

Diskretisierung und Approximation von Bildern und morphologischen Bildoperatoren

Vom Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Math. Michael Holderbaum
aus Darmstadt

Referent:	Prof. Dr. Klaus Keimel
Korreferent:	Prof. Dr. Thomas Streicher
Tag der Einreichung:	15. Dezember 2006
Tag der mündlichen Prüfung:	12. Januar 2007

Darmstadt 2007

D 17

Zusammenfassung

In der vorliegenden Dissertation werden systematisch verschiedene Aspekte der Diskretisierung und Approximation von Bildern und morphologischen Bildoperatoren untersucht. In der Theorie morphologischer Bildoperatoren, die in der Monographie *Morphological Image Operators* von Henk HEIJMANS umfangreich dargestellt ist, werden binäre Bilder als Teilmengen einer Grundmenge modelliert. Ausgangspunkt ist daher die Diskretisierung dieser Grundmenge, von der angenommen wird, dass sie ein lokalkompakter Hausdorffraum ist. Eine Methode zur Diskretisierung eines solchen Raumes durch lokalendliche geordnete Mengen (die auch als T_0 -Räume betrachtet werden können) wird für geeignete Räume vorgestellt, welche die parakompakten und damit die metrischen Räume einschließen. Dabei approximiert dann das System von Diskretisierungen den Ausgangsraum in dem Sinne, dass dieser ein Retrakt des inversen Limes besagten Systems ist. Aus der genannten Methode wird eine Möglichkeit zur Diskretisierung und Approximation binärer Bilder abgeleitet, die als abgeschlossene Teilmengen der Grundmenge modelliert werden. Dies wiederum eröffnet eine Möglichkeit zur Diskretisierung und Approximation Scott-stetiger Binärbild-Operatoren.

Grauwertbilder werden in der Theorie morphologischer Bildoperatoren als Abbildungen des Grundraums in einen vollständigen Verband von Grauwerten modelliert. Im Falle eines stark zulässigen Grauwert-Verbandes sind Ergebnisse zum Liften von Binärbild-Operatoren auf Grauwertbilder mittels Schwellenwert-Mengen bekannt. Es gibt jedoch kaum Erkenntnisse zu stark zulässige Verbänden selbst. Daher werden sie in der vorliegenden Arbeit genauer beleuchtet, wobei auch eine Charakterisierung für den endlichen Fall vorgestellt wird. Daraus ergibt sich die Vermutung, dass es sich bei stark zulässigen Verbänden beinahe um Ketten handelt. Ferner wird dargelegt, dass der Begriff des „zulässigen Verbandes“ mit dem des „vollständig distributiven Verbandes“ übereinstimmt und dass vollständig distributive Verbände eine geeignetere Voraussetzung darstellen, da sie Erweiterungen der bekannten Ergebnisse gestatten. Anschließend wird mit Hilfe von Schwellenwert-Mengen eine Diskretisierung und Approximation von Grauwertbildern aus derjenigen für Binärbilder hergeleitet. Erneut liefert das eine Möglichkeit zur Diskretisierung und Approximation Scott-stetiger Bildoperatoren – diesmal auf

Grauwertbildern. Zudem wird eine Diskretisierung und Approximation von Grauwertbildern für den Fall vorgestellt, dass der Verband der Grauwerte anstelle des Grundraums diskretisiert wird. Abschließend wird die Möglichkeit betrachtet, Grauwertbilder durch Massenverteilungen zu modellieren. Hierbei werden stetige Bewertungen verwendet, die aus der Bereichstheorie bekannt sind. Es wird aufgezeigt, wie sich eine Diskretisierung und Approximation von stetigen Bewertungen aus derjenigen des Grundraums ableiten lässt.

Abstract

In the present thesis various aspects concerning discretization and approximation of images and morphological image operators are systematically investigated. Binary images in the context of morphological image operators, which is considerably presented in the monograph *Morphological Image Operators* by Henk HEIJMANS, are modelled as subsets of a basic set. Thus the starting point is the discretization of this basic set which will be assumed to be a locally compact Hausdorff space. A method to discretize such a space by locally finite ordered sets (that can also be viewed as T_0 -spaces) is presented for suitable spaces including paracompact thus metric spaces. There the notion of the considered space being approximated by its discretizations is given by the fact that it is a retract of the inverse limit of its system of discretizations. A way to discretize and approximate binary images which are modelled as closed subsets of the basic set is then derived from the mentioned method. That in turn leads to a way to discretize and approximate Scott-continuous image operators for binary images.

Greyscale images in the context of morphological image operators are modelled as mappings from the basic set to a complete lattice of grey-values. In case of a strongly admissible grey-value lattice there are known results about lifting binary image operators to greyscale image operators by means of threshold-sets. However, little is yet known about strongly admissible lattices in general. They are therefore studied more precisely in the present work where in particular a characterization for the finite case is given. This leads to the assumption that these lattices are nearly chains. It is further shown that the terms "admissible lattice" and "completely distributive lattice" agree and that completely distributive lattices are more appropriate as they allow extensions of the known results. Next, threshold-sets are used in this work to derive a discretization and approximation of greyscale images from the already mentioned discretization of binary images. Again a discretization and approximation of Scott-continuous operators can be achieved, this time for greyscale images. Moreover a discretization and approximation of greyscale images is shown in the case that the grey-value lattice is discretized instead of the basic set. Finally, the possibility to model greyscale images by mass distributions is considered. At this, continuous valuations are used that are known from domain theory. It is shown that a discretization and approximation of continuous valuations can

6

be derived from that of the basic set.

Inhaltsverzeichnis

<i>Einleitung</i>	9
1 Approximation	13
1.1 Geordnete Mengen und T_0 -Räume	13
1.2 Approximation von $[0, 1]$ durch endliche T_0 -Räume	15
1.3 Approximation von \mathbb{R}	17
1.4 Approximation lokalkompakter Hausdorffräume	19
1.5 Approximation triangulierbarer Räume	32
1.6 Der Verband $\mathcal{O}(X)$ und die Hit-or-Miss-Topologie	38
1.7 Vier Grundtypen morphologischer Bildoperatoren	44
1.8 Diskretisierung binärer Bilder	51
1.9 Homöomorphie der Räume X_F und $\text{spec } \mathcal{O}(F)$	57
2 Grauwertbilder	65
2.1 Die <i>weit-weit-unter</i> -Relation in vollständig distributiven Verbänden	65
2.2 Liften von Operatoren	75
2.3 Grauwertbilder	83
2.4 Diskretisierung von Grauwertbildern	88
2.5 Diskretisierung von Grauwertbild-Operatoren	92
2.6 Diskretisierung des Grauertraumes	93
3 Bewertungen	97
3.1 Kompakt-saturierte Mengen	98
3.2 Stetige Bewertungen	102
3.3 Diskretisierung von Bewertungen	105
3.4 Vergleich zwischen Bewertungen und Grauwertbildern	110
<i>Literaturverzeichnis</i>	113
<i>Symbolverzeichnis</i>	115
<i>Index</i>	117

Einleitung

Mit seiner Monographie *Morphological Image Operators* [Hei94] liefert Henk HEIJMANS eine umfangreiche Darstellung der Theorie morphologischer Bildoperatoren. Die vorliegende Arbeit nimmt sie zum Ausgangspunkt und legt ihren Fokus auf die Frage nach Diskretisierungen von Bildern und Bildoperatoren. Hierbei ist insbesondere die Diskretisierung von Grauwertbildern und Grauwertbildoperatoren ein Thema, das in [Hei94] nicht untersucht wird.

Vollständige Verbände sind der sprachliche Rahmen, dessen sich HEIJMANS bei seinen Ausführungen in der Regel bedient. Das liegt wesentlich in der Art der Modellierung von Bildern innerhalb der Theorie morphologischer Bildoperatoren begründet, worauf wir in [Abschnitt 1.7](#) genauer eingehen werden. Ein Anliegen des vorliegenden Textes ist es, hier weitere ordnungstheoretische Konzepte einzubringen, um Zusammenhänge differenzierter darzustellen und neue Ergebnisse zu formulieren.

Die Theorie morphologischer Bildoperatoren beginnt mit der Modellierung *binärer Bilder* durch geeignete Teilmengen einer bestimmten Grundmenge. Wir werden bei unserer Suche nach Diskretisierungen daher bei dieser Grundmenge starten, von der wir fordern, dass sie ein lokalkompakter Hausdorffraum ist. Die Diskretisierungsmethode, die wir dann im ersten Kapitel herausarbeiten werden, erfasst zwar nicht alle lokalkompakten Hausdorffräume, aber eine weite Klasse gebräuchlicher Räume zu der unter anderen die metrischen Räume gehören. Im Sinne der Modellierung binärer Bilder ist das ein sinnvolles Vorgehen.

Von KOPPERMAN und WILSON wurde in [KW97] nachgewiesen, dass kompakte Hausdorffräume stets als Hausdorff-Reflexion eines inversen Limes endlicher T_0 -Räume darstellbar sind. Durch ihre Spezialisierungsordnung haben T_0 -Räume einen starken Bezug

zu geordneten Mengen. Unter diesem Blickwinkel werden wir obiges Ergebnis am Beispiel von $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ darstellen und auf ganz \mathbb{R} übertragen. Daraus leiten wir dann eine Methode ab, zu einem geeigneten lokalkompakten Hausdorffraum ein System von Diskretisierungen zu konstruieren, wobei jede Diskretisierung als geordnete Menge oder als T_0 -Raum aufgefasst werden kann. Das System von Diskretisierungen approximiert den Ausgangsraum in dem Sinne, dass dieser ein Retrakt des inversen Limes besagten Systems ist. Eine wesentliche Rolle werden dabei Überdeckungen des Raumes spielen, die eine bestimmte Form *lokaler Endlichkeit* besitzen, da auf diese Weise ein Übergang vom kompakten auf den lokalkompakten Fall möglich wird. Als Anwendung der entwickelten Diskretisierungsmethode betrachten wir die Approximation triangulierbarer Räume.

Im weiteren Umfeld des Artikels [KW97] gibt es verschiedene Arbeiten wie beispielsweise [KKM90, KKM91, KKW01], die sich mit *digitaler Topologie* befassen. Im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen endliche Topologien und *connected ordered topological spaces (COTS)*. In [KTW03] und [KW04] werden inverse Limites endlicher T_0 -Räume näher untersucht. WEBSTER überträgt in [Web97] Ergebnisse aus [KW97] auf stabil kompakte Räume, die später von SMYTH und WEBSTER in [SW02] durch endliche *topologische Graphen* approximiert werden.

Aus der oben angesprochenen Diskretisierung des Grundraums binärer Bilder können wir eine Diskretisierung von Teilmengen dieses Grundraums ableiten, bei der abgeschlossene Teilmengen exakt approximiert werden. Wir haben damit eine Möglichkeit, binäre Bilder zu diskretisieren, sofern wir diese durch die abgeschlossenen Teilmengen des Grundraums modellieren. Das wiederum bildet die Basis für eine Diskretisierung von Scott-stetigen Operatoren auf diesen binären Bildern.

Ferner werden wir im ersten Kapitel vier Grundtypen morphologischer Bildoperatoren kennenlernen, die letztlich Adjungierte sowie Hüllen- und Kern-Operatoren sind. Für die Hit-or-Miss-Topologie, die innerhalb der Theorie morphologischer Bildoperatoren eine Rolle spielt, wird dargelegt, dass sie als Lawson-Topologie aufgefasst werden kann. Schließlich stellen wir eine Verbindung zwischen unserer Diskretisierungsmethode und einer bekannten Dualität zwischen nüchternen Räumen und bestimmten vollständigen Verbänden her.

Die Grauwertbilder stehen im Mittelpunkt der Betrachtungen im zweiten Kapitel; sie werden durch Abbildungen eines Grundraums in einen vollständigen Verband von Grauwerten modelliert. Zunächst beleuchten wir eine Methode HEIJMANS' in [Hei94] genauer,

mit der Operatoren, die auf binären Bildern gegeben sind, auf Grauwertbilder geliftet werden. Diese Methode ist auf den ersten Blick sehr allgemein gehalten. Bei allen interessanten Ergebnissen wird jedoch vorausgesetzt dass die Menge der Grauwerte einen *stark zulässigen* Verband bildet. Obgleich dieser Begriff in [Hei94] eingeführt wird, gibt es dort fast keine Hintergrundinformation dazu. Wir untersuchen den Begriff des stark zulässigen Verbandes daher zu Beginn des zweiten Kapitels näher und geben unter anderem eine Charakterisierung endlicher stark zulässiger Verbände. Insgesamt wird festgestellt, dass der Begriff wohl vorrangig einen beweistechnischen Zweck erfüllt und es neben total geordneten Mengen kaum natürliche Beispiele für stark zulässige Verbände geben wird. Vor diesem Hintergrund erscheint HEIJMANS' abstraktes Vorgehen unnötig aufwendig. Wir werden jedoch ausarbeiten, dass vollständig distributive Verbände eine geeignete Voraussetzung sind, mit der sich nahezu die gleichen Ergebnisse erzielen lassen.

In [Abschnitt 2.4](#) wird dargelegt, wie eine Diskretisierung des Grundraums gemäß [Abschnitt 1.4](#) systematisch auf eine Diskretisierung von Grauwertbildern übertragen werden kann und wie diese Diskretisierungen dann konkret beschaffen sind. Dabei werden sich nach oben halbstetige Abbildungen als geeignetes Modell für Grauwertbilder herausstellen, da sie gewissermaßen das Pendant zu den abgeschlossenen Teilmengen bei binären Bildern sind. Aus der Diskretisierung der Bilder lässt sich dann wieder eine Diskretisierung Scott-stetiger Operatoren ableiten. Den Abschluss des zweiten Kapitels bilden Ergebnisse zur Diskretisierung von Grauwertbildern in der Situation, dass die Menge der Grauwerte im Sinne des ersten Kapitels diskretisiert wird.

Im dritten Kapitel werden Bewertungen als mögliche Alternative bei der Modellierung von Grauwertbildern vorgestellt. Falls nämlich der Grundraum ein Kontinuum wie \mathbb{R}^2 ist, so tritt beim „klassischen“ Modell für Grauwertbilder der Effekt auf, dass einzelne Punkte des Grundraums bei geeignetem Grauwert „sichtbar“ sind, was der Vorstellung widerspricht, dass sie keinerlei Ausdehnung besitzen. Solche Effekte lassen sich mit Bewertungen, die etwas Ähnliches wie Maße sind, umgehen. Wir werden festhalten, dass auf der Ebene der Diskretisierungen klassische Grauwertbilder und Bewertungen in gewissem Sinn als gleichwertig angesehen werden können, nicht jedoch auf der Ebene der „idealen“ Bilder. Schließlich entwickeln wir eine Möglichkeit zur Diskretisierung von Bewertungen, die auf der im ersten Kapitel geschilderten Methode aufbaut. Der Bereich der kompakt-saturierten Teilmengen eines nüchternen Raumes wird dabei ein nützliches Werkzeug sein.

Danke

Ich bedanke mich an dieser Stelle ganz herzlich bei allen, die mich während der Arbeit an meiner Dissertation mit guten Wünschen, Aufmunterungen, Rat und Hilfe unterstützt haben.

Besonders danke ich meinem Betreuer, Herrn Prof. Klaus Keimel, für intensive und ausgiebige Gespräche, aus denen ich zahlreiche Ideen und Anregungen mitgenommen habe. Jederzeit konnte ich mit meinen Fragen auf ihn zukommen, und oft hat er sich dann spontan viel Zeit genommen, um darauf einzugehen. Auch hierfür danke ich ihm sehr.

Meine Eltern und Schwiegereltern haben in den letzten Jahren häufig Unterstützung im privaten Bereich geleistet und mir auf diese Weise wertvolle Zeiträume für die Arbeit an meiner Dissertation geschaffen, wofür ich ihnen ganz herzlich danke.

Bei Alexander Landfester bedanke ich mich für seine Mühe, den vorliegenden Text gründlich im Hinblick auf Orthographie und Stil Korrektur zu lesen.

Größten Dank spreche ich schließlich meiner lieben Frau Barbara aus. Die umfassende Art, wie sie mein Promotionsvorhaben mitträgt, hat die vorliegende Arbeit erst möglich gemacht. Oft hält sie mir den Rücken frei und verschafft mir Freiräume zum Arbeiten, stellt so manchen eigenen Wunsch zurück, teilt Höhen und Tiefen mit mir und motiviert mich stets aufs Neue. Für all das danke ich ihr von Herzen. Zu meiner Motivation tragen zudem unsere Kinder Nils und Ena auf ihre ganz eigene Weise bei, wofür ich auch ihnen danke.

Approximation

1.1 Geordnete Mengen und T_0 -Räume

Das System aller offener Mengen eines topologischen Raumes X bezeichnen wir in der Regel mit $\mathcal{O}(X)$ und nennen es auch die *Topologie* von X . Falls für alle $x, y \in X$ die Implikation

$$x \neq y \Rightarrow \exists U \in \mathcal{O}(X): (x \in U \wedge y \notin U) \vee (y \in U \wedge x \notin U) \quad (T_0)$$

gilt, nennen wir X einen T_0 -Raum bzw. sagen, dass X das *Trennungsaxiom* T_0 erfüllt.

Eine binäre Relation \leq auf einer Menge P nennen wir eine *Ordnung* auf P , wenn sie *reflexiv, antisymmetrisch und transitiv* ist, das heißt, wenn sie für alle $x, y, z \in P$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) $x \leq x$ (Reflexivität)
- (ii) $x \leq y$ und $y \leq x$ impliziert $x = y$ (Antisymmetrie)
- (iii) $x \leq y$ und $y \leq z$ impliziert $x \leq z$ (Transitivität)

In diesem Fall wird P (genauer: (P, \leq)) auch als *geordnete Menge* bezeichnet. Falls je zwei Elemente $x, y \in P$ vergleichbar sind, für sie also $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt, nennen wir P *total geordnete Menge* oder *Kette*. Die geordnete Menge P^{op} (genauer: $(P, \leq)^{\text{op}}$) geht aus P durch „Umkehren“ der Ordnung hervor, das heißt, es ist $P^{\text{op}} = (P, \leq^{\text{op}})$, wobei \leq^{op} für alle $x, y \in P$ durch $x \leq^{\text{op}} y \Leftrightarrow y \leq x$ gegeben ist. Eine Abbildung

$f: P \rightarrow Q$ zwischen geordneten Mengen (P, \leq_P) und (Q, \leq_Q) heißt *monoton* oder *ordnungserhaltend*, wenn für alle $x, y \in P$ die Implikation $x \leq_P y \Rightarrow f(x) \leq_Q f(y)$ erfüllt ist.

Auf jedem topologischen Raum X können wir eine Relation \sqsubseteq einführen, indem wir für alle $x, y \in X$

$$x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \in \overline{\{y\}}$$

setzen. Diese Relation ist offenbar reflexiv und transitiv. Falls X ein T_0 -Raum ist, wird die Relation \sqsubseteq außerdem antisymmetrisch, so dass wir jeden T_0 -Raum vermöge \sqsubseteq als geordnete Menge ansehen können. Die Ordnung \sqsubseteq wird *Spezialisierungsordnung* des T_0 -Raumes X genannt.

Bezüglich der Spezialisierungsordnung \sqsubseteq des T_0 -Raumes X sind die Ordnungsideale $\downarrow x := \{y \in X : y \sqsubseteq x\}$ abgeschlossen, da offenbar $\downarrow x = \overline{\{x\}}$ gilt. Umgekehrt wird für jede geordnete Menge (P, \leq) durch die Subbasis $P \setminus \downarrow p$ ($p \in P$) eine Topologie auf P definiert, welche die größte Topologie auf P ist, deren Spezialisierungsordnung mit der Ordnung \leq übereinstimmt. Diese Topologie heißt *obere Topologie* auf P , und mit ihr ist P offenbar ein T_0 -Raum. (Zur späteren Verwendung halten wir an dieser Stelle fest, dass dual zur oberen Topologie die *untere Topologie* durch die Subbasis $P \setminus \uparrow p$ ($p \in P$) definiert ist.)

Die *Alexandroff-Topologie* auf der geordneten Menge (P, \leq) ist dadurch gegeben, dass *alle* oberen Mengen von P als offen deklariert werden, das heißt, die offenen Mengen sind genau die oberen Mengen. Die Alexandroff-Topologie ist damit die feinste Topologie auf P , deren Spezialisierungsordnung mit \leq übereinstimmt.

Unter den Topologien auf P , die feiner als die obere Topologie sind, ist die Alexandroff-Topologie die einzige, bei welcher der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen wieder offen ist. Denn die Abgeschlossenheit einer Topologie auf P bezüglich beliebiger Durchschnitte ist gleichbedeutend damit, dass jeder Punkt $p \in P$ eine kleinste (offene) Umgebung besitzt; diese wollen wir dann mit $n(p)$ bezeichnen. Für alle $p, q \in P$ gilt nun $q \in n(p) \Leftrightarrow p \in \overline{\{q\}} \Leftrightarrow p \leq q$, woraus sich $n(p) = \uparrow p := \{q \in P : p \leq q\}$ ergibt. Bezüglich der betrachteten Topologie sind also alle oberen Mengen offen, so dass es sich um die Alexandroff-Topologie handelt.

Wir haben gesehen, dass sich die Ordnung jeder geordneten Menge als Spezialisierungsordnung ihrer Alexandroff-Topologie darstellen lässt. Umgekehrt ist jedoch die

Alexandroff-Topologie zur Spezialisierungsordnung eines T_0 -Raumes feiner als dessen ursprüngliche Topologie. Eine Ausnahme stellen natürlich die endlichen T_0 -Räume dar, da ihre Topologien unter der Bildung beliebiger Durchschnitte abgeschlossen sind.

Wir halten abschließend fest, dass kein grundsätzlicher Unterschied zwischen endlichen geordneten Mengen und endlichen T_0 -Räumen besteht. Es handelt sich vielmehr um verschiedene Blickwinkel auf die gleichen strukturellen Zusammenhänge.

1.2 Approximation von $[0, 1]$ durch endliche T_0 -Räume

Von KOPPERMAN und WILSON wurde in [KW97] gezeigt, dass sich kompakte Hausdorffräume durch endliche T_0 -Räume approximieren lassen. Das wollen wir im Folgenden beispielhaft am reellen Einheitsintervall $[0, 1]$ nachvollziehen, wählen jedoch eine andere Darstellung, um stärker zu betonen, dass endliche T_0 -Räume als geordnete Mengen aufgefasst werden können.

Wir betrachten das reelle Einheitsintervall $[0, 1]$ mit seiner üblichen Topologie, also der Spurtopologie von \mathbb{R} . Ferner seien die Mengen F_i für alle $i \in \mathbb{N}$

$$F_i := \left\{ \left(\frac{k-1}{2^i}, \frac{k+1}{2^i} \right) \cap [0, 1] : 0 \leq k \leq 2^i, k \in \mathbb{N} \right\}$$

gegeben. Somit ist F_i jeweils eine endliche Überdeckung von $[0, 1]$ durch offene Intervalle. Die Topologie auf $[0, 1]$, die von F_i als Subbasis erzeugt wird, bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(F_i)$. Dann ist

$$F_i \cup \left\{ \left(\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i} \right) : 0 \leq k < 2^i, k \in \mathbb{N} \right\}$$

eine Basis für $\mathcal{O}(F_i)$. Jeder Punkt $x \in [0, 1]$ besitzt bezüglich dieser Topologie eine kleinste offene Umgebung, die wir $\mathfrak{n}_i(x)$ nennen. Falls ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x = \frac{k}{2^i}$ existiert, ist $\mathfrak{n}_i(x) = \left(\frac{k-1}{2^i}, \frac{k+1}{2^i} \right) \cap [0, 1]$. Andernfalls gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x \in \left(\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i} \right)$, und es ist $\mathfrak{n}_i(x) = \left(\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i} \right)$.

Den Abschluss von $\{x\} \subseteq [0, 1]$ bezüglich $\mathcal{O}(F_i)$ bezeichnen wir mit $\text{cl}_i(x)$. Die Menge $D_i := \{\text{cl}_i(x) : x \in [0, 1]\}$ aller „Punktabschlüsse“ bezüglich $\mathcal{O}(F_i)$ kann für jedes $i \in \mathbb{N}$ jeweils durch die Mengeneinklusion \subseteq geordnet werden.

In D_3 ist beispielsweise $\text{cl}_3(\frac{3}{8}) = \{\frac{3}{8}\}$ und $\text{cl}_3(\frac{7}{16}) = [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$, so dass $\text{cl}_3(\frac{3}{8}) \subseteq \text{cl}_3(\frac{7}{16})$ ist.

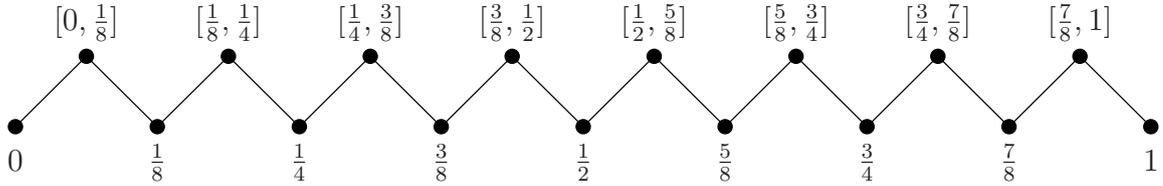


Abbildung 1.1: D_3 als geordnete Menge

Wie im vorangegangenen Abschnitt bereits dargelegt, können wir die geordneten Mengen D_i mittels Alexandroff-Topologie auch als endliche T_0 -Räume auffassen. Aufgrund der Beschaffenheit der Mengen F_i gilt für $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \leq j$ stets $F_i \subseteq \mathcal{O}(F_j)$, also auch $\mathcal{O}(F_i) \subseteq \mathcal{O}(F_j)$. Gilt nun $x \in \text{cl}_j(y)$ für zwei Punkte $x, y \in [0, 1]$, so können wir schließen, dass auch $x \in \text{cl}_i(y)$ gilt. Die Abbildungen

$$p_{ij}: D_j \rightarrow D_i \text{ mit } \text{cl}_j(x) \mapsto \text{cl}_i(x)$$

für $i \leq j$ sind daher wohldefiniert, und offenbar gilt $p_{ii} = \text{id}_{D_i}$ sowie $p_{ki} \circ p_{ij} = p_{kj}$. Ferner sind alle p_{ij} monoton, das heißt, sie sind stetig bezüglich der Alexandroff-Topologie.

Somit sind alle notwendigen Rahmenbedingungen gegeben, um den inversen Limes S des Systems (D_i, p_{ij}) betrachten zu können. Wir erinnern uns, dass eine konkrete Darstellung von S durch

$$S = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} D_n : p_{ij}(x_j) = x_i \text{ für alle } i, j \in \mathbb{N} \text{ mit } i \leq j \right\}$$

gegeben ist. Die Topologie auf S ist durch die auf S eingeschränkte (Produkt-)Topologie von $\prod_{n \in \mathbb{N}} D_n$ gegeben. Die Projektionen $p_i: S \rightarrow D_i$ seien für alle $i \in \mathbb{N}$ bestimmt durch $p_i((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = x_i$. Ferner besitzt S als Produkt geordneter Mengen selbst in natürlicher Weise eine Ordnung: Es sei nämlich $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sqsubseteq (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann, wenn $x_n \subseteq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Wie können wir uns diesen Limes S vorstellen? Er „enthält“ in jedem Fall den Ausgangsraum $[0, 1]$, denn über die Abbildung $\pi: [0, 1] \rightarrow S$ mit $\pi(x) := (\text{cl}_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist $[0, 1]$ in S eingebettet.¹ Betrachten wir einen beliebigen Punkt $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S$, so gilt $s_j \subseteq s_i$ für

¹Hierbei handelt es sich tatsächlich um eine topologische Einbettung. Den Nachweis dessen werden wir in abstrakterem Rahmen in [Abschnitt 1.4](#) führen.

alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \leq j$, da dann $\text{cl}_j(t) \subseteq \text{cl}_i(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt. Die s_n bilden daher ein gefiltertes System abgeschlossener Teilmengen von $[0, 1]$, so dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} s_n$ nicht leer ist und sogar aus nur einem Punkt $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} s_n$ besteht, da der Durchmesser der s_n für wachsendes n gegen Null strebt. Falls y von der Form $y = \frac{m}{2^k}$ für passende $m, k \in \mathbb{N}$ ist, gilt für alle $n \geq k$, dass entweder y linker Randpunkt des Intervalls s_n ist oder y rechter Randpunkt des Intervalls s_n ist oder $\{y\} = s_n$ gilt. Wenn der Punkt y also nicht zu irgend einem Zeitpunkt genau „getroffen“ wird, dann approximieren die s_n ihn entweder von links oder von rechts.

Bezüglich seiner Ordnung können wir uns S daher bestehend aus zwei Schichten vorstellen: Die untere Schicht entspricht $[0, 1]$, denn sie ist $\pi([0, 1])$. Über jedem Punkt der unteren Schicht, der von der Form $\frac{m}{2^k}$ ist, liegen gleichberechtigt zwei weitere Elemente von S . Diese bilden die obere Schicht. Sie entsprechen den Fällen, in denen der jeweils darunter liegende Punkt von links bzw. von rechts approximiert wird.

Wir wollen an dieser Stelle hervorheben, dass es zu jedem $s \in S$ genau ein $s' \in S$ gibt mit $s' \sqsubseteq s$, für das außerdem $s' \in \pi([0, 1])$ gilt. Anders formuliert gibt es zu jedem Punkt in $s \in S$ genau einen Punkt $x_s \in [0, 1]$ derart, dass $\pi(x_s) \in \overline{\{s\}}$ liegt. Dieses Phänomen werden wir später noch wiederholt in ähnlichem Kontext beobachten.

Im obigen Sinn können wir die Räume D_i als Approximation von $[0, 1]$ auffassen bzw. uns vorstellen, dass $[0, 1]$ durch die endlichen Räume D_i approximiert wird. Genauer gesagt approximieren die D_i ihren Limes S , den wir jedoch wieder zu $[0, 1]$ „reduzieren“ können. Wir werden diese Sichtweise in [Abschnitt 1.4](#) konkretisieren.

1.3 Approximation von \mathbb{R}

Nachdem wir im letzten Abschnitt erfolgreich das reelle Einheitsintervall durch endliche Räume approximiert haben, wollen wir den dort verwendeten Ansatz auf ganz \mathbb{R} übertragen. Dieser Schritt ist deshalb von Bedeutung, weil in [\[KW97\]](#) von KOPPERMAN und WILSON, wie bereits erwähnt, bewiesen wurde, dass sich kompakte Hausdorffräume durch endliche T_0 -Räume approximieren lassen. Wir haben bereits auf die Korrespondenz zwischen endlichen T_0 -Räumen und geordneten Mengen hingewiesen, und in der Tat führt der in [\[KW97\]](#) gewählte Weg bezüglich $[0, 1]$ im Kern zu der gleichen Approximation, die wir hier vorgestellt haben – die beteiligten Räume unterscheiden sich nur

in der Darstellung. Zunächst ist jedoch nicht klar, ob sich unser Ansatz derart verallgemeinern lässt, dass auch eine Approximation von Hausdorffräumen gelingt, die nur noch lokalkompakt sind. Wichtige Hinweise dazu soll uns die Approximation von \mathbb{R} liefern.

Die Mengen F_i seien auf \mathbb{R} für alle $i \in \mathbb{N}$ durch

$$F_i := \left\{ \left(\frac{k-1}{2^i}, \frac{k+1}{2^i} \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

gegeben. Die Topologie auf \mathbb{R} , die von F_i als Subbasis erzeugt wird, bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(F_i)$.

Bezüglich $\mathcal{O}(F_i)$ besitzt jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$ eine kleinste offene Umgebung, die wir mit $n_i(x)$ bezeichnen; ferner sei $\text{cl}_i(x)$ der Abschluss von $\{x\}$ bezüglich $\mathcal{O}(F_i)$. Die Mengen D_i seien für alle $i \in \mathbb{N}$ gegeben durch $D_i := \{\text{cl}_i(x) : x \in \mathbb{R}\}$ und jeweils durch Mengeneinklusison geordnet.

Für $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \leq j$ gilt die Implikation $x \in \text{cl}_j(y) \Rightarrow x \in \text{cl}_i(y)$, da $\mathcal{O}(F_i) \subseteq \mathcal{O}(F_j)$ ist. Die Abbildungen

$$p_{ij} : D_j \rightarrow D_i \text{ mit } \text{cl}_j(x) \mapsto \text{cl}_i(x)$$

sind daher wohldefiniert, und offenbar gilt $p_{ii} = \text{id}_{D_i}$ sowie $p_{ki} \circ p_{ij} = p_{kj}$. Außerdem sind alle Abbildungen p_{ij} monoton, also stetig bezüglich der Alexandroff-Topologien auf D_i und D_j .

Somit sind alle notwendigen Rahmenbedingungen gegeben, um den inversen Limes S des Systems (D_i, p_{ij}) betrachten zu können. Wir dürfen o. B. d. A.

$$S = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} D_n : p_{ij}(x_j) = x_i \text{ für alle } i, j \in \mathbb{N} \text{ mit } i \leq j \right\}$$

annehmen. Die Topologie auf S ist durch die auf S eingeschränkte (Produkt-)Topologie von $\prod_{n \in \mathbb{N}} D_n$ gegeben. Ferner seien die Projektionen $p_i : S \rightarrow D_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ bestimmt durch $p_i((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = x_i$. Schließlich ist auf S in natürlicher Weise eine Ordnung \sqsubseteq gegeben, für die $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sqsubseteq (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}. x_n \subseteq y_n$ gilt.

Wie können wir uns diesen Limes S vorstellen? Er „enthält“ in jedem Fall den Ausgangsraum \mathbb{R} , denn über die Abbildung $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S$ mit $\pi(x) := (\text{cl}_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist \mathbb{R} in S eingebettet². Betrachten wir einen beliebigen Punkt $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S$, so gilt $s_j \subseteq s_i$ für

²Wie schon im vorherigen Abschnitt ist auch hier die Einbettung topologisch. Den Nachweis dessen werden wir in abstrakterem Rahmen in [Abschnitt 1.4](#) führen.

alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \leq j$, da dann $\text{cl}_j(t) \subseteq \text{cl}_i(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Die s_n bilden daher ein gefiltertes System abgeschlossener Teilmengen von \mathbb{R} . Beachten wir außerdem, dass alle s_n , die keine einelementigen Teilmengen von \mathbb{R} darstellen, abgeschlossene Intervalle in \mathbb{R} und damit kompakt sind, ist klar, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} s_n$ nicht leer ist. Da ferner der Durchmesser der s_n für wachsendes n gegen Null strebt, gibt es sogar nur einen einzigen Punkt $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} s_n$. Falls y von der Form $y = \frac{m}{2^k}$ für passende $m, k \in \mathbb{N}$ ist, gilt für alle $n \geq k$, dass entweder y linker Randpunkt des Intervalls s_n ist oder y rechter Randpunkt des Intervalls s_n ist oder $\{y\} = s_n$ gilt.

