen Objektes $\top$.
Das schwache Diagramm $\bigoplus_K D_k : \bigoplus_K I_k \to DCPO$ sei definiert durch

Falls $i \in ObI_h$: $$(\bigoplus_K D_k)(i) := D_h(i)$$

Falls $i = \top$: $$(\bigoplus_K D_k)(\top) := K_\perp$$

Falls $a : i \to j \in Mor(I_h)$: $$(\bigoplus_K D_k)(a) := D_h(a)$$

Falls $a : i \to \top$ und $i \in Ob(I_h)$: $$(\bigoplus_K D_k)(a)(x) := \begin{cases} \perp & falls\ x = \perp \\ h & falls\ x \neq \perp \end{cases}$$

Die schwach natürliche Transformation $q : \Delta(\bigoplus_{k \in K} A_k) \to \bigoplus_K D_k$ sei gegeben durch

Für $x \in A_h$: $$q_i(x) := \begin{cases} p_{h,i}(x) & falls\ i \in Ob(I_h) \\ h & falls\ i = \top \\ \perp & sonst \end{cases}$$

Für $x = \perp$**:** $$q_i(\perp) := \perp \quad \textit{für alle } i \in Ob(\bigoplus_K I_k)$$

Dann ist $(\bigoplus_{k\in K} A_k, q)$ ein Hyperlimeskegel über $\bigoplus_K D_k$.

Falls sämtliche I_k zykelfrei sind, so ist auch $\bigoplus_K I_k$ zykelfrei. ∎

5 Eigenschaften des Hyperlimesobjektes bei gegebenem Diagramm und Eigenschaften des Diagrammes bei gegebenem Hyperlimesobjekt

5.1 Eigenschaften des Hyperlimesobjektes bei bekanntem Diagramm

Im folgenden bezeichne der Buchstabe D immer ein schwaches Diagramm.
Sprechen wir vom Hyperlimes über einem Diagramm in einer Unterkategorie von $DCPO$ (bzw. $POSET$), so meinen wir immer den Hyperlimes in $DCPO$ (bzw. $POSET$).

Satz 5.1

a) Sei $D : I \to BC \wedge CONT$. Dann ist das Hyperlimesobjekt über D stetig.

b) Sei $D : I \to BC \wedge ALG$. Dann ist das Hyperlimesobjekt über D algebraisch.

Beweis:

a) Nach Proposition 3.9 gibt es ein Diagramm $\tilde{D}$, so daß jede Hyperlimesprojektion über $\tilde{D}$ eine untere Adjungierte hat, und D und $\tilde{D}$ die gleichen Hyperlimesobjekte haben. Für jedes Objekt i von I ist $\tilde{D}(i)$ ein Anfangsstück von $D(i)$ welches abgeschlossen ist gegen gerichtete Suprema. Als solches ist $\tilde{D}(i)$ sicher stetig. Sei nun (A, p) ein Hyperlimeskegel über $\tilde{D}$. Für jedes Objekt i von I bezeichne d_i die untere Adjungierte zu p_i. Sei x aus A. Dann ist

$$\begin{aligned} x &= \bigvee_{i \in ObI} d_i \circ p_i(x) && (1) \\ &= \bigvee_{i \in ObI} d_i(\bigvee{}^{\uparrow} \downarrow\!\!\!\!\downarrow p_i(x)) && (2) \\ &= \bigvee_{i \in ObI} \bigvee{}^{\uparrow} d_i(\downarrow\!\!\!\!\downarrow p_i(x)) && (3) \\ &= \bigvee{}^{\uparrow} \Big\{ \bigvee E \mid E \subseteq \textstyle\bigcup_{i \in ObI} d_i(\downarrow\!\!\!\!\downarrow p_i(x)),\ E \text{ endlich} \Big\} && (4) \end{aligned}$$

(2) gilt, weil $\tilde{D}(i)$ stetig ist, (3) weil eine untere Adjungierte Suprema erhält.
Für jedes Objekt i von I ist $d_i(\downarrow\!\!\!\!\downarrow p_i(x))$ eine Teilmenge von $\downarrow\!\!\!\!\downarrow d_i \circ p_i(x)$, da d_i untere Adjungierte einer stetigen Funktion ist. Weil $d_i \circ p_i$ kleiner ist als die Identität, ist $\downarrow\!\!\!\!\downarrow d_i \circ p_i(x)$ eine Teilmenge von $\downarrow\!\!\!\!\downarrow x$. Da endliche Suprema von Elementen weit unter x wieder weit unter x liegen, ist dann die Menge aus dem letzten Term der obigen Gleichungskette eine Teilmenge von $\downarrow\!\!\!\!\downarrow x$. Also ist x gerichtetes Supremum von weit darunter liegenden Elementen, was zu zeigen war.

b) Wie in a) können wir annehmen, daß jede Hyperlimesprojektion über D eine untere Adjungierte hat. Sei nun (A, p) ein Hyperlimeskegel über D, für jedes Objekt i von I sei d_i die untere Adjungierte zu p_i, und sei x ein Element von A.

Dann ist

$$\begin{aligned} x &= \bigvee_{i \in ObI} d_i \circ p_i(x) \\ &= \bigvee_{i \in ObI} d_i(\bigvee{}^{\uparrow} K_{p_i(x)}) \\ &= \bigvee_{i \in ObI} \bigvee{}^{\uparrow} d_i(K_{p_i(x)}) \\ &= \bigvee{}^{\uparrow}\{\bigvee E \mid E \subseteq \bigcup_{i \in ObI} d_i(K_{p_i(x)}), E\ endlich\} \end{aligned}$$

Weil d_i die untere Adjungierte einer stetigen Funktion ist, ist $d_i(K_{p_i(x)})$ Teilmenge von $K_{d_i \circ p_i(x)}$. Weil $p_i \circ d_i$ kleiner ist als die Identität, ist $K_{d_i \circ p_i(x)}$ eine Teilmenge von K_x. Da endliche Suprema von kompakten Elementen kompakt sind, ist die Menge in der letzten Zeile der obigen Gleichungskette eine Teilmenge von K_x. Also ist x gerichtetes Supremum von kompakten Elementen.

■

Ein Hyperlimesobjekt über einem Diagramm von dI-Bereichen muß kein dI-Bereich sein, selbst dann nicht wenn das Diagramm zykelfrei und einfach ist:

$hypD_1$,$hypD_2$ und $hypD_3$ sind nicht endlich algebraisch. $hypD_4$ enthält einen zu N_3 isomorphen Unterverband, ist also nicht distributiv.
Wir werden Bedingungen an einfache Diagramme von dI-Bereichen stellen, unter denen Hyperlimesobjekte darüber wieder dI-Bereiche sind.

Proposition 5.1 *Sei $D : I \to DIST$, so daß verbindende Morphismen von D endliche Suprema erhalten. Dann ist das Hyperlimesobjekt über D distributiv.*

Beweis: Nach Proposition 2.5 erhalten Hyperlimesprojektionen über D Infima und endliche Suprema. Ein Hyperlimesobjekt über D ist also isomorph zu einer Teilmenge des Produktes der Diagrammobjekte, welche abgeschlossen ist gegen Infima und endliche Suprema, ist also distributiv. ∎

Lemma 5.1 *Sei $D : I \to BC \wedge ALG$, so daß jede Hyperlimesprojektion über D eine untere Adjungierte hat. Sei (A, p) ein Hyperlimeskegel über D. Für jedes $i \in Ob(I)$ bezeichne d_i die untere Adjungierte zu p_i. Sei k ein Element von A. Dann sind äquivalent:*

(1) k ist kompakt.

(2) $\exists E^{endl} \subseteq ObI.\ \forall i \in E.\ \exists k_i \in K(D(i)).\ \ k = \bigvee_{i \in E} d_i(k_i)$

Beweis:

'(2) ⇒ (1)': Eine untere Adjungierte einer stetigen Funktion bildet kompakte Elemente ab auf kompakte Elemente. Endliche Suprema von kompakten Elementen sind kompakt.

'(1) ⇒ (2)': Sei k kompakt. Dann ist

$$\begin{aligned} k &= \bigvee_{i \in ObI} d_i \circ p_i(k) \\ &= \bigvee_{i \in ObI} d_i(\bigvee{}^{\uparrow} K_{p_i(k)}) \\ &= \bigvee_{i \in ObI} \bigvee{}^{\uparrow} d_i(K_{p_i(k)}) \\ &= \bigvee \bigcup_{i \in ObI} d_i(K_{p_i(k)}) \end{aligned}$$

Da k kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge F von $\bigcup_{i \in ObI} d_i(K_{p_i(k)})$ so daß $\bigvee F = k$. Da $d_i(k_1 \vee k_2)$ ein Element von $d_i(K_{p_i(k)})$ ist, falls k_1 und k_2 Elemente von $K_{p_i(k)}$ sind, können wir annehmen, daß $F \cap d_i(K_{p_i(k)})$ höchstens ein Element hat für jedes $i \in Ob(I)$.

■

Satz 5.2 *Sei $D : I \rightarrow dI$ einfach. Weiterhin erfülle D die folgenden Bedingungen:*

(i) Jeder verbindende Morphismus von D erhält endliche Suprema.

(ii) Jeder verbindende Morphismus von D bildet kompakte Elemente auf kompakte Elemente ab.

(iii) Für alle Objekte i von I und alle kompakten Elemente k von $D(i)$ ist $\{j \in ObI \mid D(j \leftarrow i)(k) \neq \perp\}$ endlich.

Dann ist das Hyperlimesobjekt über D auch ein dI-Bereich.

Beweis: Sei (A, p) ein Hyperlimeskegel über D. Nach Satz 5.1 ist A algebraisch. Da verbindende Morphismen von D endliche Suprema erhalten, ist A distributiv, nach Proposition 5.1. Bleibt zu zeigen, daß jeder von kompakten Elementen erzeugte Hauptanfang endlich ist. Da D einfach ist und die verbindenden Morphismen von D das kleinste Element erhalten, gibt es nach Folgerung 3.4 zu jeder Projektion p_i eine untere Adjungierte e_i definiert durch

$$p_j \circ e_i = \begin{cases} D(j \leftarrow i) & falls\ [i \rightarrow j] \neq \emptyset \\ \perp & falls\ [i \rightarrow j] = \emptyset \end{cases}$$

Sei zunächst i aus ObI und k aus $K(D(i))$. Bezeichne E die Menge $\{j \in ObI \mid p_j \circ e_i(k) \neq \perp\}$. Nach Voraussetzung (iii) ist E endlich. Es ist

$$\begin{aligned} \downarrow e_i(k) &\subseteq \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall j \in ObI . x_j \leq p_j \circ e_i(k)\} \\ &\simeq \prod_{j \in E} \downarrow p_j \circ e_i(k) \times \prod_{j \in ObI \setminus E} \{\perp\} \end{aligned}$$

Weil $D(j \leftarrow i)$ kompakte Elemente auf kompakte Elemente abbildet, ist $p_j \circ e_i(k)$ kompakt für jedes j aus E. Da $D(j)$ endlich algebraisch ist, ist $\downarrow p_j \circ e_i(k)$ endlich. $\downarrow e_i(k)$ ist also endlich.
Sei nun k aus $K(A)$. Nach Proposition 5.1 ist $k = \bigvee_{i \in E} e_i(k_i)$, wobei E eine endliche Teilmenge von ObI ist und $k_i \in K(D(i))$. Da in einem distributiven, stetigen Bereich elementweise Suprema von Anfangsstücken wieder Anfangsstücke sind, ist $\downarrow k$ das elementweise Supremum von $\{\downarrow e_i(k_i) \mid i \in E\}$. Als elementweises Supremum von endlich vielen endlichen Mengen ist $\downarrow k$ endlich.
■

Wir werden später sehen, daß Bedingungen (i) bis (iii) auch notwendig dafür sind, daß ein Hyperlimesobjekt über einem zykelfreien, einfachen Diagramm von dI-Bereichen wieder ein dI-Bereich ist, falls wir zusätzlich voraussetzen, daß alle Hyperlimesprojektionen surjektiv sind.

Ein Hyperlimes von bifiniten Bereichen muß nicht bifinit sein, selbst dann nicht, wenn das Diagramm zykelfrei und einfach ist, sämtliche Diagrammobjekte ein kleinstes Element haben, und die verbindenden Morphismen das kleinste Element erhalten. Zum Beispiel:

Die Objekte dieses Diagrammes sind endlich, also sicherlich bifinit. Wie sieht man, daß der Hyperlimes dieses Diagrammes nicht bifinit ist? Bezeichne U den Operator, der einer Teilmenge A eines Bereiches B die Menge der minimalen oberen Schranken von endlichen Teilmengen von A zuordnet. Weiterhin bezeichne $U^\infty(A)$ die Menge $\bigcup_{n\in N} U^n(A)$. Nach Plotkins Charakterisierungssatz (siehe [J]) ist in einem bifiniten Bereich für jede endliche Menge A von kompakten Elementen auch $U^\infty(A)$ endlich.
Bezeichne A die Teilmenge $\{(1,1,..),(1',1',..)\}$ des kanonischen Hyperlimesobjektes über unserem Diagramm. Die Elemente dieser Menge sind kompakt, denn es ist $(1,1,..) = e_1(1)$ und $(1',1',..) = e_1(1')$. Für eine natürliche Zahl n ist

$$U^n(A) = U^{n-1}(A) \cup \{(1,2,..,n,n+1,n+1,..),(1',2',..,n',(n+1)',(n+1)',..)\}$$

$$U^\infty(A) = \{(1,2,..,n-1,n,n,..) \,|\, n \in N\} \cup \{(1',2',..,(n-1)',n',n',..) \,|\, n \in N\}$$

$U^\infty(A)$ ist also unendlich, und somit ist das kanonische Hyperlimesobjekt über D nicht bifinit.

Wir werden Bedingungen an Diagramme von bifiniten Bereichen stellen, unter denen der Hyperlimes eines solchen Diagrammes wieder bifinit sind. Zunächst die Verallgemeinerung eines ordnungstheoretischen Begriffes auf Präordnungen und ein vorbereitendes Lemma:

Definition 5.1 Sei $(P,\leq)$ eine prägeordnete Menge.
Für i aus U bezeichne $\uparrow i$ die Menge aller j aus U mit $j \geq i$. Eine Teilmenge U von P heiße *Endstück* von P, falls $\uparrow i$ eine Teilmenge von U ist für alle $i \in U$. Für die Menge aller Endstücke von P schreiben wir $E(P)$.

Wir bemerken, daß die Menge aller Endstücke einer prägeordneten Menge ein vollständiger Verband ist, in dem das Infimum der Mengenschnitt und das Supremum die Mengenvereinigung ist.

Proposition 5.2 *Sei $D : I \to POSET_\perp$ ein einfaches Diagramm, dessen verbindende Morphismen das kleinste Element erhalten. (P, p) bezeichne einen Hyperlimeskegel über D.*
Da I einfach ist können wir I als prägeordnete Menge auffassen. Für ein Endstück U von I sei $p^U : P \to P$ definiert durch

$$p_i \circ p^U = \begin{cases} p_i & falls\ i \in U \\ \perp & sonst \end{cases}$$

Dann ist $p^U \in Q_P$.
Sei weiterhin B eine Sup-Basis von $E(I)$, d.h. jedes Element von $E(I)$ sei Supremum einer Teilmenge von B. Das Diagramm $\tilde{D} : B^{op} \to POSET$ sei definiert durch

$$\begin{array}{ll} \tilde{D}(U) = im(p^U) & f\ddot{u}r\ U \in B \\ \tilde{D}(U \leftarrow V) = {}'(p^U)' & f\ddot{u}r\ U \subseteq V \end{array}$$

Dann ist $(P, ('(p^U))_{U \in B})$ ein Limeskegel über $\tilde{D}$.

Beweis: p^U ist wohldefiniert, da U ein Endstück ist.

p^U **ist eine Projektion:** Für alle i aus ObI ist $p_i \circ p^U \leq p_i$. Also ist $p^U \leq id$.

$$\begin{aligned} p_i \circ p^U \circ p^U &= \begin{cases} p_i \circ p^U & falls\ i \in U \\ \perp \circ p^U & sonst \end{cases} \\ &= \begin{cases} p_i & falls\ i \in U \\ \perp & sonst \end{cases} \\ &= p_i \circ p^U \end{aligned}$$

$\tilde{D}$ **ist ein Diagramm:** Seien U, V, W Endstücke von I, so daß $U \subseteq V \subseteq W$.

$$D(U \leftarrow V) \circ D(V \leftarrow W) = {}'p^{U\prime} \circ {}'p^{V\prime} = {}'p^{U\prime}$$

Das letzte Gleichheitszeichen steht, weil $p^U \leq p^V$.

Sei nun $(Q, (q_U)_{U \in B})$ ein Limeskegel über $\tilde{D}$. Wir zeigen, daß Q isomorph ist zu P mittels $\varphi : P \to Q$ gegeben durch

$$q_U \circ \varphi = {}'p^U$$

mit der Umkehrabbildung $\psi : Q \to P$ gegeben durch

$$p_i \circ \psi = p_i' \circ q_U, \quad wo\ U \in B,\ so\ da\beta\ i \in U$$

'φ wohldefinert':

Seien U, V aus B, so daß $U \subseteq V$.

$$D(U \leftarrow V) \circ {}'(p^V) = {}'(p^U)' \circ {}'(p^V) = {}'(p^U)$$

Das letzte Gleichheitszeichen steht wieder, weil $p^U \leq p^V$.

'ψ wohldfefiniert':

Sei i aus ObI. B ist eine Sup-Basis von $E(I)$, das Supremum in $E(I)$ ist die Mengenvereinigung und ObI ist sicher ein Element von $E(I)$. Es gibt also ein U in B, so daß i in U ist.
Seien nun U und V Elemente von B, so daß $i \in U \cap V$. Da $U \cap V$ ein Endstück von I und B ein Sup-Basis von $E(I)$ ist, ist $U \cap V$ Vereinigung von Elementen von B. Es gibt also ein Element W von B, welches in $U \cap V$ enthalten ist, so daß $i \in W$. Es ist

$$p_i' \circ q_U = p_i \circ (p^W)' \circ q_U = p_i' \circ \tilde{D}(W \leftarrow U) \circ q_U = p_i' \circ q_W$$

Genauso ist $p_i' \circ q_V = p_i' \circ q_W$.
Sei nun $a : i \rightarrow j$ ein Pfeil von I, und sei U aus B, so daß $i \in U$. Dann ist auch j in U, und es ist

$$D(a) \circ p_i \circ \psi = D(a) \circ p_i' \circ q_U \leq p_j' \circ q_U = p_j \circ \psi$$

'$\psi \circ \varphi = id_P$':

Sei i aus ObI und U aus B, so daß $i \in U$.

$$p_i \circ \psi \circ \varphi = p_i' \circ q_U \circ \varphi = p_i' \circ {}'(p^U) = p_i$$

'$\varphi \circ \psi = id_Q$':

Nach Folgerung 3.4 existiert eine untere Adjungierte e_i zu p_i für jedes i aus ObI. Sei U aus B. Wir zeigen zunächst, daß p_U punktweises Supremum von $\{\ e_i \circ p_i \mid i \in U\}$ ist: Ist i aus U, so folgt aus $p_i \geq p_i \circ p^U$, daß $e_i \circ p_i \leq p^U$, denn p_i ist obere Adjungierte zu e_i. Also ist p^U eine obere Schranke von $\{e_i \circ p_i \mid i \in U\}$. Sei nun r eine Selbstabbildung von P, die punktweise eine obere Schranke von $\{e_i \circ p_i \mid i \in U\}$ ist. Für jedes i aus U ist dann $p_i \circ r \geq p_i \circ e_i \circ p_i = p_i = p_i \circ p^U$. Für jedes i aus $Ob(I) \setminus U$ ist $p_i \circ p^U = \perp \leq p_i \circ r$. Also ist $r \geq p^U$.

$$\begin{aligned}
q_U \circ \varphi \circ \psi &= {}'(p^U) \circ \psi \\
&= {}'(\bigvee_{i \in U} e_i \circ p_i) \circ \psi \\
&= {}'\bigvee_{i \in U} e_i \circ p_i \circ \psi \\
&= {}'\bigvee_{i \in U} e_i \circ p_i' \circ q_U \\
&= {}'(\bigvee_{i \in U} e_i \circ p_i)' \circ q_U \\
&= id_{im(p^U)} \circ q_U \\
&= q_U
\end{aligned}$$

■

Satz 5.3 *Sei $D : I \to B_\perp$ zykelfrei und einfach. Weiterhin erfülle D die folgenden Bedingungen:*

(i) Verbindende Morphismen erhalten das kleinste Element und bilden kompakte Elemente auf kompakte Elemente ab.

(ii) Jedes Hauptende von I ist endlich.

Dann ist der Hyperlimes von D bifinit.