Bezüglich seiner Ordnung können wir uns S daher bestehend aus zwei Schichten vorstellen: Die untere Schicht ist $\pi(\mathbb{R})$ und entspricht \mathbb{R} . Über jedem Punkt der unteren Schicht, der von der Form $\frac{m}{2^k}$ ist, liegen gleichberechtigt zwei weitere Elemente von S . Diese bilden die obere Schicht. Sie entsprechen den Fällen, in denen der jeweils darunter liegende Punkt von links bzw. von rechts approximiert wird.

Welches Fazit ziehen wir aus obigen Betrachtungen? Zunächst fällt die Analogie zur Approximation von $[0, 1]$ ins Auge. Das ist nicht so überraschend, wenn wir uns \mathbb{R} als unendliche Aneinanderreihung von Einheitsintervallen vorstellen. Indem wir diese Einheitsintervalle simultan approximieren, approximieren wir \mathbb{R} . Aber hier zeigt sich auch bereits ein wesentlicher Unterschied zum kompakten Fall: wir müssen auf die Endlichkeit unserer approximierenden Räume D_i verzichten. Das „Aussehen“ ist zwar noch sehr ähnlich – ein „Zickzack“ zwischen zwei Ebenen (vgl. Abbildung 1.1, Seite 16) – aber bei der Approximation von \mathbb{R} haben die D_i unendliche Weite. Dennoch bleibt uns eine gewisse „lokale Endlichkeit“ der Situation auch auf \mathbb{R} erhalten, und zwar dadurch, dass nach wie vor jeder Punkt in jeweils nur endlich vielen offenen Mengen aus $\mathcal{O}(F_i)$ liegt, so dass eine kleinste offene Umgebung $n_i(\cdot)$ existiert. Es wird sich im Folgenden bewähren, dies bei der Approximation lokalkompakter Hausdorffräume beizubehalten.

1.4 Approximation lokalkompakter Hausdorffräume

Ausgehend von unseren Beobachtungen bei der Approximation von \mathbb{R} wollen wir das dort skizzierte Vorgehen nun auf lokalkompakte Hausdorffräume ausdehnen. Dabei orientieren wir uns grundsätzlich am Vorgehen von KOPPERMAN und WILSON in [KW97] und bringen zudem eine Vorstellung von „lokaler Endlichkeit“ ein, um uns wie beim Übergang von $[0, 1]$ nach \mathbb{R} von der Kompaktheit des Raumes zu lösen. Auch wenn die

Überschrift das möglicherweise suggeriert, so werden wir hier kein allgemeines Konzept zur Approximation beliebiger lokalkompakter Hausdorffräume vorstellen. Eine gewisse grundsätzliche Eignung für unsere Approximations-Methode müssen die Räume mitbringen. Wir werden jedoch aufzeigen, dass dies für eine große Klasse „gebräuchlicher“ Räume der Fall ist.

Wir nennen eine Teilmenge $M \subseteq Y$ eines topologischen Raumes Y *relativ kompakt*, wenn ihr Abschluss \overline{M} kompakt in Y ist. Falls Y ein lokalkompakter Hausdorffraum ist, besitzt Y eine Basis aus relativ kompakten, offenen Mengen, denn jede nichtleere offene Menge $U \subseteq Y$ ist Umgebung eines jeden Punktes $u \in U$, der wiederum jeweils eine kompakte Umgebung $K \subseteq U$ besitzt. Der Abschluss $\overline{K^\circ}$ des Inneren von K liegt in K , da Y ein Hausdorffraum ist, und ist somit kompakt, so dass K° relativ kompakt ist.

Unter einer *Überdeckung* eines topologischen Raumes Y verstehen wir eine Familie $(F_i)_{i \in I}$ von Teilmengen von Y , für die $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} F_i$ gilt. Wir nennen die Überdeckung $(F_i)_{i \in I}$ zudem *lokalendlich*, wenn sie die Eigenschaft hat, dass jeder Punkt $y \in Y$ eine Umgebung besitzt, die nur endlich viele der Mengen F_i schneidet. Insbesondere ist dann jeder Punkt der Raumes Y jeweils in nur endlich vielen Mengen F_i enthalten.

1.4.1 Proposition:

- (a) Ist $(F_i)_{i \in I}$ eine lokalendliche Überdeckung von Y und $K \subseteq Y$ kompakt, so schneiden nur endlich viele Elemente der Überdeckung $(F_i)_{i \in I}$ die Menge K .
- (b) Ist der Raum Y lokalkompakt und $(F_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von Y mit der Eigenschaft, dass jede kompakte Teilmenge nur endlich viele der Mengen F_i schneidet, so ist $(F_i)_{i \in I}$ lokalendlich.

Beweis:

- (a) Jeder Punkt $k \in K$ besitzt eine offene Umgebung U_k , die nur endlich viele Elemente von $(F_i)_{i \in I}$ schneidet. Da $(U_k)_{k \in K}$ eine offene Überdeckung von K ist, gibt es endlich viele Punkte k_1, \dots, k_n ($n \in \mathbb{N}$) derart, dass $K \subseteq U_{k_1} \cup \dots \cup U_{k_n}$ gilt. Folglich gibt es nur endlich viele F_i , die eines der U_{k_j} ($1 \leq j \leq n$) schneiden. Jedes Element von $(F_i)_{i \in I}$, das K schneidet, muss aber bereits ein U_{k_j} schneiden.

- (b) Wegen der Lokalkompaktheit besitzt jeder Punkt $y \in Y$ eine kompakte Umgebung, die nach Voraussetzung nur endlich viele F_i schneidet. \square

Ist $(F_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Y , so bezeichnen wir mit $\mathcal{O}((F_i)_{i \in I})$ die von $(F_i)_{i \in I}$ als Subbasis erzeugte Topologie auf Y . Eine Überdeckung $(G_j)_{j \in J}$ heißt *Verfeinerung* einer Überdeckung $(F_i)_{i \in I}$, wenn die Topologie $\mathcal{O}((G_j)_{j \in J})$ feiner als die Topologie $\mathcal{O}((F_i)_{i \in I})$ ist, das heißt, wenn $\mathcal{O}((F_i)_{i \in I}) \subseteq \mathcal{O}((G_j)_{j \in J})$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $(F_i)_{i \in I} \preceq (G_j)_{j \in J}$.

Im Weiteren sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und \mathcal{F} ein System lokalendlicher Überdeckungen von X durch relativ kompakte, offene Mengen, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $\bigcup \mathcal{F}$ ist eine Basis von X . (Ü)
(ii) Zu allen $F, G \in \mathcal{F}$ gibt es ein $H \in \mathcal{F}$ mit $F \preceq H$ und $G \preceq H$.

Bezüglich $\mathcal{O}(F)$ ($F \in \mathcal{F}$) besitzt jeder Punkt $x \in X$ jeweils eine kleinste Umgebung $\mathfrak{n}_F(x)$, nämlich den Durchschnitt über alle $U \in F$ mit $x \in U$; wir bemerken, dass $\mathfrak{n}_F(x)$ relativ kompakt ist. Ferner bezeichnen wir mit $\text{cl}_F(x)$ den Abschluss von $\{x\}$ bezüglich $\mathcal{O}(F)$. Der Einfachheit halber wollen wir die Elemente von $\mathcal{O}(F)$ auch *F-offen* und ihre Komplemente *F-abgeschlossen* nennen.

In Analogie zu den vorherigen Abschnitten könnten wir nun die geordneten Mengen $D_F := (\{\text{cl}_F(x) : x \in X\}, \subseteq)$ zur Approximation von X heranziehen; allerdings ist in der nun abstrakteren Situation nicht mehr so direkt zu übersehen, ob das zielführend ist. Wir wollen daher zunächst die Beziehung zwischen dem Raum X , der Topologie $\mathcal{O}(F)$ und der geordneten Menge D_F besser verstehen und leiten dazu aus der Ordnung auf D_F zunächst eine Relation auf X ab: Für jedes $F \in \mathcal{F}$ führen wir eine Relation \sqsubseteq_F auf X ein, indem wir für alle $x, y \in X$

$$x \sqsubseteq_F y \Leftrightarrow x \in \text{cl}_F(y) \quad (\Leftrightarrow y \in \mathfrak{n}_F(x))$$

setzen. Jede der Relationen \sqsubseteq_F ist reflexiv und transitiv, also eine Prä-Ordnung. Es handelt sich jedoch nicht um eine Ordnung, da aus $\text{cl}_F(x) = \text{cl}_F(y)$ im Allgemeinen nicht $x = y$ folgt. Wir können jedoch alle Punkte $x, y \in X$ identifizieren, für die gleichzeitig $x \sqsubseteq_F y$ und $y \sqsubseteq_F x$ gilt. Konkret bedeutet dies, dass wir für alle $F \in \mathcal{F}$ Relationen \sim_F einführen, die durch

$$x \sim_F y \Leftrightarrow x \sqsubseteq_F y \text{ und } y \sqsubseteq_F x$$

definiert sind. Man sieht sofort, dass jede Relation \sim_F eine Äquivalenzrelation auf X ist und dass $x \sim_F y \Leftrightarrow \text{cl}_F(x) = \text{cl}_F(y)$ gilt. Den Faktorraum X / \sim_F nennen wir X_F , und π_F sei die kanonische Abbildung von X auf X_F , die jedem $x \in X$ seine Äquivalenzklasse $[x]_F$ bezüglich \sim_F zuordnet. Auf X_F ist in natürlicher Weise eine Ordnung gegeben, die wir ebenfalls mit \sqsubseteq_F bezeichnen wollen, und für die

$$[x]_F \sqsubseteq_F [y]_F \Leftrightarrow x \sqsubseteq_F y$$

gilt. Die geordneten Mengen D_F und (X_F, \sqsubseteq_F) sind folglich isomorph.

Darüber hinaus sind D_F und X_F auch homöomorph. Dabei versehen wir X_F natürlich mit der aus \sim_F resultierenden Quotienten-Topologie, und D_F wird mit der Alexandroff-Topologie ausgestattet. Wegen $\text{cl}_F(x) \subseteq \text{cl}_F(y) \Leftrightarrow [x]_F \sqsubseteq_F [y]_F$ entsprechen sich die oberen Mengen von D_F und X_F genau. Und schließlich sind die offenen Mengen bezüglich der Quotienten-Topologie auf X_F gerade die oberen Mengen bezüglich \sqsubseteq_F , denn es gilt $\pi_F^{-1}(\uparrow\{[x]_F\}) = \mathfrak{n}_F(x)$. Wir sehen damit insbesondere, dass \sqsubseteq_F die Spezialisierungsordnung von X_F ist. Weiterhin sehen wir, dass $\uparrow\{[x]_F\}$ offenbar die kleinste offene Umgebung von $[x]_F$ ist, so dass wir diese Menge auch mit $\mathfrak{n}([x]_F)$ bezeichnen; es gilt dann $\mathfrak{n}([x]_F) = \pi_F(\mathfrak{n}_F(x))$.

Der Vollständigkeit halber bemerken wir, dass wir anstelle von D_F auch die Menge $D'_F := \{\mathfrak{n}_F(x) : x \in X\}$ hätten betrachten können. Wegen

$$\text{cl}_F(x) \subseteq \text{cl}_F(y) \Leftrightarrow \mathfrak{n}_F(x) \supseteq \mathfrak{n}_F(y)$$

müssen wir D'_F durch umgekehrte Mengeninklusion \supseteq ordnen, um eine zu D_F (bzw. X_F) isomorphe und homöomorphe geordnete Menge zu erhalten.

Ferner halten wir fest, dass die F -offenen Mengen bezüglich \sim_F saturiert sind. Dabei nennen wir eine Teilmenge $U \subseteq X$ *saturiert* bezüglich \sim_F (oder kurz \sim_F -saturiert), wenn für jeden Punkt $u \in U$ bereits $[u]_F \subseteq U$ gilt. Dies ist zu $\pi_F^{-1}(\pi_F(U)) = U$ äquivalent. Wir sehen damit, dass die offenen Mengen von X_F genau die Bilder aller F -offenen Mengen unter π_F sind. Entsprechendes gilt für die F -abgeschlossenen Mengen bzw. die abgeschlossenen Mengen von X_F , denn auch die F -abgeschlossenen Mengen sind \sim_F -saturiert.

Für $F, G \in \mathcal{F}$ mit $F \preceq G$ gilt die Implikation $x \sim_G y \Rightarrow x \sim_F y$, da $\mathcal{O}(F) \subseteq \mathcal{O}(G)$ ist. Die Abbildungen

$$p_{FG}: X_G \rightarrow X_F \text{ mit } [x]_G \mapsto [x]_F$$

sind daher wohldefiniert, und offenbar gilt $p_{FF} = \text{id}_{X_F}$ sowie $p_{HF} \circ p_{FG} = p_{HG}$. Ferner ist $U \subseteq X_F$ genau dann offen in X_F , wenn $p_{FG}^{-1}(U)$ offen in X_G ist, so dass die Abbildungen p_{FG} insbesondere stetig sind. (Diese Stetigkeit können wir auch als Monotonie verstehen, denn Monotonie ist gleichbedeutend mit Stetigkeit bezüglich der Alexandroff-Topologie.)

Damit sind alle notwendigen Rahmenbedingungen gegeben, um den inversen Limes S des Systems (X_F, p_{FG}) betrachten zu können. Wir dürfen o. B. d. A.

$$S = \left\{ (x_F)_{F \in \mathcal{F}} \in \prod_{F \in \mathcal{F}} X_F : p_{GH}(x_H) = x_G \text{ für alle } G, H \in \mathcal{F} \text{ mit } G \preceq H \right\}$$

annehmen. Die Topologie auf S ist durch die auf S eingeschränkte (Produkt-)Topologie von $\prod_{F \in \mathcal{F}} X_F$ gegeben. Ferner seien die Projektionen $p_G: S \rightarrow X_G$ für alle $G \in \mathcal{F}$ bestimmt durch $p_G((x_F)_{F \in \mathcal{F}}) = x_G$. Schließlich sei die Abbildung $\pi: X \rightarrow S$ definiert durch $\pi(x) := ([x]_F)_{F \in \mathcal{F}}$; aus der universellen Eigenschaft des inversen Limes folgt unmittelbar die Stetigkeit von π .

Den Produktraum $\prod_{F \in \mathcal{F}} X_F$ (bzw. den Limes S) können wir nicht nur als topologischen Raum, sondern auch als geordnete Menge verstehen, da er Produkt geordneter Mengen ist. Die von den Räumen X_F induzierte (komponentenweise) Ordnung auf $\prod_{F \in \mathcal{F}} X_F$ ist gerade die Spezialisierungsordnung von $\prod_{F \in \mathcal{F}} X_F$, wie die nachfolgende [Proposition 1.4.2](#) deutlich macht.

1.4.2 Proposition: *Sind Y_i ($i \in I$) topologische Räume und $X = \prod_{i \in I} Y_i$, so gilt für zwei Punkte $u = (u_i)_{i \in I}$ und $v = (v_i)_{i \in I}$ aus X genau dann $u \in \overline{\{v\}}$, wenn $u_i \in \overline{\{v_i\}}$ für alle $i \in I$ ist.*

Beweis: Es gelte $u \in \overline{\{v\}}$, und $p_j: X \rightarrow Y_j$ sei die Projektion auf die j -te Komponente von X . Dann gilt $u_j = p_j(u) \in p_j(\overline{\{v\}}) = \overline{p_j(v)} = \overline{\{v_j\}}$, da p_j stetig ist.

Ist umgekehrt $u \notin \overline{\{v\}}$, so gibt es endlich viele offene Mengen $U_{i_1} \subseteq Y_{i_1}, \dots, U_{i_k} \subseteq Y_{i_k}$ derart, dass $u \in p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap p_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$, aber $v \notin p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap p_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$. Folglich existiert ein $\ell \leq k$ mit $v \notin p_{i_\ell}^{-1}(U_{i_\ell})$, also $v_{i_\ell} \notin U_{i_\ell}$. Dies zeigt $u_{i_\ell} \notin \overline{\{v_{i_\ell}\}}$. \square

Wir kommen nun zu einem für das weitere Vorgehen entscheidenden Satz, dessen Gültigkeit wir auch schon in den vorherigen Abschnitten beobachten konnten. Zuvor halten wir noch fest, dass der Abschluss \overline{M} einer Teilmenge $M \subseteq X$ gleich dem Durchschnitt aller

F -Abschlüsse von M ist. Dabei sei der F -Abschluss von M der Abschluss von M bezüglich der Topologie $\mathcal{O}(F)$. Wenn wir ihn mit $\text{cl}^F(M)$ bezeichnen – nicht zu verwechseln³ mit $\text{cl}_F(M)$ –, so lautet unsere Behauptung

$$\overline{M} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \text{cl}^F(M).$$

Die Inklusion $\overline{M} \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \text{cl}^F(M)$ ist klar, da $\text{cl}^F(M)$ für jedes F abgeschlossen ist und M enthält. Ist andererseits $x \notin \overline{M}$, existiert eine zu M disjunkte Umgebung U von x . Da $\bigcup \mathcal{F}$ Basis von X ist, gibt es ein $H \in \mathcal{F}$ derart, dass x eine H -offene Umgebung besitzt, die ganz in U liegt. Damit ist jedoch $x \notin \text{cl}^H(M)$.

1.4.3 Satz: Zu jedem $s \in S$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $\pi(x) \in \overline{\{s\}}$.

Beweis: Wir betrachten ein $s = (s_F)_{F \in \mathcal{F}} \in S$. Für ein $y \in X$ gilt $\pi(y) \in \overline{\{s\}}$ genau dann, wenn $[y]_F = p_F(\pi(y)) \in \overline{\{s_F\}}$ für alle $F \in \mathcal{F}$ ist. Dies ist gleichbedeutend mit $s_F \in \mathfrak{n}([y]_F) = \pi_F(\mathfrak{n}_F(y))$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Wir zeigen zunächst, dass diese Bedingung äquivalent zu $y \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{s_F}$ ist.

Es gelte dazu $s_F \in \pi_F(\mathfrak{n}_F(y))$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Wir wählen ein $G \in \mathcal{F}$, und U sei offene Umgebung von y in X . Dann gibt es eine relativ kompakte, offene Umgebung U' von y mit $U' \subseteq U$ sowie ein $H \in \mathcal{F}$ mit $G \preceq H$ und $U' \in \mathcal{O}(H)$. Es folgt $\mathfrak{n}_H(y) \subseteq U$ und daraus $s_H \subseteq U$, denn nach Voraussetzung ist $s_H \subseteq \pi_H^{-1}(\pi_H(\mathfrak{n}_H(y))) = \mathfrak{n}_H(y)$. Wegen $G \preceq H$ ist außerdem $s_H \subseteq s_G$, so dass $U \cap s_G \neq \emptyset$ gilt. Das beweist, dass $y \in \overline{s_F}$ für alle $F \in \mathcal{F}$ ist.

Sei nun umgekehrt $y \in \overline{s_F}$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Dann gilt $\mathfrak{n}_G(y) \cap s_G \neq \emptyset$ für ein beliebig gewähltes $G \in \mathcal{F}$. Folglich ist $s_G \in \pi_G(\mathfrak{n}_G(y))$.

Wir haben insgesamt nachgewiesen, dass $\pi(y) \in \overline{\{s\}}$ äquivalent zu $y \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{s_F}$ ist und wollen daher als nächstes $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{s_F} \neq \emptyset$ einsehen. Dazu betrachten wir ein $G \in \mathcal{F}$. Für jedes $z \in s_G$ gilt $s_G \subseteq \mathfrak{n}_G(z)$. Folglich ist $\overline{s_G}$ kompakt, denn $\mathfrak{n}_G(z)$ ist relativ kompakt. Da $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{s_F}$ Durchschnitt über ein gefiltertes System nichtleerer kompakter Teilmengen eines Hausdorffraumes ist, sehen wir $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{s_F} \neq \emptyset$.

³Im Sinne unserer Definition ist durch die Zuordnung $x \mapsto \text{cl}_F(x)$ für alle $x \in X$ eine Abbildung von X auf D_F gegeben, die wir zugleich als „mengenwertige“ Abbildung von X in die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ von X ansehen können, da die geordnete Menge D_F in der geordneten Menge $(\mathfrak{P}(X), \subseteq)$ enthalten ist. Konsequenterweise ist $\text{cl}_F(M)$ für $M \subseteq X$ eine Teilmenge von D_F bzw. ein Mengensystem auf X . Demgegenüber ist $\text{cl}^F(M)$ stets eine Teilmenge von X .

Es existiert also ein $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{s_F}$. Gäbe es zudem ein $y \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{s_F}$ mit $y \neq x$, so gäbe es zwei disjunkte, relativ kompakte Umgebungen $U, V \subseteq X$ mit $x \in U$ und $y \in V$ sowie ein $H \in \mathcal{F}$ mit $U, V \in \mathcal{O}(H)$. Wegen $x \in \overline{s_H}$ ist $U \cap s_H \neq \emptyset$ und folglich $s_H \subseteq U$, da $U \in \mathcal{O}(H)$ ist. Analog folgern wir $s_H \subseteq V$. Dies steht im Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$, womit wir die Eindeutigkeit von x nachgewiesen haben. \square

1.4.4 Korollar: *Es gibt eine Abbildung $p: S \rightarrow X$, die $\pi(p(s)) \in \overline{\{s\}}$ für alle $s \in S$ erfüllt und die durch*

$$\{p(s)\} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{s_F}$$

bestimmt ist, wobei $s = (s_F)_{F \in \mathcal{F}}$ sei.

Beweis: Nach Satz 1.4.3 können wir mittels einer Abbildung $p: S \rightarrow X$ jedem Punkt $s \in S$ einen Punkt $p(s) \in X$ zuordnen, so dass $\pi(p(s)) \in \overline{\{s\}}$ gilt. Im Beweis von Satz 1.4.3 haben wir $p(s)$ als $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{s_F}$ konstruiert. \square

Unser Überdeckungssystem \mathcal{F} ist so beschaffen, dass es in ihm „beliebig kleine“ offene Mengen gibt. Das folgende Lemma zeigt, dass dies auch für die abgeschlossenen Mengen gilt. Dieses Ergebnis ist wichtig für den Beweis des darauf folgenden zentralen Satzes dieses Abschnitts.

1.4.5 Lemma: *Zu jeder Umgebung U eines Punktes $x \in X$ gibt es ein $F \in \mathcal{F}$ und eine F -abgeschlossene, kompakte Umgebung A von x mit $A \subseteq U$.*

Beweis: Wir können o. B. d. A. voraussetzen, dass $U \in G$ für ein $G \in \mathcal{F}$ gilt und außerdem eine Umgebung $W \in G$ von x mit $\overline{W} \subseteq U$ existiert. Wir betrachten nun die Umgebungen $n_G(y)$ aller Punkte $y \in X$. Da G lokalendlich und \overline{U} kompakt ist, gibt es nur endlich viele Umgebungen $n_G(y_1), \dots, n_G(y_n)$ für die jeweils $U \cap n_G(y_i) \neq \emptyset$ (mit $1 \leq i \leq n$) gilt. Die Vereinigung $K := \overline{n_G(y_1)} \cup \dots \cup \overline{n_G(y_n)}$ der Abschlüsse dieser Umgebungen ist eine kompakte Menge, die U enthält. Ist $y \in X \setminus K$, so gilt $n_G(y) \cap U = \emptyset$, was bedeutet, dass K eine G -abgeschlossene Menge ist.

Zu jedem Punkt $k \in K \setminus \overline{W}$ gibt es eine Überdeckung $F_k \in \mathcal{F}$ mit $n_{F_k}(k) \cap \overline{W} = \emptyset$. Gemeinsam mit U bilden die Umgebungen $n_{F_k}(k)$ eine Überdeckung von K , so dass bereits endlich viele Umgebungen $n_{F_{k_1}}(k_1), \dots, n_{F_{k_m}}(k_m)$ genügen, um $K \setminus U$ zu überdecken. Wir wählen $F \in \mathcal{F}$ so, dass F Verfeinerung von G sowie eines jeden F_{k_j} (mit $1 \leq j \leq m$) ist. Die Menge $V := (X \setminus K) \cup n_{F_{k_1}}(k_1) \cup \dots \cup n_{F_{k_m}}(k_m)$ ist dann F -offen,

liegt disjunkt zu \overline{W} und enthält das Komplement von U . Folglich ist $A := X \setminus V$ eine F -abgeschlossene Umgebung von x , die in U enthalten ist. Schließlich ist A wegen $A \subseteq U \subseteq K$ kompakt. \square

1.4.6 Korollar: *Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine Überdeckung $F \in \mathcal{F}$ derart, dass für alle $G \in \mathcal{F}$ mit $F \preceq G$ die Punktabschlüsse $\text{cl}_G(x)$ kompakt sind.*

Beweis: Nach Lemma 1.4.5 besitzt der Punkt x für ein $F \in \mathcal{F}$ eine F -abgeschlossene, kompakte Umgebung A . Ist $F \preceq G$, so gilt $\text{cl}_G(x) \subseteq \text{cl}_F(x) \subseteq A$, und folglich ist $\text{cl}_G(x)$ kompakt. \square

Tatsächlich haben wir sogar die Situation, dass für alle Punkte $x \in X$ sämtliche Punktabschlüsse $\text{cl}_F(x)$ ($F \in \mathcal{F}$) kompakt sind. Das werden wir in Proposition 3.3.2 beweisen.

Für die Formulierung des nachstehenden Satzes müssen wir noch zwei Begriffe definieren: Unter einer *Retraktion* verstehen wir eine Abbildung $r: P \rightarrow P$ einer geordneten Menge P in sich, die idempotent ($r \circ r = r$) und monoton ist. Ein Paar (p, e) stetiger Abbildungen $p: P \rightarrow Y$ und $e: Y \rightarrow P$, wobei Y ein topologischer Raum sei und P eine geordnete Menge, die zugleich ein topologischer Raum ist, nennen wir ein *Projektions-Einbettungs-Paar*, wenn $p \circ e = \text{id}$ und $e \circ p \sqsubseteq \text{id}$ gilt.

1.4.7 Proposition: *Es sei (p, e) ein Paar stetiger Abbildungen $p: P \rightarrow Y$ und $e: Y \rightarrow P$, wobei Y ein topologischer Raum sei und P eine geordnete Menge, die zugleich ein topologischer Raum ist, für das die Gleichung $p \circ e = \text{id}$ gilt. Dann ist e eine topologische Einbettung von Y in P . Dies trifft insbesondere zu, wenn (p, e) ein Projektions-Einbettungs-Paar ist.*

Beweis: Wegen $p \circ e = \text{id}$ ist e offenbar injektiv. Stetig ist e nach Voraussetzung, so dass wir noch nachweisen müssen, dass e eine offene Abbildung auf ihr Bild ist. Dazu betrachten wir eine offene Menge $U \subseteq Y$ und setzen $O := p^{-1}(U)$; dann ist O offen in P . Für jedes $u \in U$ gilt $p(e(u)) = u \in U$, also $e(u) \in O$, so dass $e(U)$ in der Menge $O \cap e(Y)$ enthalten ist. Umgekehrt ist $p(e(y)) \in U$ für jedes Element $e(y) \in O \cap e(Y)$, und wir sehen insgesamt, dass $e(U) = O \cap e(Y)$ gilt. \square

Der folgende Satz beschreibt nun in allgemeiner Situation das Verhältnis des Raumes X zum inversen Limes S seiner Faktorräume X_F , wie wir es in konkreten Ausprägungen in den beiden vorangegangenen Abschnitten bereits beobachten konnten.

1.4.8 Satz: Die in [Korollar 1.4.4](#) benannte Abbildung p bildet zusammen mit π ein Projektions-Einbettungs-Paar bezüglich der Spezialisierungsordnung auf S . Die Abbildung $r := \pi \circ p$ ist eine stetige Retraktion des Limes S auf seine minimalen Elemente.

Beweis: Für jedes $x \in X$ gilt nach [Korollar 1.4.4](#)

$$\{p(\pi(x))\} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} [x]_F \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \text{cl}_F(x) = \overline{\{x\}} = \{x\},$$

so dass $p \circ \pi = \text{id}$ ist. Ebenso folgt $\pi \circ p \sqsubseteq \text{id}$ unmittelbar [Korollar 1.4.4](#). Die Stetigkeit von π ergibt sich – wie bereits zuvor erwähnt – aus der universellen Eigenschaft des Limes S . Um zu sehen, dass (p, π) ein Projektions-Einbettungs-Paar ist, müssen wir nun also noch die Stetigkeit von p beweisen.

Ist $s \in S$ und V eine offene Umgebung von $p(s)$, so finden wir in ihr nach [Lemma 1.4.5](#) eine abgeschlossene Menge C , für die $p(s) \in C^\circ$ sowie $X \setminus C \in \mathcal{O}(G)$ für ein $G \in \mathcal{F}$ gilt. In C° wiederum gibt es eine Umgebung $W \in \bigcup F$ mit $\overline{W} \in C^\circ$. Folglich finden wir ein $F \in \mathcal{F}$ mit $W \in \mathcal{O}(F)$ sowie $X \setminus C \in \mathcal{O}(F)$. Damit wissen wir $W = \pi_F^{-1}(\pi_F(W))$, und es ist $p(s) \in \pi_F^{-1}(\pi_F(W)) = \pi^{-1}(p_F^{-1}(\pi_F(W)))$, so dass $\pi(p(s))$ in der offenen Menge $U := p_F^{-1}(\pi_F(W))$ liegt. Das bedeutet $U \cap \overline{\{s\}} \neq \emptyset$ so dass wir $s \in U$ folgern können.

Wir zeigen nun $p(U) \subseteq V$; damit ist dann die Stetigkeit von p bewiesen. Betrachten wir ein $u \in U$, so liegt u in der abgeschlossenen Menge $p_F^{-1}(\pi_F(C))$. Wegen $\pi(p(u)) \in \overline{\{u\}}$ ist $\pi(p(u)) \in p_F^{-1}(\pi_F(C))$ und folglich $p(u) \in \pi^{-1}(p_F^{-1}(\pi_F(C))) = C$.

In S sind je zwei verschiedene Elemente von $\pi(X)$ unvergleichbar: Denn falls $\pi(x) \sqsubseteq \pi(y)$ in S für zwei Punkte $x, y \in X$ gilt, so ist $\pi(x) \in \overline{\{\pi(y)\}}$, also $x = p(\pi(x)) \in p(\overline{\{\pi(y)\}})$. Wegen der Stetigkeit von p gilt $p(\overline{\{\pi(y)\}}) \subseteq \overline{\{p(\pi(y))\}} = \{y\}$, womit insgesamt $x = y$ folgt.

Die Elemente von $\pi(X)$ sind genau die minimalen Elemente von S : Denn für alle $s \in S$ gilt offenbar $r(s) \sqsubseteq s$. Gäbe es nun ein $s \in S$ und ein $x \in X$ mit $s \sqsubset \pi(x)$, so wäre $r(s) \sqsubset \pi(x)$, was wegen $r(s) \in \pi(X)$ einen Widerspruch darstellte, da zwei verschiedene Elemente von $\pi(X)$ stets unvergleichbar sind. Folglich sind alle Elemente von $\pi(X)$ minimal in S . Falls $t \in S$ minimal ist, gilt $t = r(t) = \pi(p(t))$, so dass t ein Element von $\pi(X)$ ist.

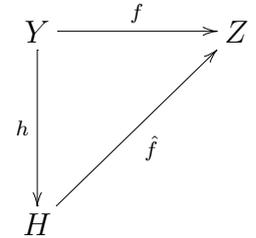
Es ist also r eine Abbildung von S auf dessen minimale Elemente, da $r(S) = \pi(X)$ ist. Des Weiteren ist die Abbildung r idempotent, da $p \circ \pi = \text{id}$ gilt. Schließlich ist r auch monoton: Denn sind $s, t \in S$ mit $s \sqsubseteq t$, so ist $r(s) \sqsubseteq t$ und $r(t) \sqsubseteq t$. Nach [Satz 1.4.3](#) gibt

es aber nur ein $x \in X$ mit $\pi(x) \sqsubseteq t$, so dass $r(s) = r(t)$ folgt. Insgesamt erkennen wir, dass r eine Retraktion ist. Die Stetigkeit von r folgt aus der Stetigkeit von p und π . \square

Der Ausgangsraum X ist also durch π in den inversen Limes seiner Faktorräume X_F eingebettet – den Nachweis, dass es sich dabei tatsächlich um eine topologische Einbettung handelt, waren wir in den vorherigen Abschnitten schuldig geblieben; nun ist das mittels [Proposition 1.4.7](#) unmittelbar einsichtig.

Zudem gewinnen wir X als Retrakt aus dem Limes S zurück, indem wir uns sozusagen nur die minimalen Elemente ansehen. In diesem Sinne approximieren die Faktorräume X_F den Ausgangsraum X . Da sie zudem eine deutlich einfachere Struktur als der Raum X besitzen, wollen wir sie im Folgenden auch als „Diskretisierungen“ von X bezeichnen.

Der nun folgende Satz beleuchtet die Zusammenhänge nochmal von einer anderen, stärker topologisch orientierten Seite, indem er S als Hausdorff-Reflexion des Limes S identifiziert. Dabei verstehen wir unter der *Hausdorff-Reflexion* eines topologischen Raumes Y einen Hausdorffraum H zusammen mit einer stetigen Abbildung $h: Y \rightarrow H$ derart, dass zu jedem weiteren Hausdorffraum Z und jeder stetigen Abbildung $f: Y \rightarrow Z$ genau eine Abbildung $\hat{f}: H \rightarrow Z$ mit $f = \hat{f} \circ h$ existiert. Das nebenstehende Diagramm erläutert diese Situation.



1.4.9 Satz: *Der Raum X ist Hausdorff-Reflexion des inversen Limes S .*

Beweis: Wir wollen zeigen, dass X vermöge der in [Korollar 1.4.4](#) gegebenen Abbildung p Hausdorff-Reflexion von S ist. Nach [Satz 1.4.8](#) ist p eine stetige Abbildung von S in den Hausdorffraum X . Wir betrachten einen weiteren Hausdorffraum Z mit einer stetigen Abbildung $f: S \rightarrow Z$ und wollen sehen, dass es eine durch f eindeutig bestimmte, stetige Abbildung $\hat{f}: X \rightarrow Z$ derart gibt, dass $f = \hat{f} \circ p$ gilt.