Beweis: Für einen Bereich A bezeichne cQ_A^{fin} die Menge der Deflationen von A, das heißt die Menge der stetigen Projektionen mit endlichem Bild. Wir bemerken, daß das Bild einer Deflation nur kompakte Elemente enhält. Da $D(i)$ bifinit ist, ist $id_{D(i)} = \bigvee{}^{\uparrow} cQ_{D(i)}^{fin}$ für jedes i aus I (siehe [J]). Für ein Endstück U von I bezeichne R_U die folgende Menge:

$$\left\{(q_i)_{i\in U} \in \prod_{i\in U} cQ_{D(i)}^{fin} \,|\, \forall a : i \to j \in MorI.\ D(a)(im(q_i)) \subseteq im(q_j)\right\}$$

Sei (A, p) ein Hyperlimeskegel über D.
Für U aus $E(|I|)$ und q aus R_U sei $p^{U,q} : A \to A$ definiert durch

$$p_i \circ p^{U,q} = \begin{cases} q_i \circ p_i & falls\ i \in U \\ \perp & sonst \end{cases}$$

'$p^{U,q}$ ist wohldefiniert':

Sei $a : i \to j$ ein Pfeil aus I. Falls i nicht aus U ist, so ist

$$D(a) \circ p_i \circ p^{U,q} = D(a) \circ \perp = \perp \leq p_j \circ p^{U,q}$$

Falls i aus U ist, so ist auch j in U und es ist

$$\begin{aligned} D(a) \circ p_i \circ p^{U,q} &= D(a) \circ q_i \circ p_i \\ &= q_j \circ D(a) \circ q_i \circ p_i \\ &\leq q_j \circ D(a) \circ p_i \\ &\leq q_j \circ p_j \\ &= p_j \circ p^{U,q} \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung gilt, weil $D(a)(im(q_i)) \subseteq im(q_j)$.

'$p^{U,q}$ ist eine Projektion':

Für jedes i aus ObI ist $p_i \circ p^{U,q} \leq p_i$, also ist $p^{U,q} \leq id_A$.

$$\begin{aligned} p_i \circ p^{U,q} \circ p^{U,q} &= \begin{cases} q_i \circ p_i \circ p^{U,q} & falls\ i \in U \\ \perp \circ p^{U,q} & sonst \end{cases} \\ &= \begin{cases} q_i \circ q_i \circ p_i & falls\ i \in U \\ \perp & sonst \end{cases} \\ &= \begin{cases} q_i \circ p_i & falls\ i \in U \\ \perp & sonst \end{cases} \\ &= p_i \circ p^{U,q} \end{aligned}$$

Bezeichne nun $E^{fin}(I)$ die Menge der endlichen Endstücke von I. Es gilt die folgende Aussage:

$$\forall U \in E^{fin}(|I|).\ \forall r \in \prod_{i \in U} cQ^{fin}_{D(i)}.\ \exists q \in R_U.\ q \geq r \qquad (*)$$

Wir zeigen die Aussage per Induktion über die Mächtigkeit von U. Das können wir machen, da wir I als zykelfrei vorausgesetzt haben. Nehmen wir also an, die Aussage sei bewiesen für alle Endstücke mit weniger als n Elementen. Sei U ein Endstück mit n Elementen. Sei r aus $\prod_{i \in U} cQ^{fin}_{D(i)}$. Sei k ein maximales Element von U. Für i aus $(U \setminus \{k\}) \cap \uparrow k$ bezeichne $\tilde{r}_i$ eine Deflation, deren Bild $D(i \leftarrow k)(im(r_k)) \cup im(r_i)$ enthält. So eine Deflation existiert in einem bifiniten Bereich, da $D(i \leftarrow k)(im(r_k)) \cup im(r_i)$ eine endliche Menge von kompakten Elementen ist. (Wir hatten vorausgesetzt, daß verbindende Morphismen kompakte Elemente auf kompakte Elemente abbilden.) Für i aus $U \setminus \uparrow k$ setzen wir $\tilde{r}_i = r_i$. Nach Induktionsannahme gibt es ein q in $R_{U \setminus \{k\}}$, so daß $q \geq (\tilde{r}_i)_{i \in U \setminus \{k\}}$. Setzen wir außerdem $q_k = r_k$, so ist $(q_i)_{i \in U}$ in R_U, und es ist $(q_i)_{i \in U} \geq r$.

Bezeichne nun B die folgende Teilmenge von $E(I)$:

$$B := \{\uparrow i_1 \cup .. \cup \uparrow i_n \mid n \in N,\ i_1, .., i_n \in ObI\}$$

Wegen Bedingung (ii) sind die Elemente von B endliche Endstücke von I. Da das Bild von $p^{U,q}$ isomorph zu einer Teilmenge von $\prod_{i \in U} im(q_i) \times \prod_{i \in I \setminus U} \{\perp\}$ ist, ist es endlich, falls U aus B und q aus R_U ist. $p^{U,q}$ ist also eine Deflation, falls U aus B und q aus R_U ist.

'$\left\{p^{U,q} \mid U \in B, q \in R_U\right\}$ ist gerichtet':

Seien $U, V \in B$, $q \in R_U$, $r \in R_V$. Sei $i \in U \cap V$. Weil $D(i)$ bifinit ist, gibt es eine Deflation s_i, die größer ist als q_i und r_i. Für $i \in U \setminus (U \cap V)$ setzen wir $s_i = q_i$, und für $i \in V \setminus (U \cap V)$ setzen wir $s_i = r_i$. Wegen $(*)$ gibt es ein t in $R_{U \cup V}$, welches größer ist als s. $U \cup V$ ist ein Element von B und $p^{U \cup V,t}$ ist eine gemeinsame obere Schranke von $p^{U,q}$ und $p^{V,r}$.

'$\bigvee \left\{p^{U,q} \mid U \in B,\ q \in R_U\right\} = id_A$':

Zunächst zeigen wir, daß $id_A = \bigvee_{U \in B} p^U$. Sei also r eine obere Schranke von $\left\{p^U \mid U \in B\right\}$. Sei i aus ObI. Es gibt ein U in B, welches i enthält, zum Beispiel $U = \uparrow i$. Es ist $p_i \circ r \geq p_i \circ p^U = p_i$. Da diese Ungleichung für alle i aus ObI gilt, ist $r \geq id_A$.
Bleibt zu zeigen, daß $p^U = \bigvee_{q \in R_U} p^{U,q}$ für jedes U aus B. Sei also U aus B. Sicher ist p^U eine obere Schranke von $\left\{p^{U,q} \mid q \in R_U\right\}$. Sei r eine weitere obere Schranke dieser Menge. Seien $i \in U$ und $s_i \in cQ^{fin}_{D(i)}$. Für j aus $U \setminus \{i\}$ sei s_j die konstante $\perp$-Abbildung. Wegen $(*)$ gibt es ein q in R_U, so daß $q \geq (s_i)_{i \in U}$. Dann ist

$$p_i \circ r \geq p_i \circ p^{U,q} = q_i \circ p_i \geq s_i \circ p_i.$$

Da diese Ungleichung für alle Deflationen s_i von $D(i)$ gilt, und da das Supremum aller dieser die Identität auf $D(i)$ ist, ist $p_i \circ r \geq p_i$. Da diese Ungleichung wiederum für alle i aus U gilt, ist $r \geq p^U$.

■

Wir haben in Proposition 5.1 festgestellt, daß ein Hyperlimesobjekt über einem Diagramm von distributiven beschränkt vollständigen Mengen distributiv ist, falls die verbindenden Morphismen endliche Suprema erhalten. Jede monotone Funktion zwischen flachen Bereichen erhält Suprema. Wir wissen daher, daß HF-Objekte distributiv sind. Die nächste Proposition liefert uns eine weitere Eigenschaft von HF-Objekten.

Definition 5.2 Eine beschränkt vollständige Menge P heiße *kohärent*, falls sie die folgende Eigenschaft hat: Ist M eine Teilmenge von P, so daß jede zweielementige Teilmenge von M beschränkt ist, so ist M beschränkt.
COH bezeichne die volle Unterkategorie von $POSET$, deren Objekte kohärente geordnete Mengen sind.

Die folgende Menge ist beschränkt vollständig aber nicht kohärent:

Proposition 5.3 *Sei $D : I \to COH$ so, daß verbindende Morphismen Suprema erhalten. Dann ist das Hyperlimesobjekt über D kohärent. Insbesondere sind also HF-Objekte kohärent.*

Beweis: Sei (P, p) der kanonische Hyperlimeskegel über D. Sei M eine Teilmenge von P, so daß jede zweielementige Teilmenge von M beschränkt ist. Dann ist jede zweielementige Teilmenge von $p_i(M)$ beschränkt für jedes Objekt i von I. Da $D(i)$ kohärent ist, existiert dann das Supremum von $p_i(M)$ für jedes Objekt i von I. Weil verbindende Morphismen von D Suprema erhalten, existiert dann auch das Supremum von M, nach Proposition 2.5. ■

Das obige Beispiel für eine nicht-kohärente Menge ist also ein Beispiel für einen distributiven Bereich, der kein HF-Objekt ist.
Am folgenden Beispiel sieht man, daß man in Proposition 5.3 nicht auf die Voraussetzung, daß die verbindenden Morphismen Suprema erhalten, verzichten kann:

(Alle Elemente, von denen kein Pfeil weggeht, sollen auf $\perp$ abgebildet werden.)
Das Hyperlimesobjekt über diesem Diagramm ist gerade die oben abgebildete nicht-kohärente Menge.

5.2 Rückschlüsse auf das Diagramm bei bekanntem Hyperlimesobjekt

Wir werden uns später in dieser Arbeit mit der Frage beschäftigen, ob es zu einer gegebenen geordneten Menge P ein Diagramm D gibt, so daß P Hyperlimesobjekt über D ist. Dabei wollen wir zusätzlich fordern, daß Hyperlimesprojektionen über D surjektiv sind.

Definition 5.3 Sei C eine Unterkategorie von $POSET$. Ein Hyperlimeskegel (P, p) über D heiße *Darstellung* von P über D in C, falls alle seine Projektionen surjektiv sind. Ist (P, p) eine Darstellung über einem zykelfreien (einfachen) Diagramm, so heiße sie zykelfrei (einfach).

Sei P eine geordnete Menge mit kleinstem Element und (P, p) eine Darstellung über einem Diagramm D. Was für Rückschlüsse können wir aus den Eigenschaften von P auf das Diagramm D ziehen?

Proposition 5.4 *Sei P eine geordnete Menge mit kleinstem Element und sei (P, p) eine Darstellung über $D : I \to POSET$.*
Dann hat jedes Objekt von D ein kleinstes Element, und verbindende Morphismen erhalten das kleinste Element.

Beweis: Sei $i \in ObI$. Mit der Surjektivität und der Monotonie von p_i folgt, daß $p_i(\perp)$ kleinstes Element von $D(i)$ ist. Sei $a : i \to j$ ein Pfeil von I. Dann ist $D(a)(\perp) = D(a) \circ p_i(\perp) \leq p_j(\perp) = \perp$.
■

Folgerung 5.1

a) *Sei P ein geordnete Menge mit kleinstem Element, und sei (P, p) eine einfache Darstellung über $D : I \to POSET$. Dann hat jede Projektion eine untere Adjungierte.*

b) *Sei P eine beschränkt vollständige geordnete Menge und sei (P, p) eine einfache Darstellung über $D : I \to POSET$. Dann ist jedes Objekt von D beschränkt vollständig.*

c) *Sei A ein Bereich mit kleinstem Element und (A, p) eine einfache Darstellung über $D : I \to POSET$. Dann ist jedes Objekt von D ein Bereich.*

Beweis:

a): Nach Proposition 5.4 hat jedes Objekt von D ein kleinstes Element und die verbindenden Morphismen erhalten es. Nach Folgerung 3.4 hat dann jede Hyperlimesprojektion eine untere Adjungierte.

b),c): Sei i aus ObI. Bezeichne e_i die untere Adjungierte zu p_i. Da p_i surjektiv ist, ist die Adjunktion (p_i, e_i) sogar ein Projektions-Einbettungspaar. Also ist $D(i)$ isomorph zum Bild von $e_i \circ p_i$. Das Bild einer internen Projektion von P ist abgeschlossen gegen existierende Suprema, ist also ein Bereich, falls P ein Bereich ist, und beschränkt vollständig, falls P beschränkt vollständig ist.

■

Als nächstes ein Beispiel für eine nicht-einfache Darstellung eines Bereiches über einem Diagramm $D : I \rightarrow POSET$, dessen Objekte nicht alle Bereiche sind:

Wir haben gesehen, daß die Objekte des Darstellungsdiagrammes $D : I \rightarrow POSET$ einer einfachen Darstellung eines Bereiches mit kleinstem Element Bereiche sind. Sind die verbindenden Morphismen auch stetig? Im allgemeinen nicht. Zum Beispiel:

Jedoch:

Proposition 5.5

a) Sei A ein schnittstetiger Bereich und (A,p) eine Darstellung über einem einfachen Diagramm $D : I \to POSET$. Sei j ein Objekt von I, so daß es kein von j verschiedenes Objekt k gibt, so daß sowohl $[j \to k]$ als auch $[k \to j]$ nichtleer sind. Dann sind alle vebindenden Morphismen nach $D(j)$ stetig.
Insbesondere: Ist D zykelfrei, so sind sämtliche verbindende Morphismen von D stetig.

b) Sei P eine distributive, geordnete Menge und (P,p) eine Darstellung über einem einfachen Diagramm $D : I \to POSET$. Sei j ein Objekt von I, so daß es kein von j verschiedenes Objekt k gibt, so daß sowohl $[j \to k]$ als auch $[k \to j]$ nichtleer sind. Dann erhalten alle verbindenden Morphismen nach $D(j)$ endliche Suprema.
Insbesondere: Ist D zykelfrei, so erhalten sämtliche verbindenden Morphismen von D endliche Suprema.

Beweis:

a) Sei i ein Objekt von I so, daß $[i \to j] \neq \emptyset$, und M eine gerichtete Teilmenge von $D(i)$. Nach Folgerung 5.1 sind $D(i)$ und $D(j)$ Bereiche. Also existieren die Suprema von M und $D(j \leftarrow i)(M)$. Wir definieren Elemente x und y von A durch

$$p_k(x) = \begin{cases} \perp & falls\ [j \to k] = \emptyset \\ D(k \leftarrow i)(\bigvee{}^{\uparrow} M) & falls\ [j \to k] \neq \emptyset \end{cases}$$

$$p_k(y) = \begin{cases} \perp & falls\ [j \to k] = \emptyset \\ \bigvee{}^{\uparrow} D(j \leftarrow i)(M) & falls\ k = j \\ D(k \leftarrow i)(\bigvee{}^{\uparrow} M) & falls\ [j \to k] \neq \emptyset,\ k \neq j \end{cases}$$

Die erste Vorschrift liefert offensichtlich ein Element von A. Die zweite Vorschrift liefert ein Element von A, weil es kein von j verschiedenes Objekt k gibt, so daß sowohl $[j \to k]$ als auch $[k \to j]$ nichtleer sind.
Bezeichne nun e_i die untere Adjungierte zu p_i. Diese existiert nach Folgerung 5.1 und ist nach Folgerung 3.4 gegeben durch

$$p_k \circ e_i = \begin{cases} \perp & falls\ [i \to k] = \emptyset \\ D(k \leftarrow i) & falls\ [i \to k] \neq \emptyset \end{cases}$$

Sei nun m aus M. Sei k aus $Ob(I)$. Dann ist

$$\begin{aligned} p_k(x \wedge e_i(m)) &= p_k(x) \wedge p_k \circ e_i(m) \\ &= \begin{cases} \perp & falls\ [j \to k] = \emptyset \\ D(k \leftarrow i)(m) & falls\ [j \to k] \neq \emptyset \end{cases} \\ &\leq p_k(y) \end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für alle k aus $Ob(I)$ gilt, ist $x \wedge e_i(m) \leq y$. Da diese Ungleichung wiederum für alle m aus M gilt, ist $\bigvee^{\uparrow}(x \wedge e_i(M)) \leq y$. Nun ist

$$\begin{aligned}
\bigvee{}^{\uparrow} D(j \leftarrow i)(M) &= p_j(y) \\
&\geq p_j(\bigvee{}^{\uparrow}(x \wedge e_i(M))) \\
&= p_j(x \wedge \bigvee{}^{\uparrow} e_i(M)) \\
&= p_j(x \wedge e_i(\bigvee{}^{\uparrow} M)) \\
&= p_j(x) \wedge p_j \circ e_i(\bigvee{}^{\uparrow} M) \\
&= D(j \leftarrow i)(\bigvee{}^{\uparrow} M)
\end{aligned}$$

Von der zweiten in die dritte Zeile haben wir die Schnittstetigkeit von A benutzt.

b) beweist man analog.

■

Folgerung 5.2 *Sei P eine beschränkt vollständige geordnete Menge und (P,p) eine Darstellung über einem zykelfreien, einfachen Diagramm $D : I \to POSET$.*

a) Ist P ein stetiger Bereich, so sind sämtliche verbindende Morphismen von D stetig, und jedes Objekt von D ist ein stetiger Bereich.

b) Ist P distributiv, so ist jedes Objekt von D distributiv.

c) Ist P ein stetiger, distributiver Bereich, so erhalten verbindende Morphismen von D beliebige Suprema.

d) Ist P ein algebraischer, beschränkt vollständiger Bereich, so ist jedes Objekt von D ein algebraischer Bereich.

e) Ist P ein dI-Bereich, so ist jedes Objekt von D ein dI-Bereich.

Beweis:

a) Als stetiger, beschränkt vollständiger Bereich ist P insbesondere schnittstetig, und die Stetigkeit der verbindenden Morphismen folgt mit Proposition 5.5. Nach Proposition 2.2 ist dann jede Hyperlimesprojektion über D stetig. Die Objekte von D sind also Bilder von stetigen Retraktionen, sind also stetig.

b) Nach Proposition 5.5 erhalten verbindende Morphismen von D endliche Suprema. Nach Proposition 2.5 erhalten dann Hyperlimesprojektionen über D Infima und endliche Suprema. Jedes Objekt von D ist also Bild einer distributiven geordneten Menge unter einer Abbildung die endliche Infima und Suprema erhält, ist also distributiv.

c) Verbindende Morphismen erhalten endliche Suprema nach Proposition 5.5 und gerichtete Suprema nach a).

d) Sei i aus $Ob(I)$. Sei k ein kompaktes Element von P, so daß $p_j(k) = \bot$ für alle k aus $Ob(I) \setminus \uparrow i$. Wir zeigen zunächst, daß dann $p_i(k)$ ein kompaktes Element von $D(i)$ ist:
Sei also M eine gerichtete Teilmenge von $D(i)$, so daß $\bigvee^{\uparrow} M = p_i(k)$. Für jedes m aus M definieren wir ein Element x_m aus P durch

$$p_j(x_m) = \begin{cases} \bot & falls\ [i \to j] = \emptyset \\ m & falls\ j = i \\ p_j(k) & falls\ [i \to j] \neq \emptyset,\ j \neq i \end{cases}$$

$\{x_m \mid m \in M\}$ ist gerichtet und es ist $\bigvee^{\uparrow}\{x_m \mid m \in M\} = k$. Da k kompakt ist, gibt es ein Element m von M, so daß $x_m = k$. Dann ist $m = p_i(x_m) = p_i(k)$.
Wir haben nun die folgende Implikation gezeigt: $(\bigvee^{\uparrow} M = p_i(k)) \Rightarrow (\exists m \in M.\ m = p_i(k))$. Da wir wissen, daß $D(i)$ stetig ist, folgt daraus die Kompaktheit von $p_i(k)$.
Sei nun x aus $D(i)$. Für alle j aus $Ob(I) \setminus \uparrow i$ ist $p_j \circ e_i(x) = \bot$. Also ist auch $p_j \circ e_i(k) = \bot$ für alle k aus $K_{e_i(x)}$ und alle j aus $Ob(I) \setminus \uparrow i$. Wie wir eben gezeigt haben, sind dann alle Elemente von $p_i(K_{e_i(x)})$ kompakt. Es ist

$$x = p_i \circ e_i(x) = p_i(\bigvee{}^{\uparrow} K_{e_i(x)}) = \bigvee{}^{\uparrow} p_i(K_{e_i(x)})$$

e) Objekte von D sind distributiv, nach a), und algebraisch, nach d). Ist k ein kompaktes Element von $D(i)$, so ist $e_i(k)$ ein kompaktes Element von P, denn e_i ist untere Adjungierte einer stetigen Abbildung. Da P endlich algebraisch ist, ist dann $\downarrow e_i(k)$ endlich. Wegen der Monotonie von e_i ist $e_i(\downarrow k)$ eine Teilmenge von $\downarrow e_i(k)$. Also ist $e_i(\downarrow k)$ endlich. Weil e_i injektiv ist, ist dann auch $\downarrow k$ endlich.

■

Die letzten Propositionen beruhen darauf, daß bei einer einfachen Darstellung einer geordneten Menge mit kleinstem Element jede Projektion eine untere Adjungierte hat. Diese Eigenschaft hat auch jede zykelfreie, nicht-einfache Darstellung eines endlich algebraischen Bereiches über einem Diagramm nach $DCPO$. Der Schlüssel zu dieser Erkenntniss liegt in dem folgenden einfachen Lemma:

Lemma 5.2 *Sei A ein endlich algebraischer Bereich mit kleinstem Element und (A, p) eine zykelfreie Darstellung über $D : I \to DCPO$. Dann:*

(i) Verbindende Morphismen von D bilden kompakte Elemente auf kompakte Elemente ab.

(ii) $\{j \in Ob(I) \mid \exists a : i \to j.\ D(a)(k) \neq \bot\}$ ist endlich für alle Objekte i von I und alle kompakten Elemente k von $D(i)$.

Beweis: Seien i aus $Ob(I)$ und k aus $K(D(i))$. Da p_i surjektiv ist, gibt es ein Element y von A, so daß $p_i(y) = k$. Da A algebraisch ist, ist $y = \bigvee{}^{\uparrow} K_y$. Dann ist $k = p_i(\bigvee{}^{\uparrow} K_y) = \bigvee{}^{\uparrow} p_i(K_y)$. Da k kompakt ist, gibt es ein Element h von K_y, so daß $p_i(h) = k$.
Für jedes $j \in \uparrow i$ und jedes $x \in \downarrow p_j(h)$ definieren wir uns nun ein Element $z_{j,x}$ von $\downarrow h$ durch

$$p_l(z_{j,x}) := \begin{cases} \perp & falls\ [j \to l] = \emptyset \\ x & falls\ l = j \\ p_l(h) & falls\ [j \to l] \neq \emptyset,\ l \neq j \end{cases}$$

Es ist $z_{j,x} \neq z_{r,y}$, falls $((j,x) \neq (r,y)\ und\ (x \neq \perp\ oder\ y \neq \perp))$.
Also ist $|\downarrow h| \geq \Sigma_{j \in \uparrow i} |\downarrow p_j(h) \setminus \{\perp\}|$.
Da $\downarrow h$ endlich ist, ist dann $\{j \,|\, p_j(h) \neq \perp\}$ endlich, und für jedes j aus $\uparrow i$ ist $\downarrow p_j(h)$ endlich.
Für jeden Pfeil $a : i \to j$ ist $D(a)(k) = D(a) \circ p_i(h) \leq p_j(h)$.
Also ist $\{j \,|\, \exists a : i \to j.\ D(a)(k) \neq \perp\}$ eine Teilmenge von $\{j \,|\, p_j(h) \neq \perp\}$ und (ii) folgt.
Für jeden Pfeil $a : i \to j$ ist $\downarrow D(a)(k)$ eine Teilmenge von $\downarrow p_j(h)$. Also erzeugt $D(a)(k)$ einen endlichen Hauptanfang, und ist somit kompakt. ■

Proposition 5.6 *Sei A ein endlich algebraischer, beschränkt vollständiger Bereich und sei (A,p) eine Darstellung über einem zykelfreien Diagramm $D : I \to DCPO$. Dann hat jede Hyperlimesprojektion über D eine untere Adjungierte.*

Beweis: Für jedes Objekt i von I und jedes kompakte Element x von $D(i)$ bezeichne

$$M_{i,x} := \{j \in Ob(I) \,|\, \exists a : i \to j \in Mor(I).\ D(a)(x) \neq \perp\}$$

Wir zeigen die folgende Aussage per Induktion über $|M_{i,x}|$:

$$\forall i \in Ob(I).\ \forall x \in K(D(i)).\ \ p_i(\bigwedge p_i^{-1}(\uparrow x)) \geq x$$

Seien $i \in Ob(I)$ und $x \in K(D(i))$, so daß $|M_{i,x}| = 1$. Dann ist $\bigwedge p_i^{-1}(\uparrow x)$ gegeben durch

$$p_j(\bigwedge p_i^{-1}(\uparrow x)) = \begin{cases} x & falls\ j = i \\ \perp & falls\ j \neq i \end{cases}$$

Nehmen wir nun an wir hätten die Aussage bewiesen für alle $i \in Ob(I), x \in K(D(i))$ mit $|M_{i,x}| < n$.
Seien nun $i \in Ob(I)$ und $x \in K(D(i))$, so daß $|M_{i,x}| = n$. Wir definieren ein Element z von A durch

$$p_j(z) = \begin{cases} x & falls\ j = i \\ p_j(\bigwedge p_i^{-1}(\uparrow x)) & falls\ j \neq i \end{cases}$$

Wir müssen zeigen, daß dadurch wirklich ein Element von A definiert ist.
Sei $a : i \to j$ ein Pfeil aus I, so daß $j \neq i$.
Falls $j \notin M_{i,x}$, so ist $D(a) \circ p_i(z) = \perp \leq p_j(z)$.
Falls $j \in M_{i,x}$: Ist $y \in p_i^{-1}(\uparrow x)$, so ist $p_j(y) \geq D(a) \circ p_i(y) \geq D(a)(x)$.

Also ist $p_i^{-1}(\uparrow x) \subseteq p_j^{-1}(\uparrow D(a)(x))$, also $p_j(\bigwedge p_i^{-1}(\uparrow x)) \geq p_j(\bigwedge p_j^{-1}(\uparrow D(a)(x)))$.
Sicher ist $M_{D(a)(x),j}$ eine echte Teilmenge von $M_{i,x}$.
Nach Induktionsannahme ist also $p_j(\bigwedge p_j^{-1}(\uparrow D(a)(x))) \geq D(a)(x)$.
Insgesamt erhalten wir also $p_j(z) = p_j(\bigwedge p_i^{-1}(\uparrow x)) \geq D(a)(x) = D(a) \circ p_i(z)$.
Sei nun $a : j \to i$ ein Pfeil aus I, so daß $j \neq i$.
Da p_i surjektiv ist, gibt es ein $y \in A$, so daß $p_i(y) = x$.
Es ist $D(a) \circ p_j(z) = D(a) \circ p_j(\bigwedge p_i^{-1}(\uparrow x)) \leq D(a) \circ p_j(y) \leq p_i(y) = x = p_i(z)$.
Wir haben nun gezeigt,daß durch obige Vorschrift tatsächlich ein Element z von A definiert ist. Offensichtlich ist z minimal in $p_i^{-1}(\uparrow x)$.
Sei nun i ein Objekt von I, und sei $e_i : D(i) \to A$ die stetige Fortsetzung der Funktion, die jedem kompakten Element k von $D(i)$ das Minimum von $p_i^{-1}(\uparrow k)$ zuordnet.
Dann ist für $x \in D(i)$

$$\begin{aligned} p_i \circ e_i(x) &= p_i(\bigvee{}^{\uparrow} e_i(K_x)) \\ &= \bigvee{}^{\uparrow} p_i \circ e_i(K_x) \\ &= \bigvee{}^{\uparrow}_{k\in K_x} p_i(\bigwedge p_i^{-1}(\uparrow k)) \\ &\geq \bigvee{}^{\uparrow} K_x \\ &= x \end{aligned}$$

Für $x \in A$ ist

$$\begin{aligned} e_i \circ p_i(x) &= \bigvee{}^{\uparrow} e_i(K_{p_i(x)}) \\ &= \bigvee{}^{\uparrow}_{k\in K_{p_i(x)}} \bigwedge p_i^{-1}(\uparrow k) \\ &\leq \bigwedge p_i^{-1}(p_i(x)) \\ &\leq x \end{aligned}$$

e_i ist also untere Adjungierte zu p_i. ∎

Folgerung 5.3 *Sei A ein endlich algebraischer, beschränkt vollständiger Bereich und (A, p) eine zykelfreie Darstellung über einem Diagramm $D : I \to DCPO$.*

a) *Jedes Objekt von D ist ein endlich algebraischer, beschränkt vollständiger Bereich.*

b) *Bezeichne $\tilde{D}$ das Diagramm aus Proposition 3.1. Dann ist (A, p) eine Darstellung über $\tilde{D}$. Wir können also annehmen, daß jede zykelfreie Darstellung eines endlich algebraischen Scott-Bereiches einfach ist.*

Beweis:

a) Als Bild eines endlich algebraischen, beschränkt vollständigen Bereiches unter einer stetigen oberen Adjungierten ist jedes Diagrammobjekt beschränkt vollständig und endlich algebraisch.

∎

Mit Lemma 5.2 und Proposition 5.5 b) erhalten wir für zykelfreie, strikte Diagramme eine Umkehrung von Satz 5.2:

Korollar 5.1 *Sei $D : I \longrightarrow dI$ ein zykelfreies, einfaches Diagramm, derart daß Hyperlimesprojektionen über D surjektiv sind. Dann sind äquivalent:*

(1) Das Hyperlimesobjekt über D ist ein dI-Bereich.

(2) D erfüllt Bedingungen (i) bis (iii) aus Satz 5.2.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem Beispiel für eine nichteinfache Darstellung eines Scott-Bereiches, deren Projektionen keine oberen Adjungierten sind:

Wären die Projektionen über D obere Adjungierte, so wären alle Objekte von D beschränkt vollständig, als Bilder einer beschränkt vollständigen Menge unter einer oberen Adjungierten. Es ist aber kein Objekt von D beschränkt vollständig.

6 Der Zerlegungssatz

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß sich jeder dI-Bereich darstellen läßt als zykelfreier Hyperlimes von Bereichen, die sich nicht mehr als zykelfreie Hyperlimites von kleineren Bereichen darstellen lassen.
Wir beginnen damit, die interne Struktur von Hyperlimesobjekten über zykelfreien Diagrammen beschränkt vollständiger geordneter Mengen genauer unter die Lupe zu nehmen.

6.1 Die Struktur von Hyperlimesobjekten über zykelfreien Diagrammen beschränkt vollständiger geordneter Mengen

Wir hatten in Kapitel 3 gesehen, daß surjektive Hyperlimesprojektionen über einem Diagramm von beschränkt vollständigen geordneten Mengen obere Adjungierte sind. Nach Proposition 3.4 können wir dann annehmen,daß das Diagramm von einer Menge interner Projektionen des Hyperlimesobjektes definiert wird, welche bestimmte Eigenschaften hat.Umgekehrt definiert eine Menge interner Projektionen einer geordneten Menge eine Darstellung der Menge, falls sie diese Eigenschaften hat.

Definition 6.1 Sei P eine geordnete Menge und M eine Menge interner Projektionen von P, welche die Eigenschaften (i) bis (iii) aus Proposition 3.4 hat. Dann wollen wir sagen, *M definere eine Darstellung von P.*

Proposition 6.1 *Sei P eine beschränkt vollständige geordnete Menge und M eine Menge von internen Projektionen, welche eine Darstellung definiert. Sei $\mathcal{P}$ eine Partition von M.*
Dann definiert auch $M_{\mathcal{P}} := \left\{ \bigvee_{Q_P} K \mid K \in \mathcal{P} \right\}$ eine Darstellung von P.

(Zur Erinnerung: Q_P bezeichnet die Menge der internen Projektionen von P mit der punktweisen Ordnung. Ist P beschränkt vollständig, so ist Q_P ein vollständiger Verband und Suprema in Q_P werden punktweise gebildet.)

Beweis: Wir müssen zeigen, daß $M_{\mathcal{P}}$ Bedingungen (i) bis (iii) aus Proposition 3.4 erfüllt.

(i) $\bigvee M_{\mathcal{P}} = \bigvee_{K \in \mathcal{P}} \bigvee K = \bigvee M = id_P$

(ii),(iii) Sei $(x_K)_{K \in \mathcal{P}} \in \prod_{K \in \mathcal{P}} im(\bigvee K)$, so daß $(\bigvee K)(x_H) \leq x_K$ für alle $K, H \in \mathcal{P}$.
Für $q \in M$ bezeichne $[q]\mathcal{P}$ das Element von $\mathcal{P}$, welches q enthält.
Seien $p, q \in M$. Dann ist

$$p \circ q(x_{[q]\mathcal{P}}) \leq p(x_{[q]\mathcal{P}}) = p \circ (\bigvee [p]\mathcal{P})(x_{[q]\mathcal{P}}) \leq p(x_{[p]\mathcal{P}})$$

Es ist also $(p(x_{[p]\mathcal{P}}))_{p \in M} \in \prod_{p \in M} im(p)$, so daß $p(q(x_{[q]\mathcal{P}})) \leq p(x_{[p]\mathcal{P}})$ für alle $p, q \in M$.
Weil M (ii) erfüllt, existiert also $\bigvee_{p \in M} p(x_{[p]\mathcal{P}})$.
Wegen $x_K = (\bigvee K)(x_K) = \bigvee_{p \in K} p(x_K) = \bigvee_{p \in K} p(x_{[p]\mathcal{P}})$ ist $\bigvee_{K \in \mathcal{P}} x_K = \bigvee_{p \in M} p(x_{[p]\mathcal{P}})$.
Weiterhin ist

$$\begin{aligned} (\bigvee K)(\bigvee_{K \in \mathcal{P}} x_K) &= \bigvee_{p \in K} p(\bigvee_{q \in M} q(x_{[q]\mathcal{P}})) \\ &= \bigvee_{p \in K} p(x_{[p]\mathcal{P}}) \\ &= x_K \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung der Gleichungskette gilt, weil M (iii) erfüllt.

■

Wir werden nun sehr spezielle Partitionen von M betrachten, nämlich Partitionen in ein Endstück von M und dessen Komplement. Eine solche Partition definiert eine zykelfreie Darstellung über einem Diagramm mit nur zwei Objekten.

Definition 6.2 Sei P eine geordnete Menge mit kleinstem Element.
$(p, q) \in (Q_P)^2$ heiße *Halbfaktor-Kohalbfaktorprojektions-Paar* von P, falls $\{p, q\}$ eine Darstellung von P definiert und $q \circ p = \bot$.
Das Bild von p nennen wir dann einen *Halbfaktor* von P, das Bild von q einen *Kohalbfaktor*. Entsprechend nennen wir p eine *Halbfaktorprojektion* und q eine *Kohalbfaktorprojektion*.
Für die Menge aller Halbfaktorprojektionen von P schreiben wir H_P, für die Menge aller Halbfaktoren von P schreiben wir $\tilde{H}_P$.

Proposition 6.2 *Sei P eine geordnete Menge mit kleinstem Element und (p, q) ein Halbfaktor-Kohalbfaktorprojektions-Paar von P. Dann:*

a) p ist stabil.

b) Ist P beschränkt vollständig, so ist $q = Min\{r \in Q_P \mid r \vee p = id\}$.

c) $im(p) \cap im(q) = \{\bot\}$.

Beweis:

a) Sei $x \in im(p)$ und $y \in \downarrow x$.
Weil $q \circ p = \bot$, ist $q(y) \leq q(x) = \bot$.
Dann ist $y = p(y) \vee q(y) = p(y) \vee \bot = p(y)$. Also $y \in im(p)$.
Die erste Gleichung in der letzten Gleichungskette steht wegen Eigenschaft (i) aus Proposition 3.4.

b) Nach Eigenschaft (i) aus 3.4 ist $q \vee p = id$.
Sei $r \in Q_P$, so daß $r \vee p = id$. Sei $x \in P$. Dann ist

$$x = p(x) \vee r(x) = p(x) \vee (p \vee q) \circ r(x) = p(x) \vee p \circ r(x) \vee q \circ r(x) = p(x) \vee q \circ r(x)$$

Dabei haben wir benutzt, daß in Q_P Suprema punktweise gebildet werden, da P beschränkt vollständig ist. Wegen Eigenschaft (iii) ist $q(x) = q(p(x) \vee q \circ r(x)) = q \circ r(x)$. Da das für alle x aus P gilt, ist $q = q \circ r$, also $q \leq r$.

c) Da p stabil ist, ist $im(p) \cap im(q) = im(q \circ p)$.

■

Definition 6.3 Sei P eine geordnete Menge, und seien p, q Elemente von Q_P, so daß $q \leq p$.
Falls $\{r \in Q_P \mid r \vee q = p\}$ ein Minimum hat, so schreiben wir für dieses p/q.

Ist also zum Beispiel (p, q) ein Halbfaktor-Kohalbfaktorprojektions-Paar, so ist $q = id/p$.
Der nächste Satz besagt, daß wir sämtliche zykelfreien Darstellungen einer beschränkt vollständigen geordneten Menge P kennen, falls wir nur alle Halbfaktoren von P kennen. Zunächst zwei Definitionen:

Definition 6.4 Sei L ein vollständiger Verband.
$J(L)$ bezeichne die Menge der vollständig verbindungsirreduziblen Elemente von L, also

$$J(L) := \{x \in L \,|\, (\bigvee M = x) \;\Rightarrow\; (\exists m \in M.\, x = m)\}$$

$S(L)$ bezeichne die Menge der vollständig schnittirreduziblen Elemente, also

$$S(L) := \{x \in L \,|\, (\bigwedge M = x) \;\Rightarrow\; (\exists m \in M.\, x = m)\}$$

Ist x aus $J(L)$, so bezeichne $x^{\downarrow}$ den unteren Nachbarn von x, also

$$x^{\downarrow} := \bigvee(\downarrow x \setminus \{x\})$$

Ist x aus $S(L)$, so bezeichne $x^{\uparrow}$ den oberen Nachbarn von x, also

$$x^{\uparrow} := \bigwedge(\uparrow x \setminus \{x\})$$

Definition 6.5 Sei P eine geordnete Menge und M ein Teilmenge von Q_P. Dann bezeichne

$$L_M := \{\bigvee U \,|\, U \subseteq M \textit{ ist ein Endstück in der } *-\textit{Präordnung}\}$$

Satz 6.1 *Sei P eine beschränkt vollständige geordnete Menge, und sei M eine Teilmenge von Q_P, welche eine Darstellung von P definiert. Dann:*

a) Jedes Element von L_M ist eine Halbfaktorprojektion. Es ist also $L_M \subseteq H_P$.

b) L_M ist ein vollständiger Unterverband des Verbandes Q_P aller internen Projektionen.

c) Die Vorschrift $U \mapsto \bigvee U$ definiert einen Ordnungsisomorphismus von der Menge der $*$-Endstücke von $M \setminus \{\perp\}$ mit der Inklusionsordnung nach L_M.
Insbesondere ist L_M also algebraisch und vollständig distributiv.

d) Seien U, W $*$-Endstücke von M, derart daß $W = U \cup \{p\}$.
Dann ist $p = \bigvee W / \bigvee U$.

e) Wir setzen nun zusätzlich voraus, daß die $*$-Präordnung auf M antisymmetrisch ist.
Dann ist $(M \setminus \{\perp\}) = \{p/p^{\downarrow} \,|\, p \in J(L_M)\} = \{p^{\uparrow}/p \,|\, p \in S(L_M)\}$.