Da p surjektiv ist, können wir \hat{f} durch $\hat{f}(p(s)) := f(s)$ definieren. Dabei ist \hat{f} wohldefiniert: Denn für jedes $s \in S$ ist $\pi(p(s)) \in \overline{\{s\}}$ und daher $f(\pi(p(s))) \in f(\overline{\{s\}}) \subseteq \overline{\{f(s)\}} = \overline{\{f(s)\}}$, da Z ein Hausdorffraum ist. Das bedeutet, dass für $s, t \in S$ aus $p(s) = p(t)$ bereits $f(s) = f(t)$ folgt. Wenn wir noch die Stetigkeit von \hat{f} nachweisen, haben wir gezeigt, dass X Hausdorff-Reflexion von S ist.

Wir betrachten also $\hat{f}^{-1}(A)$ für eine abgeschlossene Menge $A \subseteq Z$. Wegen der Surjektivität von p ist $\hat{f}^{-1}(A) = p(f^{-1}(A))$. Wir bemerken, dass $p(M) = \pi^{-1}(M)$ für jede abgeschlossene Menge $M \subseteq S$ gilt: Denn wegen $p \circ \pi = \text{id}$ gilt $\pi^{-1}(M) \subseteq p(M)$; und für jedes $x \in p(M)$ gibt es ein $m \in M$ mit $x = p(m)$, so dass $\pi(x) \in \overline{\{m\}} \subseteq \overline{M} = M$ gilt und folglich $p(M) \subseteq \pi^{-1}(M)$ ist. Wegen der Stetigkeit von f ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen, und damit ist $p(f^{-1}(A)) = \pi^{-1}(f^{-1}(A))$ ebenfalls abgeschlossen, denn auch π ist stetig. Das beweist die Stetigkeit von \hat{f} , so dass X Hausdorff-Reflexion von S ist. \square

Bemerkungen

Bereits zu Beginn dieses Abschnitts hatten wir festgehalten, dass die Sätze 1.4.8 bzw. 1.4.9 nicht auf beliebige lokalkompakte Hausdorffräume anwendbar sind. Sie stehen unter der Prämisse, dass der Raum X ein Überdeckungssystem \mathcal{F} bestehend aus lokalendlichen Überdeckungen von X durch relativ kompakte, offene Mengen besitzt, das die folgenden Bedingungen erfüllt (siehe Seite 21):

- (i) $\bigcup \mathcal{F}$ ist eine Basis von X .
- (ii) Zu allen $F, G \in \mathcal{F}$ gibt es ein $H \in \mathcal{F}$ mit $F \preceq H$ und $G \preceq H$.

Eine große Klasse von Räumen, die ein solches Überdeckungssystem besitzen, stellen die *parakompakten*, lokalkompakten Hausdorffräume dar.

Ein topologischer Raum Y wird *parakompakt* genannt, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von Y eine lokalendliche offene Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$ derart gibt, dass zu jedem $j \in J$ ein $i \in I$ mit $V_j \subseteq U_i$ existiert.

Wir hatten bereits festgestellt, dass jeder lokalkompakte Hausdorffraum eine Basis und damit eine Überdeckung aus relativ kompakten, offenen Mengen besitzt. Wenn also X ein parakompakter, lokalkompakter Hausdorffraum ist, so hat er auch eine lokalendliche Überdeckung aus relativ kompakten, offenen Mengen. Das System \mathcal{F} aller lokalendlicher Überdeckungen von X durch relativ kompakte, offene Mengen ist damit nichtleer und hat ferner die Eigenschaft, dass $\bigcup \mathcal{F}$ eine Basis von X ist. Und auch die zweite an \mathcal{F} zu stellende Bedingung ist erfüllt: Sind nämlich $F, G \in \mathcal{F}$ und $H := F \cup G$, so gilt auch $H \in \mathcal{F}$; und $F \preceq H$ bzw. $G \preceq H$ folgt direkt aus $F \subseteq H$ bzw. $G \subseteq H$.

Ausführliche Betrachtungen zu parakompakten Räumen finden sich beispielsweise in [Kel55, Seiten 156ff] oder [Rin75, Seiten 278ff]. Wir wollen hier festhalten, dass alle metrischen Räume parakompakt sind; vgl. z. B. [Kel55, Seite 160], Korollar 5.35.

Proposition 1.4.1 macht deutlich, dass die Lokalendlichkeit, die wir für Überdeckungen definiert haben, eine relativ starke Form der lokalen Endlichkeit ist. Die nachfolgende **Proposition 1.4.10** zeigt, dass sich diese starke Form der Lokalendlichkeit von den Überdeckungen auf die Ordnungen der Faktorräume X_F vererbt.

1.4.10 Proposition: *Die Spezialisierungsordnung \sqsubseteq_F auf dem Faktorraum X_F ist in dem Sinne lokalendlich, dass jeder Punkt in X_F jeweils mit nur endlich vielen weiteren Punkten vergleichbar ist.*

Beweis: Für zwei Punkte $[x]_F, [y]_F \in X_F$ gilt $[x]_F \sqsubseteq_F [y]_F \Leftrightarrow \mathfrak{n}_F(y) \subseteq \mathfrak{n}_F(x)$. Da $\mathfrak{n}_F(x)$ relativ kompakt ist, gibt es nach **Proposition 1.4.1** nur endlich viele $U \in F$, die mit $\mathfrak{n}_F(x)$ nichtleeren Durchschnitt haben. Da $\mathfrak{n}_F(y)$ Durchschnitt von solchen $U \in F$ ist, die $\mathfrak{n}_F(x)$ nichtleer schneiden, gibt es nur endlich viele Möglichkeiten, ein $\mathfrak{n}_F(y)$ mit $\mathfrak{n}_F(y) \subseteq \mathfrak{n}_F(x)$ zu bilden, so dass nur endlich viele Punkte über $[x]_F$ liegen können.

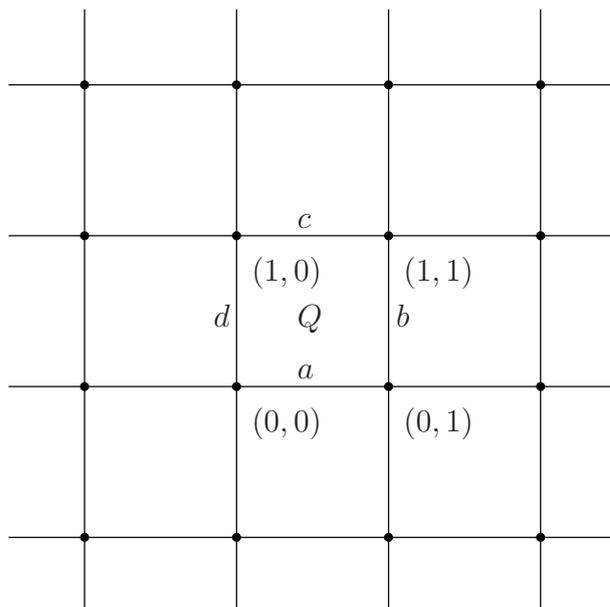
Ist $\mathfrak{n}_F(y) \subseteq \mathfrak{n}_F(x)$, so ist $\mathfrak{n}_F(x)$ Durchschnitt von solchen $U \in F$, die alle den Punkt y enthalten. Davon gibt es aber nur endlich viele, so dass es auch nur endlich viele Möglichkeiten gibt, ein $\mathfrak{n}_F(x)$ mit $\mathfrak{n}_F(y) \subseteq \mathfrak{n}_F(x)$ zu bilden. Folglich können nur endlich viele Punkte unter $[x]_F$ liegen. \square

Beispiel: Approximationen von \mathbb{R}^2

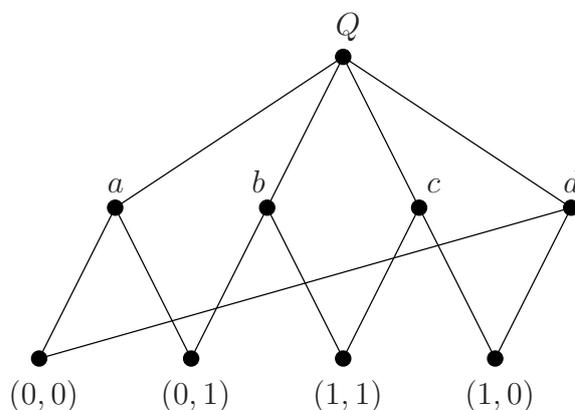
Nach dem gleichen Prinzip, mit dem wir die Überdeckungen des reellen Einheitsintervalls $[0, 1]$ und des Raumes \mathbb{R} gebildet haben, können wir auch den \mathbb{R}^2 überdecken. Dazu legen wir im i -ten ($i \in \mathbb{N}$) Verfeinerungsschritt offene Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{2}{2^i}$ um die Punkte $(\frac{m}{2^i}, \frac{n}{2^i})$, wobei m und n über \mathbb{Z} laufen. Wir setzen also

$$F_i := \left\{ \left(\frac{m-1}{2^i}, \frac{m+1}{2^i} \right) \times \left(\frac{n-1}{2^i}, \frac{n+1}{2^i} \right) : m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann ist jedes F_i eine lokalendliche Überdeckung des \mathbb{R}^2 durch relativ kompakte, offene Mengen.

Abbildung 1.2: Ausschnitt des \mathbb{R}^2

Wir betrachten einen Ausschnitt des \mathbb{R}^2 . Abbildung 1.2 zeigt das ganzzahlige Gitter, um dessen Punkte die offenen Quadrate der Überdeckung F_0 liegen. Bezüglich der Topologie $\mathcal{O}(F_0)$ ist der Punkt $(0,0)$ (unter anderem) im Abschluss der beiden „offenen Intervalle“ a und d , wobei $a := (0,1) \times \{0\}$ ist – b , c und d sind entsprechend definiert. Die vier offenen Intervalle a , b , c und d wiederum liegen im Abschluss des offenen Quadrats $Q := (0,1) \times (0,1)$. Der passende Ausschnitt des Faktorraums $\mathbb{R}_{F_0}^2$ hat als geordnete Menge daher folgendes Aussehen:

Abbildung 1.3: Ausschnitt von $\mathbb{R}_{F_0}^2$ als geordnete Menge

1.5 Approximation triangulierbarer Räume

Als Anwendung der Ergebnisse des vorherigen Abschnitts wollen wir die Approximation triangulierbarer Räume betrachten. Die bisher vorgestellten Beispiele der Approximation von $[0, 1]$ bzw. \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 sind Spezialfälle dieses Vorgehens.

Zunächst müssen wir diverse Begriffe erklären. Dabei beschränken wir uns auf eine knappe Darstellung der für diesen Text relevanten Sachverhalte und verzichten auch auf die Beweise verschiedener Aussagen. Diese Beweise können beispielsweise in [Rin75, §§31, 32] nachgelesen werden, wo auch die nun folgenden Begriffe detaillierter beschrieben sind.

Konvexe Mengen. In Verallgemeinerung des Begriffs der Ebene im \mathbb{R}^3 bezeichnen wir alle affinen Unterräume des \mathbb{R}^n als *Ebenen*; die Ebenen der Dimension $n - 1$ heißen auch *Hyperebenen*. Sind a_1, \dots, a_k paarweise verschiedene Punkte des \mathbb{R}^n , so gibt es eine kleinste Ebene, die sie alle enthält; die k Punkte werden (*linear*) *unabhängig* genannt, wenn diese Ebene Dimension $k - 1$ hat.

Die *Verbindungsstrecke* zweier Punkte $u, v \in \mathbb{R}^n$ besteht genau aus jenen Punkten $x \in \mathbb{R}^n$, die für ein $\tau \in [0, 1]$ die Gleichung $x = \tau u + (1 - \tau)v$ erfüllen. Eine nicht-leere Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten $u, v \in C$ auch ihre Verbindungsstrecke in C liegt, wenn also $\tau u + (1 - \tau)v \in C$ für alle $\tau \in [0, 1]$ gilt. Jede konvexe Menge C ist in genau einer Ebene kleinster Dimension enthalten, die wir die *Trägerebene* von C nennen und mit $\text{Tr}(C)$ bezeichnen. Als Dimension $\dim(C)$ der konvexen Menge C setzen wir die Dimension $\dim(\text{Tr}(C))$ ihrer Trägerebene. Zu jeder Teilmenge M des \mathbb{R}^n gibt es eine kleinste konvexe Menge, die M enthält; sie wird die *konvexe Hülle* von M genannt und mit $\text{conv}(M)$ bezeichnet.

Wenn wir vom Rand bzw. Inneren einer konvexen Menge sprechen, so sind diese Begriffe stets relativ zur Trägerebene gemeint. Besteht also C beispielsweise nur aus einem einzigen Punkt $c \in C \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist das Innere von C gleich $\{c\}$, und der Rand von C ist leer. Eine „schräg“ im \mathbb{R}^3 liegende Kreisscheibe ist dann nicht ihr eigener Rand, sondern ihr Rand ist ein Kreis.

Konvexe Raumstücke. Unter einer *Stützebene* einer konvexen Menge C verstehen wir eine Hyperebene, die Punkte des Randes von C enthält, jedoch keine inneren Punkte von C .

Ein *Halbraum* des \mathbb{R}^n ist eine Teilmenge $H \subseteq \mathbb{R}^n$ deren Punkte $x = (x_1, \dots, x_n) \in H$ genau eine Ungleichung der Form

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \geq \gamma$$

erfüllen. Dabei sind alle λ_i sowie γ reelle Zahlen und $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$. Einen nichtleeren Durchschnitt endlich vieler Halbräume nennen wir ein *konvexes Raumstück*. Offenbar handelt es sich dabei tatsächlich um eine konvexe Menge.

Seiten konvexer Raumstücke. Um zu definieren, was eine „Seite“ eines konvexen Raumstücks sein soll, genügt es, n -dimensionale Raumstücke im \mathbb{R}^n zu betrachten, da wir uns auf die Trägerebene des Raumstücks beschränken können. Ist also P ein konvexes Raumstück der Dimension n im \mathbb{R}^n und S eine Stützebene von P , so ist $P \cap S$ eine abgeschlossene konvexe Menge, deren Dimension kleiner oder gleich $n - 1$ ist. Falls $\dim(P \cap S) = n - 1$ ist, nennen wir $P \cap S$ eine $(n - 1)$ -Seite von P sowie S eine *Seitenebene* von P . Ein nichtleerer endlicher Durchschnitt von $(n - 1)$ -Seiten von P heißt *eigentliche Seite* von P ; insbesondere sind die $(n - 1)$ -Seiten eigentliche Seiten, wohingegen P selbst als *uneigentliche Seite* zu den Seiten von P gezählt wird. Ist Q eine (eigentliche) Seite von P mit $\dim(Q) = k$, wird Q eine k -Seite von P genannt. Die 0-Seiten heißen auch *Ecken*; sie bestehen nur aus einem einzigen Punkt, dem sogenannten *Eckpunkt*. Die 1-Seiten werden auch *Kanten* genannt.

1.5.1 Proposition (vgl. [Rin75, §31], Satz 31.18 und Folgerung 31.23):

- (a) Ist P ein n -dimensionales konvexes Raumstück, so ist jede seiner $(n - 1)$ -Seiten ein konvexes Raumstück der Dimension $n - 1$. Der Rand von P ist gleich der Vereinigung all seiner $(n - 1)$ -Seiten.
- (b) Sind Q_1, \dots, Q_k Seiten eines konvexen Raumstücks, so ist ihr Durchschnitt leer oder eine gemeinsame Seite von Q_1, \dots, Q_k .

Konvexe Zellen, Simplexe. Ein beschränktes konvexes Raumstück heißt *konvexe Zelle*. Jede konvexe Zelle ist kompakt und Ihre Seiten sind wieder konvexe Zellen. Eine (häufig gebrauchte) spezielle Sorte konvexer Zellen sind die sogenannten euklidischen Simplexe: Sind a_1, \dots, a_k linear unabhängige Punkte, so wird $\text{conv}(\{a_1, \dots, a_k\})$ (*euklidisches Simplex*) genannt und mit $[a_1, \dots, a_k]$ bezeichnet.

Euklidische Komplexe. Eine Menge K von konvexen Zellen des \mathbb{R}^n wird *euklidischer Komplex* genannt, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) K ist nichtleer und von höchstens abzählbarer Mächtigkeit.
- (ii) Ist $z \in K$ und s eine Seite von z , so folgt $s \in K$.
- (iii) Der Durchschnitt zweier Zellen von K ist leer oder eine gemeinsame Seite der beiden Zellen.
- (iv) Jeder Punkt einer Zelle von K besitzt eine Umgebung, die nur endlich viele Elemente von K schneidet. (Man sagt auch, K sei *lokalendlich*.)

Sind alle Zellen von K Simplexe, so wird K als *simplizial* bezeichnet.

Euklidische Polyeder. Ein *euklidisches Polyeder* ist die Vereinigung aller Zellen eines euklidischen Komplexes K und wird mit $|K|$ bezeichnet. Man nennt K dann auch eine *Zellenzerlegung* des Polyeders $|K|$. Falls K simplizial ist, heißt K auch *Triangulierung* von $|K|$. Der Begriff der „Zerlegung“ ist deshalb gerechtfertigt, da jeder Punkt aus $|K|$ im Inneren genau einer Zelle von K liegt.

Topologische Polyeder. Unter einem *topologischen Polyeder* verstehen wir einen topologischen Raum Y , der homöomorph zu einem euklidischen Polyeder $|K|$ ist. Ein Homöomorphismus $f: |K| \leftrightarrow Y$ heißt dann *Darstellung* von Y . Für $z \in K$ nennen wir $f(z)$ eine *topologische Zelle* von Y und setzt $\dim(f(z)) = \dim z$; falls K simplizial ist, spricht man stattdessen von einem *topologischen Simplex*. Ferner bezeichnen wir $f(s)$ als *Seite* von $f(z)$, falls s Seite von z ist. Die Menge $f(K)$ heißt *topologischer Zellenkomplex* bzw. *topologischer simplizialer Komplex* und ist eine *Zellenzerlegung* bzw. *Triangulierung* des topologischen Polyeders Y . (Diese Definitionen sind stimmig, weil sich die oben genannten Bedingungen für K auf $f(K)$ übertragen.)

Unterteilungen. Sind K und K' euklidische Komplexe, so nennen wir K' eine *Unterteilung* von K , wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Jede Zelle von K ist Vereinigung von endlich vielen Zellen von K' .
- (ii) Jede Zelle von K' ist Teilmenge einer Zelle von K .

Es ist dann $|K| = |K'|$. Ferner gilt der folgende Satz:

1.5.2 Satz (vgl. [Rin75, §32], Folgerung 32.34): *Jedes euklidische Polyeder besitzt eine simpliziale Unterteilung.*

Das bedeutet, dass ein topologischer Raum genau dann triangulierbar ist, wenn er eine Zellenzerlegung besitzt. Wir wollen daher im Folgenden unter einem *triangulierbaren Raum* einen topologischen Raum verstehen, der eine (nicht notwendig simpliziale) Zellenzerlegung besitzt.

Offene Sternüberdeckung. Ist K ein euklidischer Komplex, so nennen wir die Menge aller Zellen von K , die eine Teilmenge $A \subseteq |K|$ schneiden, den *offenen Stern* $\text{St}(A, K)$ von A bezüglich K . Das Komplement von $|K| \setminus \text{St}(A, K)$ heißt *offene Sternumgebung* von A bezüglich K und wird mit $O(A, K)$ bezeichnet. $O(A, K)$ ist offen in $|K|$ und gleich der Menge aller Punkte von $|K|$, die in einer Zelle von $\text{St}(A, K)$ liegen und gleichzeitig in keiner Zelle von K , die disjunkt zu A ist. Falls A kompakt in $|K|$ ist, so ist $O(A, K)$ dort relativ kompakt.

Abkürzend schreiben wir $\text{St}(x, K)$ für $\text{St}(\{x\}, K)$ und $O(x, K)$ für $O(\{x\}, K)$.

Ist $\{a_1, a_2, \dots\}$ die Menge aller Eckpunkte von K , so ist $\{O(a_1, K), O(a_2, K), \dots\}$ eine offene Überdeckung von $|K|$, die wir die *offene Sternüberdeckung* von $|K|$ bezüglich K nennen. Es handelt sich um eine lokalendliche Überdeckung von $|K|$ durch relativ kompakte, offene Mengen. (Die Lokalendlichkeit folgt unmittelbar aus der Bedingung (iv) für euklidische Komplexe.)

Wir erkennen hier eine wichtige Verbindung zu der Approximationsmethode, die wir im vorangegangenen Abschnitt untersucht haben. Dort wurde ein lokalkompakter Hausdorffraum X durch eine Reihe „diskreter“ Räume approximiert, wobei diese approximierenden Räume mit Hilfe lokalendlicher Überdeckungen von X durch relativ kompakte, offene Mengen konstruiert wurden. Die offene Sternüberdeckung besitzt ebenfalls diese Eigenschaften. Unser Ziel ist es daher, ein euklidisches Polyeder dadurch zu diskretisieren, dass wir es immer „feiner“ unterteilen und die offenen Sternüberdeckungen der Unterteilungen verwenden, um approximierende Räume zu gewinnen. Die Aussagen, wie wir im Folgenden beweisen werden, liefern dazu die Grundlagen.

1.5.3 Proposition: *Für $x \in |K|$ gilt $O(x, K) = \bigcap \{O(a_i, K) : x \in O(a_i, K)\}$.*

Beweis: Sei $y \in O(x, K)$. Dann liegt y in einer Zelle $z \in \text{St}(x, K)$, und für jede Zelle $z' \in K$ gilt $y \in z' \Rightarrow x \in z'$. Ist a_i ein Eckpunkt von K derart, dass x in $O(a_i, K)$ liegt, so liegt x in einer Zelle $s \in \text{St}(a_i, K)$, und für jede Zelle $s' \in K$ gilt $x \in s' \Rightarrow a_i \in s'$. Folglich liegen in der Zelle z die Punkte x, y und a_i , so dass $y \in O(a_i, K)$ ist. Dies zeigt $O(x, K) \subseteq \bigcap \{O(a_i, K) : x \in O(a_i, K)\}$.

Es gibt nur endlich viele Eckpunkte a_{i_1}, \dots, a_{i_k} mit $x \in O(a_{i_j}, K)$ ($1 \leq j \leq k$). Dazu existieren Zellen z_1, \dots, z_k derart, dass jeweils $z_j \in \text{St}(a_{i_j}, K)$ ist, $x \in z_j$ gilt und für jede Zelle $z' \in K$ gilt: $x \in z' \Rightarrow a_{i_j} \in z'$. Damit gilt für jede Zelle aus K , dass sie mit x auch alle Punkte a_{i_j} enthält, und es existiert auch eine solche Zelle s (z. B. $s := z_1$). Ist $y \in \bigcap \{O(a_i, K) : x \in O(a_i, K)\}$, so folgern wir analog, dass eine Zelle $t \in K$ existiert, die alle Punkte a_{i_j} sowie y enthält, und dass jede Zelle aus K mit y auch alle Punkte a_{i_j} enthält.

Wir zeigen nun: Jede Zelle von K , die alle Punkte a_{i_j} enthält, enthält auch x . Dazu enthalte die Zelle q alle Punkte a_{i_j} ; wir nehmen jedoch an, dass $x \notin q$ ist. Dann gibt es eine Zelle $q' \in K$ von minimaler Dimension mit $x \in q'$, und wenigstens ein Eckpunkt p von q' liegt nicht in q . Jede Zelle von K , die x enthält, besitzt q' als Seite, und enthält somit auch p . Folglich ist $x \in O(p, K)$, im Widerspruch zur Konstruktion der a_{i_j} .

Damit ist $x \in t$ und ferner $y \in O(x, K)$, womit wir nachgewiesen haben, dass auch $O(x, K) \supseteq \bigcap \{O(a_i, K) : x \in O(a_i, K)\}$ gilt. \square

1.5.4 Proposition: *Ist K' eine Unterteilung des euklidischen Komplexes K und x ein Punkt in $|K|$, so gilt $O(x, K') \subseteq O(x, K)$.*

Beweis: Zu $y \in O(x, K')$ gibt es eine Zelle $z \in \text{St}(x, K')$ mit $y \in z$, und jede Zelle $z' \in K'$, die y enthält, enthält auch x . Da K' Unterteilung von K ist, liegt z in einer Zelle $\hat{z} \in K$, so dass $y \in \text{St}(x, K)$ ist. Jede Zelle $\hat{s} \in K$, die y enthält, beinhaltet eine Zelle $s \in K'$ mit $y \in s$, so dass $x \in s \subseteq \hat{s}$ gilt. Folglich ist $x \in O(x, K)$. \square

1.5.5 Lemma: *K' sei eine Unterteilung des euklidischen Komplexes K . Ferner sei F die offene Sternüberdeckung von $|K|$ bezüglich K sowie F' die offene Sternüberdeckung von $|K|$ bezüglich K' . Dann ist F' eine Verfeinerung von F (also $F \preceq F'$), das heißt, die von F erzeugte Topologie $\mathcal{O}(F)$ ist enthalten in $\mathcal{O}(F')$.*

Beweis: Die Topologie $\mathcal{O}(F)$ wird von den offenen Sternumgebungen $O(a_i, K)$ um die Eckpunkte $\{a_1, a_2, \dots\}$ von K erzeugt. Es genügt zu zeigen, dass alle $O(a_i, K)$ offen

bezüglich der Topologie $\mathcal{O}(F')$ sind.

Wir wählen einen Eckpunkt a_{i_0} von K und betrachten ein $x \in O(a_{i_0}, K)$. Nach [Proposition 1.5.3](#) ist $O(x, K')$ als endlicher Durchschnitt von Elementen von F' offen bezüglich $\mathcal{O}(F')$. Nach [Proposition 1.5.4](#) gilt $O(x, K') \subseteq O(x, K) \subseteq O(a_{i_0}, K)$, womit wir gezeigt haben, dass $O(a_{i_0}, K)$ offen bezüglich $\mathcal{O}(F')$ ist. \square

Approximation triangulierbarer Räume

Wir betrachten einen triangulierbaren Raum X ; dann gibt es einen euklidischen Komplex K derart, dass X vermöge einer Darstellung $f: |K| \leftrightarrow X$ homöomorph zu dem euklidischen Polyeder $|K|$ ist. Der Raum X ist ein lokalkompakter Hausdorffraum, da er diese Eigenschaften von $|K|$ erbt; $|K|$ ist offenbar ein Hausdorffraum, und jeder Punkt aus $|K|$ besitzt eine kompakte Umgebung, da alle offenen Sternumgebungen relativ kompakt sind.

Unter der *Feinheit* eines euklidischen Komplexes L verstehen wir das Supremum der Durchmesser aller Zellen von L . Nun sei \mathcal{K} eine Familie von Unterteilungen von K , die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es einen Komplex $L \in \mathcal{K}$, dessen Feinheit kleiner als ε ist.
- (ii) Zu je zwei Komplexen $L, M \in \mathcal{K}$ gibt es einen Komplex $N \in \mathcal{K}$, der Unterteilung von L und von M ist.

Ferner bezeichne F_L die offene Sternüberdeckung von $|K|$ bezüglich der Unterteilung L , und es sei $\mathcal{F} := \{F_L : L \in \mathcal{K}\}$.

1.5.6 Satz: \mathcal{F} ist ein System lokalendlicher Überdeckungen von $|K|$ durch relativ kompakte, offene Mengen, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $\bigcup \mathcal{F}$ ist eine Basis von $|K|$.
- (ii) Zu allen $F, G \in \mathcal{F}$ gibt es ein $H \in \mathcal{F}$ mit $F \preceq H$ und $G \preceq H$.

Beweis: Jedes $F_L \in \mathcal{F}$ ist eine offene Sternüberdeckung von $|K|$ und als solche eine lokalendliche Überdeckung von $|K|$ durch relativ kompakte, offene Mengen (siehe oben). Ist $x \in |K|$ und $\varepsilon > 0$, so finden wir eine Unterteilung L von K , deren Feinheit kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Ferner existiert ein Eckpunkt p von L derart, dass $x \in O(p, L)$ gilt. Dann liegt $O(p, L)$ in einer ε -Umgebung von x . Da $O(p, L) \in F_L$ ist, sehen wir, dass $\bigcup \mathcal{F}$ eine

Basis von $|K|$ ist. Die zweite Eigenschaft folgt wegen [Lemma 1.5.5](#) direkt aus der zweiten Bedingung für \mathcal{K} . \square

Mittels der Darstellung f lässt sich \mathcal{F} in ein Überdeckungssystem von X übertragen; dieses erfüllt zusammen mit dem Raum X die Rahmenbedingungen, die wir im vorherigen Abschnitt über die Approximation lokalkompakter Hausdorffräume festgelegt haben. Demnach finden wir durch das dort beschriebene Vorgehen eine Approximation von X , die sich aus seinen Triangulierungen ableitet. Die bereits diskutierten Approximationen von \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 lassen sich ebenfalls in diesem Kontext betrachten.

1.6 Der Verband $\mathcal{O}(X)$ und die Hit-or-Miss-Topologie

Im weiteren Verlauf dieses Textes werden uns wiederholt stetige Verbände begegnen, insbesondere der Verband $\mathcal{O}(X)$ aller offener Mengen eines lokalkompakten Raumes X . Daher wird im Folgenden die Definition stetiger Verbände zusammen mit dem dazu notwendigen Begriffsapparat vorgestellt, und wir werden $\mathcal{O}(X)$ und das System $\mathcal{A}(X)$ aller abgeschlossener Teilmengen von X als stetige Verbände kennenlernen. Die entsprechenden Ergebnisse sind bekannt und finden sich unter anderem in [\[GHK⁺03\]](#).

Im Zusammenhang mit dem Verband $\mathcal{A}(X)$ wird die Hit-or-Miss-Topologie auf $\mathcal{A}(X)$ vorgestellt, die im Umfeld der Theorie morphologischer Bildoperatoren Bedeutung hat. Wir werden sehen, dass sie mit der im Bereich der Ordnungstheorie besser bekannten Lawson-Topologie übereinstimmt. Dem Verfasser ist nicht bekannt, ob dieser Zusammenhang an anderer Stelle schon einmal festgehalten wurde. Weitere Details zur Hit-or-Miss-Topologie finden sich beispielsweise in [\[Mat75\]](#) und [\[Hei94\]](#) oder ergeben sich aus besagtem Zusammenhang.

Wir betrachten eine geordnete Menge (L, \sqsubseteq) . Ein Element $x \in L$ heißt *maximal* (bzw. *minimal*), wenn für alle $y \in L$ aus $x \sqsubseteq y$ (bzw. $y \sqsubseteq x$) stets $x = y$ folgt. Ein Element $x \in L$ wird *größtes Element* (bzw. *kleinstes Element*) von L genannt, wenn für alle $y \in L$ stets $y \sqsubseteq x$ (bzw. $x \sqsubseteq y$) gilt. Besitzt L ein größtes Element, so bezeichnen wir dieses mit dem Symbol \top ; besitzt L ein kleinstes Element, so bezeichnen wir es mit dem Symbol \perp .

Jede Teilmenge $P \subseteq L$ von L ist mit der auf P eingeschränkten Relation \sqsubseteq selbst eine geordnete Menge. Ein Element $x \in L$ heißt *obere Schranke* (bzw. *untere Schranke*) von

P , wenn $p \sqsubseteq x$ (bzw. $x \sqsubseteq p$) für alle $p \in P$ gilt. Die Menge L ist *gerichtet*, wenn je zwei Elemente von L eine obere Schranke besitzen und $L \neq \emptyset$ ist. Falls die Menge aller oberen Schranken (bzw. aller unteren Schranken) von P ein kleinstes (bzw. größtes) Element besitzt, so heißt dieses *Supremum* (bzw. *Infimum*) von P und wird mit $\bigsqcup P$ (bzw. $\bigsqcap P$) bezeichnet. Für zwei Elemente $x, y \in L$ schreiben wir $x \sqcup y$ anstelle von $\bigsqcup\{x, y\}$ bzw. $x \sqcap y$ anstelle von $\bigsqcap\{x, y\}$.

Eine geordnete Menge, in der jede gerichtete Teilmenge ein Supremum besitzt heißt *dcpo*.⁴ In dcpo spielt in der Regel die sogenannte *weit-unter*-Relation eine wichtige Rolle. Dabei gilt für zwei Elemente $x, y \in L$ einer dcpo L , dass x *weit unter* y ist (in Zeichen: $x \ll y$), wenn zu jeder gerichteten Menge $D \subseteq L$ mit $y \sqsubseteq \bigsqcup D$ ein $d \in D$ existiert, so dass $x \sqsubseteq d$ ist. Falls $x \ll x$ gilt, nennen wir x *kompakt*. Ferner ist L *stetig*, wenn es zu jedem Element $x \in L$ eine gerichtete Menge $D \subseteq L$ mit $x = \bigsqcup D$ gibt. Eine stetige dcpo nennen wir einen *Bereich*. Schließlich trägt jede dcpo noch eine „typische“ Topologie, nämlich die sogenannte *Scott-Topologie*. Dabei ist eine Teilmenge $P \subseteq L$ genau dann abgeschlossen bzgl. der Scott-Topologie, wenn sie die beiden folgenden Bedingungen für alle $x, y \in L$ erfüllt:

- (i) $x \in P$ und $y \sqsubseteq x$ impliziert $y \in P$
- (ii) $\bigsqcup D \in P$ gilt für jede gerichtete Teilmenge $D \subseteq P$

Eine geordnete Menge (L, \sqsubseteq) nennen wir einen *Verband*, wenn je zwei Elemente $x, y \in L$ sowohl ein Supremum $x \sqcup y$ als auch ein Infimum $x \sqcap y$ besitzen. Der Verband L wird *vollständig* genannt, wenn jede Teilmenge $P \subseteq L$ sowohl ein Supremum $\bigsqcup M$ als auch ein Infimum $\bigsqcap M$ besitzt. Ein vollständiger Verband L ist damit insbesondere eine dcpo und hat stets ein größtes Element, nämlich $\bigsqcup L = \bigsqcap \emptyset$, sowie ein kleinstes Element, nämlich $\bigsqcap L = \bigsqcup \emptyset$. Ein *stetiger Verband* ist ein vollständiger Verband, der als dcpo stetig ist.

Der Verband $\mathcal{O}(X)$ und seine *weit-unter*-Relation

Die Elemente des Systems $\mathcal{O}(X)$ der offenen Teilmengen eines topologischen Raumes X können durch die Mengeninklusion \subseteq geordnet werden, so dass $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$ eine geordnete

⁴Diese in der Literatur übliche Bezeichnung leitet sich als Abkürzung aus dem englischen Begriff „directed complete partial order“ ab.