Beweis:

a) Sei U ein Endstück von M. Dann ist $\{U, M \setminus U\}$ eine Partition von M, und nach Proposition 6.1 ist $\{U, M \setminus U\}$ eine Darstellung von P. Bleibt zu zeigen, daß $\bigvee M \setminus U \circ \bigvee U = \perp$.
Sei p aus $M \setminus U$ und sei x aus dem Bild von $\bigvee U$. Wir definieren ein Tupel $(x_q)_{q \in M}$ durch

$$x_q = \begin{cases} q(x) & falls\ q \in U \\ \perp & falls\ q \in M \setminus U \end{cases}$$

Nach Definition der $*$-Präordnung ist $r \circ q = \perp$, falls $q \in U$ und $r \in M \setminus U$. Es ist also $r(x_q) \leq x_r$ für alle r, q aus M.
Nun ist $x = (\bigvee U)(x) = \bigvee_{q \in M} x_q$ und $p(x) = p(\bigvee_{q \in M} x_q) = x_p = \perp$.
Die vorletzte Gleichung der letzten Gleichungskette gilt wegen Eigenschaft (iii).
Wir haben nun gezeigt, daß $p(x) = \perp$ für alle p aus $M \setminus U$ und alle x aus dem Bild von $\bigvee U$.
Also ist $p \circ \bigvee U = \perp$ für alle p aus $M \setminus U$. Also $(\bigvee M \setminus U) \circ \bigvee U = \bigvee_{p \in M \setminus U}(p \circ \bigvee U) = \perp$.

b) Sei $\{U_i \mid i \in I\}$ eine Menge von $*$-Endstücken von M.
Es ist $\bigvee_{i \in I} \bigvee U_i = \bigvee \bigcup_{i \in I} U_i$. Als Vereinigung von Endstücken ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ wieder ein Endstück. L_M ist also abgeschlossen gegen Suprema.
Wir behaupten nun, daß $\bigwedge_{i \in I} \bigvee U_i = \bigvee \bigcap_{i \in I} U_i$. Daß die linke Seite größer ist als die rechte, folgt aus der Monotonie von $\bigvee : \mathcal{P}(Q_P) \to Q_P$. Um die andere Ungleichung zu zeigen, zeigen wir, daß das Bild von $\bigwedge_{i \in I} \bigvee U_i$ im Bild von $\bigvee \bigcap_{i \in I} U_i$ enthalten ist. Für jedes $i \in I$ ist $\bigvee U_i$ ein Halbfaktor, ist also insbesondere stabil. Das Bild von $\bigwedge_{i \in I} \bigvee U_i$ ist also gerade der Schnitt der Bilder der $\bigvee U_i$. Sei also x aus $\bigcap_{i \in I} im(\bigvee U_i)$.
Sei p aus $M \setminus \bigcap_{i \in I} U_i$. Dann gibt es ein j aus I, so daß $p \notin U_j$. Nach a) ist $(\bigvee U_j, \bigvee(M \setminus U_j))$ ein Halbfaktor-Kohalbfaktorprojektionspaar. Also ist $p \circ \bigvee U_j \leq \bigvee(M \setminus U_j) \circ \bigvee U_j = \perp$. Da x ein Element des Bildes von $\bigvee U_j$ ist, ist dann $p(x) = \perp$.
Wir haben damit gezeigt, daß $p(x) = \perp$, falls p aus $M \setminus \bigcap_{i \in I} U_i$. Andererseits ist das punktweise Supremum von M gleich der Identität, nach Eigenschaft (i). Also ist $x = (\bigvee M)(x) = (\bigvee \bigcap_{i \in I} U_i)(x)$. Damit ist x ein Element des Bildes von $\bigvee \bigcap_{i \in I} U_i$.

c) Offensichtlich ist die durch die Vorschrift $U \mapsto \bigvee U$ definerte Abbildung surjektiv und monoton. Bleibt zu zeigen, daß aus $\bigvee U \leq \bigvee W$ folgt, daß U eine Teilmenge von W ist. Seien also U und W $*$-Endstücke von $M \setminus \{\perp\}$, so daß $\bigvee U \leq \bigvee W$. Angenommen es gäbe ein Element p von $U \setminus W$. Dann wäre $p \circ \bigvee W \leq \bigvee(M \setminus W) \circ \bigvee W = \perp$. Da $p \leq \bigvee U \leq \bigvee W$, wäre dann auch $p^2 = \perp$, also $p = p^2 = \perp$. Ein Widerspruch.

d) Sicher ist $\bigvee U \vee p = \bigvee W$.
Sei r ein Element von Q_P, so daß $\bigvee U \vee r = \bigvee W$. Sei x ein Element des Bildes von $\bigvee W$. Dann ist

$$\begin{aligned} x &= (\bigvee U)(x) \vee r(x) \\ &= (\bigvee U)(x) \vee (\bigvee U) \circ r(x) \vee p \circ r(x) \\ &= (\bigvee U)(x) \vee p \circ r(x) \end{aligned}$$

Wegen Eigenschaft (iii) angewendet auf $\{U, M \setminus U\}$ ist

$$(\bigvee M \setminus U)((\bigvee U)(x) \vee p \circ r(x)) = p \circ r(x).$$

Mit diesen beiden Gleichungen erhalten wir

$$p(x) = p \circ (\bigvee M \setminus U)(x) = p \circ r(x)$$

Diese Gleichung gilt zunächst für alle x aus dem Bild von $\bigvee W$. Da aber p kleiner ist als $\bigvee W$, gilt sie auch für alle x aus P. Also ist $p \leq r$.

e) Wir zeigen zunächst die erste Gleichung:

'$\subseteq$': Sei p ein Element von $M \setminus \{\bot\}$. Da wir die $*$-Präordnung als antisymmetrisch vorausgesetzt haben, ist $\uparrow^* p \setminus \{p\}$ ein $*$-Endstück von M, und $\uparrow p \setminus \{p\}$ ist der untere Nachbar von $\uparrow^* p$ in $E(M \setminus \{\bot\})$. Da $U \mapsto \bigvee U$ einen Isomorphismus von $E(M \setminus \{\bot\})$ nach L_M definiert, ist dann $\bigvee(\uparrow^* p \setminus \{p\})$ der untere Nachbar von $\bigvee(\uparrow^* p)$ in L_M. Nach d) ist $p = (\bigvee \uparrow^* p)/(\bigvee \uparrow^* p \setminus \{p\})$.

'$\supseteq$': Sei p ein verbindundgsirreduzibles Element von L_M. Zu zeigen ist, daß es ein $q \in M \setminus \{\bot\}$ gibt, so daß $q = p/p^{\downarrow}$. Nach Definition von L_M ist $p = \bigvee U$ für ein U aus $E(M \setminus \{\bot\})$. Da durch $U \mapsto \bigvee U$ ein Isomorphismus von $E(M \setminus \{\bot\})$ nach L_M definiert ist, ist U verbindungsirreduzibel in $E(M \setminus \{\bot\})$. Das heißt U ist gleich $\uparrow^* q$ für ein q aus $M \setminus \{\bot\}$. Also $p = \bigvee(\uparrow^* q)$. Nach d) ist $q = p/\bigvee(\uparrow^* q \setminus \{q\})$. Wie wir bereits gesehen haben, ist $\bigvee(\uparrow^* q \setminus \{q\})$ der untere Nachbar von p in L_M.

Die zweite Gleichung beweist man analog, wobei man benutzt, daß die schnittirreduziblen Elemente von $E(M \setminus \{\bot\})$ gerade die Komplemente von Hauptanfängen sind.

■

Was können wir mit dem Satz anfangen?
Angenommen wir haben eine beschränkt vollständige Menge P gegeben und suchen nach zykelfreien Hyperlimesdarstellungen von P. Der Satz legt uns eine Strategie an die Hand: Wir müssen nach vollständigen Unterverbänden von Q_P suchen, deren Elemente Halbfaktorprojektionen sind. Diese Verbände müssen Eigenschaften von Endstückverbänden geordneter Mengen haben. So müssen sie zum Beispiel vollständig distributiv sein. Haben wir einen solchen Verband L gefunden, so sagt uns Teil e) des Satzes wie wir daraus eine Darstellung von P erhalten, falls sie existiert. Wir nehmen nämlich die vollständig verbundirreduziblen Elemente von L, und schauen, ob es zu jedem solchen Element p eine minimale Projektion $p/p^{\downarrow}$ gibt, so daß das Supremum von $p/p^{\downarrow}$ und dem unteren Nachbarn von p in L gleich p ist. Ist das der Fall, so müssen wir noch nachweisen, daß die Menge aller so gewonnenen Projektionen $p/p^{\downarrow}$ tatsächlich eine Darstellung definiert.

6.2 Eine Charakterisierung der Halbfaktoren

Wir werden nun die Halbfaktoren von beschränkt vollständigen geordneten Mengen genau beschreiben:

Proposition 6.3 *Sei P eine beschränkt vollständige geordnete Menge, und sei $p \in Q_P$. Dann ist p eine Halbfaktorprojektion, genau dann wenn p die folgenden Eigenschaften hat:*

(i) id/p existiert.

(ii) $\forall x \in im(p). \forall y \in P.\ [(p(y) \leq x) \Rightarrow (x \vee y \text{ existiert})]$ (Slide-Bedingung)

(iii) $\forall x \in im(p). \forall y \in P.\ [(p(y) \leq x) \Rightarrow (p(x \vee y) = x)]$

Beweis:

'nur dann wenn': (i) Nach Proposition 6.2 b) ist die Kohalbfaktorprojektion zu p gleich id/p.

(ii) Seien $x \in P$ und $y \in P$, so daß $p(y) \leq x$. $\{p, id/p\}$ hat die Eigenschaften aus Proposition 3.4. Wegen Eigenschaft (ii) existiert $x \vee (id/p)(y)$. Nach Voraussetzung ist $x \geq p(y)$, und nach Eigenschaft (i) ist $y = p(y) \vee (id/p)(y)$. Also ist $x \vee (id/p)(y) \geq y$, also ist $x \vee (id/p)(y) = x \vee y$.

(iii) Seien $x \in im(p)$ und $y \in P$, so daß $p(y) \leq x$. Wegen Eigenschaft (iii) aus Proposition 3.4 ist $p(x \vee y) = p(x \vee id/p(y)) = p(x)$.

'wenn': Wir behaupten, daß id/p Kohalbfaktorprojektion zu p ist. Zu zeigen ist, daß $\{p, id/p\}$ die Eigenschaften aus Proposition 3.4 hat. Nach Definition von id/p ist $p \vee id/p = id$. Da Suprema von Projektionen einer beschränkt vollständigen geordneten Menge punktweise gebildet werden, hat $\{p, id/p\}$ also die Eigenschaft (i) aus Proposition 3.4. Eigenschaften (ii) und (iii) aus Proposition 3.4 sind offensichtlich schwächer als Eigenschaften (ii) und (iii) aus dieser Proposition.

■

Die Bedingung (i) aus der letzten Proposition hat den Nachteil, daß wir den ganzen Verband Q_P kennen müssen, um sie zu überprüfen. Wir werden deshalb die Halbfaktorprojektionen einer beschränkt vollständigen geordneten Menge noch auf eine andere Weise charakterisieren und dabei Eigenschaft (i) ersetzen. Diese andere Charakterisierung beruht darauf, daß wir den Kern einer Kohalbfaktorprojektion beschreiben können, ohne in dieser Beschreibung die Kohalbfaktorprojektionen selber zu benutzen. Zunächst eine Charakterisierung von Projektionskernen:

Definition 6.6 Sei P eine geordnete Menge. $Proker(P)$ bezeichne die Menge aller Äquivalenzrelationen R auf P, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

(i) Jedes Element K von P/R hat ein kleinstes Element $Min(K)$.

(ii) Sind $K, H \in P/R$, so daß $\uparrow K \cap H$ nichtleer ist, so ist $Min(K) \leq Min(H)$.

Proposition 6.4 *Sei P eine geordnete Menge. Die Abbildung $\varphi : Q_P \to Proker(P)$ sei gegeben durch $\varphi(p) = ker(p)$.*
φ ist ein Ordnungsisomorphismus von Q_P nach $Proker(P)$ mit der umgekehrten Inklusionsordnung. Seine Umkehrabbildung $\psi : Proker(P) \to Q_P$ ist gegeben durch $\psi(R)(x) = Min([x]R)$.

Beweis:

'φ wohldefiniert': Seien p aus Q_P und K aus $P/ker(p)$. Dann ist $p(K) = \{x\}$ für ein x aus P. Da p kleiner ist als die Identität, ist x eine untere Schranke von K. Da p idempotent ist, ist x ein Element von K. Also ist x kleinstes Element von K.
Seien K und H Elemente von $P/ker(p)$, so daß es ein Element y von $\uparrow K \cap H$ gibt. Dann ist $Min(K) = p(Min(K)) \leq p(y) = Min(H)$. Das Ungleichheitszeichen steht wegen der Monotonie von p.

'φ antiton': Seien p, q Elemente von Q_P, so das $p \leq q$. Seien x, y aus P, so daß $q(x) = q(y)$.
Dann ist $p(x) = p \circ q(x) = p \circ q(y) = p(y)$.

'ψ wohldefiniert': Sei R aus $Proker(P)$. Sei x aus P.
Dann ist $\psi(R)(x) = Min[x]R \leq x$,
und $\psi(R) \circ \psi(R)(x) = Min[Min[x]R]R = Min[x]R = \psi(R)(x)$.
Sei nun y aus P, so daß $x \leq y$. Weil R die Bedingung (ii) erfüllt, ist dann $\psi(R)(x) \leq \psi(R)(y)$.

'ψ antiton': Seien R, S aus $Proker(P)$, so daß R eine Teilmenge von S ist. Dann ist P/R eine feinere Partition als P/S. Also ist $im(\psi(S)) = \{MinK \mid K \in P/S\} \subseteq \{MinH \mid H \in P/R\} = im(\psi(R))$.

'$\varphi \circ \psi = id_{Proker(P)}$': Sei $R \in Proker(P)$. Sei $(x, y) \in R$. Dann ist $\psi(R)(x) = Min[x]R = Min[y]R = \psi(R)(y)$, also $(x, y) \in ker\psi(R) = \varphi \circ \psi(R)$.
Sei $(x, y) \in ker\psi(R)$. Das heißt $Min[x]R = Min[y]R$. Dann ist $[x]R \cap [y]R$ nichtleer. Also $[x]R = [y]R$, also $(x, y) \in R$.

'$\psi \circ \varphi = id_{Q_P}$': Seien $p \in Q_P$ und $x \in P$.
Es ist $(\psi \circ \varphi(p))(x) = \psi(ker(p))(x) = Min[x]ker(p)$.
Einerseits ist $Min[x]ker(p) = Min[p(x)]ker(p) \leq p(x)$, wobei wir die Idempotenz von p benutzt haben. Andererseits ist $p(x) = p(Min[x]ker(p)) \leq Min[x]ker(p)$, wobei wir benutzt haben, daß p kleiner ist als die Identität.
Für alle x aus P ist also $\psi \circ \varphi(p)(x) = p(x)$. Also ist $\psi \circ \varphi(p) = p$.

∎

Definition 6.7 Sei P eine geordnete Menge, und sei p ein Element von Q_P. Die Relation Θ_p auf P sei definiert durch

$$(x, y) \in \Theta_p \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists z \in P.\ (z \vee p(x) = x \text{ und } z \vee p(y) = y)$$

Proposition 6.5 *Sei P eine beschränkt vollständige geordnete Menge, und sei $p \in Q_P$, so daß $\Theta_p \in ProkerP$.*
Dann existiert id/p und ist bestimmt durch $ker(id/p) = \Theta_p$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß die Identität auf P das punktweise Supremum von p und $\psi(\Theta_p)$ ist: Sei also x ein Element von P. Nach Definition von Θ_p gibt es ein $z \in P$, so daß $x = p(x) \vee z$ und $Min[x]\Theta_p = p(Min[x]\Theta_p) \vee z$. Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt, daß $z \leq Min[x]\Theta_p$. Da außerdem $Min[x]\Theta_p \leq x$, ist also $x = p(x) \vee z = p(x) \vee Min[x]\Theta_p = p(x) \vee \psi(\Theta_p)(x)$.
Sei nun $r \in Q_p$, so daß $p \vee r = id$. Sei $x \in P$. Da P beschränkt vollständig ist, werden Suprema in Q_P punktweise gebildet, und es ist $x = r(x) \vee p(x)$. Weiterhin ist $r(x) = r(x) \vee p \circ r(x)$. Also ist $(x, r(x)) \in \Theta_p$, also $r(x) \geq Min[x]\Theta_p = \psi(R)(x)$. ∎

Umgekehrt folgt aus der Existenz von id/p noch nicht, daß $\Theta_p = ker(id/p)$. Zum Beispiel:

Θ_p ist nicht transitiv, denn $(a, \top)$ und $(\top, b)$ sind Elemente von Θ_p, nicht jedoch (a, b).

Wir haben nun ein Werkzeug, um die Halbfaktorprojektionen einer geordneten Menge mit kleinstem Element zu charakterisieren. Man beachte, daß die folgende Charakterisierung für beliebige geordnete Mengen mit kleinstem Element, und nicht nur für beschränkt vollständige Mengen, gilt.

Proposition 6.6 *Sei P eine geordnete Menge mit kleinstem Element und p ein Element von Q_P. Dann ist p eine Halbfaktorprojektion, genau dann wenn p die folgenden Eigenschaften hat:*

(i) $\Theta_p \in Proker(P)$

(ii) $\forall x \in im(p). \forall y \in P.\ [(p(y) \leq x) \Rightarrow (x \vee y \; existiert)]$

(iii) $\forall x \in im(p). \forall y \in P.\ [(p(y) \leq x) \Rightarrow (p(x \vee y) = x)]$

Beweis:

'nur dann wenn': (i) Bezeichne q die Kohalbfaktorprojektion zu p. Wir zeigen, daß $\Theta_p = ker(q)$. Sei $(x, y) \in ker(q)$. Das heißt $q(x) = q(y)$. Setzen wir $z = q(x)$. Da das punktweise Supremum einer Halbfaktorprojektion und der zugehörigen Kohalbfaktorprojektion gleich der Identität ist, sind $x = p(x) \vee q(x) = p(x) \vee z$ und $y = p(y) \vee q(y) = p(y) \vee z$. Also ist $(x, y) \in \Theta_p$.

Seien $(x, y) \in \Theta_p$. Das heißt es gibt ein $z \in P$, so daß $p(x) \vee z = x$ und $p(y) \vee z = y$. Es ist $x = p(x) \vee z = p(x) \vee p(z) \vee q(z) = p(x) \vee q(z)$. Weil $\{p, q\}$ Eigenschaft (iii) aus Proposition 3.4 hat, ist $q(p(x) \vee q(z)) = q(z)$. Also ist $q(x) = q(z)$. Genauso ist $q(y) = q(z)$. Also ist $(x, y) \in ker(p)$.

Daß p Eigenschaften (ii) und (iii) hat, zeigt man genau wie in Proposition 6.3.

'wenn': Wir müssen zeigen, daß $\{p, \psi(\Theta_p)\}$ die Bedingungen aus Proposition 3.4 erfüllt. Bedingungen (ii) und (iii) aus Proposition 3.4 sind schwächer als Bedingungen (ii) und (iii) aus dieser Proposition. Daß die Identität punktweises Supremum von p und $\psi(\Theta_p)$ ist, zeigt man genau wie in Proposition 6.5.

∎

6.3 Der Verband der Halbfaktoren eines dI-Bereiches ist ein vollständiger Unterverband des Verbandes aller Projektionsbilder

Die in Proposition 6.6 gegebebene Charakterisierung der Halbfaktoren vereinfacht sich in dI-Bereichen. Schauen wir uns zunächst die Θ_p-Relation einer stabilen Projektion eines dI-Bereiches an.

Definition 6.8 Sei P eine beschränkt vollständige geordnete Menge, und sei Θ eine Relation auf P. Wir nennen Θ *sup-verträglich*, falls für jede beschränkte Teilmenge M von Θ auch $\bigvee M$ ein Element von Θ ist. Θ heiße *inf-verträglich*, falls $\bigwedge M$ ein Element von Θ ist für jede nichtleere Teilmenge M von Θ.

Proposition 6.7 *a) Sei P eine beschränkt vollständige geordnete Menge, und sei p ein Projektion von P. Dann ist Θ_p sup-verträglich.*

b) Sei P eine distributive beschränkt vollständige Menge, und sei p eine stabile Projektion von P. Dann ist Θ_p eine Äquivalenzrelation.

c) Sei P eine beschränkt vollständige geordnete Menge, in der das folgende Distributivgesetz gilt:

$$\forall x \in P.\ \forall \{E_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{P}^{fin}(\downarrow x).\ \bigwedge_{i\in I} \bigvee E_i = \bigvee \{\textstyle\bigwedge_{i\in I} f_i \mid f \in \prod_{i\in I} E_i\}$$

Sei p eine stabile Projektion von P. Dann ist Θ_p inf-verträglich.

Beweis:

a) Sei M eine beschränkte Teilmenge von Θ_p. Dann gibt es für alle m aus M ein $z_m \in P$, so daß $p_1(m) = z_m \vee p \circ p_1(m)$ und $p_2(m) = z_m \vee p \circ p_2(m)$. Da P beschränkt vollständig ist, existiert das Supremum von $\{z_m \mid m \in M\}$. Es ist

$$\bigvee p_1(M) = \bigvee_{m\in M} (z_m \vee p \circ p_1(m)) = \bigvee z_M \vee \bigvee p \circ p_1(M) = \bigvee z_M \vee p(\bigvee p_1(M)).$$

Das letzte Gleichheitszeichen steht, weil $\bigvee p \circ p_1(M) \leq p(\bigvee p_1(M)) \leq \bigvee p_1(M)$.
Genauso ist $\bigvee p_2(M) = \bigvee z_M \vee p(\bigvee p_2(M))$.

b) An der Definition von Θ_p sieht man, daß Θ_p immer reflexiv und symmetrisch ist. Wir brauchen also nur noch die Transitivität zu zeigen. Zunächst zeigen wir, daß in einer distributiven beschränkt vollständigen Menge die folgende Rechenregel gilt:
Ist $\{x, u, v\}$ eine beschränkte Teilmenge von P und ist $x \vee u = x \vee v$, so ist $u = (u \wedge x) \vee (u \wedge v)$.
Aus $x \vee u = x \vee v$ folgt nämlich, daß

$$x \vee u = (x \vee u) \wedge (x \vee v) = x \vee (u \wedge v).$$

Unter Verwendung dieser Gleichung erhalten wir, daß

$$u = (x \vee u) \wedge u = (x \vee (u \wedge v)) \wedge u = (x \wedge v) \vee (u \wedge v).$$

Seien nun $(x, y) \in \Theta_p$ und $(y, z) \in \Theta_p$. Das heißt es gibt Elemente u und v von P, so daß $x = p(x) \vee u$, $y = p(y) \vee u = p(y) \vee v$ und $z = p(z) \vee v$.
Mit der Rechenregel folgt $u = (u \wedge p(y)) \vee (u \wedge v)$.
Dann ist $x = p(x) \vee u = p(x) \vee (u \wedge p(y)) \vee (u \wedge v) = p(x) \vee (u \wedge v)$. Das letzte Gleichheitszeichen steht, weil $u \wedge p(y) \in \downarrow x \cap \downarrow im(p) = \downarrow x \cap im(p)$, also $u \wedge p(y) \leq p(x)$.
Genauso ist $y = p(y) \vee (u \wedge v)$.

c) Sei M eine nichtleere Teilmenge von Θ_p. Dann gibt es für alle m aus M ein z_m aus P, so daß $p_1(m) = z_m \vee p \circ p_1(m)$ und $p_2(m) = z_m \vee p \circ p_2(m)$. Es ist

$$\begin{aligned} \bigwedge p_1(M) &= \bigwedge (z_m \vee p \circ p_1(m)) \\ &= \bigvee \{\bigwedge_{m \in M} f_m \mid f \in \prod_{m \in M} \{z_m, p \circ p_1(m)\}\} \\ &= p(\bigwedge p_1(M)) \vee \bigwedge z_M \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen steht, weil das Infimum jedes von $(z_m)_{m \in M}$ verschiedenen Elementes von $\prod_{m \in M}\{z_m, p \circ p_1(m)\}$ ein Element von $\downarrow im(p) \cap \downarrow \bigwedge p_1(M) = im(p) \cap \downarrow \bigwedge p_1(M)$ ist. Als solches ist es kleiner als $p(\bigwedge p_1(M))$.
Genauso ist $\bigwedge p_2(M) = p(\bigwedge p_2(M)) \vee \bigwedge z_M$.

■

Proposition 6.8 *In einem dI-Bereich gilt das Distributivgesetz aus Proposition 6.7 c).*

Beweis: Wir benutzen, daß in einem stetigen Verband das folgende Distributivgesetz gilt:
Ist $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von gerichteten Teilmengen des Verbandes, so ist

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee{}^{\uparrow} M_i = \bigvee{}^{\uparrow} \{\bigwedge_{i \in I} f_i \mid f \in \prod_{i \in I} M_i\} \qquad (*)$$

Sei D ein dI-Bereich, und sei x ein Element von D.
Sei zunächst $(E_i)_{i \in I}$ eine Familie von endlichen Teilmengen von $\downarrow x \cap K(D)$. Sicher ist

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee E_i \geq \bigvee \{\bigwedge_{i \in I} f_i \mid f \in \prod_{i \in I} E_i\}$$

Für jedes $i \in I$ ist $\bigvee E_i$ kompakt. Da D endlich algebraisch ist, ist dann der von $\bigvee E_i$ erzeugte Hauptanfang endlich. Also ist auch $\downarrow \bigwedge_{i \in I} \bigvee E_i$ endlich. Es gibt also eine endliche Teilmenge F von I, so daß

$$\bigvee \{\bigwedge_{i \in F} f_i \mid f \in \prod_{i \in F} E_i\} = \bigvee \{\bigwedge_{i \in I} f_i \mid f \in \prod_{i \in I} E_i\}$$

Weil D distributiv ist, ist

$$\bigvee \{\bigwedge_{i \in F} f_i \mid f \in \prod_{i \in F} E_i\} = \bigwedge_{i \in F} \bigvee E_i$$

Mit den beiden letzten Gleichungen erhalten wir also

$$\bigvee \{\bigwedge_{i \in I} f_i \mid f \in \prod_{i \in I} E_i\} = \bigwedge_{i \in F} \bigvee E_i \geq \bigwedge_{i \in I} \bigvee E_i$$

Sei nun $(E_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von endlichen Teilmengen von $\downarrow x$. Es ist

$$\begin{aligned}
\bigvee\{\textstyle\bigwedge_{i\in I} f_i \mid f\in\prod_{i\in I}E_i\} &= \bigvee\{\textstyle\bigwedge_{i\in I}\bigvee{}^{\uparrow}K_{f_i}\mid f\in\prod_{i\in I}E_i\}\\
&= \bigvee\{\textstyle\bigvee{}^{\uparrow}\{\bigwedge_{i\in I}g_i\mid g\in\prod_{i\in I}K_{f_i}\}\mid f\in\prod_{i\in I}E_i\}\\
&= \bigvee\{\textstyle\bigwedge_{i\in I}g_i\mid g\in\prod_{i\in I}K(D)\cap\downarrow E_i\}\\
&= \bigvee{}^{\uparrow}\{\textstyle\bigvee\{\bigwedge_{i\in I}g_i\mid g\in\prod_{i\in I}F_i\}\mid F\in\prod_{i\in I}\mathcal{P}^{fin}(K(D)\cap\downarrow E_i)\}\\
&= \bigvee{}^{\uparrow}\{\textstyle\bigwedge_{i\in I}\bigvee F_i\mid F\in\prod_{i\in I}\mathcal{P}^{fin}(K(D)\cap\downarrow E_i)\}\\
&= \bigwedge_{i\in I}\bigvee{}^{\uparrow}\{\textstyle\bigvee F_i\mid F_i\in\mathcal{P}^{fin}(K(D)\cap\downarrow E_i)\}\\
&= \bigwedge_{i\in I}\bigvee(K(D)\cap\downarrow E_i)\\
&= \bigwedge_{i\in I}\bigvee E_i
\end{aligned}$$

Die zweite und die sechste Gleichung der Gleichungskette gelten wegen $(*)$. Die fünfte gilt, weil F_i eine endliche Menge von kompakten Elementen ist für jedes $i\in I$. ∎

Die dritte Bedingung der Halbfaktorcharakterisierung aus Proposition 6.6 fordert, daß eine Halbfaktorprojektion bestimmte Suprema erhält. In distributiven, stetigen Bereichen erhält jede stabile Projektion beliebige Suprema:

Proposition 6.9

a) Ist D ein stetiger, beschränkt vollständiger Bereich, und ist p eine stabile Projektion von D, so ist p stetig.

b) Ist D ein stetiger,distributiver beschränkt vollständiger Bereich, und ist p eine stabile Projektion von D, so erhält p Suprema.

Beweis:

a) Sei A eine gerichtete Teilmenge von D. Da p stabil ist, ist $p(a)=a\wedge p(\bigvee{}^{\uparrow}A)$ für jedes $a\in A$. Es ist

$$\bigvee{}^{\uparrow}p(A)=\bigvee{}^{\uparrow}_{a\in A}(a\wedge p(\bigvee{}^{\uparrow}A))=\bigvee{}^{\uparrow}A\wedge p(\bigvee{}^{\uparrow}A)=p(\bigvee{}^{\uparrow}A)$$

Die dritte Gleichung der Gleichungskette gilt, weil D schnittstetig ist.

b) Nach a) erhält p gerichtete Suprema. Bleibt zu zeigen, daß p endlich Suprema erhält. Das zeigt man analog zum Beweis von a) unter Verwendung der Distributivität.

∎

Wir können nun die Halbfaktoren eines dI-Bereiches einfach charakterisieren:

Proposition 6.10 *Sei D ein dI-Bereich, und sei $p : D \to D$ eine Projektion .*
Dann ist p eine Halbfaktorprojektion, genau dann wenn p stabil ist und die Slide-Bedingung erfüllt.

Beweis:

'nur dann wenn': nach Proposition 6.2 und 6.3.

'wenn': Wir müssen zeigen, daß p Bedingungen (i) und (iii) aus Proposition 6.6 erfüllt.
Bedingung (iii) ist erfüllt, weil p nach Proposition 6.3 Suprema erhält.
Bleibt zu zeigen, daß Θ_p ein Projektionskern ist. Nach Propositionen 6.7 und 6.8 ist Θ_p eine Äquivalenzrelation und inf-verträglich. Wegen der inf-Verträglichkeit ist $\bigwedge K \in K$ für alle $K \in D/\Theta_p$. Das heißt, $\bigwedge K$ ist kleinstes Element von K.
Seien nun $K, H \in D/\Theta_p$, so daß $\uparrow K \cap H$ nichtleer ist. Es gibt also Elemente k von K und h von $\uparrow k \cap H$. Es ist $(k, MinK \wedge MinH) = (k \wedge h, MinK \wedge MinH)$. Da Θ_P inf-verträglich ist, ist $(k, MinK \wedge MinH)$ also ein Element von Θ_p. Also ist $MinK \wedge MinH \in K$, also $MinK \wedge MinH = MinK$, also $MinK \leq MinH$.

■

Satz 6.2 *Sei D ein dI-Bereich.*

a) Der Verband H_D der Halbfaktorprojektionen von D ist ein vollständiger Unterverband des Verbandes Q_D aller internen Projektionen von D.

b) A ist vollständig verbundirreduzibel in $\tilde{H}_D$, genau dann wenn A die Hülle eines vollständig verbundirreduziblen Elementes von D ist, wenn also $A = \bigcap \left\{ B \in \tilde{H}_D \mid x \in B \right\}$ für ein vollständig verbundirreduzibles Element x von D.

c) Die Menge $J(H_D)$ der vollständig verbundirreduziblen Elemente von H_D bildet eine Basis von H_D.

Beweis:

'Suprema von Halbfaktorprojektionen sind Halbfaktorprojektionen': In einem stetigen, distributiven Bereich ist ein elementweises Supremum von Anfangsstücken wieder ein Anfangsstück. Ein Supremum von stabilen Projektionen ist also stabil. Wir müssen noch zeigen, daß ein Supremum von Halbfaktorprojektionen die Slide-Bedingung erfüllt. Für endliche Teilmengen von H_D zeigen wir das per Induktion. Nehmen wir also an für jede Teilmenge E von H_D mit weniger als n Elementen erfülle $\bigvee E$ die Slide-Bedingung.
Seien $p_1, .., p_n \in H_D$. Seien $x \in D$ und $y \in im(\bigvee_{i=1}^{n} p_i)$, so daß $\bigvee_{i=1}^{n} p_i(x) \leq y$.
Dann ist $(\bigvee_{i=1}^{n-1} p_i)(x) = (\bigvee_{i=1}^{n-1} p_i) \circ (\bigvee_{i=1}^{n} p_i)(x) \leq \bigvee_{i=1}^{n-1} p_i(y)$. Genauso ist $p_n(x) \leq p_n(y)$.
Da $\bigvee_{i=1}^{n-1} p_i$ nach Induktionsannahme die Slide-Bedingung erfüllt, existiert $x \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} p_i(y)$.
Es ist $p_n(x \vee \bigvee_{i=1}^{n-1}(y)) = p_n(x) \vee p_n \circ (\bigvee_{i=1}^{n-1} p_i)(y) \leq p_n(y)$.
Mit der Slide-Bedingung für p_n erhält man die Existenz von $x \vee y$.
Sei nun $(p_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Halbfaktorprojektionen.
Seien $x \in D$ und $y \in im(\bigvee_{i \in I} p_i)$, so daß $(\bigvee_{i \in I} p_i)(x) \leq y$.
Für jede endliche Teilmenge E von I ist dann $(\bigvee_{i \in E} p_i)(x) \leq \bigvee_{i \in E} p_i(y)$.
Wie wir gezeigt haben, existiert dann $x \vee \bigvee_{i \in E} p_i(y)$.
Da D ein Bereich ist, existiert dann auch $\bigvee{}^{\uparrow} \{ x \vee \bigvee_{i \in E} p_i(y) \mid E \in \mathcal{P}^{fin}(I) \} = x \vee \bigvee_{i \in I} p_i(y) = x \vee y$.

'Infima von Halbfaktorprojektionen sind Halbfaktorprojektionen ': Da D beschränkt vollständig ist, ist das Infimum in $\tilde{Q}_D$ der Mengenschnitt. Ein Durchschnitt von Anfangsstücken ist sicher ein Anfangsstück. Also ist ein Infimum von stabilen Projektionen stabil.
Zur Slide-Bedingung: Sei $(p_i)_{i\in I}$ eine Familie von Halbfaktorprojektionen.
Seien zunächst $k \in K(D)$ und $y \in im(\bigwedge_{i\in I} p_i)$, so daß $(\bigwedge_{i\in I} p_i)(k) \leq y$.
Da $\downarrow k$ endlich ist, gibt es eine endliche Teilmenge E von I,
so daß $(\bigwedge_{i\in I} p_i)(k) = \bigvee(\bigcap_{i\in I} im(p_i) \cap \downarrow k) = \bigvee(\bigcap_{i\in E} im(p_i) \cap \downarrow k) = (\bigwedge_{i\in E} p_i)(k)$.
Sagen wir $E = i_1, .., i_n$. Da $p_{i_1}, .., p_{i_n}$ stabil sind, ist $\bigwedge_{i\in E} p_i = p_{i_1} \circ .. \circ p_{i_n}$.
Aus $p_{i_1} \circ .. \circ p_{i_n}(k) \leq y$ folgt durch sukzessives Anwenden der Slide-Bedingung auf $p_{i_1}, .., p_{i_n}$ die Existenz von $k \vee y$.
Sei nun x eine beliebiges Element von D, und sei y ein Element von $im(\bigwedge_{i\in I} p_i)$, so daß $(\bigwedge_{i\in I} p_i)(x) \leq y$. Dann ist $(\bigwedge_{i\in I} p_i)(k) \leq y$ für alle $k \in K_x$. Also existiert $k \vee y$ für alle $k \in K_x$. Da D ein Bereich ist, existiert dann auch $\bigvee{}^{\uparrow}(K_x \vee y) = \bigvee{}^{\uparrow} K_x \vee y = x \vee y$.

b) und c) folgert man leicht daraus, daß Suprema in $\tilde{H}_D$ elementweise gebildet werden, und daß die vollständig verbundirreduziblen Elemente von D eine Basis bilden, ∎

Der Halbfaktorenverband eines dI-Bereiches muß nicht endlich algebraisch sein. Betrachten wir zum Beispiel das folgende Diagramm $D : \mathbb{N}_\perp \to DCPO$:

$$D(\perp) = \mathbb{N}_\perp$$

$$D(n) = \{\perp, \top\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$D(n \leftarrow \perp)(x) = \begin{cases} \top & falls\ x = n \\ \perp & sonst \end{cases}$$

Nach Satz 5.2 ist $hypD$ ein dI-Bereich. Bezeichne

$$H := \left\{ \prod_{n \in M} D(n) \times \prod_{n \in \mathbb{N} \setminus M} \{\perp\} \times \{\perp\} \mid M \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

Jedes Element von H ist elementweises Supremum eingebettetter Hyperlimesfaktoren, ist also ein Halbfaktor von $hypD$. Wir behaupten,daß durch $H \cup \{hypD\}$ bereits der gesamte Halbfaktorverband von $hypD$ gegeben ist. Dieser Verband ist nicht endlich algebraisch, denn er hat unendlich viele Elemente, sein größtes Element ist aber kompakt.
Sei A ein Halbfaktor von $hypD$, welcher nicht Element von H ist. Da $\prod_{n \in \mathbb{N}} D(n) \times \{\perp\}$ kein Sup-abgeschlossenen Anfangsstück hat, das nicht schon Element von H ist, ist A eine echte Obermenge von $\prod_{n \in \mathbb{N}} D(n) \times \perp$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir ein $y_n \in hypD$ durch

$$p_i(y_n) := \begin{cases} n & falls\ i = \perp \\ \top & falls\ i = n \\ \perp & sonst. \end{cases}$$

Da A ein Anfangsstück ist gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y_n \in A$. Angenommen A sei ungleich $hypD$. Wegen $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \downarrow y_n = hypD$ gäbe es dann auch ein $m \in \mathbb{N}$ mit $y_m \notin A$. Sei nun $z \in hypD$ definiert durch

$$p_i(z) := \begin{cases} n & falls\ i = \perp \\ \top & falls\ i \in \{n, m\} \\ \perp & sonst. \end{cases}$$

Es ist $p_A(y_m) \leq z \in A$. Weil A der Slide-Bedingung genügt, müßte dann $\{y_m, z\}$ beschränkt sein. Das ist jedoch nicht der Fall, da $\{p_\perp(y_m), p_\perp(z)\}$ unbeschränkt ist.

6.4 Der Zerlegungssatz für dI-Bereiche

Zum Beweis des Satzes benötigen wir die folgenden drei Lemmata:

Lemma 6.1 *Sei D ein dI-Bereich, und seien p und q stabile Projektionen von D, so daß $q \leq p$. Dann existiert p/q, und es ist $p/q = id/q \circ p$. Außerdem erhält p/q Suprema.*

Beweis: Da p stabil ist, ist $id/q \circ p$ eine Projektion. Es ist

$$id/q \circ p \vee q = id/q \circ p \vee q \circ p = (id/q \vee q) \circ p = id \circ p = p.$$

Sei $t \in Q_D$, so daß $t \vee q = p$. Sei $x \in D$.
Es ist $p(x) = t(x) \vee q(x) = t(x) \vee q \circ p(x)$. Andererseits ist $t(x) = t(x) \vee q \circ t(x)$.
Also ist $(p(x), t(x)) \in \Theta_q$, und es ist $t(x) \geq Min[p(x)]\Theta_q = Min[p(x)]ker(id/q) = (id/q) \circ p(x)$.
$id/q \circ p$ ist also die kleinste Projektion, deren Supremum mit q gleich p ist.
p erhält Suprema, nach Proposition 6.3. $ker(id/q) = \Theta_q$ ist sup-verträglich, nach Proposition 6.7.
Also erhält id/q Suprema. Insgesamt erhält dann $p/q = id/q \circ p$ Suprema. ∎

Lemma 6.2 *Sei D ein dI-Bereich, und seien A, B, C stabile Projektionen von D, so daß $B, C \subseteq A$. Sei weiterhin x ein Element von D, so daß $\downarrow x \cap B = \downarrow x \cap C$. Dann ist $p_A/p_B(x) = p_A/p_C(x)$.*

Beweis: Für $y \in \downarrow x$ ist $p_B(y) = p_{B\cap\downarrow x}(y)$.
Man überlegt sich leicht, daß dann $\Theta_B \cap (\downarrow x)^2 = \Theta_{B\cap\downarrow x} \cap (\downarrow x)^2$.
Es ist $p_A/p_B(x) = id/p_B \circ p_A(x) = Min[p_A(x)]\Theta_B = Min[p_A(x)]\Theta_{B\cap\downarrow x}$.
Genauso ist $p_A/p_C(x) = Min[p_A(x)]\Theta_{C\cap\downarrow x}$ ■

Lemma 6.3 *Sei D ein dI-Bereich und sei B eine endliche Menge von Halfaktorprojektionen von D. Für $p \in B$ sei $p^{\downarrow_B}$ definiert durch*

$$p^{\downarrow_B} := \bigvee \{q \in B \mid q \text{ echt kleiner als } p\}$$

Dann:

- $\bigvee B = \bigvee_{p\in B} p/p^{\downarrow_B}$
- *Ist $(x_p)_{p\in B} \in \prod_{p\in B} im(p/p^{\downarrow_B})$, so daß $p/p^{\downarrow_B}(x_q) \leq x_p$ für alle $p, q \in B$, so existiert $\bigvee_{p\in B} x_p$.*

Beweis: Wir zeigen per Induktion, daß die beiden Aussagen für jedes Anfangsstück von B gelten, Nehmen wir also an, wir hätten für jedes Anfangsstück A von B mit weniger als n Elementen bereits bewiesen, daß $\bigvee A = \bigvee_{p\in A} p/p^{\downarrow_B}$. Sei nun A ein Anfangsstück mit n Elementen. Sei p ein maximales Element von A. Es ist

$$\begin{aligned} \bigvee A &= \bigvee(A \setminus \{p\}) \vee p \\ &= \bigvee(A \setminus \{p\}) \vee (p/p^{\downarrow_B} \vee p^{\downarrow_B}) \\ &= \bigvee(A \setminus \{p\}) \vee p/p^{\downarrow_B} \\ &= \bigvee_{q\in A} q/q^{\downarrow_B} \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung gilt, weil $p^{\downarrow_B} \leq (\bigvee A \setminus \{p\})$, und die letzte Gleichung gilt nach Induktionsannahme.
Sei nun $(x_p)_{p\in B} \in \prod_{p\in B} im(p/p^{\downarrow_B})$, so daß $p/p^{\downarrow_B}(x_q) \leq x_p$ für alle $p, q \in B$.
Nehmen wir an, für alle Anfangsstücke A von B mit weniger als n Elementen wüßten wir bereits, daß $\bigvee_{p\in A} x_p$ existiert. Sei nun A ein Anfangsstück mit n Elementen, und sei p ein maximales Element von A. Nach Induktionsannahme existiert $\bigvee_{q\in A\setminus\{p\}} x_q$. Es ist

$$\bigvee(A \setminus \{p\})(x_p) = \bigvee_{q\in A\setminus\{p\}} q/q^{\downarrow_B}(x_p) \leq \bigvee_{q\in A\setminus\{p\}} x_q$$

Da $\bigvee(A \setminus \{p\})$ die Slide-Bedingung erfüllt, existiert dann auch $\bigvee_{q\in A} x_q$. ■

Satz 6.3 *Sei D ein dI-Bereich, und sei $M = \{p/p^{\downarrow} \mid p \in J(H_D)\}$.*
Dann definiert M eine zykelfreie Darstellung von D, d.h M definiert eine Darstellung und die $*-$ Präordnung auf M ist eine Ordnung.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß M die drei Eigenschaften aus Proposition 3.4 hat, und daß die $*$-Präordnung auf M antisymmetrisch ist.