Menge ist. Es ist dann $\mathcal{O}(X)$ sogar ein vollständiger Verband, und für $\emptyset \neq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}(X)$ gilt:

$$\bigsqcup\{U: U \in \mathcal{U}\} = \bigcup\{U: U \in \mathcal{U}\} \quad \text{und} \quad \bigsqcap\{U: U \in \mathcal{U}\} = \left(\bigcap\{U: U \in \mathcal{U}\}\right)^\circ$$

Wir betrachten im Folgenden den Verband $\mathcal{O}(X)$ unter der zusätzlichen Annahme, dass X ein *lokalkompakter* topologischer Raum sei.

Zunächst charakterisieren wir die *weit-unter*-Relation. In einem vollständigen Verband (L, \sqsubseteq) gilt $x \ll y$ für zwei Elemente $x, y \in L$ genau dann, wenn es zu jeder Teilmenge $S \subseteq L$ mit $y \sqsubseteq \bigsqcup S$ eine endliche Teilmenge $S' \subseteq S$ mit $x \sqsubseteq \bigsqcup S'$ gibt.⁵ Übertragen wir das auf $\mathcal{O}(X)$ so gilt für zwei offene Menge $U, V \in \mathcal{O}(X)$ genau dann $U \ll V$, wenn jede offene Überdeckung von V eine endliche Teilüberdeckung von U besitzt. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn es „zwischen“ U und V eine kompakte Menge gibt, das heißt, wenn eine kompakte Menge $K \subseteq X$ existiert, für die $U \subseteq K \subseteq V$ gilt. In lokalkompakten Räumen ist das sogar notwendig:

1.6.1 Proposition: *Für einen lokalkompakten Raum X gilt $U \ll V$ in $\mathcal{O}(X)$ genau dann, wenn eine kompakte Menge $K \subseteq X$ mit $U \subseteq K \subseteq V$ existiert.*

Beweis: Gilt $U \subseteq K \subseteq V$ für ein kompaktes K , so ist jede offene Überdeckung \mathcal{W} von V auch eine von K , so dass bereits endlich viele $W_i \in \mathcal{W}$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) genügen, um K und somit U zu überdecken.

Ist umgekehrt $U \ll V$, können wir zu jedem $v \in V$ eine kompakte Umgebung $K_v \subseteq V$ finden, da X lokalkompakt ist. Die Menge $\{K_v^\circ: v \in V\}$ ist eine offene Überdeckung von V , die folglich eine endliche Teilüberdeckung von U besitzen muss, das heißt, es gibt endlich viele Punkte $v_1, \dots, v_n \in V$ derart, dass die Mengen $K_{v_i}^\circ$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) eine Überdeckung von U bilden. Für die kompakte Menge $K := K_{v_1} \cup \dots \cup K_{v_n}$ gilt dann $U \subseteq K \subseteq V$. \square

Stetigkeit von $\mathcal{O}(X)$

Wir zeigen, dass jedes Element $U \in \mathcal{O}(X)$ gerichtetes Supremum aller $V \in \mathcal{O}(X)$ ist, die weit unter U liegen. Das heißt, $\mathcal{O}(X)$ ist ein stetiger Verband.

⁵Für vollständige Verbände ist das äquivalent zu der weiter oben gegebenen Definition mittels gerichteter Mengen. Der Beweis dazu ist nicht schwierig, und wir führen ihn hier nicht aus.

1.6.2 Proposition: *Der Verband $\mathcal{O}(X)$ ist für jeden lokalkompakten Raum X stetig.*

Beweis: Es seien $U_1, U_2, V \in \mathcal{O}(X)$ mit $U_1 \ll V$ und $U_2 \ll V$. Dann gibt es nach [Proposition 1.6.1](#) kompakte Mengen $K_1, K_2 \subseteq X$ mit $U_1 \subseteq K_1 \subseteq V$ und $U_2 \subseteq K_2 \subseteq V$, so dass $U_1 \cup U_2 \ll V$ gilt. Die Menge $\{U \in \mathcal{O}(X) : U \ll V\}$ ist daher gerichtet.

Da X lokalkompakt ist, gibt es ferner zu jedem $v \in V$ eine kompakte Menge $K_v \subseteq X$ mit $K_v \subseteq V$, so dass $V = \bigsqcup \{K_v^\circ : v \in V\}$ ist. Wegen $K_v^\circ \ll V$ für alle $v \in V$, folgt $V = \bigsqcup \{U \in \mathcal{O}(X) : U \ll V\}$. Der Verband $\mathcal{O}(X)$ ist damit stetig. \square

Scott- und Lawson-Topologie auf $\mathcal{O}(X)$

Nach den bisherigen Ergebnissen ist es naheliegend, die Teilmengen von $\mathcal{O}(X)$ zu untersuchen, deren Elemente gerade eine bestimmte kompakte Menge enthalten. Wir werden sehen, dass sie eine Basis für die Scott-Topologie auf $\mathcal{O}(X)$ bilden. Für eine kompakte Menge $K \subseteq X$ setzen wir dazu $\mathcal{U}_K := \{U \in \mathcal{O}(X) : K \subseteq U\}$.

1.6.3 Proposition: *Die Mengen \mathcal{U}_K bilden eine Basis für die Scott-Topologie auf $\mathcal{O}(X)$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass jedes \mathcal{U}_K Scott-offen ist. Offenbar gilt $\mathcal{U}_K = \uparrow \mathcal{U}_K$. Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{O}(X)$ gerichtet mit $\bigsqcup \mathcal{D} = \bigcup \mathcal{D} \in \mathcal{U}_K$. Dann ist \mathcal{D} eine offene Überdeckung von K , so dass es endlich viele Mengen $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}$ gibt, die bereits K überdecken. Weil \mathcal{D} gerichtet ist, besitzen die D_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) eine gemeinsame obere Schranke $\hat{D} \in \mathcal{D}$, so dass $K \subseteq \hat{D}$ und folglich $\hat{D} \in \mathcal{U}_K$ gilt.

Sei nun $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{O}(X)$ Scott-offen und $V \in \mathcal{V}$. Da $\mathcal{O}(X)$ nach [Proposition 1.6.2](#) stetig ist, gibt es eine Menge $V' \in \mathcal{V}$ mit $V' \ll V$. Nach [Proposition 1.6.1](#) gibt es dann eine kompakte Menge $K \subseteq X$ mit $V' \subseteq K \subseteq V$. Ist nun $U \in \mathcal{U}_K$, gilt $V' \subseteq K \subseteq U$, so dass $U \in \mathcal{V}$ aus $\mathcal{V} = \uparrow \mathcal{V}$ folgt. Somit ist $V \in \mathcal{U}_K \subseteq \mathcal{V}$, und die Mengen \mathcal{U}_K bilden eine Basis für die Scott-Topologie auf $\mathcal{O}(X)$. \square

Die *Lawson-Topologie* ist eine weitere Topologie, die auf dcpos häufig eine wichtige Rolle spielt. Es handelt sich dabei um die größte Topologie, die sowohl die Scott-Topologie als auch die *untere Topologie* umfasst. In einem vollständigen Verband L bilden die Scott-offenen Mengen zusammen mit den Mengen der Form $L \setminus \uparrow x$ ($x \in L$) eine Subbasis für die

Lawson-Topologie auf L . Da die Mengen \mathcal{U}_K nach [Proposition 1.6.3](#) eine Basis der Scott-Topologie auf $\mathcal{O}(X)$ darstellen, haben wir mit den Mengen der Form $\mathcal{U}_K \setminus \uparrow V$ ($V \in \mathcal{O}(X)$) eine Subbasis für die Lawson-Topologie auf $\mathcal{O}(X)$ gegeben.

Die Hit-or-Miss-Topologie

Das System aller abgeschlossener Teilmengen eines topologischen Raumes Y bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(Y)$. Durch die Abbildung

$$\mathfrak{C}: \begin{array}{l} \mathfrak{P}(Y) \rightarrow \mathfrak{P}(Y) \\ M \mapsto X \setminus M \end{array} ,$$

die jeder Teilmenge M von Y ihr Komplement $\mathfrak{C}(M) =: M^{\mathfrak{C}}$ zuordnet, ist offenbar eine natürliche Bijektion zwischen den Mengen $\mathcal{O}(Y)$ und $\mathcal{A}(Y)$ gegeben. Diese hat die Eigenschaft, dass sie die Enthaltenseinsbeziehung zwischen Teilmengen von Y umkehrt: Gilt $U \subseteq V$ für zwei Elemente von $\mathcal{O}(Y)$, so ist $U^{\mathfrak{C}} \supseteq V^{\mathfrak{C}}$. Wir ordnen die Elemente von $\mathcal{A}(Y)$ daher durch „umgekehrte Mengeninklusion“, das heißt, die Ordnung \sqsubseteq auf $\mathcal{A}(Y)$ sei für alle $A, B \in \mathcal{A}(Y)$ gegeben durch

$$A \sqsubseteq B \Leftrightarrow A \supseteq B.$$

Wir können die Abbildung \mathfrak{C} damit als monotone, bijektive Abbildung von $\mathcal{O}(Y)$ auf $\mathcal{A}(Y)$ auffassen, deren Umkehrabbildung ebenfalls monoton ist. Die Abbildung \mathfrak{C} ist daher ein Verbandsisomorphismus.

Aus unseren bisherigen Erkenntnissen über den Verband $\mathcal{O}(X)$ eines lokalkompakten Raumes X können wir nunmehr schließen, dass auch $(\mathcal{A}(X), \sqsubseteq)$ ein stetiger Verband ist. Supremum und Infimum auf $\mathcal{A}(X)$ sind für jede Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(X)$ durch

$$\bigsqcup \{B: B \in \mathcal{B}\} = \bigcap \{B: B \in \mathcal{B}\} \quad \text{und} \quad \bigsqcap \{B: B \in \mathcal{B}\} = \overline{\bigcup \{B: B \in \mathcal{B}\}}$$

gegeben. Die *weit-unter*-Relation auf $\mathcal{A}(X)$ können wir wie folgt beschreiben:

1.6.4 Proposition: *Für zwei Mengen $F_1, F_2 \in \mathcal{A}(X)$ gilt $F_1 \ll F_2$ genau dann, wenn es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ gibt, so dass $F_1 \cup K = X$ sowie $F_2 \cap K = \emptyset$ ist.*

Beweis: Da $\mathcal{A}(X)$ und $\mathcal{O}(X)$ isomorphe Verbände sind, gilt $F_1 \ll F_2$ in $\mathcal{A}(X)$ genau dann, wenn $F_1^{\mathcal{C}} \ll F_2^{\mathcal{C}}$ in $\mathcal{O}(X)$ ist. Dies wiederum ist nach [Proposition 1.6.1](#) genau dann der Fall, wenn es eine kompakte Menge $K \subseteq X$ mit $F_2 \subseteq K^{\mathcal{C}} \subseteq F_1$ gibt. Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass $F_1 \cup K = X$ sowie $F_2 \cap K = \emptyset$ ist. \square

Die Scott- bzw. Lawson-Topologie auf $\mathcal{O}(X)$ entsteht aus der auf $\mathcal{O}(X)$ gegebenen Ordnung. Durch die Isomorphie zwischen $\mathcal{O}(X)$ und $\mathcal{A}(X)$ ist deshalb der Isomorphismus \mathcal{C} ein Homöomorphismus der Scott- bzw. Lawson-Topologien auf $\mathcal{O}(X)$ und $\mathcal{A}(X)$. Nach [Proposition 1.6.3](#) bilden die Mengen \mathcal{U}_K eine Basis für die Scott-Topologie auf $\mathcal{O}(X)$. Ihre Bilder unter \mathcal{C} bilden folglich eine Basis für die Scott-Topologie auf $\mathcal{A}(X)$, das heißt, durch die Mengen

$$\mathcal{C}(\mathcal{U}_K) = \{F \in \mathcal{A}(X) : F \cap K = \emptyset\}$$

ist eine Basis der Scott-Topologie auf $\mathcal{A}(X)$ gegeben. Ferner bilden die Mengen der Form $\mathcal{U}_K \setminus \uparrow V$ ($V \in \mathcal{O}(X)$) eine Subbasis für die Lawson-Topologie auf $\mathcal{O}(X)$, so dass wir durch die Mengen

$$\mathcal{C}(\mathcal{U}_K \setminus \uparrow V) = \{F \in \mathcal{A}(X) : F \cap K = \emptyset \text{ und } F \cap V \neq \emptyset\}$$

eine Subbasis der Lawson-Topologie auf $\mathcal{A}(X)$ gegeben haben.

Die Mengen

$$\{F \in \mathcal{A}(X) : F \cap K = \emptyset \text{ und } F \cap V_i \neq \emptyset \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}$$

bilden eine Basis für die Lawson-Topologie auf $\mathcal{A}(X)$, wobei $K \subseteq X$ kompakt ist, $n \in \mathbb{N}$ und alle $V_i \in \mathcal{O}(X)$ sind.

Unsere Sicht auf den Verband $\mathcal{A}(X)$ ist wesentlich geprägt durch unseren ordnungstheoretisch orientierten Blickwinkel. Für Mathematiker anderer Fachrichtungen spielt die Ordnung von $\mathcal{A}(X)$ seltener eine Rolle. So führt MATHERON in [[Mat75](#)] eine Topologie auf der Menge $\mathcal{A}(X)$ ein, die später unter dem Namen *Hit-or-Miss-Topologie* wiederholt Verwendung findet (vgl. beispielsweise [[Hei94](#)]). Dabei betrachtet er $\mathcal{A}(X)$ nur als Menge und schenkt der Verbandsstruktur von $\mathcal{A}(X)$ keine Beachtung.

Zunächst legen wir ein paar Notationen fest. Für eine beliebige Menge $M \subseteq X$ sei

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^M &:= \{F \in \mathcal{A}(X) : F \cap M = \emptyset\} \quad \text{und} \\ \mathcal{F}_M &:= \{F \in \mathcal{A}(X) : F \cap M \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Jede Familie M_i ($i \in I$) von Teilmengen von X erfüllt dann die beiden Gleichungen

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}^{M_i} = \mathcal{F}^{\bigcup_{i \in I} M_i} \quad \text{und} \quad \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_{M_i} = \mathcal{F}_{\bigcup_{i \in I} M_i}.$$

Die *Hit-or-Miss-Topologie* ist nun diejenige Topologie auf $\mathcal{A}(X)$, die von der Subbasis $\{\mathcal{F}^K : K \subseteq X \text{ kompakt}\} \cup \{\mathcal{F}_G : G \in \mathcal{O}(X)\}$ erzeugt wird.

Der Schnitt endlich vieler Mengen dieser Subbasis ist von der Form $\mathcal{F}^{K_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}^{K_m} \cap \mathcal{F}_{G_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{G_n} = \mathcal{F}^K \cap \mathcal{F}_{G_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{G_n}$ mit $K = K_1 \cup \dots \cup K_m$. Die Mengen der Form

$$\mathcal{F}_{G_1, \dots, G_n}^K := \mathcal{F}^K \cap \mathcal{F}_{G_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{G_n}$$

bilden also eine Basis der Hit-or-Miss-Topologie.

Es gilt $\mathcal{F}_{G_1, \dots, G_n}^K = \{F \in \mathcal{A}(X) : F \cap K = \emptyset \text{ und } F \cap G_i \neq \emptyset \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}$, und ein solcher Ausdruck ist uns weiter oben bereits begegnet. Tatsächlich sehen wir, dass die Mengen $\mathcal{F}_{G_1, \dots, G_n}^K$ eine Basis der Lawson-Topologie auf $\mathcal{A}(X)$ bilden, so dass die Hit-or-Miss-Topologie auf $\mathcal{A}(X)$ und die Lawson-Topologie auf $\mathcal{A}(X)$ identisch sind.

Der folgende wichtige Satz über die Hit-or-Miss-Topologie folgt nun leicht aus entsprechenden Erkenntnissen über die Lawson-Topologie:

1.6.5 Satz: *Der Raum $\mathcal{A}(X)$ versehen mit der Hit-or-Miss-Topologie ist ein kompakter Hausdorffraum.*

Beweis: Im Licht der vorangestellten Überlegungen ist diese Aussage trivial, wenn man weiß, dass die Lawson-Topologie jeden stetigen Verband zu einem kompakten Hausdorffraum macht (vgl. [GHK⁺03], Korollar III-1.11, Seite 215). \square

1.7 Vier Grundtypen morphologischer Bildoperatoren

In diesem Abschnitt werden vier grundlegende Typen morphologischer Bildoperatoren vorgestellt und mit möglicherweise bekannteren mathematischen Konzepten in Zusammenhang gebracht. Zudem werden schlaglichtartig Ideen aus der Theorie morphologischer Bildoperatoren teilweise exemplarisch beleuchtet. Zugleich beschränken wir uns auf solche Begriffe und Eigenschaften, die für das Verständnis des weiteren Textes hilfreich sind. Für genauere Informationen zu den genannten Typen von Operatoren wie

beispielsweise solchen über ihren Bedeutungshintergrund innerhalb der Theorie morphologischer Bildoperatoren sei auf die Monographie *Morphological Image Operators* von Henk HEIJMANS [Hei94] verwiesen, in der auch die folgenden Ergebnisse zu finden sind. Zur Thematik der Adjunktionen kann zudem in [GHK⁺03] nachgelesen werden.

Die Theorie morphologischer Bildoperatoren ist in ihrem Ursprung so etwas wie eine mengenbasierte Theorie zur (digitalen) Bildverarbeitung. Ausgangspunkt ist die Betrachtung *binärer Bilder*, wobei ein binäres Bild als Teilmenge $M \subseteq E$ einer Grundmenge E modelliert wird. Dabei beschreibt die Menge M den Vordergrund des Bildes, während ihr Komplement $E \setminus M$ den Hintergrund darstellt. Wir können uns ein solches binäres Bild beispielsweise als „Schwarz-Weiß-Bild“ vorstellen, das tatsächlich nur die beiden Helligkeitsstufen „Schwarz“ und „Weiß“ besitzt, jedoch keine Abstufungen dazwischen.

Ein *morphologischer Bildoperator* φ ordnet nun einem binären Bild $M \in \mathfrak{P}(E)$ ein binäres Bild $\varphi(M) \in \mathfrak{P}(E)$ zu, indem mit M und gegebenenfalls weiteren Teilmengen von E Mengenoperationen wie Durchschnitt, Vereinigung und Komplementbildung durchgeführt werden.

Diese Vorstellung von morphologischen Bildoperatoren wollen wir an einem konkreten Beispiel nachvollziehen. Dazu betrachten wir den Grundraum $E = \mathbb{R}^2$. Zu einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ und einem Vektor $h \in \mathbb{R}^2$ definieren wir die Verschiebung der Menge M entlang des Vektors h als

$$M_h := \{m + h : m \in M\}.$$

Ferner sind für zwei Teilmengen $A, M \subseteq \mathbb{R}^2$ die *Minkowski-Summe* bzw. *-Differenz* wie folgt definiert:

$$M \oplus A := \bigcup_{a \in A} M_a \quad \text{bzw.} \quad M \ominus A := \bigcap_{a \in A} M_{-a}.$$

Nun gehen wir davon aus, dass die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ein fest gewähltes *strukturierendes Element* sei, mit dessen Hilfe wir die beiden morphologischen Bildoperatoren $\delta_A : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$ und $\varepsilon_A : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$ für alle $M \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$ durch

$$\delta_A(M) := M \oplus A \quad \text{und} \quad \varepsilon_A(M) := M \ominus A$$

definieren. Damit haben wir gleich zwei gebräuchliche Operatoren kennengelernt.

Der Operator δ_A ist gewissermaßen der Prototyp einer *Dilatation*. Wenn wir uns für A beispielsweise eine kleine Kreisscheibe um den Ursprung $0 \in \mathbb{R}^2$ vorstellen und für M eine Dreiecksfläche im \mathbb{R}^2 , so ist $\delta_A(M)$ eine „Dreiecksfläche“ mit abgerundeten Ecken, die M mittig enthält, denn es ist $\delta_A(M) = \bigcup_{m \in M} A_m$. Analog dazu ist ε_A der Prototyp einer *Erosion*. Es gilt nämlich $\varepsilon_A(M) = \{h \in \mathbb{R}^2 : A_h \subseteq M\}$, so dass von der Dreiecksfläche M nur diejenigen Punkte h übrig bleiben, um die herum die kleine Kreisscheibe A_h immer noch in M zu liegen kommt; die übrigen Punkte werden durch ε_A „abgetragen“.

Wir halten außerdem fest, dass die beiden Operatoren δ_A und ε_A monoton auf der geordneten Menge $(\mathfrak{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ sind; das folgt direkt aus der Definition der Minkowski-Summe bzw. -Differenz. Ferner kann man leicht nachrechnen, dass

$$\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) \oplus A = \bigcup_{i \in I} (M_i \oplus A) \quad \text{und} \quad \left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) \ominus A = \bigcap_{i \in I} (M_i \ominus A)$$

für jedes Mengensystem $(M_i)_{i \in I}$ gilt, so dass δ_A beliebige Vereinigungen und ε_A beliebige Durchschnitte erhält.

Wir kommen in Kürze auf diese Eigenschaften zurück; zunächst jedoch ein paar allgemeine Bemerkungen. Wir haben bislang keine präzise Definition des Begriffs „morphologischer Bildoperator“ gegeben, und auch in der Literatur findet sich keine solche Definition. Die oben vorgestellte Idee, die hinter diesem Begriff steht, besitzt einfach zu viele verschiedene Aspekte, als dass sich diese in einer übergreifenden Definition vereinigen ließen, die zugleich Grundlage für interessante Ergebnisse sein soll. Schon die Vorstellung von einem binären Bild kann je nach Anwendungshintergrund recht unterschiedlich sein: In unserem Beispiel haben wir den \mathbb{R}^2 als Grundraum gewählt, und verwenden zur Definition der Operatoren δ_A und ε_A unter anderem seine Eigenschaft, ein Vektorraum zu sein. Als Bilder haben wir alle Teilmengen zugelassen; in vielen Fällen ist es aber nicht nur technisch sinnvoll, sich beispielsweise auf abgeschlossene Teilmengen zu beschränken, sondern auch inhaltlich, da es der Intuition zuwider läuft, eine abgeschlossene Kreisscheibe im \mathbb{R}^2 von der entsprechenden offenen Kreisscheibe „optisch“ unterscheiden zu wollen. Aus ähnlichen Gründen könnte die Betrachtung regulär abgeschlossener⁶ Mengen von Interesse sein. Andererseits braucht der Grundraum E weder ein Vektorraum, noch ein topologischer Raum zu sein, und eventuell ist er auch nur endlich. In jedem Fall werden

⁶Eine Teilmenge $M \subseteq Y$ eines topologischen Raumes Y heißt *regulär abgeschlossen*, wenn $M = \overline{M^\circ}$ ist.

die Möglichkeiten sinnvoller Konstruktionen für morphologische Bildoperatoren vom jeweiligen Modell binärer Bilder entscheidend mitbestimmt.

Das Thema erhält weitere Facetten, wenn wir nicht nur binäre Bilder, sondern auch *Grauwertbilder* betrachten wollen. Das Modell für binäre Bilder auf der Grundmenge $E = \mathbb{R}^2$ lässt sich beispielsweise leicht zu einem Modell für Grauwertbilder erweitern, indem wir ein Grauwertbild durch eine Funktion von \mathbb{R}^2 in $[0, 1]$ modellieren. Ein binäres Bild $M \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$ wird in diesem Modell durch seine charakteristische Funktion

$$\chi_M: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dargestellt; außer den Helligkeitsstufen „Schwarz“ und „Weiß“ (dargestellt durch die Randpunkte von $[0, 1]$) sind nun auch Zwischenwerte möglich. Unsere „Bilder“ sind hier also Abbildungen, und wir haben die „klassischen“ Mengenoperationen nicht mehr zur Verfügung. Die Situation ist dennoch ähnlich, denn wenn wir die Grauwertbilder als Erweiterung der binären Bilder verstehen wollen, ist es naheliegend, die Abbildungen in $(\mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1])$ mittels punktweiser Ordnung als geordnete Menge zu verstehen, da dann $M \subseteq M' \Leftrightarrow \chi_M \leq \chi_{M'}$ für alle Teilmengen $M, M' \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt. Ferner sind auf $(\mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1])$ Suprema und Infima beliebiger Familien von Abbildungen punktweise gegeben und entsprechen vermöge charakteristischer Funktionen der Vereinigung und dem Durchschnitt von Teilmengen in \mathbb{R}^2 .

Dem Ordnungstheoretiker kommen hier sogleich vollständige Verbände in den Sinn, und tatsächlich haben sich diese als Sprachrahmen bewährt, der eine einheitliche Formulierung verschiedener Fragestellungen und abstrakterer Ergebnisse zu morphologischen Bildoperatoren gestattet. Die „Bilder“ sind in diesem Rahmen einfach Elemente eines vollständigen Verbandes S , und morphologische Bildoperatoren sind Abbildungen von S in einen weiteren Verband von Bildern T , die „sinnvolle“ Eigenschaften haben, wobei sich hier die geschilderte Vielseitigkeit unterschiedlicher Aspekte widerspiegelt.

Kommen wir zurück zu den Operatoren δ_A und ε_A aus unserem Beispiel. Wir hatten festgehalten, dass δ_A beliebige Vereinigungen und ε_A beliebige Durchschnitte erhält. Im Rahmen der vollständigen Verbände werden diese Eigenschaften zur Definition von Dilatationen und Erosionen herangezogen. Eine *Dilatation* ist dann eine Abbildung zwischen zwei vollständigen Verbänden, die beliebige Suprema erhält, und eine *Erosion* ist eine Abbildung zwischen zwei vollständigen Verbänden, die beliebige Infima erhält.

Dilatationen und Erosionen stehen damit in einem interessanten ordnungstheoretischen Zusammenhang, denn sie stellen jeweils einen Teil einer Adjunktion dar, was wir im Folgenden genauer beleuchten wollen.

Dilatationen, Erosionen und Adjunktionen

Es seien S und T geordnete Mengen sowie $g: S \rightarrow T$ und $d: T \rightarrow S$ Abbildungen zwischen diesen Mengen. Das Abbildung-Paar (g, d) wird *Adjunktion* zwischen S und T genannt, wenn für alle $s \in S$ und alle $t \in T$ die Äquivalenz

$$t \sqsubseteq_T g(s) \Leftrightarrow d(t) \sqsubseteq_S s$$

erfüllt ist. Die Abbildung g heißt dann auch *obere Adjungierte* von d , und umgekehrt heißt d auch *untere Adjungierte* von g .

Adjunktionen haben zahlreiche interessante Eigenschaften, von denen wir hier aber nur ein paar wenige benennen wollen, die wir im Weiteren verwenden werden.

1.7.1 Proposition: *Eine Adjunktion (g, d) zwischen zwei geordneten Mengen S und T hat folgende Eigenschaften:*

- (a) Die Abbildungen g und d sind monoton.
- (b) $\text{id}_T \sqsubseteq (g \circ d)$ und $(d \circ g) \sqsubseteq \text{id}_S$
- (c) $d \circ g \circ d = d$ und $g \circ d \circ g = g$
- (d) Besitzt $A \subseteq S$ ein Infimum $\sqcap A$, so besitzt auch $g(A)$ ein Infimum, nämlich $\sqcap g(A) = g(\sqcap A)$.
- (e) Besitzt $A \subseteq T$ ein Supremum $\sqcup A$, so besitzt auch $d(A)$ ein Supremum, nämlich $\sqcup d(A) = d(\sqcup A)$.
- (f) Jede der Abbildungen g und d ist eindeutig durch die jeweils andere bestimmt, denn es gilt

$$d(t) = \min g^{-1}(\uparrow t) \quad \text{und} \quad g(s) = \max d^{-1}(\downarrow s).$$

Beweis:

- (a) Ist $x \sqsubseteq y$ in S , so gilt sicherlich $g(x) \sqsubseteq g(y)$, woraus $d(g(y)) \sqsubseteq x \sqsubseteq y$, also $g(x) \sqsubseteq g(y)$ folgt. Analog zeigt man die Monotonie von d .

- (b) Wegen $d(t) \sqsubseteq d(t)$ für $t \in T$ ist $t \sqsubseteq g(d(t))$, also $\text{id}_T \sqsubseteq g \circ d$, und $d \circ g \sqsubseteq \text{id}_S$ zeigt man analog.
- (c) Wegen der Monotonie von d und $\text{id}_T \sqsubseteq g \circ d$ ist $d \sqsubseteq d \circ g \circ d$, und wegen $d \circ g \sqsubseteq \text{id}_S$ ist $d \circ g \circ d \sqsubseteq d$, also insgesamt $d \circ g \circ d = d$. Entsprechend zeigt man $g \circ d \circ g = g$.
- (d) Wegen der Monotonie von g ist $g(\bigsqcap A)$ untere Schranke von $g(A)$. Ist $b \in T$ ebenfalls untere Schranke von $g(A)$, so gilt $d(b) \sqsubseteq a$ für alle $a \in A$, also $d(b) \sqsubseteq \bigsqcap A$, woraus $b \sqsubseteq g(\bigsqcap A)$ folgt.
- (e) Der Beweis verläuft analog zu (d).
- (f) Für $t \in T$ ist $d(t) \sqsubseteq d(t)$ und daher $t \sqsubseteq g(d(t))$, so dass $d(t) \in g^{-1}(\uparrow t)$ gilt. Ferner gilt $t \sqsubseteq g(s)$ und damit $d(t) \sqsubseteq s$ für jedes $s \in g^{-1}(\uparrow t)$. Das beweist die erste Gleichung, und die zweite lässt sich analog dazu zeigen. \square

Wir sehen damit, dass im Fall vollständiger Verbände für jede Adjunktion (g, d) die Abbildung g eine Erosion ist und die Abbildung d eine Dilatation. Ferner sind die beiden ersten Eigenschaften in [Proposition 1.7.1](#) charakteristisch für Adjunktionen, wie die folgende Proposition zeigt.

1.7.2 Proposition: *Es seien S und T geordnete Mengen sowie $g: S \rightarrow T$ und $d: T \rightarrow S$ monotone Abbildungen zwischen diesen Mengen, welche die beiden Ungleichungen $\text{id}_T \sqsubseteq (g \circ d)$ und $(d \circ g) \sqsubseteq \text{id}_S$ erfüllen. Dann ist (g, d) eine Adjunktion zwischen S und T .*

Beweis: Wir betrachten ein $s \in S$ und ein $t \in T$. Aus der Ungleichung $t \sqsubseteq g(s)$ folgt dann $d(t) \sqsubseteq d(g(s)) \sqsubseteq s$ wegen $(d \circ g) \sqsubseteq \text{id}_S$ und der Monotonie von d . Umgekehrt folgt aus der Ungleichung $d(t) \sqsubseteq s$ wegen $\text{id}_T \sqsubseteq (g \circ d)$ und der Monotonie von g die Ungleichung $t \sqsubseteq g(d(t)) \sqsubseteq g(s)$. \square

In [Proposition 1.7.1](#) haben wir gesehen, dass eine obere Adjungierte beliebige Infima erhält. Die folgende Proposition zeigt, dass eine Abbildung zwischen vollständigen Verbänden, die alle Infima erhält, bereits eine obere Adjungierte ist. Die duale Aussage gilt ebenso.

1.7.3 Proposition: *Es seien S und T vollständige Verbände sowie $g: S \rightarrow T$ und $d: T \rightarrow S$ Abbildungen zwischen diesen Mengen.*

(a) Falls g beliebige Infima erhält, so hat g eine untere Adjungierte d_g , die für alle $t \in T$ durch

$$d_g(t) := \prod g^{-1}(\uparrow t)$$

bestimmt ist.

(b) Falls d beliebige Suprema erhält, so hat d eine obere Adjungierte g_d , die für alle $s \in S$ durch

$$g_d(s) := \bigsqcup d^{-1}(\downarrow s)$$

bestimmt ist.

Beweis: Wir führen nur den Beweis der ersten Aussage aus, da sich die zweite dual dazu zeigen lässt.

Für jedes $s \in S$ gilt $d_g(g(s)) = \prod g^{-1}(\uparrow g(s)) \sqsubseteq s$, was $d_g \circ g \sqsubseteq \text{id}_S$ beweist. Für alle $t \in T$ gilt $g(d_g(t)) = g(\prod g^{-1}(\uparrow t)) = \prod g(g^{-1}(\uparrow t)) \supseteq t$, was $\text{id}_T \sqsubseteq g \circ d_g$ beweist. Nach [Proposition 1.7.2](#) ist daher (g, d_g) eine Adjunktion, falls beide Abbildungen monoton sind. Die Abbildung g ist als \prod -erhaltende Abbildung aber natürlich monoton, womit auch die Monotonie von d_g folgt. \square

Aus [Proposition 1.7.3](#) folgt unmittelbar die nächste Aussage, die wir weiter oben im Text bereits erwähnt haben.

1.7.4 Korollar: *Zu jeder Dilatation δ gibt es genau eine Erosion ε derart, dass (ε, δ) eine Adjunktion ist. Und zu jeder Erosion ε gibt es genau eine Dilatation δ derart, dass (ε, δ) eine Adjunktion ist.*

Öffnungen und Schließungen

Mit Dilatationen und Erosionen haben wir nunmehr zwei Grundtypen morphologischer Bildoperatoren kennengelernt und festgestellt, dass es sich dabei um Adjungierte handelt. Die beiden weiteren Grundtypen, die nun vorgestellt werden sollen, sind die sogenannten *Öffnungen* und *Schließungen*, die eine enge Verbindung zu den Dilatationen und Erosionen haben.

Wir bezeichnen eine Abbildung $f: S \rightarrow S$ auf einer geordneten Menge S als *idempotent*, wenn $f \circ f = f$ gilt, als *extensiv*, wenn $\text{id} \sqsubseteq f$ gilt, und als *anti-extensiv*, wenn $f \sqsubseteq \text{id}$ gilt. Die Abbildung f wird *Kern-Operator* genannt, wenn f idempotent, monoton und

anti-extensiv ist; sie wird *Hüllenoperator* genannt, wenn sie idempotent, monoton und extensiv ist. Typische Beispiele für einen Kern- bzw. Hüllenoperator sind die Bildung des Inneren bzw. die Bildung des Abschlusses auf der Potenzmenge eines topologischen Raumes. Im Bereich der morphologischen Bildoperatoren wird ein Kern-Operator auf einem vollständigen Verband als *Öffnung* bezeichnet und ein Hüllenoperator auf einem vollständigen Verband als *Schließung*.

In [Proposition 1.7.1](#) haben wir gesehen, dass stets $g \circ d \circ g = g$ für die beiden Abbildungen einer Adjunktion (g, d) zwischen den geordneten Mengen S und T gilt, was zur Folge hat, dass die Abbildung $k = d \circ g$ idempotent ist. Ferner ist k als Verkettung monotoner Abbildungen monoton und erfüllt außerdem $k \sqsubseteq \text{id}$, so dass k ein Kern-Operator ist. Analog lässt sich argumentieren, dass die Abbildung $h = g \circ d$ ein Hüllenoperator ist. Jedes adjungierte Paar (ε, δ) einer Dilatation δ und einer Erosion ε liefert daher eine Öffnung $\alpha = \delta \circ \varepsilon$ und eine Schließung $\beta = \varepsilon \circ \delta$. In der Literatur werden Öffnungen und Schließungen, die auf diese Weise gebildet werden teilweise *adjunktional* genannt, wenn (ε, δ) eine Adjunktion auf *einem* Verband S und nicht zwischen zwei verschiedenen Verbänden S und T ist. Diese Festlegung ist etwas subtil, da sich jeder Kern- oder Hüllenoperator mittels einer Adjunktion zwischen zwei geordneten Mengen darstellen lässt, die im Allgemeinen jedoch nicht gleich sind.

1.8 Diskretisierung binärer Bilder

In [Abschnitt 1.4](#) haben wir eine Methode kennengelernt, geeignete topologische Räume zu diskretisieren, also durch „einfachere“ Räume zu approximieren. Wir wollen nun der Frage nachgehen, in wie weit sich das auf Teilmengen des Ausgangsraums übertragen lässt. Dadurch werden wir zu einer Diskretisierung geeigneter binärer Bilder gelangen, die wir mit einer Diskretisierungsmethode vergleichen wollen, die HEIJMANS in [\[Hei94\]](#) vorstellt. Schließlich nutzen wir die Diskretisierung binärer Bilder, um zu einer Diskretisierung von Bildoperatoren auf binären Bildern zu gelangen.

Den wesentlichen Hinweis zur Approximation von Teilmengen haben wir bereits auf [Seite 24](#) bekommen. Wenn wir nämlich den lokalkompakten Hausdorffraum X wie in [Abschnitt 1.4](#) mittels eines Überdeckungssystems \mathcal{F} approximieren, so gilt für jede Teilmenge $M \subseteq X$ die Gleichung

$$\overline{M} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \text{cl}^F(M).$$

Dabei bezeichnet $\text{cl}^F(M)$ den Abschluss von M bezüglich der Topologie $\mathcal{O}(F)$. Jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ wird also „von außen her“ durch die Mengen $\text{cl}^F(A)$ in dem Sinn approximiert, dass sie Durchschnitt dieser Mengen ist. Und das Ergebnis der Approximation ist für abgeschlossene Mengen exakt; für nicht-abgeschlossene Mengen können wir das nicht erwarten, da die Approximation konstruktionsbedingt natürlich nicht in der Lage ist, Randpunkte zu „erkennen“.

In einem konkreten Approximationsschritt – dargestellt durch $H \in \mathcal{F}$ – ist also $\text{cl}^H(A)$ eine Näherung für die Menge A . Wie verhält sich das zu dem Raum X_H , der ja die zu H gehörige Diskretisierung von X ist?

Um diese Frage zu beantworten, erinnern wir uns, dass wir den Raum X_H als geordnete Menge aller Punktabschlüsse $\text{cl}_H(x)$ ($x \in X$) auffassen können. (*Hinweis:* Es gilt natürlich $\text{cl}_H(x) = \text{cl}^H(\{x\})$. Wir verwenden die beiden unterschiedlichen Bezeichnungen, um die Mengen $\text{cl}_H(x)$ als Punkte des Raumes X_H besonders herauszustellen. Siehe hierzu auch die Fußnote 3 auf Seite 24.) Wir halten folgende Aussage fest:

1.8.1 Proposition: Für $M \subseteq X$ und $H \in \mathcal{F}$ gilt

$$\text{cl}^H(M) = \bigcup_{m \in M} \text{cl}_H(m).$$

Beweis: Für jedes $m \in M$ gilt $\text{cl}_H(m) = \text{cl}^H(\{m\}) \subseteq \text{cl}^H(M)$, so dass insgesamt $\text{cl}^H(M) \supseteq \bigcup_{m \in M} \text{cl}_H(m)$ ist. Falls umgekehrt $y \in \text{cl}^H(M)$ gilt, so kann $\mathfrak{n}_H(y) \cap M$ nicht leer sein, so dass ein $m \in M$ mit $m \in \mathfrak{n}_H(y)$ existiert; folglich ist $y \in \text{cl}_H(m)$. \square

Letztlich ist es die Lokalendlichkeit der Überdeckung H , die in [Proposition 1.8.1](#) die Gleichheit herbeiführt. Wenn nun im Approximationsschritt H der Raum X durch X_H diskretisiert wird, finden wir in der Teilmenge

$$\text{cl}_H(A) = \{\text{cl}_H(a) : a \in A\} \subseteq X_H$$

die zugehörige Diskretisierung unsere Menge $A \subseteq X$. In der anderen Richtung erhalten wir für jede Teilmenge $P \subseteq X_H$ eine Darstellung $d_H(P)$ in X , indem wir die Elemente von P als Teilmengen von X vereinigen, so dass

$$d_H(P) := \bigcup \{\text{cl}_H(x) : \text{cl}_H(x) \in P, x \in X\}$$

ist. Für jede Teilmenge $M \subseteq X$ gilt demnach $d_H(\text{cl}_H(M)) = \text{cl}^H(M)$, und die Diskretisierungen $\text{cl}_H(A) \subseteq X_H$ einer abgeschlossenen Menge A approximieren A in dem Sinne,

dass $A = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} d_F(\text{cl}_F(A))$ ist. Im Hinblick auf die Ausführungen in [Abschnitt 1.7](#) bedeutet das, dass wir binäre Bilder diskretisieren können, wenn sie als System $\mathcal{A}(X)$ eines lokalkompakten Hausdorffraumes X modelliert sind.

Wir wollen im Folgenden dieses Vorgehen mit einem Ansatz von Henk HEIJMANS vergleichen, den er in Kapitel 8 seines Buchs *Morphological Image Operators* [[Hei94](#)] vorstellt. Dazu werden wir das dort geschilderte Vorgehen hier zunächst kurz vorstellen.

HEIJMANS' Modell eines binären Bildes ist in oben genanntem Kontext eine abgeschlossene Teilmenge des $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Seinem Vorgehen bei der Diskretisierung liegt die Idee eines Abtastvorgangs zugrunde. Ein Sensor, dessen „Geometrie“ durch eine offene Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben ist, wird bei dieser Abtastung entlang eines Rasters bewegt, das durch ein Gitter $S = \{k_1 u_1 + \dots + k_n u_n : k_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n\}$ beschrieben wird. Dabei sind u_1, \dots, u_n linear unabhängige Vektoren des \mathbb{R}^n . Es wird o. B. d. A. die Annahme $0 \in C$ getroffen; dann ist für $s \in S$ durch $C_s = C + s = \{c + s : c \in C\}$ (siehe auch [Abschnitt 1.7](#)) der Sensor auf der Raster-Position s gegeben.

Der Sensor „sieht“ das Bild A von der Position s aus, wenn $C_s \cap A \neq \emptyset$ ist. Um sicherzustellen, dass jedes Bild erfasst werden kann, wird $C \oplus S = \mathbb{R}^n$ gefordert, wobei $C \oplus S = \bigcup \{C_s : s \in S\}$ ist. Die Diskretisierung $\sigma(A)$ des Bildes A ist nun einfach die Menge aller Gitterpunkte, von denen aus der Sensor das Bild A sieht:

$$\sigma(A) := \{s \in S : C_s \cap A \neq \emptyset\}$$

Die Sinnhaftigkeit dieser Diskretisierung belegt HEIJMANS, indem er zunächst angibt, was die Repräsentation $\varrho(V)$ einer diskreten Menge $V \subseteq S$ im \mathbb{R}^n sein soll:

$$\varrho(V) := \left[\bigcup_{s \in S \setminus V} C_s \right]^c$$

Da C definitionsgemäß offen ist, handelt es sich bei $\varrho(V)$ stets um eine abgeschlossene Menge. HEIJMANS weist nun nach, dass die beiden Abbildungen σ und ϱ eine Adjunktion (ϱ, σ) bilden. Folglich ist ihre Hintereinanderschaltung $\gamma := \varrho \circ \sigma$ ein Hüllenoperator. Den Hüllenoperator $\gamma = \varrho \circ \sigma$ nennt HEIJMANS auch Approximations-Operator; die abgeschlossene Menge $\gamma(A)$ enthält das Bild A und ist die zu der Diskretisierung $\sigma(A)$ gehörende Näherung für A . Erneutes Diskretisieren von $\gamma(A)$ ergibt nach [Proposition 1.7.1](#) wieder $\sigma(A)$.

Schließlich zeigt HEIJMANS, dass eine geeignete Verfeinerung des Gitters S und der Abtastmenge C dazu führt, dass der entsprechende neue Approximations-Operator γ eine bessere Näherung für das Bild A liefert. Wir verzichten an dieser Stelle auf eine Ausführung im Detail, da wir andernfalls zunächst einen umfangreicheren Begriffsapparat bereitstellen müssten. Sofern das Bild A und die Abtastmenge C nicht „entartet“ sind, dürfen wir uns den Prozess jedoch wie folgt vorstellen: Zuerst verkleinern wir die Menge C dem Durchmesser nach. Damit der Sensor im Prinzip weiter alles erfassen kann, muss ein neues Gitter S derart gewählt werden, dass $C \oplus S = \mathbb{R}^n$ gilt. Dann wird die Approximation $\gamma(A)$ von A in dem Sinne „besser“ sein, als der Durchmesser von $\gamma(A) \setminus A$ höchstens so groß wie vor der Verfeinerung ist. Iteriert man diese Verfeinerungen derart, dass der Durchmesser von C gegen Null strebt, so geht auch der Durchmesser von $\gamma(A) \setminus A$ gegen Null. (Bezüglich der Hit-or-Miss-Topologie konvergiert dann $\gamma(A)$ tatsächlich gegen A .)

HEIJMANS' Ansatz zur Diskretisierung binärer Bilder hat einige Parallelen zu unserem Vorgehen bei der Approximation abgeschlossener Mengen bzw. binärer Bilder, das wir zu Beginn dieses Abschnitts untersucht haben. Aufgrund die Forderung $C \oplus S = \mathbb{R}^n$, die sicherstellt, dass der ganze Raum abgetastet werden kann, ist nämlich $H := \{C_s : s \in S\}$ eine offene Überdeckung des lokalkompakten Hausdorffraumes $X := \mathbb{R}^n$. Um alle Voraussetzungen aus [Abschnitt 1.4](#) zu erfüllen, fordern wir zusätzlich, dass C eine relativ kompakte Menge sei – diese Forderung bedeutet gegenüber HEIJMANS' Ansatz keine echte Einschränkung, da HEIJMANS sie selbst implizit als Voraussetzung für seinen Approximationssatz stellt.

Die Überdeckung H liefert uns zu dem Bild A die Diskretisierung $\text{cl}_H(A)$. Eine Verbindung zu dem Gitter S lässt sich hier nicht sinnvoll herstellen: Die Elemente von $\text{cl}_H(A)$ sind zwar Teilmengen des \mathbb{R}^n , können aber durchaus leeren Durchschnitt mit S haben, so dass wir $\text{cl}_H(A)$ im Allgemeinen nicht aus Punktabschlüssen von Gitterpunkten gewinnen können. Daher ist auch die Approximation $\text{cl}^H(A)$ von A in dem Sinne „genauer“, dass $A \subseteq \text{cl}^H(A) \subseteq \gamma(A)$ gilt; konstruktionsbedingt ist $\gamma(A)$ eine bezüglich der Topologie $\mathcal{O}(H)$ abgeschlossene Menge.

Ferner können wir festhalten, dass γ im Allgemeinen kein topologischer Hüllenoperator ist. Ein Hüllenoperator heißt *topologisch*, wenn seine Bilder genau die abgeschlossenen Mengen einer Topologie sind. Folglich ist cl^H offenbar topologisch. Man kann leicht zei-

gen, dass ein Hüllenoperator φ genau dann topologisch ist, wenn er die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$
- (ii) $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$ für beliebige Teilmenge A, B

Die zweite Eigenschaft ist bei γ im Allgemeinen nicht gegeben.

Diskretisierung von Bildoperatoren

Aufbauend auf seiner Methode zur Diskretisierung von Bildern stellt HEIJMANS auch einen Ansatz vor, mit dem er geeignete *Bildoperatoren* diskretisieren kann. Bildoperatoren sind dabei einfach Abbildungen der Menge $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ in sich. Auch unserer Methode der Diskretisierung durch Punktabschlüsse lässt sich auf geeignete Bildoperatoren ausdehnen, was wir im Folgenden ausführen werden. Dabei gehen wir grundsätzlich analog zum oben genannten Ansatz von HEIJMANS vor, was vor allem daran liegt, dass es sich dabei um einen natürlichen und naheliegenden Ansatz handelt, die Diskretisierung binärer Bilder auf Operatoren zu „liften“. Daher verzichten wir auch darauf, HEIJMANS' Vorgehen hier im Detail vorzustellen. Ferner betrachten wir statt des \mathbb{R}^n gleich einen lokalkompakten Hausdorffraum X mit seinen abgeschlossenen Teilmengen $\mathcal{A}(X)$.

Zunächst gilt es festzulegen, was wir unter einer Diskretisierung eines Bildoperators $\varphi: \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ verstehen wollen. Dabei ist das folgende Diagramm hilfreich:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}(X) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{A}(X) \\
 \text{cl}_H \uparrow & & \uparrow d_H \\
 \mathfrak{P}(X_H) & \xrightarrow{\varphi_H} & \mathfrak{P}(X_H) \\
 \downarrow d_H & & \downarrow \text{cl}_H
 \end{array}$$

Für eine Überdeckung H ist jedem Bild $A \in \mathcal{A}(X)$ seine Diskretisierung $\text{cl}_H(A)$ als Teilmenge von X_H zugeordnet. Umgekehrt erhalten wir zu jeder Teilmenge $P \in X_H$ durch Bilden der Vereinigung die Teilmenge $d(P)$ von X , die nach [Proposition 1.8.1](#) abgeschlossen ist. Ihren Sinn erhält die einzelne Diskretisierung $\text{cl}_H(A)$ aber erst dadurch, dass die Gesamtheit aller Diskretisierungen $\text{cl}_F(A)$ ($F \in \mathcal{F}$) die Menge A approximiert.

Entsprechend sollten für alle $F \in \mathcal{F}$ die jeweiligen Diskretisierungen φ_F so beschaffen sein, dass sie als Gesamtheit den Operator φ approximieren. Wir definieren daher wie folgt:

1.8.2 Definition: Es sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, der gemäß der in [Abschnitt 1.4](#) beschriebenen Methode mittels eines Überdeckungssystems \mathcal{F} approximiert werde. Ferner sei $\varphi: \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ ein Bildoperator, und zu jedem $F \in \mathcal{F}$ sei eine Abbildung $\varphi_F: \mathfrak{P}(X_F) \rightarrow \mathfrak{P}(X_F)$ gegeben. Gilt nun

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} [d_F \circ \varphi_F \circ \text{cl}_F(A)] = \varphi(A)$$

für alle $A \in \mathcal{A}(X)$, so nennen wir jeweils φ_F eine zu $F \in \mathcal{F}$ gehörende Diskretisierung von φ .

Vor dem Hintergrund dieser Definition ist es naheliegend, zu einem gegebenen Operator $\varphi: \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ eine Familie von Abbildungen $(\varphi_F)_{F \in \mathcal{F}}$ zu konstruieren, indem man $\varphi_F := \text{cl}_F \circ \varphi \circ d_F$ für alle $F \in \mathcal{F}$ setzt. Falls φ noch weitere Bedingungen erfüllt, kann man auf diese Weise eine Diskretisierung von φ erhalten. Wir werden in dem folgenden Satz nachweisen, dass die Scott-Stetigkeit von φ hinreichend ist; dabei ordnen wir die Menge $\mathcal{A}(X)$ durch umgekehrte Mengeninklusion, wodurch $\mathcal{A}(X)$ zu einem stetigen Verband wird - das haben wir in [Abschnitt 1.6](#) nachgewiesen. Das Supremum einer Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(X)$ ist gleich $\bigcap \mathcal{B}$. Ein Operator $\varphi: \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ ist damit genau dann Scott-stetig, wenn er die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$ gilt für beliebige Mengen $A, B \in \mathcal{A}(X)$
- (ii) $\varphi(\bigcap \mathcal{B}) = \bigcap \varphi(\mathcal{B})$ gilt für jede Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(X)$ mit der Eigenschaft, dass im Durchschnitt zweier Elemente von \mathcal{B} stets wieder ein Element von \mathcal{B} enthalten ist.

1.8.3 Satz: Ist $\varphi: \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ ein Scott-stetiger Bildoperator und sind die Operatoren φ_F für alle $F \in \mathcal{F}$ durch $\varphi_F := \text{cl}_F \circ \varphi \circ d_F$ gegeben, so ist jedes φ_F jeweils eine zu F gehörende Diskretisierung von φ .

Beweis: Wir müssen die Gleichheit $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} [d_F \circ \varphi_F \circ \text{cl}_F(A)] = \varphi(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}(X)$ nachweisen. Da $d_F \circ \text{cl}_F = \text{cl}^F$ nach [Proposition 1.8.1](#) für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt, haben wir dazu nach Definition von φ_F zu zeigen, dass $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} [\text{cl}^F \circ \varphi \circ \text{cl}^F(A)] = \varphi(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}(X)$ gilt. Betrachten wir ein $A \in \mathcal{A}(X)$ so gilt $A \subseteq \text{cl}^F(A)$ und folglich $\varphi(A) \subseteq \varphi(\text{cl}^F(A)) \subseteq \text{cl}^F(\varphi(\text{cl}^F(A)))$ für alle $F \in \mathcal{F}$, woraus $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} [\text{cl}^F \circ \varphi \circ \text{cl}^F(A)] \supseteq \varphi(A)$ folgt.

Wir werden nun nachweisen, dass für alle $H \in \mathcal{F}$

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} [\text{cl}^F \circ \varphi \circ \text{cl}^F(A)] \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} [\text{cl}^F \circ \varphi \circ \text{cl}^H(A)]$$

gilt. Seien dazu $H, F \in \mathcal{F}$. Dann gibt es ein $G \in \mathcal{F}$ mit $F \preceq G$ und $H \preceq G$, so dass folglich für alle $B \in \mathcal{A}(X)$ sowohl $\text{cl}^G(B) \subseteq \text{cl}^F(B)$ als auch $\text{cl}^G(B) \subseteq \text{cl}^H(B)$ gilt. Damit sehen wir

$$\text{cl}^G \circ \varphi \circ \text{cl}^G(A) \subseteq \text{cl}^F \circ \varphi \circ \text{cl}^H(A),$$

was uns insgesamt zu

$$\bigcap_{G \in \mathcal{F}} [\text{cl}^G \circ \varphi \circ \text{cl}^G(A)] \subseteq \text{cl}^F \circ \varphi \circ \text{cl}^H(A)$$

führt. Da diese Ungleichung für jede Wahl von $F \in \mathcal{F}$ gilt, erkennen wir

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} [\text{cl}^F \circ \varphi \circ \text{cl}^F(A)] \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} [\text{cl}^F \circ \varphi \circ \text{cl}^H(A)].$$

Nun ist aber $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} [\text{cl}^F \circ \varphi \circ \text{cl}^H(A)] = \overline{\varphi(\text{cl}^H(A))} = \varphi(\text{cl}^H(A))$, da φ auf $\mathcal{A}(X)$ operiert, und es folgt

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} [\text{cl}^F \circ \varphi \circ \text{cl}^F(A)] \subseteq \bigcap_{H \in \mathcal{F}} \varphi(\text{cl}^H(A)).$$

Indem wir die Scott-Stetigkeit von φ ausnutzen, können wir

$$\bigcap_{H \in \mathcal{F}} \varphi(\text{cl}^H(A)) = \varphi\left(\bigcap_{H \in \mathcal{F}} \text{cl}^H(A)\right) = \varphi(\overline{A}) = \varphi(A)$$

folgern, was die noch fehlende Ungleichung $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} [\text{cl}^F \circ \varphi \circ \text{cl}^F(A)] \subseteq \varphi(A)$ liefert. \square

1.9 Homöomorphie der Räume X_F und $\text{spec } \mathcal{O}(F)$

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir festhalten, dass die Räume X_F , die in [Abschnitt 1.4](#) als Diskretisierungen des lokalkompakten Hausdorffraumes X auftreten, jeweils homöomorph zum Spektrum $\text{spec } \mathcal{O}(F)$ des Verbandes $\mathcal{O}(F)$ sind. Dadurch stellen wir eine interessante Verbindung zu einer Dualität zwischen nüchternen Räumen und speziellen vollständigen Verbänden her.

Eine nichtleere Teilmenge $M \subseteq L$ eines Verbandes L heißt *Filter*, wenn $M = \uparrow M$ ist und außerdem aus $x, y \in M$ bereits $x \sqcap y \in M$ folgt. Der Verband L ist *distributiv*, wenn für alle $x, y, z \in L$ folgende Gleichung gilt:

$$x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$$

In einem Verband L nennen wir ein Element $p \in L$ *prim*, wenn $L \setminus \downarrow p$ ein Filter ist. Insbesondere ist \top nicht prim. Ein Element $q \in L$ heißt *irreduzibel*, wenn $q \neq \top$ gilt und q maximal oder $\uparrow q \setminus \{q\}$ ein Filter ist. Falls der Verband L vollständig ist, bezeichnen wir die Menge

$$\text{spec } L := \{p \in L : p \text{ ist prim}\}$$

als das *Spektrum* von L .

1.9.1 Proposition: *Ist L ein Verband, so gilt:*

- (a) $p \in L$ ist genau dann prim, wenn $p \neq \top$ ist und für alle $x, y \in L$ die Implikation $x \sqcap y \sqsubseteq p \Rightarrow x \sqsubseteq p$ oder $y \sqsubseteq p$ gilt.
- (b) $q \in L$ ist genau dann irreduzibel, wenn $q \neq \top$ ist und für alle $x, y \in L$ die Implikation $x \sqcap y = q \Rightarrow x = q$ oder $y = q$ gilt.
- (c) Alle primen Elemente sind irreduzibel.
- (d) Falls L distributiv ist, sind alle irreduziblen Elemente prim.

Beweis:

- (a) Die Implikation $[x \sqcap y \sqsubseteq p \Rightarrow x \sqsubseteq p \text{ oder } y \sqsubseteq p]$ ist äquivalent zur Implikation $[x, y \in L \setminus \downarrow p \Rightarrow x \sqcap y \in L \setminus \downarrow p]$; letztere ist erfüllt, wenn $p = \top$ gilt oder $L \setminus \downarrow p$ ein Filter ist. Umgekehrt folgt aus der Gültigkeit der Implikation, dass $L \setminus \downarrow p$ ein Filter ist, falls diese Menge nicht leer ist; andernfalls gilt aber $p = \top$.
- (b) Die Implikation $[x \sqcap y = q \Rightarrow x = q \text{ oder } y = q]$ ist äquivalent zur Implikation $[x, y \in \uparrow q \setminus \{q\} \Rightarrow x \sqcap y \in \uparrow q \setminus \{q\}]$; letztere ist erfüllt, wenn q maximal oder $\uparrow q \setminus \{q\}$ ein Filter ist. Umgekehrt folgt aus der Gültigkeit der Implikation, dass $\uparrow q \setminus \{q\}$ ein Filter ist, falls diese Menge nicht leer ist; andernfalls ist q aber maximal.

- (c) Das folgt unmittelbar aus den Definitionen.
- (d) Es sei p irreduzibel, und es gelte $x \sqcap y \sqsubseteq p$. Dann gilt $p = p \sqcup (x \sqcap y) = (p \sqcup x) \sqcap (p \sqcup y)$, da L distributiv ist, und folglich $p = (p \sqcup x)$ oder $p = (p \sqcup y)$, da p irreduzibel ist. Somit ist $x \sqsubseteq p$ oder $y \sqsubseteq p$. \square

Für einen vollständigen Verband L und $p \in L$ führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\nabla_L(p) := \uparrow p \cap \text{spec } L, \quad \Delta_L(p) := \text{spec } L \setminus \nabla_L(p) = \text{spec } L \setminus \uparrow p$$

Ist M eine beliebige Teilmenge von L und E eine endlich Teilmenge von L , so lassen sich die folgenden Identitäten mittels [Proposition 1.9.1](#) leicht nachprüfen.

- (i) $\Delta_L(\perp) = \emptyset$
- (ii) $\Delta_L(\top) = \text{spec } L$
- (iii) $\bigcup \Delta_L(M) = \Delta_L(\bigsqcup M)$
- (iv) $\bigcap \Delta_L(E) = \Delta_L(\bigsqcap E)$

Die Mengen der Form $\Delta_L(p)$ mit $p \in L$ bilden demnach eine Topologie auf $\text{spec } L$, die als *Hüllen-Kern-Topologie* bezeichnet wird. Die Menge der Form $\nabla_L(p)$ sind die abgeschlossenen Mengen von $\text{spec } L$ bezüglich der Hüllen-Kern-Topologie.

Die offenen Mengen $\mathcal{O}(Y)$ eines topologischen Raums Y lassen sich durch Mengeninklusion ordnen; $(\mathcal{O}(Y), \subseteq)$ ist dann ein vollständiger Verband (vgl. [Abschnitt 1.6](#)). Eine in Y abgeschlossene nichtleere Menge A heißt *irreduzibel*, wenn sie nicht die Vereinigung zweier abgeschlossener echter Teilmengen von A ist. Somit ist A genau dann irreduzibel, wenn $A^{\mathfrak{c}}$ irreduzibel im Verband $\mathcal{O}(Y)$ ist. Punktabschlüsse, also abgeschlossene Mengen der Form $A = \overline{\{y\}}$ mit $y \in Y$, sind stets irreduzibel. Jedem Punkt $y \in Y$ lässt sich also durch die Abbildung

$$\xi_Y = (y \mapsto \overline{\{y\}}^{\mathfrak{c}}): Y \rightarrow \text{spec } \mathcal{O}(Y)$$

ein irreduzibles Element von $\mathcal{O}(Y)$ zuordnen; dieses ist sogar prim, da $\mathcal{O}(Y)$ distributiv ist. Falls zu jeder irreduziblen abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq Y$ genau ein Punkt $y \in Y$ mit $A = \overline{\{y\}}$ existiert, so nennen wir den Raum Y *nüchtern*; die Nüchternheit von Y ist somit äquivalent zur Bijektivität von ξ_Y .

Zur weiteren Verwendung halten wir noch folgende Eigenschaft irreduzibler abgeschlossener Mengen fest:

1.9.2 Proposition: *Ist $A \subseteq Y$ eine irreduzible, abgeschlossene Teilmenge des topologischen Raums Y und sind U_1, \dots, U_n ($n \in \mathbb{N}$) endlich viele offene Menge in Y derart, dass $U_i \cap A \neq \emptyset$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt, so ist $\bigcap_{i=1}^n U_i \cap A \neq \emptyset$.*

Beweis: Wäre $\bigcap_{i=1}^n U_i \cap A = \emptyset$, so wäre $[\bigcap_{i=1}^n U_i \cap A]^{\mathbb{G}} \cap A = Y \cap A = A$ und folglich $A = (U_1^{\mathbb{G}} \cap A) \cup \dots \cup (U_n^{\mathbb{G}} \cap A)$, so dass A nicht irreduzibel wäre. \square

Wir wollen den soeben eingeführten Begriffsapparat mit der in [Abschnitt 1.4](#) beschriebenen Approximation topologischer Räume in Verbindung bringen und diese damit in einen abstrakteren Rahmen einbetten. Dazu betrachten wir wieder einen lokalkompakten Hausdorffraum X , zu dem ein System \mathcal{F} von Überdeckungen von X durch relativ kompakte, offene Mengen mit folgenden Eigenschaften existiert:

- (i) $\bigcup \mathcal{F}$ ist eine Basis von X .
- (ii) Zu allen $F, G \in \mathcal{F}$ gibt es ein $H \in \mathcal{F}$ mit $F \preceq H$ und $G \preceq H$.

Wir hatten bereits festgestellt, dass sich die approximierenden Räume X_F ($F \in \mathcal{F}$) als geordnete Menge von Punktabschlüssen $\text{cl}_F(x)$ ($x \in X$) bezüglich der von der Überdeckung F erzeugten Topologie $\mathcal{O}(F)$ auffassen lassen. Diese Punktabschlüsse sind – aufgefasst als Teilmengen von X – irreduzible F -abgeschlossene Mengen, das heißt, ihre Komplemente sind prim im Verband $\mathcal{O}(F)$. Durch die Abbildung

$$\text{cl}_F(x) \mapsto X \setminus \text{cl}_F(x): X_F \rightarrow \text{spec } \mathcal{O}(F)$$

wird daher jedem Element von X_F ein Element im Spektrum von $\mathcal{O}(F)$ zugeordnet.

1.9.3 Lemma: *Zu jedem $U \in \text{spec } \mathcal{O}(F)$ gibt es ein $\text{cl}_F(x) \in X_F$ mit $U^{\mathbb{G}} = \text{cl}_F(x)$.*

Beweis: Die Menge $A := U^{\mathbb{G}}$ ist irreduzibel, da U prim in $\mathcal{O}(F)$ ist. Wir betrachten die Menge aller Umgebungen $\mathfrak{n}_F(a)$ mit $a \in A$. Nach [Proposition 1.9.2](#) haben je endlich viele dieser Umgebungen einen nichtleeren Durchschnitt mit A . Das gleiche gilt dann für ihre kompakten Abschlüsse $\overline{\mathfrak{n}_F(a)}$, so dass insgesamt $\bigcap_{a \in A} \overline{\mathfrak{n}_F(a)} \cap A \neq \emptyset$ ist. Das heißt, es gibt einen Punkt $z \in A$ mit $\mathfrak{n}_F(z) \cap \mathfrak{n}_F(a) \neq \emptyset$ für alle $a \in A$. Da F lokalendlich ist, gibt es aber insgesamt nur endlich viele Umgebungen der Form $\mathfrak{n}_F(y)$ ($y \in Y$), die $\mathfrak{n}_F(z)$ schneiden. Das bedeutet, es gibt endlich viele Punkte $a_1, \dots, a_n \in A$ ($n \in \mathbb{N}$) derart, dass zu jedem $a \in A$ ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mathfrak{n}_F(a) = \mathfrak{n}_F(a_i)$ existiert. Folglich ist $\bigcap_{a \in A} \mathfrak{n}_F(a) \cap A = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{n}_F(a_i) \cap A \neq \emptyset$, so dass ein $x \in A$ existiert mit $x \in \mathfrak{n}_F(a)$ für alle $a \in A$. Das heißt, es gilt $a \in \text{cl}_F(x)$ für alle $a \in A$, so dass $A = \text{cl}_F(x)$ ist. \square

Lemma 1.9.3 zeigt uns, dass die oben angegebene Abbildung eine Bijektion zwischen X_F und $\text{spec } \mathcal{O}(F)$ ist. Darüber hinaus ist sie sogar ein Homöomorphismus, wobei wir $\text{spec } \mathcal{O}(F)$ mit der Hüllen-Kern-Topologie versehen. Um dies zu erkennen, ist die folgende Proposition von Nutzen:

1.9.4 Proposition: *Eine Teilmenge $A \subseteq X_F$ ist genau dann abgeschlossen in X_F , wenn es eine F -abgeschlossene Menge $T \subseteq X$ derart gibt, dass*

$$A = \{\text{cl}_F(x) : x \in X, \text{cl}_F(x) \subseteq T\}$$

gilt.

Beweis: Falls es eine F -abgeschlossene Menge $T \subseteq X$ derart gibt, dass $A \subseteq X_F$ durch $A = \{\text{cl}_F(x) : x \in X, \text{cl}_F(x) \subseteq T\}$ beschrieben wird, so ist A eine untere Menge, also abgeschlossen in der Alexandroff-Topologie. Sei nun umgekehrt $A = \{\text{cl}_F(m) : m \in M\}$ eine untere Menge. Nach **Proposition 1.8.1** gilt $\text{cl}^F(M) = \bigcup_{m \in M} \text{cl}_F(m) = \bigcup A$. Mit $T := \text{cl}^F(M)$ gilt $\text{cl}_F(m) \subseteq T$ für alle $\text{cl}_F(m) \in A$. Ist andererseits $\text{cl}_F(x) \subseteq T$ für ein $x \in X$, so haben wir $\text{cl}_F(x) \subseteq \text{cl}_F(m)$ für ein $m \in M$, also $\text{cl}_F(x) \in A$.

Anstelle dieses direkten Beweises kann man auch argumentieren, dass die abgeschlossenen Mengen in X_F gerade die Bilder F -abgeschlossener Mengen in X unter cl_F sind. \square

Nun sehen wir rasch, dass die Abbildung $\text{cl}_F(x) \mapsto X \setminus \text{cl}_F(x) : X_F \rightarrow \text{spec } \mathcal{O}(F)$ ebenso wie ihre Umkehrabbildung abgeschlossene Mengen wieder auf abgeschlossene Mengen abbildet, so dass sie ein Homöomorphismus ist: Ist nämlich A abgeschlossen in X_F so existiert eine F -abgeschlossene Menge T mit $A = \{\text{cl}_F(x) : x \in X, \text{cl}_F(x) \subseteq T\}$. Das Bild von A ist die Menge $\{U \in \text{spec } \mathcal{O}(F) : T^{\mathfrak{G}} \subseteq U\} = \nabla_{\mathcal{O}(F)}(T^{\mathfrak{G}})$, die abgeschlossen in $\text{spec } \mathcal{O}(F)$ ist. Betrachten wir umgekehrt eine abgeschlossene Menge $\nabla_{\mathcal{O}(F)}(V)$ in $\text{spec } \mathcal{O}(F)$ so ist ihr Urbild die Menge $\{\text{cl}_F(x) : x \in X, \text{cl}_F(x) \subseteq V^{\mathfrak{G}}\}$, die abgeschlossen in X_F ist, da es sich offenbar um eine untere Menge handelt.

Die Homöomorphie zwischen X_F und $\text{spec } \mathcal{O}(F)$ ist deshalb interessant, weil sie uns zu verstehen hilft, dass sich die Räume X_F und die Verbände $\mathcal{O}(F)$ dual zueinander verhalten. Grund dafür ist eine Dualität zwischen der Kategorie *SOB* der nüchternen topologischen Räume mit stetigen Abbildungen dazwischen und der Kategorie *FRM*₀ der vollständigen Verbände, in denen die primen Elemente ordnungserzeugend sind, mit solchen Abbildungen dazwischen, die beliebige Suprema und endliche Infima erhalten.