(iii) Nach Lemma 6.1 erhält $p/p^{\downarrow}$ Suprema für alle $p \in J(H_D)$.

(i) Es ist zu zeigen, daß das punktweise Supremum von $\{p/p^{\downarrow} \mid p \in J(H_D)\}$ gleich der Identität ist. Wir bemerken zunächst, daß die vollständig verbundirreduziblen Elemente von D eine Sup-Basis bilden, und daß jedes solche Element einen endlichen Hauptanfang erzeugt.
Eine Bezeichnung: Für $x \in D$ sei $J_x :=\downarrow x \cap J(D)$.
Wir zeigen nun per Induktion, daß $x = \bigvee_{p \in J(H_D)} p/p^{\downarrow}(x)$ für alle vollständig verbundirreduziblen Elemente x von D. Sei also $x \in J(D)$. Angenommen für alle $y \in J_x \setminus \{x\}$ hätten wir bereits gezeigt, daß $y = \bigvee_{p \in J(H_D)} p/p^{\downarrow}(y)$. Bezeichne $< x >$ die $\tilde{H}_D$-Hülle von $\{x\}$, und bezeichne q die Projektion auf $< x >$. Nach Satz 6.2 b) ist $q \in J(H_D)$. Da x vollständig verbundirreduzibel in D ist und da Suprema in $\tilde{H}_D$ elementweise gebildet werden, ist x nicht in $< x >^{\downarrow}$ enthalten. Also ist $q^{\downarrow}(x)$ echt kleiner als x. Es ist

$$\begin{aligned} x = q(x) &= q^{\downarrow}(x) \vee q/q^{\downarrow}(x) \\ &= \bigvee J_{q^{\downarrow}(x)} \vee q/q^{\downarrow}(x) \\ &= \bigvee \left\{ \{\bigvee p/p^{\downarrow}(y) \mid p \in J(H_D)\} \mid y \in J_{q^{\downarrow}(x)} \right\} \vee q/q^{\downarrow}(x) \\ &\leq \bigvee_{p \in J(H_D)} p/p^{\downarrow}(x) \leq x \end{aligned}$$

Die vierte Gleichung gilt nach Induktionsannahme.
Sei nun x ein beliebiges Element von D. Dann ist

$$x = \bigvee J_x = \bigvee_{y \in J_x} \bigvee_{p \in J(H_D)} p/p^{\downarrow}(y) \leq \bigvee_{p \in J(H_D)} p/p^{\downarrow}(x) \leq x$$

(ii) Sei $(x_p)_{p \in J(H_D)} \in \prod_{p \in J(H_D)} im(p/p^{\downarrow})$, so daß $p/p^{\downarrow}(x_q) \leq x_p$ für alle $p, q \in J(H_D)$.
Zu zeigen ist, daß $\{x_p \mid p \in J(H_D)\}$ ein Supremum hat. Wir zeigen zunächst, daß für jede endliche Teilmenge F von $J(H_D)$ und jede Familie $(k_p)_{p \in F} \in \prod_{p \in F} K_{x_p} \cap im(p/p^{\downarrow})$ das Supremum von $\{k_p \mid p \in F\}$ existiert. Wir werden dazu Lemma 6.3 verwenden. Wir betrachten eine endliche Teilmenge B von H_D, nämlich

$$\begin{aligned} \tilde{B} &:= \left\{ < x > \mid x \in J(D) \cap \bigcup_{p \in F} \downarrow k_p \right\} \\ B &:= \left\{ p_A \mid A \in \tilde{B} \right\} \end{aligned}$$

Weiterhin bezeichne für $A \in \tilde{B}$ und für $p \in B$:

$$\begin{aligned} A^{\downarrow_{\tilde{B}}} &:= \bigvee \left\{ C \in \tilde{B} \mid C \textit{ echt kleiner als } A \right\} \\ p^{\downarrow_B} &:= \bigvee \{ q \in B \mid q \textit{ echt kleiner als } p \} \end{aligned}$$

Wir behaupten zunächst folgendes:
'*Für* $<x>\in\tilde{B}$ *und* $p\in F$ *ist* $<x>^{\downarrow_{\tilde{B}}}\cap\downarrow k_p=<x>^{\downarrow}\cap\downarrow k_p$'
Beweis dieser Behauptung: Es sind

$$\begin{aligned}
<x>^{\downarrow_{\tilde{B}}} &= \bigvee\left\{A\in\tilde{B}\,|\,A\ echte\ Teilmenge\ von\ <x>\right\}\\
<x>^{\downarrow} &= \bigvee\left\{A\in\tilde{H}_D\,|\,A\ echte\ Teilmenge\ von\ <x>\right\}
\end{aligned}$$

Da $\tilde{B}$ eine Teilmenge von $\tilde{H}_D$ ist, ist sicher $<x>^{\downarrow_{\tilde{B}}}\cap\downarrow k_p\subseteq<x>^{\downarrow}\cap\downarrow k_p$.
Sei nun umgekehrt $z\in<x>^{\downarrow}\cap\downarrow k_p$. Es ist $z=\bigvee J_z$, also $z\in\bigvee\{<y>|\,y\in J_z\}$.
Da $<x>^{\downarrow}$ ein Anfangsstück ist, ist $y\in<x>^{\downarrow}$ für jedes $y\in J_z$.
Also ist $<y>$ eine Teilmenge von $<x>^{\downarrow}$, das wiederum eine echte Teilmenge von $<x>$ ist.
Da $y\leq z\leq k_p$ ist $<y>$ auch ein Element von $\tilde{B}$. Somit haben wir

$$\begin{aligned}
z &\in \bigvee\{<y>|\,y\in J_z\}\\
&\subseteq \bigvee\left\{A\in\tilde{B}\,|\,A\ echte\ Teilmenge\ von\ <x>\right\}=<x>^{\downarrow_{\tilde{B}}}
\end{aligned}$$

Mit der eben bewiesenen Behauptung und mit Lemma 6.2 erhalten wir nun, daß

$$q/q^{\downarrow_B}(k_p)=q/q^{\downarrow(}(k_p)\quad f\ddot{u}r\ alle\ p\in F\ und\ alle\ q\in B.$$

Wir definieren nun ein Element $(z_q)_{q\in B}$ von $\prod_{q\in B}im(q/q^{\downarrow_B})$ durch

$$z_q:=\bigvee_{p\in F}q/q^{\downarrow}(k_p).$$

Diese Suprema existieren, weil x_q eine obere Schranke von $\left\{q/q^{\downarrow}(k_p)\,|\,p\in F\right\}$ ist.
Für jedes $q\in B$ ist z_q ein Element von $im(q/q^{\downarrow_B})$, weil $q/q^{\downarrow_B}(k_p)=q/q^{\downarrow}(k_p)$ für alle $p\in F$ und weil Bilder von Projektionen abgeschlossen sind gegen Suprema.
Seien nun $r,q\in B$. Es ist

$$\begin{aligned}
r/r^{\downarrow_B}(z_q) &= r/r^{\downarrow_B}(\bigvee_{p\in F}q/q^{\downarrow}(k_p))\\
&= \bigvee_{p\in F}r/r^{\downarrow_B}\circ q/q^{\downarrow}(k_p)\\
&\leq \bigvee_{p\in F}r/r^{\downarrow_B}(k_p)\\
&= \bigvee_{p\in F}r/r^{\downarrow}(k_p)\\
&= z_r
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung gilt, weil $r/r^{\downarrow_B}$ Suprema erhält, nach Lemma 6.1.
Nach Lemma 6.3 existiert nun $\bigvee_{q\in B}z_q$. Außerdem ist für jedes $p\in F$

$$\bigvee_{q\in B}z_q\geq\bigvee_{q\in B}q/q^{\downarrow}(k_p)=(\bigvee B)(k_p)=k_p$$

Das erste Gleichheitszeichen steht wegen Lemma 6.3. Das zweite Gleichheitszeichen steht, weil $k_p\in\bigvee\tilde{B}$.
Es ist also $\bigvee_{q\in B}z_q=\bigvee_{p\in F}k_p$.

Bezeichne nun

$$M := \left\{ \bigvee_{p \in F} k_p \mid F \in \mathcal{P}^{fin}(J(H_D)),\ \forall p \in F.\ k_p \in K_{x_p} \cap im(p/p^{\downarrow}) \right\}$$

Da $K_{x_p} \cap im(p/p^{\downarrow})$ gerichtet ist für jedes $p \in J(H_D)$, ist auch M gerichtet.
Da D ein Bereich ist, existiert dann das Supremum von M.
Für jedes $p \in J(H_D)$ ist $x_p = p/p^{\downarrow}(x_p) = p/p^{\downarrow}(\bigvee{}^{\uparrow} K_{x_p}) = \bigvee{}^{\uparrow} p/p^{\downarrow}(K_{x_p})$. Da D endlich algebraisch ist, ist $p/p^{\downarrow}(K_{x_p}) \subseteq K_{x_p}$. Es ist also $x_p \leq \bigvee{}^{\uparrow} M$ für alle $p \in J(H_D)$.
Also ist $\bigvee{}^{\uparrow} M = \bigvee_{p \in J(H_D)} x_p$.

Wir haben damit gezeigt, daß M eine Darstellung von D definiert. Bleibt zu zeigen, daß die $*$-Präordnung auf M antisymmetrisch ist:
Seien zunächst $p, r \in J(H_D)$, so daß r echt kleiner ist als p. Dann ist

$$p/p^{\downarrow} \circ r = id/p^{\downarrow} \circ p \circ r = id/p^{\downarrow} \circ r \leq id/p^{\downarrow} \circ p^{\downarrow} = \perp$$

Die erste Gleichung der Gleichungskette gilt nach Lemma 6.1, die zweite gilt, weil r kleiner ist als p, die Ungleichung gilt, weil r kleiner ist als $p^{\downarrow}$,und die letzte Gleichung gilt, weil $p^{\downarrow}$ eine Halbfaktorprojektion ist.
Seien nun $p, q \in J(H_D)$, so daß $p \not\leq q$. Dann ist

$$\begin{aligned}
p/p^{\downarrow} \circ q/q^{\downarrow} \leq p/p^{\downarrow} \circ q &= p/p^{\downarrow} \circ p \circ q \\
&= p/p^{\downarrow} \circ (p \wedge q) \\
&= p/p^{\downarrow} \circ (\bigvee \{r \in J(H_D) \mid r \leq p \wedge q\}) \\
&= \bigvee \{p/p^{\downarrow} \circ r \mid r \leq p \wedge q\} \\
&= \perp
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung der Gleichungskette gilt, weil p und q stabil sind. Die vierte Gleichung gilt, weil $J(H_D)$ eine Basis von H_D ist, nach Satz 6.2 c). Die letzte Gleichung gilt, weil $r \leq p \wedge q < r$, und somit $p/p^{\downarrow} \circ r = \perp$, wie wir gerade festgestellt haben.
Wir haben damit gezeigt, daß für $p, q \in J(H_D)$ die folgende Implikation gilt:

$$p \not\leq q \ \Rightarrow\ p/p^{\downarrow} \circ q/q^{\downarrow} = \perp$$

Diese Implikation ist aber äquivalent zu

$$\{(q/q^{\downarrow}, p/p^{\downarrow}) \mid p/p^{\downarrow} \circ q/q^{\downarrow} \neq \perp\} \subseteq \{(q/q^{\downarrow}, p/p^{\downarrow}) \mid p \leq q\}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist eine Ordnung. Die $*$-Präordnung ist die reflexive und transitive Hülle der linken Seite, ist also in der rechten Seite enthalten, ist also eine Ordnung. ∎

6.5 Die Faktoren der dI-Bereichs-Zerlegung sind irreduzibel

Definition 6.9 Eine Darstellung (P, p) in einer Unterkategorie C von $POSET$ heiße *Zerlegung* von P, falls keine Projektion injektiv ist. Ein Objekt P von C heiße *irreduzibel* in C, falls es keine Zerlegung von P in C gibt. P heiße *zykelfrei irreduzibel* in C, falls es keine Zerlegung über einem zykelfreien Diagramm in C gibt. P heiße *einfach irreduzibel*, falls es keine Zerlegung über einem einfachen Diagramm in C gibt.

Proposition 6.11 *Sei P ein geordnete Menge mit kleinstem Element, (P, p) eine zykelfreie Darstellung über dem Diagramm $D : I \to POSET$, und i ein Objekt der Indexkategorie.*
Dann sind äquivalent:

(1) p_i ist injektiv.

(2) Für alle von i verschiedenen Objekte j der Indexkategorie ist $D(j)$ einelementig.

Beweis: Die Implikation von (2) nach (1) ist offensichtlich.
Zur Implikation von (1) nach (2): Sei $j \in Ob(I) \setminus \{i\}$ und $x \in D(i)$.
Falls $[i \to j]$ leer ist: Da p_j surjektiv ist, gibt es ein $y \in P$, so daß $p_j(y) = x$. Wir definieren ein weiteres Element z von P durch

$$p_k(z) := \begin{cases} p_k(y) & falls\ [i \to k] \neq \emptyset \\ \perp & sonst \end{cases}$$

Es ist $p_i(y) = p_i(z)$. Weil p_i injektiv ist, ist also $y = z$. Insbesondere ist also $x = p_j(y) = p_j(z) = \perp$.
Falls $[i \to j]$ nichtleer ist: Da p_j surjektiv ist, gibt es ein $y \in P$, so daß $p_j(y) = x$. Wir definieren ein weiteres Element von P durch

$$p_k(z) := \begin{cases} p_k(y) & falls\ [j \to k] \neq \emptyset \\ \perp & sonst \end{cases}$$

Da I zykelfrei ist, ist $[j \to i]$ leer. Also ist $p_i(z) = \perp = p_i(\perp)$.
Da p_i injektiv ist, ist dann $z = \perp$, also insbesondere $x = p_j(y) = p_j(z) = p_j(\perp) = \perp$. ■

Proposition 6.12 *Sei P eine beschränkt vollständige geordnete Menge. Dann sind äquivalent:*

(1) P ist zykelfrei, einfach irreduzibel in $POSET$.

(2) P ist zykelfrei irreduzibel in BC.

(3) Die Identität und die konstante Abbildung auf das kleinste Element sind die einzigen Halbfaktorprojektionen von P.

Setzen wir zusätzlich voraus, daß P endlich algebraisch ist, so ist auch noch die folgende Eigenschaft äquivalent zu (1) bis (3):

(4) P ist zykelfrei irreduzibel in DCPO.

Beweis:

'(1) $\Rightarrow$ (2)': Sei (P,p) eine zykelfreie Darstellung über $D : I \to BC$. Nach Proposition 3.8 sind die Hyperlimesprojektionen obere Adjungierte. (P,p) ist also ein Hyperlimeskegel über dem zykelfreien, einfachen Diagramm $\tilde{D}_{||I|}$ aus Proposition 3.2 a). Da P als zykelfrei, einfach irreduzibel in $POSET$ vorausgesetzt ist, gibt es ein Objekt i der Indexkategorie, so daß p_i injektiv ist.

'(2) $\Rightarrow$ (1)': Sei (P,p) eine zykelfreie, einfache Darstellung über $D : I \to POSET$. Nach Proposition 5.4 haben sämtlich Objekte von D ein kleinstes Element, und sämtliche verbindenden Morphismen erhalten das kleinste Element. Nach Folgerung 3.4 sind die Hyperlimesprojektionen also obere Adjungierte. Die Objekte von D sind dann Bilder einer beschränkt vollständigen geordneten Menge unter einer oberen Adjungierten, sind also beschränkt vollständig. Da P als zykelfrei irreduzibel in BC vorausgesetzt ist, gibt es dann ein Objekt i der Indexkategorie, so daß p_i injektiv ist.

'(2) $\Rightarrow$ (3)': Sei (p,q) ein Halbfaktor-Kohalbfaktorprojektionspaar von P. Da P zykelfrei irreduzibel in BC ist, ist entweder p injektiv oder q. Falls p injektiv ist, folgt mit der Idempotenz von p, daß p die Identität ist. Falls q injektiv ist, so ist das Bild von p, nach Proposition 6.11, einelementig. Also ist $p = \bot$.

'(3) $\Rightarrow$ (2)': Sei (P,p) eine zykelfreie Darstellung über $D : I \to BC$. Nach Proposition 3.8 hat jede Hyperlimesprojektion p_i eine untere Adjungierte e_i. Bezeichne M die Menge $\{e_i \circ p_i \mid i \in Ob(I)\}$. Weil das Diagramm D zykelfrei ist, ist die $*$-Präordnung auf M eine Ordnung, nach Proposition 3.6 .
Angenommen (P,p) sei eine Zerlegung. Wegen Proposition 6.11 gäbe es dann zwei verschiedene Objekte i und j von I, so daß sowohl $D(i)$ wie auch $D(j)$ mindestens zwei Elemente haben. Bezeichne p die Projektion $e_i \circ p_i$ und q die Projektion $e_j \circ p_j$.
Da p_i und p_j surjektiv sind, ist das Bild von p isomorph zu $D(i)$ und das Bild von q isomorph zu $D(j)$. Sowohl das Bild von p als auch das Bild von q haben also mindestens zwei Elemente. Also sind $p \neq \bot$ und $q \neq \bot$.
Da die $*$-Präordnung auf M eine Ordnung ist, gibt es ein $*$-Endstück U von M, welches p und q trennt, sagen wir $p \in U$ und $q \notin U$. Nach Satz 6.1 ist $(\bigvee U, \bigvee(M \setminus U))$ ein Halbfaktor-Kohalbfaktorprojektionspaar.
Da $p \neq \bot$ und $\bigvee U \geq p$, ist $\bigvee U \neq \bot$. Wir haben vorausgesetzt, daß $H_P = \{id, \bot\}$. Also ist $\bigvee U = id$. Dann ist $q \leq \bigvee(M \setminus U) = id / \bigvee U = id/id = \bot$. Wir hatten aber q so gewählt, daß $q \neq \bot$. Ein Widerspruch.

Sei nun P zusätzlich endlich algebraisch.

'(1) $\Rightarrow$ (4)': Sei (P,p) eine zykelfreie Darstellung über $D : I \to DCPO$. Da P endlich algebraisch ist, hat jede Hyperlimesprojektion über D eine untere Adjungierte, nach Proposition 5.6. (P,p) ist also eine zykelfreie, einfache Darstellung über dem Diagramm aus Proposition 3.2 a). Da wir P als zykelfrei, einfach irreduzibel in $POSET$ vorausgesetzt haben, gibt es dann ein Objekt i von I, so daß p_i injektiv ist.

'(4) $\Rightarrow$ (1)': Sei (P,p) eine zykelfreie, einfache Darstellung über $D : I \to POSET$. Nach Folgerung 5.1 c) ist jedes Objekt von D ein Bereich, und nach Folgerung 5.2 a) ist jeder verbindende Morphismus von D stetig. Da wir P als zykelfrei, einfach irreduzibel in $DCPO$ vorausgesetzt haben, gibt es dann ein Objekt i von I, so daß p_i injektiv ist.

■

Wir haben die Halbfaktoren eines dI-Bereiches charakterisiert als Bilder von stabilen Projektionen, welche die Slide-Bedingung erfüllen. Mit Hilfe dieser Charakterisierung und mit Proposition 6.12 überlegt man sich nun leicht, daß jeder flache Bereich zykelfrei irreduzibel in $DCPO$ ist.
Hier ein weiteres Beispiel für einen zykelfrei irreduziblen Bereich:

P hat keine nichttrivialen Halbfaktoren. Ein von $\{\perp\}$ verschiedener Halbfaktor A von P muß nämlich ein Atom von P enthalten, da er ein Anfangsstück ist. Dann muß er aber alle Atome enthalten, da sonst die Slide-Bedingung verletzt wäre. Da die Atome aber eine Basis von P bilden und da ein Halbfaktor abgeschlossen ist gegen Suprema, ist dann $A = P$.
Nach Proposition 6.12 ist P also zykelfrei irreduzibel in $DCPO$. Insbesondere ist P also kein OHF-Objekt. P ist jedoch ein HF-Objekt, nämlich über folgendem Diagramm:

Proposition 6.13 *Sei A ein distributiver, stetiger beschränkt vollständiger Bereich, und sei (A, p) eine zykelfreie, einfache Darstellung über $D : I \to POSET$. Für jedes $i \in Ob(I)$ bezeichne e_i die untere Adjungierte zu p_i. Bezeichne weiterhin:*

$$\begin{array}{rcl} M & := & \{e_i \circ p_i \,|\, i \in Ob(I)\} \\ L_M & := & \{\bigvee U \,|\, U \ ist\ * -Endstück\ von\ M\} \end{array}$$

Wir setzen voraus, daß $L_M = H_A$.
Dann ist jedes Objekt von D zykelfrei, einfach irreduzibel in $POSET$.