(Eine Teilmenge $M \subseteq P$ einer geordneten Menge (P, \sqsubseteq) heißt *ordnungserzeugend*, wenn $p = \bigsqcap(\uparrow p \cap M)$ für alle $p \in P$ gilt.)

Wir werden besagte Dualität im Folgenden skizzieren, ohne Beweise zu liefern. Im Detail können die Zusammenhänge in [GHK⁺03] nachgelesen werden, insbesondere in Kapitel V-4.

Wir haben bereits weiter oben gesehen, dass wir zu jedem vollständigen Verband L das Spektrum $\text{spec } L$ bilden und mit der Hüllen-Kern-Topologie versehen können. Auf diese Weise erhalten wir einen topologischen Raum, von dem sich zeigen lässt, dass er stets nüchtern ist. Um aus der Zuordnung $L \mapsto \text{spec } L$ einen Funktor zu gewinnen, müssen wir erklären, was mit einem Morphismus $\varphi: L \rightarrow M$ zwischen zwei vollständigen Verbänden L und M unter spec geschehen soll. Wir fordern von φ , dass es beliebige Suprema und endliche Infima erhält. Dann besitzt φ eine obere Adjungierte $\tau: M \rightarrow L$, die durch $\tau(m) = \max \varphi^{-1}(\downarrow m)$ bestimmt ist. Es lässt sich zeigen, dass $\tau(\text{spec } M) \subseteq \text{spec } L$ ist, so dass wir $\text{spec } \varphi: \text{spec } M \rightarrow \text{spec } L$ einfach als Einschränkung von τ auf $\text{spec } M$ im Urbild und $\text{spec } L$ im Bild definieren. Man kann dann zeigen, dass $\text{spec } \varphi$ stetig bezüglich der Hüllen-Kern-Topologie ist.

Den Weg von den nüchternen topologischen Räumen zu den vollständigen Verbänden liefert uns der Funktor \mathcal{O} , der jedem Raum Y den Verband $\mathcal{O}(Y)$ seiner offenen Mengen zuordnet. Einer stetigen Abbildung $f: Y_1 \rightarrow Y_2$ weisen wir dabei mit $U \mapsto f^{-1}(U)$ eine Abbildung $\mathcal{O}(f): \mathcal{O}(Y_2) \rightarrow \mathcal{O}(Y_1)$ zu, die natürlich beliebige Suprema und endliche Infima erhält. In $\mathcal{O}(Y)$ sind die primen Elemente ordnungserzeugend, da $A = \bigcup_{a \in A} \overline{\{a\}}$ für jede in Y abgeschlossene Menge A gilt.

Für die Dualität zwischen FRM_0 und SOB brauchen wir noch natürliche Transformationen, die die natürliche Äquivalenz von $\text{spec } \mathcal{O}$ und der Identität in SOB bzw. $\mathcal{O} \text{spec}$ und der Identität in FRM_0 herstellen. Beide haben wir bereits weiter oben kennengelernt: Die eine besteht aus den Abbildungen $\Delta_L: L \rightarrow \mathcal{O}(\text{spec}(L))$ für $L \in FRM_0$. Eine Abbildung Δ_L ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die in L primen Elemente ordnungserzeugend sind. Die andere natürliche Transformation besteht aus den Abbildungen $\xi_Y: Y \rightarrow \text{spec}(\mathcal{O}(Y))$ für alle $Y \in SOB$. Eine Abbildung ξ_Y ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn Y nüchtern ist.

Kommen wir zurück zu unserem zu approximierenden Raum X . Für jede Überdeckung $F \in \mathcal{F}$ hat X eine Topologie $\mathcal{O}(F)$. Der Verband $\mathcal{O}(F)$ gehört zur Kategorie FRM_0 , so dass ihm der nüchterne topologische Raum $\text{spec } \mathcal{O}(F)$ dual zugeordnet ist. Von letzterem

haben wir gezeigt, dass er homöomorph zu X_F ist. Die Räume X_F und die Verbände $\mathcal{O}(F)$ verhalten sich also dual zueinander.

Beim Approximieren betrachten wir den inversen Limes der Räume X_F , wobei wir für alle $F, G \in \mathcal{F}$ mit $F \preceq G$ die durch $p_{FG}(\text{cl}_G(x)) = \text{cl}_F(x)$ (mit $x \in X$) gegebenen stetigen Abbildungen $p_{FG}: X_G \rightarrow X_F$ verwenden. Beim „Dualisieren“ gehen die Räume X_F bzw. X_G in die Verbände $\mathcal{O}(F)$ bzw. $\mathcal{O}(G)$ über; aus der Abbildung $p_{FG}: X_G \rightarrow X_F$ wird dabei die Abbildung $i_{FG}: \mathcal{O}(F) \rightarrow \mathcal{O}(G)$, die durch $i_{FG}(U) = U$ bestimmt ist. Dual zum inversen Limes der Räume X_F könnten wir also auch den direkten Limes der Verbände $\mathcal{O}(F)$ und der Abbildungen i_{FG} betrachten.

Grauwertbilder

2.1 Die *weit-weit-unter*-Relation in vollständig distributiven Verbänden

In [Hei94, Kapitel 10] definiert HEIJMANS die beiden Begriffe des *zulässigen* und des *stark zulässigen* Verbandes. Im weiteren Verlauf seiner Monographie sind stark zulässige Verbände Voraussetzung für zahlreiche Ergebnisse zu morphologischen Operatoren, die insbesondere für Grauwertbilder eine Rolle spielen – wir werden darauf in späteren Abschnitten dieses Textes zurückkommen. Dennoch gibt HEIJMANS kaum Hintergrundinformation zu den beiden Begriffen, die er definiert. Die Art seiner Definitionen und die Tatsache, dass nicht alle Beispiele, die er dazu bringt, korrekt sind, gibt Anlass, die Begriffe genauer zu diskutieren. So wird im Folgenden dargelegt, dass zulässige Verbände nichts anderes sind als *vollständig distributive* Verbände. Des Weiteren werden wir stark zulässige Verbände genauer betrachten und unter anderem eine Charakterisierung derselben im endlichen Fall geben. Insgesamt wird die Untersuchung stark zulässiger Verbände zu der Vermutung führen, dass natürliche Beispiele für solche Verbände im Wesentlichen total geordnete Mengen sind.

Es sei L ein vollständiger Verband. Für zwei Elemente $s, t \in L$ sagen wir, dass s *weit-weit-unter* t ist, (in Zeichen: $s \lll t$) wenn jede Teilmenge $M \subseteq L$ mit $t \sqsubseteq \bigsqcup M$ ein $m \in M$ besitzt mit $s \sqsubseteq m$. Dual dazu sagen wir, dass s *weit-weit-über* t ist (in Zeichen: $s \ggg t$), wenn jede Teilmenge $M \subseteq L$ mit $\bigsqcap M \sqsubseteq t$ ein $m \in M$ besitzt mit $m \sqsubseteq s$. HEIJMANS definiert in [Hei94, Kapitel 10] die beiden Relationen *unterhalb* (*below*) und *oberhalb* (*above*), die genau die beiden Relationen *weit-weit-unter* und *weit-weit-über* sind.

Die *weit-unter*-Relation \ll – und dual dazu die *weit-über*-Relation \lll – ist analog zu \lll definiert, wobei jedoch nur gerichtete Mengen M betrachtet werden. Ein vollständiger Verband heißt *stetig*, wenn jedes $x \in L$ gerichtetes Supremum aller $y \ll x$ ist. (Siehe hierzu auch [Abschnitt 1.6.](#))

2.1.1 Proposition: *Die Relation \lll auf einem vollständigen Verband L besitzt folgenden Eigenschaften für alle $w, x, y, z \in L$:*

- (i) $x \lll y \Rightarrow x \sqsubseteq y$
- (ii) $w \sqsubseteq x \lll y \sqsubseteq z \Rightarrow w \lll z$
- (iii) $\perp \lll x \quad \forall x \neq \perp$

Zusätzlich gilt:

- (iv) $x \lll y \Rightarrow x \ll y$

Beweis:

- (i) Dies folgt direkt aus $y \sqsubseteq \bigsqcup\{y\}$.
- (ii) Ist $z \sqsubseteq \bigsqcup M$ für eine Menge $M \subseteq L$, so auch $y \sqsubseteq \bigsqcup M$, das heißt, es gibt ein $m \in M$ mit $w \sqsubseteq x \sqsubseteq m$.
- (iii) Zu beachten ist $\bigsqcup \emptyset = \perp$, weshalb $\perp \lll \perp$ ist. Ansonsten ist die Aussage trivial.
- (iv) $x \lll y$ ist die stärkere Bedingung, da hier beliebige und nicht nur gerichtete Suprema betrachtet werden. \square

Einen vollständigen Verband L bezeichnen wir als *vollständig distributiv*, wenn für jede Familie $\{x_{i,j} \in L : i \in I, j \in J(i)\}$ von Elementen in L die Gleichung

$$\bigsqcap_{i \in I} \bigsqcup_{j \in J(i)} x_{i,j} = \bigsqcup_{f \in M} \bigsqcap_{i \in I} x_{i,f(i)}$$

gilt, wobei I eine Indexmenge ist, zu der für jedes $i \in I$ eine Indexmenge $J(i)$ existiert, und M die Menge aller Auswahlfunktionen ist, die jedem Element in $i \in I$ einen Wert in $J(i)$ zuordnen. Grundlegende Arbeiten zu vollständig distributiven Verbänden sind die Artikel [\[Ran52\]](#) und [\[Ran61\]](#) von RANEY.

2.1.2 Proposition: *Es sei L ein vollständiger Verband, in dem die Identität $x = \bigsqcup\{y \in L : y \lll x\}$ für alle $x \in L$ gilt. Sind dann $u, w \in L$ mit $u \lll w$ sowie $M \subseteq L$ mit $w \sqsubseteq \bigsqcup M$, so gibt es ein $m \in M$ mit $u \lll m$.*

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $m = \bigsqcup\{x \in L: x \lll m\}$ für jedes $m \in M$, so dass

$$\bigsqcup M = \bigsqcup\{x \in L: \exists m \in M. x \lll m\}$$

ist. Wegen $u \lll w$ gibt es dann ein $x \in L$ und ein $m \in M$ mit $x \lll m$ und $u \sqsubseteq x$, so dass $u \lll m$ ist. \square

2.1.3 Satz: *Ein vollständiger Verband L ist genau dann vollständig distributiv, wenn jedes $x \in L$ Supremum aller $y \lll x$ ist. In dieser Situation hat die Relation \lll folgende Interpolationseigenschaft: Sind $u, w \in L$ mit $u \lll w$, so gibt es ein $v \in L$ mit $u \lll v \lll w$.*

Beweis: Den Beweis der ersten Aussage führen wir hier nicht aus, da wir, um die erste Aussage zu beweisen, den Beweis von Theorem I-2.7 in [GHK+03] nahezu wörtlich übernehmen können; dabei ersetzen wir lediglich

- (i) „vollständiger Halbverband“ durch „vollständiger Verband“
- (ii) alle gerichteten Suprema durch beliebige
- (iii) \ll durch \lll

Mittels [Proposition 2.1.2](#) sehen wir, dass aus $u \lll w$ wegen $w = \bigsqcup\{v \in L: v \lll w\}$ die Existenz eines $v \in L$ mit $u \lll v \lll w$ folgt, womit die Interpolationseigenschaft nachgewiesen ist. \square

Der folgende Satz über vollständig distributive Verbände ist sinngemäß in [GHK+03] als Theorem I-3.16 zu finden. Wir werden ihn hier nicht beweisen.

2.1.4 Satz: *Für einen vollständigen Verband L sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) L ist vollständig distributiv.
- (ii) Sowohl L als auch L^{op} sind distributive, stetige Verbände.
- (iii) L ist stetig und jedes Element von $L \setminus \{\perp\}$ ist das Supremum ko-primer Elemente.
- (iii') L ist ko-stetig (das heißt, L^{op} ist stetig) und jedes Element von $L \setminus \{\top\}$ ist das Infimum primer Elemente.

Nach HEIJMANS (vgl. [Hei94]) nennen wir einen vollständigen Verband L *zulässig* (*admissible*), wenn für alle $s, t \in L$ gilt:

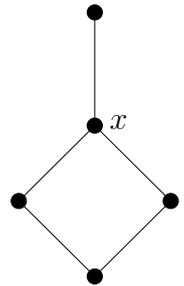
- (i) $t = \bigsqcup\{s \in L : s \text{ unterhalb } t\} = \bigsqcap\{s \in L : s \text{ oberhalb } t\}$
- (ii) $s \text{ unterhalb } t$ impliziert $s \text{ unterhalb } r \text{ unterhalb } t$ für ein $r \in L$, und $s \text{ oberhalb } t$ impliziert $s \text{ oberhalb } r \text{ oberhalb } t$ für ein $r \in L$

Falls zusätzlich die Bedingung

- (iii) $s \text{ unterhalb } t \Leftrightarrow t \text{ oberhalb } s$ ($s \neq \top, t \neq \perp$)

gilt, heißt L *stark zulässig* (*strongly admissible*).

Nach dem bisher gezeigten, sehen wir leicht, dass diese Definition eine gewisse Redundanz besitzt und die Begriffe „vollständig distributiver Verband“ und „zulässiger Verband“ zusammenfallen: Die Relation *unterhalb* ist identisch mit der Relation \lll , und wenn $t = \bigsqcup\{s \in L : s \lll t\}$ für jedes $t \in L$ gilt, so ist L nach Satz 2.1.3 vollständig distributiv. Vollständige Distributivität ist aber eine selbst-duale Eigenschaft, das heißt, mit L ist auch L^{op} vollständig distributiv; das folgt aus der Äquivalenz der beiden ersten Aussagen in Satz 2.1.4. Da $\lll_{L^{\text{op}}}$ gleich der Relation *weit-weit-über* bzw. *oberhalb* in L ist, folgt bereits $t = \bigsqcap\{s \in L : s \text{ oberhalb } t\}$. Auch die zweite Bedingung in HEIJMANS' Definition ist bereits erfüllt, da \lll nach Satz 2.1.3 die Interpolationseigenschaft besitzt. Die Eigenschaft *stark zulässig* besagt nun, dass der Verband L vollständig distributiv ist und für alle $s, t \in L$ mit $s \neq \top$ und $t \neq \perp$ die Äquivalenz $s \lll t \Leftrightarrow t \ggg s$ gilt. Somit handelt es sich um eine echte Verschärfung von *vollständig distributiv*, da aus $s \lll t$ im Allgemeinen nicht $t \ggg s$ folgt. Der nebenstehende Verband ist beispielsweise vollständig distributiv aber nicht stark zulässig, denn für das mit x bezeichnete Element gilt $x \lll x$ und zugleich $x \ggg x$.



Bevor wir uns mit dem Begriff *stark zulässig* näher befassen, stellen wir noch ein paar Ergebnisse über vollständig distributive Verbände und die *weit-weit-unter*-Relation zusammen.

2.1.5 Proposition: Für je zwei Elemente x, y eines vollständigen Verbandes L gilt

$$x \lll y \Leftrightarrow y \not\sqsubseteq \bigsqcup(L \setminus \uparrow x).$$

Beweis: Definitionsgemäß ist $x \lll y$ genau dann, wenn jede Teilmenge $M \subseteq L$ mit $y \sqsubseteq \bigsqcup M$ ein $m \in M$ mit $x \sqsubseteq m$ enthält. Somit ist $x \lll y$ genau dann, wenn $y \not\sqsubseteq \bigsqcup M$ für jedes $M \subseteq L$ aus $M \subseteq L \setminus \uparrow x$ folgt; und $M = L \setminus \uparrow x$ ist maximal mit dieser Eigenschaft. \square

Wir bezeichnen ein Element $p \in L$ eines Verbandes L als *prim*, wenn für jede endliche Teilmenge $M \subseteq L$ aus $\prod M \sqsubseteq p$ bereits $m \sqsubseteq p$ für ein $m \in M$ folgt. Das ist äquivalent dazu, dass $L \setminus \downarrow p$ ein Filter ist. Wir nennen q *ko-prim* in L , wenn es prim in L^{op} ist.

Wir bezeichnen ein Element $p \in L$ eines Verbandes L als \sqcap -*irreduzibel*, wenn für jede endliche Teilmenge $M \subseteq L$ aus $p = \prod M$ bereits $p \in M$ folgt. Das ist äquivalent dazu, dass $p \neq \top$ gilt und p maximal oder $\uparrow p \setminus \{p\}$ ein Filter ist. Wir nennen q \sqcup -*irreduzibel* in L , wenn es \sqcap -irreduzibel in L^{op} ist.

Man beachte, dass \top nicht prim und nicht \sqcap -irreduzibel ist, und dass \perp nicht ko-prim und nicht \sqcup -irreduzibel ist.

In einem distributiven Verband fallen die Begriffe *prim* und \sqcap -*irreduzibel* (bzw. *ko-prim* und \sqcup -*irreduzibel*) zusammen.

Satz 2.1.4 legt die Vermutung nahe, dass es – zumindest in vollständig distributiven Verbänden – einen Zusammenhang zwischen der *weit-unter-* und der *weit-weit-unter-*Relation gibt. Die folgende Proposition gibt dazu Auskunft:

2.1.6 Proposition: *In einem vollständig distributiven Verband L gelten die folgenden Aussagen für alle $x, y \in L$:*

- (a) $x \lll y \Leftrightarrow x \sqsubseteq q \ll y$ für ein ko-primales Element $q \in L$.
- (a') $x \ggg y \Leftrightarrow x \sqsupseteq p \gg y$ für ein primales Element $p \in L$.
- (b) $x = \bigsqcup \{q \in L : q \ll x \text{ und } q \text{ ist ko-prim}\} = \bigsqcup \{q \in L : q \lll x \text{ und } q \text{ ist ko-prim}\}$
- (b') $x = \prod \{p \in L : p \gg x \text{ und } p \text{ ist prim}\} = \prod \{p \in L : q \ggg x \text{ und } p \text{ ist prim}\}$

Beweis:

- (a) Ist $x \lll y$, so finden wir durch Interpolation ein Element $u \in L$ mit $x \lll u \lll y$. Da u Supremum ko-primaler Elemente ist, folgt aus $x \lll u$, dass es ein ko-primales Element $q \in L$ mit $x \sqsubseteq q \sqsubseteq u$ gibt. Ferner gilt $q \lll y$, woraus $q \ll y$ folgt. Gilt umgekehrt $x \sqsubseteq q \ll y$ für drei Elemente $x, q, y \in L$, von denen q ko-prim ist, und

ist $M \subseteq L$ eine Teilmenge von L mit $y \sqsubseteq \bigsqcup M$, so gibt es eine endliche Teilmenge $E \subseteq M$ mit $q \sqsubseteq \bigsqcup E$. Da q ko-prim ist, gilt bereits $q \sqsubseteq e$ für ein $e \in E$, so dass $x \lll y$ folgt.

- (b) Zu jedem $u \in L$ mit $u \lll x$ gibt es nach (a) ein ko-primales $q \in L$ mit $u \sqsubseteq q \ll x$. Wegen $x = \bigsqcup \{u \in L : u \lll x\}$ folgt daraus die erste Gleichung. Ferner folgt aus (a), dass $q \lll x \Leftrightarrow q \ll x$ für alle $q, x \in L$ gilt, bei denen q ko-prim ist. Das beweist die zweite Gleichung.

Da mit L auch L^{op} vollständig distributiv ist, folgen (a') und (b') als duale Aussagen aus dem bisher Gezeigten. \square

2.1.7 Korollar: *Es seien $p, q, x \in L$ Elemente eines vollständig distributiven Verbandes L , wobei p zudem prim sei sowie q ko-prim. Dann gelten die beiden Äquivalenzen*

$$q \lll x \Leftrightarrow q \ll x \quad \text{und} \quad p \ggg x \Leftrightarrow p \gg x.$$

Beweis: Das folgt unmittelbar aus [Proposition 2.1.6](#). \square

2.1.8 Lemma: *Für jede vollständige Kette L ist die Eigenschaft, dass auf $L \setminus \{\perp, \top\}$ die Menge der kompakten Elemente mit derer der ko-kompakten Elemente übereinstimmt, notwendig und hinreichend dafür, dass L stark zulässig ist. Insbesondere ist jede endliche Kette stark zulässig.*

Beweis: Da L eine Kette ist, gilt die Implikation $x \sqsubseteq y \Rightarrow x \ll y$ für alle $x, y \in L$. Und falls $y \neq \perp$ ist, gilt $x \ll y \Rightarrow x \lll y$. Ebenso impliziert $x \sqsubseteq y$ stets $y \gg x$, und falls $x \neq \top$ ist, folgt $y \ggg x$ aus $y \gg x$.

Wir sehen damit rasch, dass L stetig ist, denn jedes $u \in L$ mit $\bigsqcup \{v \in L : v \sqsubseteq u\} \sqsubseteq u$ ist kompakt. Analog folgt die Stetigkeit von L^{op} , und da beide Verbände distributiv sind, ergibt sich die vollständige Distributivität von L mittels [Satz 2.1.4](#).

Wir betrachten nun zwei verschiedene Elemente $x, y \in L$ mit $x \neq \top$ und $y \neq \perp$. Gilt $x \lll y$, so ist insbesondere $x \sqsubseteq y$, also $y \gg x$ und damit $y \ggg x$, da $x \neq \top$ ist. Analog folgt $x \lll y$ aus $y \ggg x$.

Nun nehmen wir an, L habe die Eigenschaft, dass auf $L \setminus \{\perp, \top\}$ die Menge der kompakten Elemente mit derer der ko-kompakten Elemente übereinstimmt; ferner sei $x \in L \setminus \{\perp, \top\}$. Falls $x \lll x$ ist, folgt $x \ll x$, das heißt, x ist kompakt und damit

nach Voraussetzung auch ko-kompakt, womit $x \gg x$ und $x \ggg x$ folgen. Für die Implikation $x \ggg x \Rightarrow x \lll x$ argumentiert man analog, und wir sehen, dass L stark zulässig ist.

Falls L nicht die Eigenschaft besitzt, dass auf $L \setminus \{\perp, \top\}$ die Menge der kompakten Elemente mit derer der ko-kompakten Elemente übereinstimmt, das heißt, falls o. B. d. A. ein $x \in L \setminus \{\perp, \top\}$ existiert, das kompakt aber nicht ko-kompakt ist, so gilt $x \ll x$ und damit $x \lll x$. Es ist jedoch $x \ggg x$, denn andernfalls wäre x ko-kompakt. Somit ist L nicht stark zulässig.

Falls L endlich ist, sind alle Elemente von L kompakt und ko-kompakt. □

Wir wollen die obigen Ergebnisse nun einsetzen, um den Begriff „stark zulässig“ genauer zu beleuchten, wobei wir uns auf endliche Verbände beschränken. Im Folgenden sei deshalb L ein endlicher distributiver Verband. (Dann ist L insbesondere vollständig distributiv, da endliche Verbände immer stetig sind, denn die Relationen \sqsubseteq und \ll stimmen dann überein.) Das folgende Korollar ergibt sich rasch aus Proposition 2.1.6.

2.1.9 Korollar: *Es sei L ein endlicher distributiver Verband.*

- (a) *Für $x \in L$ gilt $x \lll x$ genau dann, wenn x ko-prim ist.*
- (a') *Für $x \in L$ gilt $x \ggg x$ genau dann, wenn x prim ist.*
- (b) *Für jedes prime Element $p \in L$ besitzt die Menge $L \setminus \downarrow p$ ein kleinstes Element $q \in L$; dieses ist ko-prim.*
- (b') *Für jedes ko-prime Element $q \in L$ besitzt die Menge $L \setminus \uparrow q$ ein größtes Element $p \in L$; dieses ist prim.*

Falls L zudem stark zulässig ist, haben wir ferner:

- (c) *Für alle $x \in L \setminus \{\perp, \top\}$ gilt die Äquivalenz: x ist ko-prim $\Leftrightarrow x$ ist prim.*

Beweis: Wir zeigen (b): Weil p prim ist, handelt es sich bei $L \setminus \downarrow p$ um einen Filter, so dass diese Menge ein kleinstes Element q besitzt, da sie endlich ist. Wäre $q = u \sqcup v$ für zwei Elemente $u, v \in L \setminus \{q\}$, folgte $u, v \in \downarrow p$ und damit $q \in \downarrow p$ im Widerspruch zur Konstruktion von q , so dass q \sqcup -irreduzibel, also ko-prim ist.

Der Beweis von (b') erfolgt analog; die Aussagen (a), (a') und (c) sind trivial. □

Wir haben bereits gesehen, dass jede endliche Kette stark zulässig ist. Abbildung 2.1(a) zeigt den (sein Mächtigkeit nach) kleinsten Verband, der stark zulässig aber keine Kette ist. Indem wir über (ehemals) \top ein weiteres Element anfügen (vgl. Abbildung 2.1(b)), zerstören wir bereits die Eigenschaft, stark zulässig zu sein, da dann das mit p bezeichnete Element \sqcap -irreduzibel aber nicht \sqcup -irreduzibel ist. Aus dem gleichen Grund sind auch die übrigen Verbände in Abbildung 2.1 nicht stark zulässig. Aus Abbildung 2.1(c) wird damit insbesondere deutlich, dass sich starke Zulässigkeit nicht auf Produkte überträgt, denn dieser Verband ist das Produkt zweier endlicher Ketten. Abbildung 2.1(d) zeigt einen Potenzmengenverband, weshalb auch diese im Allgemeinen nicht stark zulässig sind.

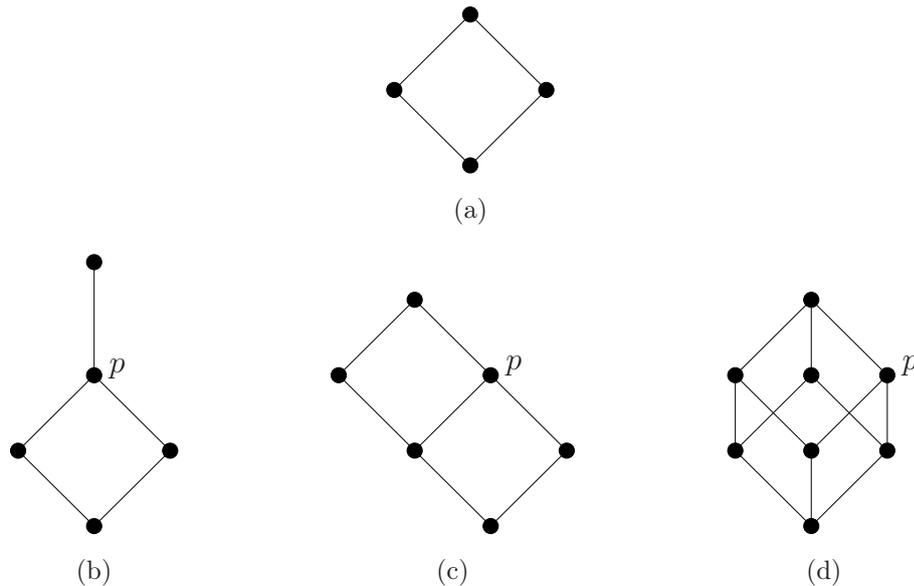


Abbildung 2.1: Beispiele für einen stark zulässigen Verband (a) und drei nicht stark zulässige Verbände

Diese Beispiele lassen vermuten, dass es wohl nicht sehr viele endliche Verbände geben wird, die stark zulässig sind. Der folgende Satz benennt die möglichen Varianten.

2.1.10 Satz: *Es sei L ein endlicher Verband, der stark zulässig ist. Dann ist L entweder eine Kette, oder L ist ein „Stapel“ von Verbänden des in Abbildung 2.1(a) gezeigten Typs. (Siehe Abbildung zum Beweis.)*

Beweis: Wir bezeichnen mit P die Menge der primen Elemente von L vermindert um $\{\perp\}$. Dann ist P zugleich die Menge der ko-primen Elemente von L vermindert um $\{\top\}$. Mit der von L induzierten Ordnung ist P selbst eine geordnete Menge. Ferner bezeichne P_0 die Menge der minimalen Elemente von P .

Wir können vier Fälle für die Mächtigkeit von P_0 unterscheiden:

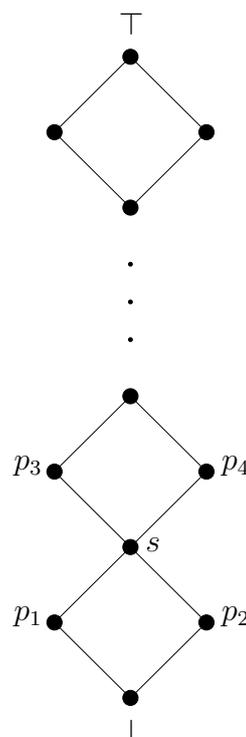
Fall I: $P_0 = \emptyset$. Es folgt $P = \emptyset$, also $L = \{\perp\}$ oder $L = \{\perp, \top\}$; in beiden Fällen ist L eine Kette.

Fall II: $P_0 = \{p\}$. Hier können wir per Induktion über die Mächtigkeit von P nachweisen, dass P eine Kette ist:

Für $P = \{p\}$ gilt diese Behauptung offenbar. Nehmen wir nun an, es wäre $|P| > 1$.

Es ist p das kleinste Element von P . Die Menge $L \setminus \downarrow p$ besitzt nach [Korollar 2.1.9](#) ein kleinstes Element p' , das ko-prim ist, das heißt, es gilt $p' \in P$, da $p' \neq \top$ wegen $|P| \geq 2$ ist. Zudem gilt dann $p \sqsubseteq p'$, und p' ist das kleinste Element von $P \setminus \{p\}$.

In L gilt $\perp \sqsubseteq p$ und $p \sqsubseteq x$ für alle $x \in L$. Daher ist auch $L' := L \setminus \{\perp\}$ ein endlicher distributiver Verband. Für die Menge P' seiner primen Elemente außer $\perp_{L'} = p$ gilt $P' = P \setminus \{p\}$. Damit erfüllt P' die Induktionsvoraussetzung, und wir können folgern, dass P' eine Kette ist. Dann ist aber offenbar auch P eine Kette. Da P eine Kette ist, muss es sich bei L ebenfalls um eine Kette handeln.



Fall III: $P_0 = \{p_1, p_2\}$ mit $p_1 \neq p_2$. Diesen Fall betrachten wir weiter unten genauer.

Fall IV: P_0 enthält mindestens drei paarweise verschiedene Elemente p_1, p_2 und p_3 . Nach [Korollar 2.1.9](#) besitzt die Menge $L \setminus \downarrow p_1$ ein kleinstes Element $p \in P$. Das heißt, p ist das kleinste Element von $P \setminus \{p_1\}$, was im Widerspruch zur Minimalität von p_2 und p_3 steht. Der Fall IV kann daher gar nicht auftreten.

Wenden wir uns also dem verbleibenden Fall III zu. Wegen der Minimalität von p_1 und p_2 ist $p_1 \sqcap p_2 = \perp$. Falls $P = P_0$ ist, gilt $p_1 \sqcup p_2 = \top$, und L ist der Verband in [Abbildung 2.1\(a\)](#).

Nehmen wir als nächstes an, dass es ein $p \in P$ mit $p \notin P_0$ gibt. Es ist p_1 das kleinste Element in L , das nicht in $\downarrow p_2$ liegt; umgekehrt ist p_2 das kleinste Element in L , das

nicht in $\downarrow p_1$ liegt. Folglich ist p obere Schranke von P_0 , so dass $s := p_1 \sqcup p_2 \neq \top$ ist. Für jedes $x \in L$ gilt $x \notin \{\perp, p_1, p_2, s\} \Leftrightarrow s \sqsubset x$. Daher besitzt die Menge $P \setminus \{p_1, p_2\}$ mindestens zwei minimale Elemente p_3 und p_4 , denn andernfalls wäre s (ko-)prim, was im Widerspruch zur Definition von s stünde. Mehr minimale Elemente kann die Menge $P \setminus \{p_1, p_2\}$ aus dem gleichen Grund nicht haben, aus dem heraus der oben genannte Fall IV nicht auftreten kann. Offenbar ist $p_3 \sqcap p_4 = s$, und falls $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ gilt, ist $p_3 \sqcup p_4 = \top$, so dass L ein Stapel aus zwei Verbänden des in Abbildung 2.1(a) gezeigten Typs ist.

Per Induktion über die Mächtigkeit von P zeigen wir nun, dass L stets ein Stapel von Verbänden des in Abbildung 2.1(a) gezeigten Typs ist (vgl. Abbildung zum Beweis), wenn $|P_0| = 2$ gilt:

Die Situation $P = P_0$ haben wir bereits betrachtet; die Induktions-Behauptung ist also für $1 \leq n \leq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) erfüllt. Nehmen wir nun an, es sei $|P| > 2$.

Wir haben weiter oben gesehen, dass in dieser Situation die Menge $P \setminus \{p_1, p_2\}$ genau zwei minimale prime Elemente p_3 und p_4 mit $p_3 \sqcap p_4 = s = p_1 \sqcup p_2$ besitzt. Die Menge $L' := L \setminus \{\perp, p_1, p_2\}$ ist ein endlicher distributiver Verband, und für die Menge P' seiner primen Elemente außer $\perp_{L'} = s$ gilt $P' = P \setminus \{p_1, p_2\}$. Damit erfüllt P' mit L' die Induktionsvoraussetzung, und wir können folgern, dass L' ein Stapel von Verbänden des in Abbildung 2.1(a) gezeigten Typs ist; das Gleiche gilt dann aber auch für L . \square

Zusammenfassend halten wir fest, dass die Charakterisierung endlicher stark zulässiger Verbände im Wesentlichen auf Ketten hinausläuft. Für (unendliche) vollständige Ketten gibt Lemma 2.1.8 ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für starke Zulässigkeit an. Die Beispiele in Abbildung 2.1 machen deutlich, dass starke Zulässigkeit eine wenig robuste Eigenschaft ist. Insgesamt liegt die Vermutung nahe, dass es außer (geeigneten) total geordneten Mengen kaum natürliche Beispiele stark zulässiger Verbände geben dürfte. Die Tatsache, dass alle praktisch relevanten Verbände, die HEIJMANS in [Hei94] als Beispiele stark zulässiger Verbände genauer betrachtet, total geordnet sind, verstärkt diesen Eindruck. Starke Zulässigkeit scheint eher eine beweistechnische Bedingung zu sein, die als selbständiger Begriff nicht weit trägt. Die Ausführungen in den folgenden Abschnitten werden diese Einschätzung weiter untermauern.