Beweis: Sei $j \in Ob(I)$. Wir zeigen, daß die Identität und die konstante $\perp$-Abbildung die einzigen Halbfaktorprojektionen von $D(j)$ sind.
Sei also (r, s) ein Halbfaktor-Kohalbfaktorprojektionspaar von $D(j)$. Das Diagramm der dadurch gegebebenen Darstellung von $D(j)$ bezeichnen wir mit $E_j : K_j \to POSET$. Also:

$$K_j = 1_j \longrightarrow 2_j, \quad E_j(1_j) = im(s),\ E_j(2_j) = im(r),\ E_j(1_j \leftarrow 2_j) = {}'r'$$

Für $i \in Ob(I) \setminus \{j\}$ bezeichne $E_i : K_i \to POSET$ das 'Singleton-Diagramm' mit dem Objekt $D(i)$. Also:

$$K_i = 1_i, \quad E_i(1_i) = D(i)$$

Wir betrachten das Diagramm $\biguplus_D E_i$.

$$\begin{tikzcd} \dots D(i) \arrow[r] & D(j) \arrow[r] & D(k) \dots \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \dots D(i) \arrow[dr] \arrow[drr] & & & D(k) \dots \\ & im(s) \arrow[urr] & im(r) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Die verbindenden Morphismen von D erhalten Suprema, nach Folgerung 5.2 c). Nach Teil a) und Teil b) derselben Folgerung ist $D(j)$ distributiv und stetig. Wiederum nach Teil c) der Folgerung erhält dann auch der verbindende Morphismus von E_j Suprema. Bezeichne nun

$$\begin{aligned} &t_{1_j} \textit{ die Korestriktion von } s \textit{ aufs Bild von } s \\ &t_{2_j} \textit{ die Korestriktion von } r \textit{ aufs Bild von } r \\ \textit{Für alle } i \in Ob(I) \setminus \{j\} : \ &t_{1_i} \textit{ die Identität auf } D(i) \end{aligned}$$

Nach Proposition 4.2 ist $(A, (t_{k_i} \circ p_i)_{i \in ObI, k_i \in ObK_i})$ ein Hyperlimeskegel über $\biguplus_D E_i$. Setzen wir nun:

$$\begin{aligned} \tilde{r} &:= e_j \circ r \circ p_j \\ \tilde{s} &:= e_j \circ s \circ p_j \\ \tilde{M} &:= M \cup \{\tilde{r}, \tilde{s}\} \\ U &:= \{e_i \circ p_i \,|\, i \in \uparrow_I j \setminus \{j\}\} \\ V &:= \{e_i \circ p_i \,|\, i \in \uparrow_I j\} \\ W &:= \{e_i \circ p_i \,|\, i \in \uparrow_I j \setminus \{j\}\} \cup \{\tilde{r}\} \end{aligned}$$

Mit Proposition 3.6 erhält man, daß U und V $*$-Endstücke von M sind.
Man überlegt sich leicht, daß $\uparrow_I j \setminus \{j\} \cup \{2_j\}$ ein $*$-Endstück von $\biguplus_I K_i$ ist.
Wiederum mit Proposition 3.6 erhält man dann, daß W ein $*$-Endstück von $\tilde{M}$ ist. Nach Satz 6.1 ist dann $\bigvee W \in H_A$. Da wir vorausgesetzt haben, daß $L_M = H_A$, ist also $\bigvee W \in L_M$.
$\bigvee U$ und $\bigvee V$ sind Nachbarn in L_M. Andererseits ist aber $\bigvee U \leq \bigvee W \leq \bigvee V$. Also ist entweder $\bigvee U = \bigvee W$ oder $\bigvee V = \bigvee W$.
Im ersten Fall ist $\tilde{r} \leq \bigvee U$, also $\tilde{r} = \tilde{r} \circ \bigvee U$.
Andererseits ist aber $\tilde{r} = e_j \circ r \circ p_j \leq e_j \circ p_j \leq \bigvee(M \setminus U)$.
Also: $\tilde{r} = \tilde{r} \circ \bigvee U \leq \bigvee(M \setminus U) \circ \bigvee U = \bot$. Nun ist $e_j \circ r \circ p_j = \tilde{r} = \bot$. Wegen der Surjektivität von p_j ist dann auch $e_j \circ r = \bot$. Weil r das kleinste Element auf sich selbet abbildet und weil e_j injektiv ist, ist dann auch $r = \bot$.
Im zweiten Fall, falls also $\bigvee W$ gleich $\bigvee V$ ist, ist $\tilde{r} \geq \bigvee V / \bigvee U = e_j \circ p_j$. Dabei steht das Ungleichheitszeichen nach Definition von $/$, und das Gleichheitszeichen wegen Satz 6.1 d).
Es ist also $e_j \circ r \circ p_j = \tilde{r} = e_j \circ p_j = e_j \circ id_{D(j)} \circ p_j$. Mit der Injektivität von e_j und der Surjektivität von p_j folgt, daß $r = id_{D(j)}$. ∎

Satz 6.4 *Sei A ein dI-Bereich. M sei definiert wie im Zerlegungssatz 6.3. Sei $p \in M$. Dann:*

a) $D_M(p)$ ist zykelfrei, einfach irreduzibel in $POSET$.

b) $D_M(p)$ ist zykelfrei irreduzibel in BC.

c) $D_M(p)$ ist zykelfrei irreduzibel in $DCPO$.

Beweis:

a) Wir wollen Proposition 6.13 anwenden, müssen also zeigen, daß $L_M = H_A$. Nach Satz 6.1 ist L_M eine Teilmenge von H_A. Sei umgekehrt p ein Element von H_A.
Bezeichne $U := \{q/q^{\downarrow} \,|\, q \in H_A \; und \; q \leq p\}$. Dann ist $p = \bigvee U$. Das beweist man wie die Eigenschaft (i) im Beweis des Zerlegungssatzes: Man zeigt zunächst per Induktion, daß jedes vollständig verbundirreduzible Element x des Bildes von p Supremum von $\{p(x) \,|\, p \in U\}$ ist. Dann benutzt man, daß die vollständig verbundirreduziblen Elemente eine Basis des Bildes von p bilden.
Wir haben im Beweis des Zerlegungssatzes gesehen, daß

$$\leq^* \subseteq \{(p/p^{\downarrow}, q/q^{\downarrow}) \,|\, p, q \in J(H_A) \; und \; q \leq p\}.$$

U ist ein Endstück von M bezüglich der Ordnung auf der rechten Ungleichungsseite, also erst recht ein Endstück in der $*$-Ordnung. Nach Definition von L_M ist also $\bigvee U \in L_M$.

b) folgt mit Propositon 6.12.

c) Nach Folgerung 5.2 e) ist $D_M(p)$ endlich algebraisch. Nach Proposition 6.12 ist $D_M(p)$ dann zykelfrei irreduzibel in $DCPO$.

■

Wir beenden, das Kapitel mit zwei Beispielen. Zunächst ein Beispiel dafür, daß die Zerlegung eines dI-Bereiches in zykelfrei irreduzible Faktoren nicht eindeutig ist:

Das nächste Beispiel ist ein distributiver Scott-Bereich, der sich nicht als zykelfreier Hyperlimes von in BC zykelfrei irreduziblen Mengen darstellen läßt:

Es ist $\tilde{H}_A = \{\downarrow n' \,|\, n \in N\} \cup \{\{\perp\}\}$. Ein Halbfaktor ist nämlich Bild einer stabilen Projektion. Die stabilen Projektionen in einem vollständigen Verband sind gerade die Projektionen auf Hauptanfänge.
Ist p eine Projektion auf einen Hauptanfang $\downarrow n$ für ein $n \in N$, so ist $A/\Theta_p = \{\downarrow n, \{n' \,|\, n \in N\}\}$. Da $\{n' \,|\, n \in N\}$ kein kleinstes Element hat, ist Θ_p kein Projektionskern. Nach Proposition 6.6 ist $\downarrow n$ also kein Halbfaktor.
Ist p eine Projektion auf einen Hauptanfang $\downarrow n'$ für ein $n \in N$, so ist $A/\Theta_p = \{\downarrow n'\} \cup \{\{m, m'\} \,|\, 1 \leq m < n\}$. Man sieht leicht, daß Θ_p dann ein Projektionskern ist. Die Slide-Bedingung wird in einem Verband von jeder Projektion erfüllt. Da stabile Projektionen eines stetigen, distributiven Bereiches Suprema erhalten, erfüllt p auch die dritte Bedingung aus Proposition 6.6. Also ist $\downarrow n'$ ein Halbfaktor.
A hat nichttriviale Halbfaktoren und ist somit nicht zykelfrei irreduzibel in BC. Jede zykelfreie Darstellung von A in BC definiert eine Menge M von Projektionen, die die drei Eigenschaften aus Proposition 3.4 hat, und deren $*$-Präordnung antisymmetrisch ist. Nach Satz 6.1 gibt es einen Unterverband L von H_A, so daß $M = \left\{p/p^{\downarrow_L} \,|\, p \textit{ ist verbundirreduzibel in } L\right\}$. H_A ist eine Kette, also auch L. Ist L endlich, so ist das Element von M, welches durch das kleinste Element von L definiert wird, isomorph zu A, ist also nicht zykelfrei irreduzibel in BC. Ist L unendlich, so ist das punktweise Supremum von M nicht gleich der Identität.

7 Eine Charakterisierung der Zustandsmengen von stabilen konkreten Datenstrukturen

In [Cur] werden konkrete Datenstrukturen eingeführt:

Definition 7.1 Eine *konkrete Datenstruktur* ist gegeben durch ein 4-Tupel $(C, V, E, \vdash)$.
C und V sind Mengen. Die Elemente von C heißen *Zellen*, die Elemente von V heißen *Werte*.
E ist eine Teilmenge von $C \times V$, so daß es für jede Zelle c eine Wert v gibt, so daß $(c, v) \in E$. Die Elemente von E heißen *Ereignisse*.
Ist A eine Teilmenge von E, so schreiben wir $F(A)$ für die Menge $\{c \in C \mid \exists v \in V.(c, v) \in A\}$. Ist c ein Element von $F(A)$, so sagen wir c sei in A *belegt*.
$\vdash$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}^{fin}(E) \times C$ und heißt *Belegbarkeitsrelation*. Ist $X \vdash c$, so nennen wir X eine *Belegbarkeitsvoraussetzung* (oder kürzer: *Voraussetzung*) von c.
Beweise einer Zelle c sind folgendermaßen definiert:

(i) Ist $\emptyset \vdash c$, so ist $\emptyset$ ein Beweis von c.

(ii) Ist $\{(c_1, v_1), .., (c_n, v_n)\} \vdash c$, und ist P_i ein Beweis von c_i für jedes $i \in \{1, .., n\}$, so ist $P := \{(c_1, v_1), .., (c_n, v_n)\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ ein Beweis von c, falls zusätzlich gilt:

   (a) $(d, v), (d, w) \in P \;\Rightarrow\; v = w$ ('keine Zelle ist doppelt belegt')

   (b) $c \notin F(P)$ ('c ist in P noch nicht belegt')

Für die Menge aller Beweise einer Zelle c schreiben wir $Proof(c)$.
Ein *Zustand* Z von $(C, V, E, \vdash)$ sei eine Teilmenge von E, so daß

(i) $(c, v), (c, w) \in Z \;\Rightarrow\; v = w$

(ii) $\forall (c, v) \in Z.\ \exists P \in Proof(c).\ P \subseteq Z$

Wir schreiben $A(C, V, E, \vdash)$ für die Menge aller Zustände von $(C, V, E, \vdash)$ und betrachten diese Menge als geordnete Menge mit der Inklusionsordnung.

In [Cur] sind Beweise etwas anders definiert als hier. Dort braucht ein Beweis nämlich nicht die Bedingungen (a) und (b) zu erfüllen. Diese beiden Bedingungen versichern uns, daß $P \cup (c, v)$ ein Zustand ist, falls P ein Beweis von c und (c, v) ein Ereigniss ist.
Außerdem definiert Curien konkrete Datenstrukturen mit Hilfe von Deduktionen (Herleitungsfolgen), und nicht wie wir mit Hilfe von Beweisen (Herleitungsbäumen). Unsere Definition ist jedoch äquivalent zu der von Curien.

Proposition 7.1 *Sei $M = (C, V, E, \vdash)$ eine konkrete Datenstruktur.*

a) $A(M)$ ist ein Bereich.

b) $A(M)$ ist beschränkt vollständig.

c) $A(M)$ ist endlich algebraisch.

Beweis:

a) Beliebige Vereinigungen von Zuständen haben Eigenschaft (ii).
Sei $\mathcal{Z}$ eine gerichtete Menge von Zuständen. Seien $(c, v), (c, w) \in \bigcup \mathcal{Z}$. Dann gibt es $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$, so daß $(c, v) \in Z_1$ und $(c, w) \in Z_2$. Da $\mathcal{Z}$ gerichtet ist, gibt es ein $Y \in \mathcal{Z}$, so daß $Z_1, Z_2 \subseteq Y$ Da Y Bedingung (i) erfüllt, ist $v = w$.

b) Sei $\mathcal{Z}$ eine beschränkte Teilmenge von $A(M)$. Als Teilmenge eines Zustandes hat $\bigcup \mathcal{Z}$ die Eigenschaft (i).

c) Sei $Z \in A(M)$. Für jedes Element (c, v) von Z bezeichne P_c irgendeinen Beweis von c, der in Z enthalten ist. $P_c \cup \{(c, v)\}$ ist endlich, also kompakt, und es ist $Z = \bigcup_{(c,v)\in Z} P_c \cup \{(c, v)\}$. Also ist $A(M)$ algebraisch. Ein unendlicher Zustand kann nicht kompakt sein, denn er ist, wie wir gerade gesehen haben, Vereinigung von endlichen Zuständen.

∎

Betrachten wir eine konkrete Datenstruktur M, und einen endlichen Zustand Z von M. Man überlegt sich leicht, daß jeder obere Nachbar von Z in $A(M)$ eine Menge ist, die gerade ein Element mehr hat als Z. Auf Grund dessen kann die Menge $K(A(M))$ aller endlichen Zustände von M keine konvexen Teilmengen haben, die isomorph zu einem der typischen nicht-distributiven Verbände M_3 oder N_3 sind. (Trotzdem braucht $K(A(M))$ nicht distributiv zu sein.) Curien benutzt Eigenschaften dieser Art, um Zustandsmengen von konkreten Datenstrukturen ordnungstheoretisch zu charakterisieren. Er nennt die Zustandsmenge einer konkreten Datenstruktur einen *konkreten Bereich.*

Definition 7.2 Eine konkrete Datenstruktur heißt *stabil*, falls jeder Zustand für jede Zelle höchstens eine Voraussetzung enthält.
Eine konkrete Datenstruktur heißt *wohlfundiert*, falls es keine Folge $(X_n, c_n) \in (\mathcal{P}^{fin}(E) \times C)^N$ gibt, so daß $X_n \vdash c_n$ und $c_{n+1} \in F(X_n)$ für alle $n \in N$.
Eine wohlfundierte und stabile konkrete Datenstruktur heißt *deterministisch.*

In [Cur] wird gezeigt, daß die Zustandsmengen der stabilen konkreten Datenstrukturen, wie auch die Zustandsmengen der deterministischen konkreten Datenstrukturen, gerade die distributiven konkreten Bereiche sind. Wir werden in diesem Kapitel die Zustandsmengen der stabilen konkreten Datenstrukturen anders charakterisieren, nämlich als Hyperlimites von flachen Bereichen über zykelfreien, einfachen Diagrammen, deren Indexkategorien die Eigenschaft haben, daß jedes Hauptende endlich ist, und deren verbindende Morphismen konstant sind auf der Menge der maximalen Elemente des jeweiligen Definitionsbereiches.

Definition 7.3 Sei $M = (C, V, E, \vdash)$ eine konkrete Datenstruktur. Es bezeichne

$$Proof := \left\{(P, c) \in \textstyle\bigcup_{c\in C} Proof(c) \times C \,|\, P \textit{ ist Beweis von } c\right\}$$

Um Klammern zu sparen, schreiben wir P_c anstatt (P, c).

Beweis, daß dadurch eine Ordnung auf $Proof$ gegeben ist:
Die Transitivität von '$<$' ist offensichtlich. Zur Antisymmetrie: Angenommen es gäbe $P_c, Q_d \in Proof$, so daß sowohl $P_c < Q_d$ als auch $Q_d < P_c$. Da dann sowohl P eine Teilmenge von Q wäre als auch Q eine Teilmenge von P, wäre $P = Q$. Außerdem wäre $c \in F(Q)$. Da P gleich Q ist, wäre also $c \in F(P)$. Wir haben aber per Definition verboten, daß eine Zelle c in einem Beweis von c bereits belegt ist. Ein Widerspruch.

Proposition 7.2 *Jeder Zustand einer stabilen konkreten Datenstruktur enthält für jede Zelle höchstens einen Beweis.*

Beweis: Sei M eine stabile konkrete Datenstruktur. Sei Z ein Zustand von M, c eine Zelle und P und P' Beweise von c, die in Z enthalten sind.
Falls sowohl P als auch P' leer sind, so ist nichts zu zeigen.
Sei nun $X = \{(c_1, v_1), .., (c_n, v_n)\} \subseteq E$ und $P = X \cup \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, so daß $X \vdash c$ und $P_i \in Proof(c_i)$ für jedes $i \in \{1, .., n\}$. Genauso sei $X' = \{(c'_1, v'_1), .., (c'_m, v'_m)\}$ und $P' = X' \cup \bigcup_{i=1}^{m} P'_i$, so daß $X' \vdash c$ und $P'_i \in Proof(c'_i)$ für alle $i \in \{1, .., m\}$. Da M stabil ist, ist $X = X'$. Nach Induktionsannahme ist $P_i = P'_i$ für alle $i \in \{1, .., n\}$. Also ist $P = P'$. ∎

Definition 7.4 Ist Z ein Zustand einer stabilen konkreten Datenstruktur und c eine in Z belegte Zelle, so bezeichne $pr(c, Z)$ den in Z enthaltenen Beweis von c und $val(c, Z)$ bezeichne den Wert, mit dem c in Z belegt ist.

Wir stellen fest: Sind Y und Z Zustände einer stabilen konkreten Datenstruktur, so daß Y in Z enthalten ist, und ist $c \in F(Y)$, so ist $pr(c, Y) = pr(c, Z)$ und $val(c, Y) = val(c, Z)$.
Das nächste Lemma ist entscheidend:

Lemma 7.1 *Sei c eine Zelle einer stabilen konkreten Datenstruktur, und seien P und P' zwei verschiedene Beweise von c. Dann gibt es einen gemeinsamen echten Unterbeweis Q_d von P_c und P'_c, so daß $val(d, P) \neq val(d, P')$.*

Beweis: Sei M eine stabile konkrete Datenstruktur. Zu zeigen ist die folgende Aussage:

$$\forall (P_c, P'_c) \in (Proof)^2.\ [(P \neq P') \ \Rightarrow\ (\exists Q_d < P_c, P'_c.\ val(d, P) \neq val(d, P'))]$$

In $(Proof)^2$ ist jeder Hauptanfang endlich. Wir können die Aussage also per Induktion über die Mächtigkeit des erzeugten Hauptanfanges zeigen.
Sei zunächst (P_c, P'_c) ein minimales Element von $(Proof)^2$. Da P und P' Zustände sind, sind dann sowohl P als auch P' leer. Dann ist die Aussage $P \neq P'$ falsch, die Implikation also wahr.
Seien nun $P_c, P'_c \in Proof$, so daß $P \neq P'$. Angenommen die Implikation sei bereits bewiesen für $(R_d, R'_d) \in (Proof)^2$ mit $(R_d, R'_d) < (P_c, P'_c)$. Wegen Proposition 7.2 ist $P \cup P'$ kein Zustand. Es gibt also ein $a \in F(P) \cap F(P')$, so daß $val(a, P) \neq val(a, P')$. Es ist $(pr(a, P)_a, pr(a, P')_a) < (P_c, P'_c)$. Nach Induktionsannahme ist also entweder $pr(a, P) = pr(a, P')$, oder es gibt ein $Q_d < pr(a, P)_a, pr(a, P')_a$, so daß $val(d, pr(a, P)) \neq val(d, pr(a, P'))$. ∎

Satz 7.1 *Sei $M = (C, V, E, \vdash)$ eine stabile konkrete Datenstruktur. Das Diagramm $D : Proof^{op} \to DCPO$ sei definiert durch:*

$$\begin{array}{rcl} D(P_c) & := & \{v \in V \mid (c,v) \in E\}_\perp \\ D(P_c \leftarrow Q_d)(x) & := & \begin{cases} val(c,Q) & falls\ x \neq \perp \\ \perp & falls\ x = \perp \end{cases} \end{array}$$

Dann ist die Zustandsmenge $A(M)$ ordnungsisomorph zu $hypD$.