2.2 Liften von Operatoren

In [Abschnitt 1.7](#) haben wir festgehalten, dass vollständige Verbände in der Theorie morphologischer Bildoperatoren als abstrakterer Sprachrahmen eingesetzt werden. Die Elemente eines vollständigen Verbandes L können dabei als binäre Bilder verstanden werden und monotone Abbildungen $\varphi: L \rightarrow L$ als Bildoperatoren. Wir haben ferner ein Modell für Grauwertbilder kennengelernt, und es liegt die Frage auf der Hand, wie sich Operatoren, die auf binären Bildern gegeben sind, auf Grauwertbilder übertragen lassen. Dazu werden wir im nächsten Abschnitt eine Antwort geben. Im Folgenden treffen wir dazu wichtige Vorbereitungen, indem wir einen Operator φ auf einem Verband L zu einem Operator liften, der auf Abbildungen operiert. Dabei folgen wir grundsätzlich dem Vorgehen HEIJMANS' in [\[Hei94\]](#), stellen es jedoch in einen etwas weiteren mathematischen Kontext. Dadurch werden die Zusammenhänge klarer, was vor allem einen Verzicht auf die Voraussetzung *stark zulässiger* Verbände ermöglicht.

Es seien L und T vollständige Verbände. Mit $T \xrightarrow{m} L$ bezeichnen wir die Menge der monotonen Abbildungen von T in L . Da Suprema und Infima monotoner Abbildungen punktweise gebildet werden und L vollständig ist, handelt es sich auch bei $T \xrightarrow{m} L$ um einen vollständigen Verband.

Für das Weitere halten wir kurz fest, dass eine geordnete Menge, in der jede Teilmenge ein Supremum besitzt, bereits ein vollständiger Verband ist. (Beweisidee: Das Infimum einer Menge ist das Supremum all ihrer unteren Schranken.) Dual dazu genügt die Existenz beliebiger Infima, damit eine geordnete Menge ein vollständiger Verband ist.

Mit $T \xrightarrow{\sqcup} L$ bezeichnen wir die Menge der \sqcup -erhaltenden Abbildungen von T in L , das heißt, $X \in T \xrightarrow{\sqcup} L$ gilt genau dann, wenn für jede Teilmenge $M \subseteq T$ die Gleichung $X(\sqcup M) = \sqcup X(M)$ gilt. Insbesondere ist $(T \xrightarrow{\sqcup} L) \subseteq (T \xrightarrow{m} L)$, und auch $T \xrightarrow{\sqcup} L$ ist ein vollständiger Verband, dessen Suprema mit denen in $T \xrightarrow{m} L$ übereinstimmen, denn das punktweise Supremum \sqcup -erhaltender Abbildungen ist wieder \sqcup -erhaltend. Damit ist $T \xrightarrow{\sqcup} L$ ein Teilverband von $T \xrightarrow{m} L$, jedoch kein Unterverband, denn Infima werden in $T \xrightarrow{\sqcup} L$ im Allgemeinen nicht punktweise gebildet.

Für jede Abbildung $X \in T \xrightarrow{m} L$ ist $\sqcup(\downarrow X \cap (T \xrightarrow{\sqcup} L))$ die größte \sqcup -erhaltende Abbildung, die kleiner oder gleich X ist; wir bezeichnen sie mit $\hat{I}(X)$ und definieren damit die Abbildung $\hat{I}: (T \xrightarrow{m} L) \rightarrow (T \xrightarrow{\sqcup} L)$. Aus der Definition von \hat{I} folgt sofort, dass $\hat{I}(X) \sqsubseteq X$ (Anti-Extensivität) und $\hat{I}(\hat{I}(X)) = \hat{I}(X)$ (Idempotenz) für alle $X \in T \xrightarrow{m} L$

gilt. Zudem ist $\hat{\text{I}}$ trivialerweise monoton, und wir sehen insgesamt, dass $\hat{\text{I}}$ ein Kern-Operator ist.

Mit Hilfe von $\hat{\text{I}}$ ist es einfach, die Infima in $T \xrightarrow{\sqcup} L$ zu beschreiben: Man bildet nämlich zunächst das punktweise Infimum und geht dann mittels $\hat{\text{I}}$ zum Kern über, das heißt, es gilt $\prod_{T \sqcup, L} \mathcal{X} = \hat{\text{I}}(\prod_{T \xrightarrow{m}, L} \mathcal{X})$ für jede Teilmenge $\mathcal{X} \subseteq T \xrightarrow{\sqcup} L$.

Dual zu obigen Ausführungen bezeichnen wir mit $T \xrightarrow{\sqcap} L$ den vollständigen Verband der \sqcap -erhaltenden Abbildung von T in L . Auch $T \xrightarrow{\sqcap} L$ ist ein Teilverband von $T \xrightarrow{m}, L$, wobei hierbei die Infima in $T \xrightarrow{\sqcap} L$ mit denen in $T \xrightarrow{m}, L$ übereinstimmen. Indem wir $\check{\text{I}}(X) := \sqcap(\uparrow X \cap (T \xrightarrow{\sqcap} L))$ für alle $X \in T \xrightarrow{m}, L$ setzen, definieren die Abbildung $\check{\text{I}}: (T \xrightarrow{m}, L) \rightarrow (T \xrightarrow{\sqcap} L)$. Dann ist $\check{\text{I}}(X)$ die kleinste \sqcap -erhaltende Abbildung, die größer oder gleich X ist, und es handelt sich bei $\check{\text{I}}$ um einen Hüllenoperator. Für Suprema in $T \xrightarrow{\sqcap} L$ gilt $\bigsqcup_{T \sqcap, L} \mathcal{X} = \check{\text{I}}(\bigsqcup_{T \xrightarrow{m}, L} \mathcal{X})$, wobei $\mathcal{X} \subseteq T \xrightarrow{\sqcap} L$ ist.

An dieser Stelle sei betont, dass sich die Abbildungen $\hat{\text{I}}$ und $\check{\text{I}}$ auf dem Verband $T \xrightarrow{m}, L$ ganz natürlich ergeben – vergleichbar mit den Begriffen *Abschluss* und *Inneres* auf dem Potenzmengenverband $\mathfrak{P}(Y)$ eines topologischen Raumes Y , der die beiden Teilverbände $\mathcal{A}(Y)$ und $\mathcal{O}(Y)$ enthält. Diese Analogie kann unter anderem als Intuition für die folgende Proposition dienen.

2.2.1 Proposition: Für $\mathcal{X} \subseteq T \xrightarrow{m}, L$ gilt

$$\prod_{T \sqcup, L} \hat{\text{I}}(\mathcal{X}) = \hat{\text{I}}(\prod_{T \xrightarrow{m}, L} \mathcal{X}) \quad \text{und} \quad \bigsqcup_{T \sqcap, L} \check{\text{I}}(\mathcal{X}) = \check{\text{I}}(\bigsqcup_{T \xrightarrow{m}, L} \mathcal{X}).$$

Beweis: Für alle $X \in \mathcal{X}$ gilt $\prod_{T \xrightarrow{m}, L} \mathcal{X} \sqsubseteq X$, also $\hat{\text{I}}(\prod_{T \xrightarrow{m}, L} \mathcal{X}) \sqsubseteq \hat{\text{I}}(X)$, womit $\hat{\text{I}}(\prod_{T \xrightarrow{m}, L} \mathcal{X}) \sqsubseteq \prod_{T \sqcup, L} \hat{\text{I}}(\mathcal{X})$ folgt. Ferner gilt $\prod_{T \sqcup, L} \hat{\text{I}}(\mathcal{X}) \sqsubseteq \hat{\text{I}}(X) \sqsubseteq X$ für alle $X \in \mathcal{X}$, also $\prod_{T \sqcup, L} \hat{\text{I}}(\mathcal{X}) \sqsubseteq \prod_{T \xrightarrow{m}, L} \mathcal{X}$ und damit $\prod_{T \sqcup, L} \hat{\text{I}}(\mathcal{X}) \sqsubseteq \hat{\text{I}}(\prod_{T \xrightarrow{m}, L} \mathcal{X})$. Insgesamt haben wir $\prod_{T \sqcup, L} \hat{\text{I}}(\mathcal{X}) = \hat{\text{I}}(\prod_{T \xrightarrow{m}, L} \mathcal{X})$ nachgewiesen; die zweite Gleichung lässt sich dual dazu beweisen. \square

Wir werden im Folgenden an T die zusätzliche Bedingung stellen, vollständig distributiv zu sein. Die Abbildungen $\hat{\text{I}}$ und $\check{\text{I}}$ lassen sich dann einfach mit Hilfe der *weit-weit-unter*-Relation beschreiben:

2.2.2 Proposition: Es sei L ein vollständiger und T ein vollständig distributiver Verband. Für alle $t \in T$ und alle $X \in T \xrightarrow{m}, L$ sind dann die Abbildungen $\hat{\text{I}}$ und $\check{\text{I}}$

gegeben durch

$$\hat{\mathbb{I}}(X)(t) = \bigsqcup_{s \lll t} X(s) \quad \text{und} \quad \check{\mathbb{I}}(X)(t) = \bigsqcap_{s \ggg t} X(s).$$

Beweis: Sei $X \in T \xrightarrow{m} L$. Wir definieren die Abbildung $J: T \rightarrow L$ für alle $t \in T$ durch $J(t) := \bigsqcup_{s \lll t} X(s)$ und zeigen, dass J die größte \bigsqcup -erhaltende Abbildung kleiner oder gleich X ist.

Da X monoton ist, folgt $X(s) \sqsubseteq X(t)$ aus $s \lll t$, so dass $\bigsqcup_{s \lll t} X(s) \sqsubseteq X(t)$ ist; damit sehen wir $J \sqsubseteq X$. Ferner gilt

$$J(\bigsqcup M) = \bigsqcup_{s \lll \bigsqcup M} X(s) = \bigsqcup_{m \in M} \bigsqcup_{s \lll m} X(s) = \bigsqcup J(M)$$

für jede Teilmenge $M \subseteq T$, so dass $J \in T \xrightarrow{\sqcup} L$ ist. Gilt nun $Y \sqsubseteq X$ für ein $Y \in T \xrightarrow{\sqcup} L$, so folgt

$$Y(t) = Y(\bigsqcup \{s \in T : s \lll t\}) = \bigsqcup_{s \lll t} Y(s) \sqsubseteq \bigsqcup_{s \lll t} X(s) = J(t)$$

für alle $t \in T$, also insgesamt $Y \sqsubseteq J$.

Der Beweis der zweiten Identität erfolgt dual zu dem soeben Gezeigten. \square

HEIJMANS führt in [Hei94] die beiden Abbildungen $\hat{\mathbb{I}}$ und $\check{\mathbb{I}}$ anhand der Gleichungen aus Proposition 2.2.2 ein. Dabei scheint ihm deren natürliche Bedeutung, die wir weiter oben gesehen haben, nur teilweise gegenwärtig zu sein, was mit dazu beiträgt, dass er zahlreiche Ergebnisse nur für einen stark zulässigen Verband T formulieren kann.

2.2.3 Proposition:

- (i) Zwischen den vollständigen Verbänden $T \xrightarrow{\sqcap} L$ und $T \xrightarrow{\sqcup} L$ ist $(\hat{\mathbb{I}}, \check{\mathbb{I}})$ eine Adjunktion.
- (ii) $\hat{\mathbb{I}}$ und $\check{\mathbb{I}}$ erhalten beliebige Suprema und beliebige Infima aus $T \xrightarrow{m} L$.

Beweis:

- (i) Für $X \in T \xrightarrow{\sqcap} L$ gilt $\check{\mathbb{I}}(X) = X$. Ferner gilt $\hat{\mathbb{I}}(X) \sqsubseteq X$, also $\check{\mathbb{I}}(\hat{\mathbb{I}}(X)) \sqsubseteq \check{\mathbb{I}}(X) = X$. Für $Y \in T \xrightarrow{\sqcup} L$ gilt $\hat{\mathbb{I}}(Y) = Y$. Ferner gilt $Y \sqsubseteq \check{\mathbb{I}}(Y)$, also $Y = \hat{\mathbb{I}}(Y) \sqsubseteq \hat{\mathbb{I}}(\check{\mathbb{I}}(Y))$. Aus den beiden Ungleichungen $\text{id} \sqsubseteq \hat{\mathbb{I}} \circ \check{\mathbb{I}}$ und $\check{\mathbb{I}} \circ \hat{\mathbb{I}} \sqsubseteq \text{id}$ folgt bereits, dass $(\hat{\mathbb{I}}, \check{\mathbb{I}})$ eine Adjunktion ist.

(ii) Sei $\mathcal{X} \subseteq T \xrightarrow{m} L$ und $Y = \bigsqcup \mathcal{X}$. Dann gilt für alle $t \in T$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{I}}(\bigsqcup \mathcal{X})(t) &= \hat{\mathbb{I}}(Y)(t) = \bigsqcup_{s \lll t} Y(s) = \bigsqcup_{s \lll t} \bigsqcup_{X \in \mathcal{X}} X(s) = \\ &= \bigsqcup_{X \in \mathcal{X}} \bigsqcup_{s \lll t} X(s) = \bigsqcup_{X \in \mathcal{X}} \hat{\mathbb{I}}(X)(t) = \bigsqcup \hat{\mathbb{I}}(\mathcal{X})(t). \end{aligned}$$

Dual dazu lässt sich zeigen, dass $\check{\mathbb{I}}$ beliebige Infima aus $T \xrightarrow{m} L$ erhält. Nach [Proposition 2.2.1](#) erhält $\hat{\mathbb{I}}$ zudem beliebige Infima und $\check{\mathbb{I}}$ beliebige Suprema aus $T \xrightarrow{m} L$. \square

Falls wir T auf einen stark zulässigen Verband einschränken, sind die beiden Abbildungen $\hat{\mathbb{I}}$ und $\check{\mathbb{I}}$ Isomorphismen:

2.2.4 Proposition: *Es sei L ein vollständiger und T ein stark zulässiger Verband. Dann sind die Abbildungen $\hat{\mathbb{I}}$ und $\check{\mathbb{I}}$ zueinander inverse Isomorphismen zwischen den beiden vollständigen Verbänden $T \xrightarrow{\square} L$ und $T \xrightarrow{\sqcup} L$.*

Beweis: Wir wissen nach [Proposition 2.2.3](#), dass $(\hat{\mathbb{I}}, \check{\mathbb{I}})$ eine Adjunktion zwischen $T \xrightarrow{\square} L$ und $T \xrightarrow{\sqcup} L$ ist. Daher genügt es zu zeigen, dass unter obigen Voraussetzungen auch $(\check{\mathbb{I}}, \hat{\mathbb{I}})$ eine Adjunktion zwischen diesen Verbänden ist. Wir werden beweisen, dass $(\check{\mathbb{I}}, \hat{\mathbb{I}})$ sogar auf $T \xrightarrow{m} L$ eine Adjunktion ist. Dazu werden wir für alle $X, Y \in T \xrightarrow{m} L$ die Äquivalenz $X \sqsubseteq \check{\mathbb{I}}(Y) \Leftrightarrow \hat{\mathbb{I}}(X) \sqsubseteq Y$ nachweisen.

Es gelte $X \sqsubseteq \check{\mathbb{I}}(Y)$; dann ist $X(t) \sqsubseteq \check{\mathbb{I}}(Y)(t)$ für alle $t \in T$. Somit gilt $X(t) \sqsubseteq \prod_{s \ggg t} Y(s)$ für alle $t \in T$, und es folgt $X(t) \sqsubseteq Y(s)$ für alle $s, t \in T$ mit $s \ggg t$. Da T stark zulässig ist, gilt $s \ggg t \Leftrightarrow t \lll s$. Wir haben also $X(t) \sqsubseteq Y(s)$ für alle $s, t \in T$ mit $t \lll s$, so dass $\hat{\mathbb{I}}(X)(s) = \bigsqcup_{t \lll s} X(t) \sqsubseteq Y(s)$ für alle $s \in T$ gilt. Damit folgt $\hat{\mathbb{I}}(X) \sqsubseteq Y$, und wir haben die Implikation $X \sqsubseteq \check{\mathbb{I}}(Y) \Rightarrow \hat{\mathbb{I}}(X) \sqsubseteq Y$ nachwiesen. Die umgekehrte Implikation lässt sich völlig analog beweisen, weshalb wir das hier nicht mehr ausführen. \square

2.2.5 Korollar: *Es sei L ein vollständiger und T ein stark zulässiger Verband. Dann ist $(\check{\mathbb{I}}, \hat{\mathbb{I}})$ eine Adjunktion auf $T \xrightarrow{m} L$.*

Beweis: Im Beweis von [Proposition 2.2.4](#) haben wir das nachgewiesen. \square

Eine Voraussetzung zu schaffen, unter der die beiden Abbildungen $\hat{\mathbb{I}}$ und $\check{\mathbb{I}}$ zu Isomorphismen zwischen den Verbänden $T \xrightarrow{\square} L$ und $T \xrightarrow{\sqcup} L$ werden, scheint HEIJMANS' zentrale

Motivation für die Einführung des Begriffs *stark zulässiger Verband* zu sein. Weshalb das für HEIJMANS eine zentrale Rahmenbedingung ist, wird im weiteren Verlauf dieses Textes klar werden. Die gesuchte Voraussetzung soll so beschaffen sein, dass darunter (\check{I}, \hat{I}) zu eine Adjunktion wird, da (\hat{I}, \check{I}) bereits eine Adjunktion ist. Der Beweis von [Proposition 2.2.4](#) macht deutlich, wie dabei der Übergang zwischen \lll und \ggg , der die starke Zulässigkeit kennzeichnet, greift.

Für die weiteren Betrachtungen sei nochmal daran erinnert, dass wir nur vollständige Distributivität von T verlangen.

Wir wollen im Folgenden eine monotone Abbildung φ auf L (also $\varphi \in L \xrightarrow{m} L$) zu einer Abbildung $\varphi^\diamond \in (T \xrightarrow{m} L) \xrightarrow{m} (T \xrightarrow{m} L)$ „liften“. Dies können wir einfach erreichen, indem wir $\varphi^\diamond(X) := \varphi \circ X$ für alle $X \in T \xrightarrow{m} L$ setzen.

Aus Sicht der Kategorientheorie nutzen wir hierbei den Hom-Funktor aus, was wir nun kurz genauer betrachten wollen. Für eine Kategorie \mathcal{C} ist $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ ein Funktor von $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}$ nach **Set** (wobei **Set** die Kategorie der Mengen und Abbildungen dazwischen bezeichne), indem Objekte und Morphismen wie folgt zugeordnet werden: Einem Paar (A, B) von Objekten aus \mathcal{C} wird die Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ aller \mathcal{C} -Morphismen von A nach B zugeordnet. Einem Paar (f, g) von Morphismen, wobei $f: A \rightarrow A'$ ein Morphismus in \mathcal{C}^{op} und $g: B \rightarrow B'$ ein Morphismus in \mathcal{C} sei, wird die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B') \\ h &\mapsto g \circ h \circ f \end{aligned}$$

zugeordnet, die wir mit $f \rightarrow g$ bezeichnen wollen. Abkürzend schreiben wir außerdem $A \rightarrow g$ für $\text{id}_A \rightarrow g$ und $f \rightarrow B$ für $f \rightarrow \text{id}_B$ sowie $\text{Hom}(A, B)$ für $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, wenn aus dem Kontext klar ist, welche Kategorie \mathcal{C} wir meinen.

Falls \mathcal{C} die Kategorie der vollständigen Verbände und monotonen Abbildungen dazwischen ist, können wir über den Hom-Funktor noch mehr sagen, denn es gilt natürlich $\text{Hom}(T, L) = (T \xrightarrow{m} L)$ für je zwei vollständige Verbände T und L , und wir hatten bereits festgehalten, dass die Menge $T \xrightarrow{m} L$ durch punktweise Ordnung wieder ein vollständiger Verband wird. Da die Komposition zweier monotoner Abbildungen monoton ist, wird $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ hier zu einem Funktor von $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}$ nach \mathcal{C} und wird deshalb auch *interner Hom-Funktor* genannt. Wenn wir uns bei den Morphismen weiter einschränken auf die \sqcup -erhaltenden Abbildungen oder die \sqcap -erhaltenden Abbildungen, ist der Hom-Funktor der entsprechenden Kategorie ebenfalls intern. Anstelle von $f \rightarrow g$ werden wir

$f \xrightarrow{m} g$ bzw. $f \xrightarrow{\sqcup} g$ bzw. $f \xrightarrow{\sqcap} g$ schreiben, um zu erkennen in welcher Kategorie wir uns bewegen.

Wir kommen zurück zu unserem Operator φ^\diamond , den wir aus φ gewonnen haben, und stellen fest, dass $\varphi^\diamond = T \rightarrow \varphi$ ist. Darauf aufbauend können wir ein Lifting von φ zu $\varphi^\Delta \in (T \xrightarrow{\sqcup} L) \xrightarrow{m} (T \xrightarrow{\sqcup} L)$ sowie zu $\varphi^\nabla \in (T \xrightarrow{\sqcap} L) \xrightarrow{m} (T \xrightarrow{\sqcap} L)$ konstruieren, indem wir $\varphi^\Delta := \hat{\text{I}} \circ \varphi^\diamond$ und $\varphi^\nabla := \check{\text{I}} \circ \varphi^\diamond$ setzen. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, weshalb gerade die Liftings φ^Δ und φ^∇ von Interesse sind.

Dieses Vorgehen lässt sich auf die Situation übertragen, dass wir eine Familie $\{\varphi_t : t \in T\}$ von monotonen Abbildungen auf L betrachten. Wir definieren dann φ^\diamond für alle $t \in T$ und alle $X \in T \xrightarrow{m} L$ durch $\varphi^\diamond(X)(t) := \varphi_t(X(t))$. Damit das Bild von φ^\diamond in $T \xrightarrow{m} L$ liegt, fordern wir zusätzlich, dass die Familie $\{\varphi_t : t \in T\}$ *ansteigend in t* ist, das heißt, für $s, t \in T$ mit $s \sqsubseteq t$ folge jeweils $\varphi_s \sqsubseteq \varphi_t$. Die Abbildungen φ^Δ und φ^∇ werden wie oben definiert. Wir sagen in dieser Situation auch, dass die Familie $\{\varphi_t : t \in T\}$ den Abbildungen φ^\diamond , φ^Δ und φ^∇ *zugrunde liegt*.

Die Betrachtung solcher Familien fügt sich nahtlos in unsere bisherigen Ausführungen ein. Denn der Familie $\{\varphi_t : t \in T\}$ lässt sich durch $\varphi'(t, x) := \varphi_t(x)$ eindeutig die Abbildung $\varphi' : T \times L \rightarrow L$ zuordnen; umgekehrt gewinnen wir die Familie der φ_t aus φ' , indem wir $\varphi_t(x) := \varphi'(t, x)$ für alle $t \in T$ setzen. Die Monotonie von φ' ist dann äquivalent dazu, dass $\{\varphi_t : t \in T\}$ eine in t ansteigende Familie monotoner Abbildungen ist.

2.2.6 Proposition: *Der Abbildung φ^\diamond liege die Familie $\{\varphi_t : t \in T\}$ zugrunde. Dann gelten auf $T \xrightarrow{m} L$ die beiden Gleichungen*

$$\hat{\text{I}} \circ \varphi^\diamond = \hat{\text{I}} \circ \varphi^\diamond \circ \hat{\text{I}} \quad \text{und} \quad \check{\text{I}} \circ \varphi^\diamond = \check{\text{I}} \circ \varphi^\diamond \circ \check{\text{I}}.$$

Beweis: Wir beweisen nur die erste Gleichung, da sich die zweite dual zeigen lässt.

Da $\hat{\text{I}}$ und φ^\diamond monoton sind, und $\hat{\text{I}} \sqsubseteq \text{id}$ ist, folgt sofort $\hat{\text{I}} \circ \varphi^\diamond \circ \hat{\text{I}} \sqsubseteq \hat{\text{I}} \circ \varphi^\diamond$. Ferner gilt

$$\hat{\text{I}}(\varphi^\diamond(X))(t) = \bigsqcup_{s \lll t} \varphi_s(X(s)) \sqsubseteq \varphi_t(\bigsqcup_{s \lll t} X(s)) = \varphi_t(\hat{\text{I}}(X)(t)) = \varphi^\diamond(\hat{\text{I}}(X))(t)$$

für alle $t \in T$ und alle $X \in T \xrightarrow{m} L$, so dass wir $\hat{\text{I}} \circ \varphi^\diamond \sqsubseteq \varphi^\diamond \circ \hat{\text{I}}$ erkennen. Daraus folgt $\hat{\text{I}} \circ \hat{\text{I}} \circ \varphi^\diamond \sqsubseteq \hat{\text{I}} \circ \varphi^\diamond \circ \hat{\text{I}}$, also $\hat{\text{I}} \circ \varphi^\diamond \sqsubseteq \hat{\text{I}} \circ \varphi^\diamond \circ \hat{\text{I}}$, da $\hat{\text{I}} \circ \hat{\text{I}} = \hat{\text{I}}$ ist, womit insgesamt die erste Gleichung bewiesen ist. \square

2.2.7 Proposition: Die Familie $\{\varphi_t: t \in T\}$ liege den Abbildungen φ^\diamond , φ^Δ und φ^∇ zugrunde, und die Familie $\{\psi_t: t \in T\}$ den Abbildungen ψ^\diamond , ψ^Δ und ψ^∇ . Dann liegt die Familie $\{\varphi_t \circ \psi_t: t \in T\}$ den Abbildungen $\varphi^\diamond \circ \psi^\diamond$, $\varphi^\Delta \circ \psi^\Delta$ und $\varphi^\nabla \circ \psi^\nabla$ zugrunde.

Beweis: Nach Proposition 2.2.6 gilt $\varphi^\Delta \circ \psi^\Delta = (\hat{\text{I}} \circ \varphi^\diamond) \circ (\hat{\text{I}} \circ \psi^\diamond) = \hat{\text{I}} \circ \varphi^\diamond \circ \psi^\diamond$ und analog $\varphi^\nabla \circ \psi^\nabla = \check{\text{I}} \circ \varphi^\diamond \circ \psi^\diamond$. Daher genügt es zu zeigen, dass die Familie $\{\varphi_t \circ \psi_t: t \in T\}$ der Abbildung $\varphi^\diamond \circ \psi^\diamond$ zugrunde liegt. Wir sehen aber sofort, dass $(\varphi^\diamond \circ \psi^\diamond)(X)(t) = \varphi_t(\psi_t(X(t))) = (\varphi_t \circ \psi_t)(X(t))$ für alle $t \in T$ und $X \in T \xrightarrow{m} L$ gilt. \square

Bitte beachten: Wir haben weiter oben festgelegt, dass $\varphi^\Delta \in (T \xrightarrow{\sqcup} L) \xrightarrow{m} (T \xrightarrow{\sqcup} L)$ und $\varphi^\nabla \in (T \xrightarrow{\sqcap} L) \xrightarrow{m} (T \xrightarrow{\sqcap} L)$ ist, obgleich für beide Abbildungen auch $T \xrightarrow{m} L$ als Wertebereich in Frage käme. Diese Festlegung ist im Weiteren von Bedeutung und wird im folgenden Abschnitt gerechtfertigt.

2.2.8 Satz: Die Familie $\{\varphi_t: t \in T\}$ liege den Abbildungen φ^Δ und φ^∇ zugrunde. Dann gilt:

- (a) Sind alle φ_t \sqcup -erhaltend, so sind auch φ^Δ und φ^∇ \sqcup -erhaltend.
- (a') Sind alle φ_t \sqcap -erhaltend, so sind auch φ^Δ und φ^∇ \sqcap -erhaltend.
- (b) Sind alle φ_t idempotent, so gilt dies auch für φ^Δ und φ^∇ .
- (c) Sind alle φ_t (anti-)extensiv, so gilt dies auch für φ^Δ und φ^∇ .
- (d) Sind alle φ_t Hüllenoperatoren, so gilt dies auch für φ^Δ und φ^∇ .
- (d') Sind alle φ_t Kern-Operatoren, so gilt dies auch für φ^Δ und φ^∇ .

Beweis:

- (a) Da φ^Δ die Familie $\{\varphi_t: t \in T\}$ zugrunde liegt, gilt $\varphi^\Delta = \hat{\text{I}} \circ \varphi^\diamond$, wobei $\varphi^\diamond(X)(t) = \varphi_t(X(t))$ für alle $t \in T$ und alle $X \in T \xrightarrow{m} L$ ist. Für eine Teilmenge $\mathcal{X} \subseteq T \xrightarrow{m} L$ und alle $t \in T$ folgt nun

$$\varphi^\diamond(\bigsqcup \mathcal{X})(t) = \varphi_t(\bigsqcup \mathcal{X}(t)) = \varphi_t(\bigsqcup_{x \in \mathcal{X}} X(t)) = \bigsqcup_{X \in \mathcal{X}} \varphi_t(X(t)) = \bigsqcup \varphi^\diamond(\mathcal{X})(t),$$

womit wir sehen, dass φ^\diamond \sqcup -erhaltend ist. Da $\hat{\text{I}}$ ebenfalls \sqcup -erhaltend ist, gilt dies schließlich auch für φ^Δ , wobei wir ausnutzen, dass die Suprema auf $T \xrightarrow{m} L$ und $T \xrightarrow{\sqcup} L$ übereinstimmen.

Ist $\mathcal{Y} \subseteq T \xrightarrow{\sqcap} L$, so gilt $\bigsqcup_{T \xrightarrow{\sqcap} L} \mathcal{Y} = \check{\text{I}}(\bigsqcup_{T \xrightarrow{m} L} \mathcal{Y})$. Daher ist

$$\begin{aligned}
\varphi^\nabla(\bigsqcup_{T \xrightarrow{\sqsupset} L} \mathcal{Y}) &= \varphi^\nabla(\check{\mathbb{I}}(\bigsqcup_{T \xrightarrow{m} L} \mathcal{Y})) \\
&\stackrel{(1)}{=} \check{\mathbb{I}}(\varphi^\diamond(\check{\mathbb{I}}(\bigsqcup_{T \xrightarrow{m} L} \mathcal{Y}))) \\
&\stackrel{(2)}{=} \check{\mathbb{I}}(\varphi^\diamond(\bigsqcup_{T \xrightarrow{m} L} \mathcal{Y})) \\
&= \check{\mathbb{I}}(\bigsqcup_{T \xrightarrow{m} L} \varphi^\diamond(\mathcal{Y})) \\
&\stackrel{(3)}{=} \bigsqcup_{T \xrightarrow{\sqsupset} L} \check{\mathbb{I}}(\varphi^\diamond(\mathcal{Y})) = \bigsqcup_{T \xrightarrow{\sqsupset} L} \varphi^\nabla(\mathcal{Y}),
\end{aligned}$$

wobei wir bei der Gleichheit (1) die Definition von φ^∇ verwenden, bei (2) mit [Proposition 2.2.6](#) und bei (3) mit [Proposition 2.2.1](#) argumentieren.

- (b) Wegen [Proposition 2.2.7](#) folgt aus der Idempotenz aller φ_t die Idempotenz von φ^\diamond , φ^Δ und φ^∇ .
- (c) Aus der Anti-Extensivität der φ_t ergibt sich unmittelbar die Anti-Extensivität von φ^\diamond . Damit folgt $\varphi^\Delta = \hat{\mathbb{I}} \circ \varphi^\diamond \sqsubseteq \hat{\mathbb{I}}$ und $\varphi^\nabla = \check{\mathbb{I}} \circ \varphi^\diamond \sqsubseteq \check{\mathbb{I}}$. Beachten wir nun noch, dass $\hat{\mathbb{I}}$ auf $T \xrightarrow{\sqcup} L$ gleich der Identität ist, ebenso wie $\check{\mathbb{I}}$ auf $T \xrightarrow{\sqcap} L$, so erkennen wir die Anti-Extensivität von φ^Δ und φ^∇ . Bei Extensivität aller φ_t können wir analog argumentieren.
- (d) Das folgt unmittelbar aus (b) und (c).

Die Beweise von (a') und (d') ergeben sich dual zu denen von (a) und (d), weshalb wir sie hier nicht notieren. \square

In der Terminologie von [\[Hei94\]](#) heißen die \sqcup -erhaltende Abbildungen *Dilatationen* und die \sqcap -erhaltende Abbildungen *Erosionen*. Ferner heißen Hüllenoperatoren *Schließungen* und Kern-Operatoren *Öffnungen*. (Siehe dazu auch [Abschnitt 1.7.](#)) Damit ergibt sich folgende Reformulierung obiger Ergebnisse:

2.2.9 Korollar: *Die Familie $\{\varphi_t : t \in T\}$ liege den Abbildungen φ^Δ und φ^∇ zugrunde. Dann gilt:*

- (a) *Sind alle φ_t Dilatationen, so auch φ^Δ und φ^∇ .*
- (a') *Sind alle φ_t Erosionen, so auch φ^Δ und φ^∇ .*
- (b) *Sind alle φ_t Schließungen, so auch φ^Δ und φ^∇ .*
- (b') *Sind alle φ_t Öffnungen, so auch φ^Δ und φ^∇ .*

Obiges Ergebnis zeigt, dass sich vier zentrale Typen morphologischer Bildoperatoren, die zunächst auf einem vollständigen Verband L gegeben sind, zu Operatoren gleichen Typs auf $T \xrightarrow{\sqcup} L$ bzw. $T \xrightarrow{\sqcap} L$ liften lassen. In [Hei94] findet sich ein ähnliches Ergebnis, allerdings wird dort nicht erkannt, dass auch der Übergang von φ zu φ^∇ Dilatationen und zu φ^Δ Erosionen erhält; zudem steht es unter der Prämisse, dass der Verband T stark zulässig ist. Die Ausführungen dieses Abschnitts zeigen jedoch, dass bereits die vollständige Distributivität von T genügt.

2.3 Grauwertbilder

In [Hei94] werden Abbildung $E \rightarrow T$ von einer Grundmenge E in einen vollständigen Verband T als abstraktes Modell für Grauwertbilder verwendet. Eine konkrete Ausprägung dieses Modells haben wir in Abschnitt 1.7 bereits kennengelernt. Dabei können wir uns binäre Bilder als Teilmengen von E vorstellen, die sich vermöge charakteristischer Funktionen unter den Grauwertbildern wiederfinden. Im Folgenden wollen wir nun betrachten, wie wir einen Operator φ , der auf den binären Bildern $\mathfrak{P}(E)$ gegeben ist, zu einem Operator Φ auf den Grauwertbildern $E \rightarrow T$ liften können. Dabei orientieren wir uns an HEIJMANS' Vorgehen in [Hei94] und können dank der Erkenntnisse aus den vorangegangenen Abschnitten zu neuen Ergebnissen gelangen.