Beweis:

'D ist ein Diagramm': Seien $P_c, Q_d, R_e \in Proof$, so daß $P_c < Q_d < R_e$. Sei $x \in D(R_e)$.

$$\begin{array}{rcl} D(P_c \leftarrow Q_d) \circ D(Q_d \leftarrow R_e)(x) & = & \begin{cases} D(P_c \leftarrow Q_d)(val(d,R)) & falls\ x \neq \perp \\ D(P_c \leftarrow Q_d)(\perp) & falls\ x = \perp \end{cases} \\ & = & \begin{cases} val(c,Q) & falls\ x \neq \perp \\ \perp & falls\ x = \perp \end{cases} \\ & = & \begin{cases} val(c,R) & falls\ x \neq \perp \\ \perp & falls\ x = \perp \end{cases} \\ & = & D(P_c \leftarrow R_e)(x) \end{array}$$

Wir definieren nun die Isomorphismen zwischen $A(M)$ und $hypD$.
$\varphi : A(M) \to hypD$ sei gegeben durch:

$$p_{P_c} \circ \varphi(Z) = \begin{cases} val(c,Z) & falls\ c \in F(Z)\ und\ P \subseteq Z \\ \perp & sonst \end{cases}$$

$\psi : hypD \to A(M)$ sei gegeben durch:

$$\psi((x_{P_c})_{P_c \in Proof}) = \{(c, x_{P_c}) \mid x_{P_c} \neq \perp\}$$

'φ ist wohldefiniert': Seien $(P_c, Q_d) \in <$ und $Z \in A(M)$.
Falls d in Z belegt ist und Q eine Teilmenge von Z ist, so ist

$$D(P_c \leftarrow Q_d) \circ p_{Q_d} \circ \varphi(Z) = D(P_c \leftarrow Q_d)(val(d,Z)) = val(c,Q) = val(c,Z).$$

Weil P_c ein echter Unterbeweis von Q_d ist, ist c in Q belegt, und Q ist eine Teilmenge von P.
Also ist auch $p_{P_c} \circ \varphi(Z) = val(c,Z)$.
Falls nun d in Z nicht belegt ist oder Q keine Teilmenge von P ist, so ist

$$D(P_c \leftarrow Q_d) \circ p_{Q_d} \circ \varphi(Z) = D(P_c \leftarrow Q_d)(\perp) = \perp \leq p_{P_c} \circ \varphi(Z)$$

'ψ ist wohldefiniert': Sei $x = (x_{P_c})_{P_c \in Proof} \in hypD$.

'$\psi(x)$ erfüllt (i)': Seien $(c, x_{P_c}), (c, x_{P'_c}) \in \psi(x)$, das heißt $x_{P_c}, x_{P'_c} \neq \perp$. Angenommen es sei $P_c \neq P'_c$. Nach Lemma 7.1 gibt es einen gemeinsamen echten Unterbeweis Q_d von P_c und P'_c, so daß $val(d,P) \neq val(d,P')$. Es ist $x_{Q_d} \geq D(Q_d \leftarrow P_c)(x_{P_c}) = val(d,P)$. Genauso ist $x_{Q_d} \geq val(d,P')$. Andererseits sind $val(d,P)$ und $val(d,P')$ aber maximale Elemente von $D(Q_d)$, haben also keine gemeinsame obere Schranke. Ein Widerspruch.

'$\psi(x)$ erfüllt (ii)': Sei $(c, x_{P_c}) \in \psi(x)$, das heißt $x_{P_c} \neq \perp$. Wir zeigen, daß P eine Teilmenge von $\psi(x)$ ist. Sei also $(d, v) \in P$. Da P ein Zustand ist, gibt es einen Beweis Q von d, der in P enthalten ist. Es ist $x_{Q_d} \geq D(Q_d \leftarrow P_c)(x_{P_c}) = val(d, P) = v$. Da v maximal in $D(Q_d)$ ist, ist dann $x_{Q_d} = v$. Nach Definition von ψ ist also $(d, v) \in \psi(x)$.

'$\varphi \circ \psi = id_{hypD}$': Sei $x = (x_{P_c})_{P_c \in Proof} \in hypD$, und sei $P_c \in Proof$. Es ist zu zeigen, daß $p_{P_c} \circ \varphi \circ \psi(x) = x_{P_c}$.
Falls $x_{P_c} \neq \perp$, so ist $(c, x_{P_c}) \in \psi(x)$. Wie wir bereits gezeigt haben, ist dann P eine Teilmenge von $\psi(x)$. Also ist $p_{P_c} \circ \varphi \circ \psi(x) = val(c, \psi(x)) = x_{P_c}$.
Falls $x_{Q_c} = \perp$ für alle $Q \in Proof(c)$, so ist $c \notin F(\psi(x))$, also $p_{P_c} \circ \varphi \circ \psi(x) = \perp$.
Falls x_{P_c} gleich $\perp$ ist, es jedoch eine Beweis P' von c gibt, so daß $x_{P'_c} \neq \perp$, so gibt es nach Lemma 7.1 einen gemeinsamen echten Unterbeweis Q_d von P_c und P'_c, so daß $val(d, P) \neq val(d, P')$. Es ist $p_{Q_d} \circ \varphi \circ \psi(x) \geq D(Q_d \leftarrow P'_c) \circ p_{P'_c} \circ \varphi \circ \psi(x) = D(Q_d \leftarrow P'_c)(x_{P'_c}) = val(d, P')$. Wäre $p_{P_c} \circ \varphi \circ \psi(x) \neq \perp$, so wäre $p_{Q_d} \circ \varphi \circ \psi(x) \geq D(Q_d \leftarrow P_c) \circ p_{P_c} \circ \varphi \circ \psi(x) = val(d, P)$. Das steht im Widerspruch dazu, daß $\{val(d, P'), val(d, P)\}$ unbeschränkt ist. Es ist also $p_{P_c} \circ \varphi \circ \psi(x) = \perp$.

'$\psi \circ \varphi = id_{A(M)}$': Sei $Z \in A(M)$. Wir müssen die Mengengleichheit $\psi \circ \varphi(Z) = Z$ zeigen.

'$\subseteq$': Sei $(c, v) \in \psi \circ \varphi(Z)$. Nach Definition von ψ gibt es ein $P_c \in Proof$, so daß $v = p_{P_c} \circ \varphi(Z)$. Wegen $v \neq \perp$ ist dann $c \in F(Z)$ und $p_{P_c} \circ \varphi(Z) = val(c, Z)$, nach Definition von φ. Also ist $(c, v) \in Z$.

'$\supseteq$': Sei $(c, v) \in Z$. Da Z ein Zustand ist, gibt es einen Beweis P von c, der in Z enthalten ist. Nach Definition von φ ist $p_{P_c} \circ \varphi(Z) = v$, und nach Definition von ψ ist dann $(c, v) \in \psi \circ \varphi(Z)$.

■

Die Diagramme die man, wie in Satz 7.1 beschrieben, aus stabilen konkreten Datenstrukturen erhält, haben sehr spezielle Eigenschaften. So sind sämtliche Hauptenden ihrer Indexkategorie endlich, und die verbindenden Morphismen sind konstant auf der Menge der maximalen Elemente des jeweiligen Definitionsbereiches. Wir werden zeigen, daß diese beiden Eigenschaften die zykelfreien, einfachen Diagramme von flachen Bereichen charakterisieren, deren Hyperlimesobjekte isomorph zur Zustandsmenge einer stabilen konkreten Datenstruktur ist.

Definition 7.5 Ein zykelfreies, einfaches Diagramm von flachen Bereichen heiße *Baumdiagramm*, falls es die beiden folgenden Eigenschaften hat:

(1) Jedes Hauptende der Indexkategorie ist endlich.

(2) Für jeden Pfeil $a : i \to j$ der Indexkategorie ist

$$D(a)(x) = \begin{cases} \perp & falls\ x = \perp \\ c & sonst, \end{cases}$$

wobei c ein von $\perp$ verschiedenes Element von $D(j)$ ist.

Eine stabile, konkrete Datenstruktur $(C, V, E, \vdash)$ heiße *normal*, falls sie die folgenden Eigenschaften hat:

(1') Für jede Zelle gibt es genau eine Voraussetzung.

(2') Jede Voraussetzung einer Zelle c ist auch ein Beweis von c.

(3') $V = \bigcup_{c \in C} \{v \mid (c, v) \in E\}$

Bezeichne:

$SCDS$	*die Klasse aller stabilen konkreten Datenstrukturen*
$BAUMDIAGRAMM$	*die Klasse aller Baumdiagramme*

Außerdem bezeichne $\mathcal{D} : SCDS \to BAUMDIAGRAMM$ die Abbildung, die jeder stabilen konkreten Datenstruktur das in Satz 7.1 beschriebene Diagramm zuordnet.

Satz 7.2 *Es gibt eine Abbildung $\mathcal{M} : BAUMDIAGRAMM \to SCDS$, so daß:*

a) Für alle Baumdiagramme D ist $\mathcal{M}(D)$ normal.

b) Für alle normalen stabilen konkreten Datenstrukturen M ist $\mathcal{M}(\mathcal{D}(M)) = M$, bis auf Umbenennung der Zellen.

c) Für alle Baumdiagramme D ist $\mathcal{D}(\mathcal{M}(D)) = D$, bis auf Isomorphie der Indexkategorie.

Beweis: Sei $D : I \to DCPO$ ein Baumdiagramm. Wir definieren $\mathcal{M}(D) = (C, V, E, \vdash)$ durch

$$\begin{array}{rcl} C &=& Ob(I) \\ V &=& \bigcup\limits_{i \in Ob(I)} D(i) \setminus \{\bot\} \\ E &=& \bigcup\limits_{i \in I} (\{i\} \times D(i) \setminus \{\bot\}) \\ X \vdash i &,& \textit{falls } X = \{(j, D(j \leftarrow i)(y)) \mid j > i\}, \textit{ wobei } y \in D(i) \setminus \{\bot\} \end{array}$$

$\mathcal{M}(D)$ ist stabil, denn jede Zelle hat nur eine Belegbarkeitsvoraussetzung.

a) Es ist offensichtlich, daß $\mathcal{M}(D)$ die Eigenschaften (1') und (3') hat. Bleibt zu zeigen, daß jede Voraussetzung einer Zelle von $\mathcal{M}(D)$ auch ein Beweis derselben ist. Sei also i ein Objekt von I. Bezeichne X_i die Menge $\{(j, D(j \leftarrow I)(y) \mid j > i\}$, wobei y ein von $\bot$ verschiedenes Element von $D(i)$ ist. Nach Definition von $\mathcal{M}(D)$ ist X_i die einzige Voraussetzung von i. Zu zeigen ist also, daß X_i ein Beweis von i ist: Falls i ein maximales Objekt von I ist, so ist X_i leer. Da X_i außerdem eine Voraussetzung von I ist, ist also X_i ein Beweis von i. Sei nun i ein beliebiges Objekt von I. Nehmen wir an, für alle Objekte j, die echt größer sind als i, sei X_j ein Beweis von j. Es ist

$$\begin{array}{rcl} X_i &=& \{(j, D(j \leftarrow i)(y)) \mid j > i\} \\ &=& \{(j, D(j \leftarrow i)(y)) \mid j > i\} \cup \bigcup\limits_{j > i} \{(k, D(k \leftarrow j) \circ D(j \leftarrow i)(y)) \mid k > j\} \\ &=& X_i \cup \bigcup\limits_{j > i} X_j \\ &\in& Proof(i) \end{array}$$

b) Sei M eine normale stabile konkrete Datenstruktur. Für jede Zelle c von M gibt es wegen $(1')$ genau eine Belegbarkeitsvoraussetzung, nennen wir sie X_c. Wegen $(2')$ ist X_c ein Beweis von c. Aus $(1')$ wiederum folgt, daß X_c der einzige Beweis von c ist. Durch $c \mapsto X_c$ wird also eine Bijektion φ_M von C_M nach $Proof_M$ definiert. Nun brauchen wir nur noch Definitionen einzusetzen:

$$C_{MDM} = I_{DM} = Proof_M \simeq C_M$$

$$\begin{aligned} V_{MDM} &= \bigcup_{i \in I_{DM}} (\mathcal{D}M)(i) \setminus \{\perp\} \\ &= \bigcup_{P_c \in Proof_M} \{v \in V_M \mid (c, v) \in E_M\}_\perp \setminus \{\perp\} \\ &= \bigcup_{c \in C_M} \{v \in V_M \mid (c, v) \in E_M\} \\ &\overset{(3')}{=} V_M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{MDM} &= \bigcup_{i \in I_{DM}} (\{i\} \times (\mathcal{D}M)(i) \setminus \{\perp\}) \\ &= \bigcup_{P_c \in Proof_M} (\{P_c\} \times \{v \in V_M \mid (c, v) \in E_M\}) \\ &\simeq \bigcup_{c \in C} (\{c\} \times \{v \in V_M \mid (c, v) \in E_M\}) \\ &= E_M \end{aligned}$$

Sei c eine Zelle von M, und bezeichne P den Beweis von c in M. Es ist

$$\begin{aligned} Y \vdash_{MDM} P_c \quad &\Leftrightarrow \quad Y = \{(d, (\mathcal{D}M)(Q_d \leftarrow P_c)(y)) \mid Q_d < P_c\} \\ &\Leftrightarrow \quad Y = \{(d, val(d, P) \mid Q_d < P_c\} \\ &\Leftrightarrow \quad Y = P \end{aligned}$$

P ist aber auch die einzige Voraussetzung von c in M. Es ist also $Y \vdash_{MDM} P_c$, genau dann wenn $Y \vdash c$.

c) Es ist $C_{MD} = Ob(I_D)$. Wir zeigen, daß die im Beweis von b) definierte Bijektion φ_{MD} sogar ein Ordnungsisomorphismus von I_D nach $Proof_{MD}^{op}$ ist. Seien i und j Objekte von I_D. Es ist zu zeigen, daß i echt kleiner ist als j, genau dann wenn j in $\varphi_{MD}(i)$ belegt ist und $\varphi_{MD}(j)$ eine Teilmenge von $\varphi_{MD}(i)$ ist. Man sieht sofort, daß i echt kleiner ist als j, genau dann wenn j in $\varphi_{MD}(i) = \{(k, D(k \leftarrow i)(y)) \mid k > i\}$ belegt ist. Sei nun i echt kleiner als j. Bezeichne y ein Element von $D(i) \setminus \{\perp\}$. Dann ist $D(j \leftarrow i)(y) \in D(j) \setminus \{\perp\}$, und es ist

$$\begin{aligned} \varphi_{MD}(j) &= \{(k, D(k \leftarrow j) \circ D(j \leftarrow i)(y)) \mid k > j\} \\ &= \{(k, D(k \leftarrow i)(y)) \mid k > j\} \\ &\subseteq \varphi_{MD}(i) \end{aligned}$$

Nachdem wir nun festgestellt haben, daß durch die Vorschrift $i \mapsto X_i$ ein Ordnungsisomorphismus von I_D nach $Proof_{MD}^{op}$ gegeben ist, brauchen wir nur noch Definitionen einzusetzen:

$$I_{DMD} = Proof_{MD}^{op} \simeq I_D$$

$$(\mathcal{DM}D)(X_i) = \{v \mid (i, v) \in E_{MD}\}_\perp = \{v \mid v \in D(i) \setminus \{\perp\}\}_\perp = D(i)$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{DM}D)(X_j \leftarrow X_i)(x) &= \begin{cases} \perp & falls\ x = \perp \\ val(j, X_i) & sonst \end{cases} \\ &= \begin{cases} \perp & falls\ x = \perp \\ D(j \leftarrow i)(x) & sonst \end{cases} \\ &= D(j \leftarrow i)(x)\end{aligned}$$

■

Korollar 7.1 *Ein Bereich ist Zustandsmenge einer stabilen, konktreten Datenstruktur, genau dann wenn er Hyperlimesobjekt über einem Baumdiagramm ist.*

Beweis: Sei M eine stabile konkrete Datenstruktur. Das Diagramm $\mathcal{D}(M)$ ist ein Baumdiagramm, und nach Satz 7.1 ist $hyp(\mathcal{D}M)$ isomorph zu $A(M)$. Sei umgekehrt D ein Baumdiagramm. Nach Satz 7.2 c) ist $\mathcal{DM}D = D$. Nach Satz 7.1 ist $A(\mathcal{M}D)$ isomorph zu $hyp(\mathcal{DM}D)$. Also ist $A(\mathcal{M}D)$ isomorph zu $hypD$. ■

Korollar 7.2 *Zu jeder stabilen konkreten Datenstruktur gibt es eine normale stabile konkrete Datenstruktur mit isomorpher Zustandsmenge. Insbesondere gibt es also zu jeder stabilen konkreten Datenstruktur eine wohlfundierte stabile konkrete Datenstruktur mit isomorpher Zustandsmenge.*

Beweis: Sei M eine stabile konkrete Datenstruktur. Nach Satz 7.2 a) ist $\mathcal{MD}M$ normal. Es ist

$$A(\mathcal{MD}M) \stackrel{7.1}{\simeq} hyp(\mathcal{DMD}M) \stackrel{7.2c)}{\simeq} hyp(\mathcal{D}M) \stackrel{7.1}{\simeq} A(M).$$

'Jede normale stabile konkrete Datenstruktur ist wohlfundiert':
Sei $(C, V, E, \vdash)$ eine normale stabile konkrete Datenstruktur. Angenommen es gäbe eine Folge $(X_n, c_n) \in (\mathcal{P}^{fin}(E) \times C)^N$, so daß $X_n \vdash c_n$ und $c_{n+1} \in F(X_n)$ für alle $n \in N$. Wegen $(2')$ wäre X_n ein Beweis von c_n für jedes $n \in N$. Da X_n eine Voraussetzung von c_{n+1} enthält, und es wegen $(1')$ nur eine solche gibt, wäre $X_{n+1} \subseteq X_n$ für jedes $n \in N$. Also wäre X_{n+1} ein echter Unterbeweis von X_n für jedes $n \in N$. In $Proof$ gibt es aber keine unendlichen absteigenden Ketten. Ist nämlich P_c ein echter Unterbeweis von Q_d, so ist einerseits c in Q belegt (nach Definition eines Unterbeweises), und andererseits ist c in P nicht belegt (nach Definition eines Beweises von c). Also ist P eine echte Teilmenge von Q. Da Beweise endliche Mengen sind, kann es also in $Proof$ keine unendlichen absteigenden Ketten geben. ■

Literatur

[BJO] **P.Buneman,A.Jung,A.Ohori:** ***Using Powerdomains to Generalize Relational Databases***, Theotetical Computer Science 1990

[COMP] **G.Gierz,K.H.Hofmann,K.Keimel,J.D.Lawson,M.Mislove,D.Scott:** ***A Compendium of Continuous Lattices***, Springer Verlag 1980

[Cur] **P.-L. Curien:** ***Categorical Combinators, Sequential Algorhithms and Functional Programming***, Pitman 1986

[JLP] **A.Jung,L.Libkin,H.Puhlmann:** ***Decomposition of Domains***, In: Proceedings of the Conference on Mathematical Foundations of Programming Semantics 1991

[Jun] **A.Jung:** ***Cartesian Closed Categories of Domains***, Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt 1988

[ML] **S.MacLane:** ***Categories for the Working Mathematician***, Springer Verlag 1971

[Puh90] **H.Puhlmann:** ***Verallgemeinerung Relationaler Schemata in Datenbanken mit Informationsordnung***, Diplomarbeit, Technische Hochschule Darmstadt 1990

[Puh91] **H.Puhlmann:** ***A Semantics for Generalized Database Relations***, MSc Thesis, Imperial College London 1991

Danksagung

Zum Schluß möchte ich mich bedanken bei meinen Betreuern Dr.Achim Jung und Prof.Klaus Keimel. Bei Achim bedanke ich mich vor allem für das schöne und ergiebige Thema und die vielen Anregungen, die er mir zu meiner Arbeit gegeben hat. Bei Herrn Keimel bedanke ich mich für die Verbesserungsvorschläge zu meinem Skript und für die Zeit, die er sich für meine Betreuung zu den Domains-Seminaren genommen hat. Außerdem bedanke ich mich bei meinem Kommilitonen Olaf Kirch, mit dem ich mich gemeinsam in die Bereichstheorie eingearbeitet habe, für die gute Zusammenarbeit und für seine Hilfe beim Erlernen von TEX.

Hiermit erkläre ich eidesstattlich, daß ich diese Arbeit eigenständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Darmstadt, 13.August 1993