Für $F \in (E \rightarrow T)$, $Y \in T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$, $t \in T$ und $x \in E$ seien die Abbildungen

$$X^\Delta: (E \rightarrow T)^{\text{op}} \xrightarrow{m} (T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}), \quad X^\nabla: (E \rightarrow T)^{\text{op}} \xrightarrow{m} (T \xrightarrow{\sqcap} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}),$$

$$F^\Delta: (T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}) \xrightarrow{m} (E \rightarrow T)^{\text{op}} \quad \text{und} \quad F^\nabla: (T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}) \xrightarrow{m} (E \rightarrow T)^{\text{op}}$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} X^\Delta(F)(t) &:= \{x \in E: t \sqsubseteq F(x)\} & \text{und} & & X^\nabla(F)(t) &:= \{x \in E: F(x) \not\sqsubseteq t\} \\ &= F^{-1}(\uparrow t) & & & &= F^{-1}(T \setminus \downarrow t) \end{aligned}$$

sowie

$$F^\Delta(Y)(x) := \bigsqcup \{t \in T: x \in Y(t)\} \quad \text{und} \quad F^\nabla(Y)(x) := \bigsqcap \{t \in T: x \notin Y(t)\}.$$

Offenbar gilt $X^\Delta(F)(\bigsqcup_{i \in I} t_i) = \bigcap_{i \in I} X^\Delta(F)(t_i)$, so dass $X^\Delta(F) \in T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ für alle $F \in (E \rightarrow T)$ ist. Analog sieht man $X^\nabla(F) \in T \xrightarrow{\sqcap} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$.

2.3.1 Proposition: Die drei vollständigen Verbände $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$, $T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ und $T \xrightarrow{\sqcap} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ sind isomorph. Dabei sind X^Δ und F^Δ zueinander inverse Isomorphismen zwischen den Verbänden $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$ und $T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$, und X^∇ und F^∇ sind zueinander inverse Isomorphismen zwischen $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$ und $T \xrightarrow{\sqcap} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$.

Beweis: Für alle $F \in (E \rightarrow T)$ und $x \in E$ gilt

$$F^\Delta(X^\Delta(F))(x) = \bigsqcup \{t \in T : x \in X^\Delta(F)(t)\} = \bigsqcup \{t \in T : t \sqsubseteq F(x)\} = F(x),$$

so dass $F^\Delta \circ X^\Delta = \text{id}$ ist. Betrachten wir nun ein $Y \in T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ und ein $t \in T$. Gilt $x \in Y(t)$ für ein $x \in E$, so folgt $t \sqsubseteq F^\Delta(Y)(x)$, das heißt, es gilt $Y(t) \subseteq X^\Delta(F^\Delta(Y))(t)$. Umgekehrt folgt aus $t \sqsubseteq F^\Delta(Y)(x)$, dass $Y(F^\Delta(Y)(x)) \subseteq Y(t)$ ist. Damit sehen wir $\bigcap \{Y(s) : x \in Y(s)\} \subseteq Y(t)$, also insbesondere $x \in Y(t)$. Es folgt $X^\Delta \circ F^\Delta = \text{id}$. Zusammen mit der Monotonie von X^Δ und F^Δ ergibt sich die Isomorphie von $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$ und $T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$. Dual dazu lässt sich die Isomorphie von $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$ und $T \xrightarrow{\sqcap} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ durch X^∇ und F^∇ zeigen. \square

Wir betrachten die Zusammenhänge noch etwas genauer: Ist F eine Abbildung in $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$, so lässt sich diese eindeutig zu einer \sqcap -erhaltenden Abbildung \hat{F} in $\mathfrak{P}(E)^{\text{op}} \xrightarrow{\sqcap} T$ fortsetzen, indem wir $\hat{F}(M) := \bigcap_{m \in M} F(m)$ für alle $M \in \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ setzen. Umgekehrt lässt sich natürlich jede Abbildung $G \in \mathfrak{P}(E)^{\text{op}} \xrightarrow{\sqcap} T$ eindeutig zu einer Abbildung $F \in (E \rightarrow T)^{\text{op}}$ mit $\hat{F} = G$ reduzieren, indem wir $F(x) := G(\{x\})$ für alle $x \in E$ definieren.

Die Tatsache, dass \hat{F} beliebige Infima erhält, ist hinreichend für die Existenz einer unteren Adjungierten $Y_{\hat{F}} \in T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ zu \hat{F} ; diese ist dann durch $Y_{\hat{F}}(t) = \bigcap \hat{F}^{-1}(\uparrow t)$ bestimmt. Somit gilt $Y_{\hat{F}}(t) = \bigcup \{M \in \mathfrak{P}(E) : t \sqsubseteq \hat{F}(M)^{\text{op}}\} = \{x \in E : t \sqsubseteq F(x)\} = X^\Delta(F)(t)$.

Umgekehrt besitzt jede Abbildung $Y \in T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ eine obere Adjungierte $G_Y \in \mathfrak{P}(E)^{\text{op}} \xrightarrow{\sqcap} T$, die durch $G_Y(M) = \bigcap Y^{-1}(\downarrow M)$ gegeben ist. Somit gilt $G_Y(M) = \bigcap \{t \in T : M \subseteq Y(t)\}$. Wenn wir nun G_Y zu einer Abbildung $F_Y \in (E \rightarrow T)^{\text{op}}$ mit $\hat{F}_Y = G_Y$ reduzieren, erhalten wir $F_Y(x) = \bigcap \{t \in T : x \in Y(t)\} = F^\Delta(Y)(x)$.

Wir sehen also, dass sich die beiden Abbildungen X^Δ und F^Δ in gewisser Weise „natürlich“ ergeben. Entsprechend erkennen wir die Bedeutung von X^∇ bzw. F^∇ , wenn wir die Abbildungen in $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$ zunächst \sqcup -erhaltend fortsetzen und dann zur Adjungierten übergehen bzw. den umgekehrten Weg beschreiten.

Nun ist F^Δ nicht nur für $Y \in T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$, sondern für beliebige $Y \in T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ wohldefiniert. Zwischen den Verbänden $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$ und $T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ bilden X^Δ und F^Δ ein Projektions-Einbettungs-Paar, das heißt, es gilt $F^\Delta \circ X^\Delta = \text{id}$ und $X^\Delta \circ F^\Delta \sqsubseteq \text{id}$. (Das haben wir im Beweis von [Proposition 2.3.1](#) bereits nachgerechnet.) Insbesondere ist (F^Δ, X^Δ) eine Adjunktion. Über $X^\Delta \circ F^\Delta$ können wir noch mehr sagen:

2.3.2 Proposition: *Für $Y \in T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ ist $(X^\Delta \circ F^\Delta)(Y)$ die größte \sqcup -erhaltende Abbildung, die kleiner oder gleich Y ist. Ferner ist $(X^\nabla \circ F^\nabla)(Y)$ die kleinste \sqcap -erhaltende Abbildung, die größer oder gleich Y ist.*

Beweis: Nach unseren bisherigen Ausführungen ist klar, dass $(X^\Delta \circ F^\Delta)(Y)$ eine \sqcup -erhaltende Abbildung ist und dass $(X^\Delta \circ F^\Delta)(Y) \sqsubseteq Y$ gilt. Wir betrachten ein $Z \in T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ mit $Z \sqsubseteq Y$; sei ferner $t \in T$ und $x \in X^\Delta(F^\Delta(Y))(t)$. Dann ist $t \sqsubseteq F^\Delta(Y)(x) = \sqcup\{s \in T : x \in Y(s)\}$ und folglich $Z(t) \sqsubseteq \sqcup\{Z(s) \in \mathfrak{P}(E)^{\text{op}} : x \in Y(s)\}$, da Z Suprema erhält. Somit gilt $\cap\{Z(s) : x \in Y(s)\} \subseteq Z(t)$, woraus $x \in Z(t)$ folgt, da $Y(s) \subseteq Z(s)$ wegen $Z \sqsubseteq Y$ für alle $s \in T$ gilt. Dies zeigt $X^\Delta(F^\Delta(Y))(t) \subseteq Z(t)$, womit $Z \sqsubseteq (X^\Delta \circ F^\Delta)(Y)$ bewiesen ist. Die Aussage über $X^\nabla \circ F^\nabla$ lässt sich dual beweisen. \square

Auf Seite 75 haben wir die Abbildungen $\hat{\text{I}}$ und $\check{\text{I}}$ eingeführt. Nach [Proposition 2.3.2](#) gilt nun $\hat{\text{I}} = X^\Delta \circ F^\Delta$ bzw. $\check{\text{I}} = X^\nabla \circ F^\nabla$, wobei $\mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ die Rolle des Verbandes L von Seite 75 übernimmt. Für unsere Argumentation in diesem Abschnitt haben wir bislang nur die Vollständigkeit von T verwendet; die Gleichungen $\hat{\text{I}}(Y)(t) = \sqcup_{s \lll t} Y(s)$ bzw. $\check{\text{I}}(Y)(t) = \sqcap_{s \ggg t} Y(s)$ gelten natürlich nur dann, wenn T zusätzlich vollständig distributiv ist.

Wir wollen als nächstes die Isomorphie der Verbände $T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ und $T \xrightarrow{\sqcap} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ genauer beleuchten. Nach [Proposition 2.3.1](#) ist klar, dass $\hat{\text{H}} := X^\Delta \circ F^\nabla$ ein Isomorphismus von $T \xrightarrow{\sqcap} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ nach $T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{\text{H}}(Y)(t) &= X^\Delta(F^\nabla(Y))(t) = \{x \in E : t \sqsubseteq F^\nabla(Y)(x)\} = \\ &= \{x \in E : x \notin Y(s) \Rightarrow t \sqsubseteq s\} = \bigcap_{t \sqsubseteq s} Y(s). \end{aligned}$$

Analog dazu sehen wir, dass $\check{\text{H}} := X^\nabla \circ F^\Delta$ ein Isomorphismus von $T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ nach $T \xrightarrow{\sqcap} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ ist, für den

$$\check{\text{H}}(Y)(t) = \bigcup_{s \sqsubseteq t} Y(s)$$

gilt.

Auch die Abbildungen \hat{H} und \check{H} sind für beliebige $Y \in T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ wohldefiniert. Hier gilt $\hat{H} \circ \check{H} = X^\Delta \circ F^\nabla \circ X^\nabla \circ F^\Delta = X^\Delta \circ F^\Delta = \hat{I}$, und entsprechend sehen wir $\check{H} \circ \hat{H} = \check{I}$. Die folgende Aussage ist damit klar:

2.3.3 Proposition: Für $Y \in T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ und $t \in T$ gilt

$$\hat{I}(Y)(t) = \bigcap_{t \underline{\mathbb{Z}} s} \bigcup_{r \underline{\mathbb{Z}} s} Y(r) \quad \text{und} \quad \check{I}(Y)(t) = \bigcup_{s \underline{\mathbb{Z}} t} \bigcap_{s \underline{\mathbb{Z}} r} Y(r).$$

Bildoperatoren

Wir haben diesen Abschnitt mit der Frage begonnen, wie sich Operatoren auf binären Bildern zu Operatoren auf Grauwertbildern liften lassen, und haben nun die Hilfsmittel zur Verfügung, um das zu beantworten. Dabei gehen wir in zwei Schritten vor.

Zunächst ist der Verband $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$ der Grauwertbilder zu den beiden Verbänden $T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ und $T \xrightarrow{\sqcap} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ isomorph, und wir können einen davon auswählen, um unsere Grauwertbilder im Rahmen des Abschnitts 2.2 zu beschreiben, wobei $\mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ die Rolle des Verbandes L übernimmt. Das bedingt, dass es grundsätzlich zwei Möglichkeiten des Liftings gibt, je nachdem, für welchen der Verbände $T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ bzw. $T \xrightarrow{\sqcap} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ wir uns entscheiden.

Im zweiten Schritt nutzen wir die Ergebnisse aus Abschnitt 2.2, um einen Operator φ (oder eine Familie von Operatoren $\{\varphi_t : t \in T\}$) zu einem Operator φ^Δ bzw. φ^∇ zu liften. Daher werden wir im Folgenden auch wieder voraussetzen, dass T ein vollständig distributiver Verband ist, da dies für die entsprechenden Ergebnisse aus Abschnitt 2.2 ebenfalls vorausgesetzt war. Indem wir die beiden Schritte dann kombinieren, erhalten wir die beiden Operatoren Φ^Δ bzw. Φ^∇ auf den Grauwertbildern $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$, die dann durch

$$\Phi^\Delta := F^\Delta \circ \varphi^\Delta \circ X^\Delta \quad \text{bzw.} \quad \Phi^\nabla := F^\nabla \circ \varphi^\nabla \circ X^\nabla$$

bestimmt sind. Das nachstehende Diagramm verdeutlicht noch einmal die Situation.

$$\begin{array}{ccc} (E \rightarrow T)^{\text{op}} & \xrightarrow{\Phi^\Delta} & (E \rightarrow T)^{\text{op}} \\ \downarrow X^\Delta & & \uparrow F^\Delta \\ T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}} & \xrightarrow{\varphi^\Delta} & T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (E \rightarrow T)^{\text{op}} & \xrightarrow{\Phi^\nabla} & (E \rightarrow T)^{\text{op}} \\ \downarrow X^\nabla & & \uparrow F^\nabla \\ T \xrightarrow{\sqcap} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}} & \xrightarrow{\varphi^\nabla} & T \xrightarrow{\sqcap} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}} \end{array}$$

Hierbei ist es interessant, die folgende Vereinfachung zu beobachten, die insbesondere eine leichtere Berechnung konkreter Liftings zulässt:

2.3.4 Lemma: *Es gilt $\Phi^\Delta = F^\Delta \circ \varphi^\diamond \circ X^\Delta$ und $\Phi^\nabla = F^\nabla \circ \varphi^\diamond \circ X^\nabla$.*

Beweis: Aufgrund der bisherigen Ergebnisse dieses Abschnitts wissen wir, dass $F^\Delta X^\Delta = \text{id}$ und $X^\Delta F^\Delta = \hat{\text{I}}$ in Bezug auf die Verbände $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$ und $T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ gilt. Es folgt $F^\Delta = F^\Delta X^\Delta F^\Delta = F^\Delta \hat{\text{I}}$ und entsprechend $F^\nabla = F^\nabla \check{\text{I}}$. Damit ergibt sich $\Phi^\Delta = F^\Delta \circ \varphi^\Delta \circ X^\Delta = F^\Delta \circ \hat{\text{I}} \circ \varphi^\diamond \circ X^\Delta = F^\Delta \circ \varphi^\diamond \circ X^\Delta$ und entsprechend $\Phi^\nabla = F^\nabla \circ \varphi^\diamond \circ X^\nabla$. \square

Wir können also in obigen Diagrammen die Operatoren φ^Δ und φ^∇ beide durch φ^\diamond ersetzen, wenn wir zugleich $T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ und $T \xrightarrow{\sqcap} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ durch $T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$ ersetzen.

Analog zur Begriffsbildung in [Abschnitt 2.2](#) wollen wir davon sprechen, dass eine Familie von Operatoren $\{\varphi_t : t \in T\}$ dem Operator Φ^Δ bzw. Φ^∇ *zugrunde liegt*, wenn sie dem Operator φ^\diamond zugrunde liegt. Direkt aus [Satz 2.2.8](#) folgt dann:

2.3.5 Satz: *Die Familie $\{\varphi_t : t \in T\}$ liege den Abbildungen Φ^Δ und Φ^∇ zugrunde. Dann gilt:*

- (a) *Sind alle φ_t \sqcup -erhaltend, so sind auch Φ^Δ und Φ^∇ \sqcup -erhaltend.*
- (a') *Sind alle φ_t \sqcap -erhaltend, so sind auch Φ^Δ und Φ^∇ \sqcap -erhaltend.*
- (b) *Sind alle φ_t idempotent, so gilt dies auch für Φ^Δ und Φ^∇ .*
- (c) *Sind alle φ_t (anti-)extensiv, so gilt dies auch für Φ^Δ und Φ^∇ .*
- (d) *Sind alle φ_t Hüllenoperatoren, so gilt dies auch für Φ^Δ und Φ^∇ .*
- (d') *Sind alle φ_t Kern-Operatoren, so gilt dies auch für Φ^Δ und Φ^∇ .*

In der Terminologie von [\[Hei94\]](#) haben wir damit folgende Aussage über Grauwertbild-Operatoren:

2.3.6 Korollar: *Die Familie $\{\varphi_t : t \in T\}$ liege den Abbildungen Φ^Δ und Φ^∇ zugrunde. Dann gilt:*

- (a) *Sind alle φ_t Dilatationen, so auch Φ^Δ und Φ^∇ .*
- (a') *Sind alle φ_t Erosionen, so auch Φ^Δ und Φ^∇ .*

- (b) Sind alle φ_t Schließungen, so auch Φ^Δ und Φ^∇ .
 (b') Sind alle φ_t Öffnungen, so auch Φ^Δ und Φ^∇ .

Wenn wir obige Ergebnisse mit denen in [Hei94] vergleichen, ist zunächst festzuhalten, dass wir zu einem Operator φ zwei gleichwertige Liftings Φ^Δ und Φ^∇ vorstellen, die beide vom gleichen Typ wie φ sind. Dabei liegt unseren Ergebnissen ein vollständig distributiver Verband T zugrunde. In [Hei94] wird der Operator Ψ ebenso wie unser Operator Φ^Δ gebildet. Dabei wird ein stark zulässiger Verband T vorausgesetzt, was zur Folge hat, dass die Abbildungen $\hat{\text{I}}$ und $\check{\text{I}}$ Isomorphismen sind (vgl. Proposition 2.2.4). Nach HEIJMANS hat das zur Folge, dass die beiden Operatoren Φ^Δ und Φ^∇ identisch sind. Das ist für ihn deshalb entscheidend, weil er nicht erkennt, dass auch der Übergang von φ zu φ^∇ Dilatationen und zu φ^Δ Erosionen erhält. Folglich erhalten auch die Übergänge zu den gelifteten Operatoren Φ^Δ und Φ^∇ nicht jeder für sich alle vier Grundtypen morphologischer Bildoperatoren. Da für einen stark zulässigen Verband T nach HEIJMANS jedoch $\Psi = \Phi^\Delta = \Phi^\nabla$ gilt, wird dieses Problem einfach umgangen.

2.4 Diskretisierung von Grauwertbildern

In Abschnitt 1.8 haben wir betrachtet, wie sich binäre Bilder auf Basis der in Abschnitt 1.4 beschriebenen Approximationsmethode für lokalkompakte Hausdorffräume diskretisieren lassen. Dies wollen wir im Folgenden auf Grauwertbilder übertragen. In [Hei94] wird eine Diskretisierung binärer Bilder und zugehöriger Operatoren thematisiert; darauf sind wir in Abschnitt 1.8 eingegangen. Die Diskretisierung von Grauwertbildern wird in [Hei94] nicht behandelt.

Bei der Diskretisierung binärer Bilder hatten wir festgestellt, dass nur abgeschlossene Teilmengen des Grundraums exakt durch ihre Diskretisierungen approximiert werden. Das überträgt sich auf die Grauwertbilder; wir werden sehen, dass hier die *nach oben halbstetigen* Abbildungen das Analogon zu den abgeschlossenen Mengen darstellen.

Unser Grundraum E sei im Folgenden ein topologischer Raum. Eine Abbildung $F \in (E \rightarrow T)$ ist genau dann *nach oben halbstetig* (kurz: *ohs*), wenn $F^{-1}(\uparrow t)$ für jedes $t \in T$ eine abgeschlossene Teilmenge von E ist. Die nach oben halbstetigen Funktionen von E in T wollen wir mit $(E \rightarrow T)_{ohs}$ bezeichnen. Die Menge der abgeschlossenen Teilmengen von E ist – wie bereits zuvor – mit $\mathcal{A}(E)$ bezeichnet; wir erinnern uns außerdem,

dass $\mathcal{A}(E)$ ein vollständiger Verband ist, wenn man seine Elemente durch umgekehrte Mengeninklusion ordnet (vgl. [Abschnitt 1.6](#)).

2.4.1 Proposition: X^Δ und F^Δ sind zueinander inverse Isomorphismen zwischen den Verbänden $(E \rightarrow T)_{ohs}^{op}$ und $T \xrightarrow{\sqcup} \mathcal{A}(E)$.

Beweis: Die Implikation $F \in (E \rightarrow T)_{ohs}^{op} \Rightarrow X^\Delta(F) \in T \xrightarrow{\sqcup} \mathcal{A}(E)$ ergibt sich direkt aus $X^\Delta(F)(t) = F^{-1}(\uparrow t)$. Umgekehrt gilt für $Y \in T \xrightarrow{\sqcup} \mathcal{A}(E)$, dass $F^\Delta(Y) \in (E \rightarrow T)_{ohs}^{op}$ ist, und wir wollen sehen, dass $F^\Delta(Y)$ nach oben halbstetig ist. Dazu müssen wir prüfen, ob $[F^\Delta(Y)]^{-1}(\uparrow t)$ abgeschlossen für alle $t \in T$ ist. Wegen $[F^\Delta(Y)]^{-1}(\uparrow t) = X^\Delta(F^\Delta(Y))(t) = Y(t)$ ist das erfüllt. \square

Wir diskretisieren nun zunächst auf $T \xrightarrow{\sqcup} \mathcal{A}(E)$. Dazu werde E wie in [Abschnitt 1.4](#) für ein Überdeckungssystem \mathcal{F} durch seine Diskretisierungen E_F ($F \in \mathcal{F}$) approximiert. Für $Y \in T \xrightarrow{\sqcup} \mathcal{A}(E)$ und $t \in T$ ist $Y(t) \in \mathcal{A}(E)$. Die zu $H \in \mathcal{F}$ gehörende Diskretisierung von $Y(t)$ ist gemäß [Abschnitt 1.8](#) durch $\text{cl}_H(Y(t)) \subseteq E_H$ gegeben. Wir definieren daher $Y_H: T \rightarrow \mathfrak{P}(E_H)$ durch $Y_H(t) := \text{cl}_H(Y(t))$. Man sieht sofort, dass $Y_H \in T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E_H)^{op}$ ist. Wir werden Y_H die zu $H \in \mathcal{F}$ gehörende Diskretisierung von Y nennen.

$Y_H(t)$ ist eine Menge von Punktabschlüssen in E , und die Vereinigung $\bigcup Y_H(t)$ dieser Punktabschlüsse ist gemäß [Abschnitt 1.8](#) gerade die Darstellung $d_H(Y_H(t))$ von $Y_H(t)$ und somit gleich dem H -Abschluss $\text{cl}^H(Y(t))$ von $Y(t)$. Auf diese Weise besitzt Y_H eine Darstellung $D_H(Y_H) \in T \xrightarrow{m} \mathcal{A}(E)$, die durch $D_H(Y_H)(t) := d_H(Y_H(t)) = \bigcup Y_H(t)$ gegeben ist.

Die Diskretisierungen Y_F von Y approximieren nun Y in dem Sinne, dass das Supremum ihrer Darstellungen gleich Y ist:

$$\bigsqcup_{F \in \mathcal{F}} D_F(Y_F)(t) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \bigcup Y_F(t) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \text{cl}^F(Y(t)) = \overline{Y(t)} = Y(t)$$

Als Nächstes diskretisieren wir auf $(E \rightarrow T)_{ohs}^{op}$. Für $F \in (E \rightarrow T)_{ohs}^{op}$ ist $Y := X^\Delta(F)$ ein Element von $T \xrightarrow{\sqcup} \mathcal{A}(E)$. Die zu $H \in \mathcal{F}$ gehörende Diskretisierung Y_H von Y ist ein Element von $T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E_H)^{op}$.

Analog zu X^Δ und F^Δ können wir die Abbildungen X_H^Δ und F_H^Δ mit dem Grundraum E_H anstelle von E definieren. Dann ist $F_H^\Delta(Y_H) \in (E_H \rightarrow T)^{op}$. Wir setzen $F_H := F_H^\Delta(Y_H)$

und nennen F_H die zu $H \in \mathcal{F}$ gehörende Diskretisierung von F . Das nachstehende Diagramm möge helfen, den Überblick zu behalten. Wir beachten hierbei noch, dass das Bild von $T \xrightarrow{m} \mathcal{A}(E)$ unter F^Δ tatsächlich $(E \rightarrow T)_{ohs}^{\text{op}}$ ist, da $F^\Delta = F^\Delta \circ \hat{I}$ gilt; aus gleichem Grund erhält F^Δ auch beliebige Suprema aus $T \xrightarrow{m} \mathcal{A}(E)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & v_H & & & \\
 & & & \curvearrowright & & & \\
 (E \rightarrow T)_{ohs}^{\text{op}} & \xrightleftharpoons[X_H^\Delta]{X^\Delta} & T \xrightarrow{m} \mathcal{A}(E) & \xrightleftharpoons[D_H]{(\cdot)_H} & T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E_H)^{\text{op}} & \xrightleftharpoons[X_H^\Delta]{F_H^\Delta} & (E_H \rightarrow T)^{\text{op}} \\
 & & & \curvearrowleft & & & \\
 & & & r_H & & &
 \end{array}$$

Wie wir dem Diagramm leicht entnehmen können besitzt $F_H \in (E_H \rightarrow T)^{\text{op}}$ eine Darstellung $r_H(F_H) \in (E \rightarrow T)^{\text{op}}$, die durch $r_H(F_H) = (F^\Delta \circ D_H \circ X_H^\Delta)(F_H)$ gegeben ist. Wir wollen nun nachweisen, dass die Diskretisierungen F_G von F das Grauwertbild F in dem Sinne approximieren, dass das Supremum ihrer Darstellungen gleich F ist, also $\bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} r_G(F_G) = F$ gilt.

Hierzu bemerken wir zunächst, dass $\hat{I}_{T \xrightarrow{m} \mathcal{A}(E)} \circ D_H = \hat{I}_{T \xrightarrow{m} \mathcal{A}(E)} \circ D_H \circ \hat{I}_{T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E_H)^{\text{op}}}$ gilt – vergleiche auch [Proposition 2.2.6](#). Der besseren Lesbarkeit halber möge in diesem Absatz \hat{I} abkürzend für $\hat{I}_{T \xrightarrow{m} \mathcal{A}(E)}$ und \hat{I}' abkürzend für $\hat{I}_{T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E_H)^{\text{op}}}$ stehen. Die Ungleichung $\hat{I} \circ D_H \sqsupseteq \hat{I} \circ D_H \circ \hat{I}'$ folgt direkt aus der Monotonie der Abbildungen D_H und \hat{I} und \hat{I}' zusammen mit der Tatsache, dass $\hat{I} \sqsubseteq \text{id}$ und $\hat{I}' \sqsubseteq \text{id}$ ist. Ferner gilt für alle $t \in T$ und alle $Z \in T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E_H)^{\text{op}}$, dass $\hat{I}(D_H(Z))(t) = \bigsqcup_{s \lll t} D_H(Z)(s) = \bigsqcup_{s \lll t} d_H(Z(s)) \sqsubseteq \bigsqcup_{s \lll t} d_H(\bigsqcup_{s \lll t} Z(s)) = d_H(\hat{I}'(Z)(t)) = D_H(\hat{I}'(Z))(t)$ ist. Das beweist $\hat{I} \circ D_H \sqsubseteq D_H \circ \hat{I}'$, woraus $\hat{I} \circ D_H \sqsubseteq \hat{I} \circ D_H \circ \hat{I}'$ folgt.

Nun können wir die Approximationseigenschaft unserer Diskretisierungen beweisen. Dabei beachten wir, dass wegen $F^\Delta = F^\Delta \circ \hat{I}_{T \xrightarrow{m} \mathcal{A}(E)}$ und obiger Bemerkung die Gleichung $F^\Delta \circ D_G \circ \hat{I}_{T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E_G)^{\text{op}}} = F^\Delta \circ D_G$ für alle $G \in \mathcal{F}$ gilt. Wir sehen damit

$$\begin{aligned}
 \bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} r_G(F_G) &= \bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} (F^\Delta \circ D_G \circ X_G^\Delta)(F_G) = \bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} (F^\Delta \circ D_G \circ \hat{I}_{T \xrightarrow{m} \mathfrak{P}(E_G)^{\text{op}}})(Y_G) = \\
 &= \bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} (F^\Delta \circ D_G)(Y_G) = F^\Delta(\bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} D_G(Y_G)) = F^\Delta(Y) = F.
 \end{aligned}$$

Wir halten dieses Ergebnis noch einmal zusammenfassend fest:

2.4.2 Satz: Es sei $F \in (E \rightarrow T)_{\text{ohs}}^{\text{op}}$ ein Grauwertbild, wobei E ein lokalkompakter Hausdorffraum sei und T ein vollständig distributiver Verband. Ferner werde E gemäß [Abschnitt 1.4](#) mittels eines Überdeckungssystems \mathcal{F} durch die Räume E_G ($G \in \mathcal{F}$) diskretisiert. Dann diskretisieren die oben definierten Grauwertbilder $F_G \in (E_G \rightarrow T)^{\text{op}}$ das Bild F in dem Sinne, dass das Supremum ihrer Darstellungen $r_G(F_G)$ gleich F ist, das heißt, es gilt $\bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} r_G(F_G) = F$.

In diesem Abschnitt haben wir bislang die Diskretisierung von Grauwertbildern aus strukturellen Gesichtspunkten hergeleitet. Das macht auch deutlich, dass der beschriebene Weg zur Diskretisierung von Grauwertbildern – ausgehend von der in [Abschnitt 1.4](#) beschriebenen Diskretisierung lokalkompakter Hausdorffräume – in gewissem Sinne ein natürliches Vorgehen darstellt.

Zugleich bleibt die Vorstellung von einer Diskretisierung eines Grauwertbildes eher abstrakt. Wir wollen sie konkretisieren, indem wir angeben, wie ein diskretes Grauwertbild $F_G \in (E_G \rightarrow T)^{\text{op}}$ und seine Darstellung $r_G(F_G)$ als Abbildungen operieren.

2.4.3 Lemma: Es liege die in [Satz 2.4.2](#) beschriebene Ausgangssituation vor. Für $G \in \mathcal{F}$, $x \in E$ und $H \in (E_G \rightarrow T)^{\text{op}}$ gilt dann

$$(i) \quad F_G(\text{cl}_G(x)) = \bigsqcup F([x]_G)$$

$$(ii) \quad r_G(H)(x) = \bigsqcup H(\text{cl}_G(\mathfrak{n}_G(x)))$$

$$(iii) \quad r_G(F_G)(x) = \bigsqcup F(\mathfrak{n}_G(x))$$

Beweis: Wir rechnen die genannten Gleichungen nach:

$$\begin{aligned} (i) \quad F_G(\text{cl}_G(x)) &= F_G^\Delta(Y_G)(\text{cl}_G(x)) = \\ &= \bigsqcup \{t \in T : \text{cl}_G(x) \in Y_G(t)\} = \\ &= \bigsqcup \{t \in T : \text{cl}_G(x) \in \text{cl}_G(Y(t))\} = \\ &= \bigsqcup \{t \in T : \exists z \sim_G x. z \in Y(t)\} = \\ &= \bigsqcup \{t \in T : \exists z \sim_G x. F(z) \supseteq t\} = \\ &= \bigsqcup \{F(z) : z \sim_G x\} = \bigsqcup F([x]_G) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad r_G(H)(x) &= (F^\Delta \circ d_G \circ X_G^\Delta)(H)(x) = \\
&= \bigsqcup \{t \in T : x \in d_G(X_G^\Delta(H))(t)\} = \\
&= \bigsqcup \{t \in T : x \in \bigcup X_G^\Delta(H)(t)\} = \\
&= \bigsqcup \{t \in T : x \in \bigcup \{\text{cl}_G(y) : H(\text{cl}_G(y)) \supseteq t\}\} = \\
&= \bigsqcup \{t \in T : \exists y. y \in \mathfrak{n}_G(x) \text{ und } H(\text{cl}_G(y)) \supseteq t\} = \\
&= \bigsqcup \{H(\text{cl}_G(y)) : y \in \mathfrak{n}_G(x)\} = \bigsqcup H(\text{cl}_G(\mathfrak{n}_G(x))) \\
(iii) \quad \text{Falls } H = F_G, \text{ folgt } r_G(F_G)(x) &= \bigsqcup F_G(\text{cl}_G(\mathfrak{n}_G(x))) = \bigsqcup F(\mathfrak{n}_G(x)) \text{ aus (ii)}. \quad \square
\end{aligned}$$

2.5 Diskretisierung von Grauwertbild-Operatoren

Nachdem wir im vorangegangenen Abschnitt die Diskretisierung von Grauwertbildern betrachtet haben, wollen wir nun nach der Diskretisierung von Operatoren auf Grauwertbildern fragen. Dazu werden wir einen Operator $\Phi : (E \rightarrow T)_{ohs}^{\text{op}} \rightarrow (E \rightarrow T)_{ohs}^{\text{op}}$ betrachten und im Übrigen von der in [Satz 2.4.2](#) geschilderten Situation ausgehen. Zudem wollen wir fordern, dass Φ ein Scott-stetiger Operator ist, denn diese Voraussetzung haben wir in [Satz 1.8.3](#) bereits bei der Diskretisierung von Operatoren auf binären Bildern getroffen, und es ist naheliegend, dass sich dies auf die Diskretisierung von Operatoren auf Grauwertbildern übertragen wird.

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir Diskretisierungen F_H eines Grauwertbildes F betrachtet; die Abbildung, die zu $H \in F$ jedem Grauwertbild $F \in (E \rightarrow T)_{ohs}^{\text{op}}$ die Diskretisierung $F_H \in (E_H \rightarrow T)^{\text{op}}$ zuordnet, werden wir im Folgenden mit v_H bezeichnen, das heißt, es gilt $v_H(F) := F_H$. In dem Diagramm auf Seite [90](#) ist diese Abbildung bereits eingetragen. Das folgende Diagramm stellt nun unsere Ausgangssituation dar und macht zugleich deutlich, dass für $H \in \mathcal{F}$ eine Diskretisierung von Φ_H von Φ auf natürliche Weise durch $\Phi_H := r_H \circ \Phi \circ v_H$ gegeben wäre.

$$\begin{array}{ccc}
(E \rightarrow T)_{ohs}^{\text{op}} & \xrightarrow{\Phi} & (E \rightarrow T)_{ohs}^{\text{op}} \\
\downarrow v_H & & \downarrow v_H \\
(E_H \rightarrow T)^{\text{op}} & \xrightarrow{\Phi_H} & (E_H \rightarrow T)^{\text{op}} \\
\uparrow r_H & & \uparrow r_H
\end{array}$$

Damit die Definition der Diskretisierungen Φ_H sinnvoll ist, müssen sie den Operator Φ „in einem gewissen Sinn“ approximieren. Dazu stellen wir einen Operator Φ_H zunächst als Operator auf $(E \rightarrow T)_{ohs}^{op}$ dar: Wie wir an obigem Diagramm erkennen, ist eine solche Darstellung Φ'_H von Φ_H durch $\Phi'_H := r_H \circ \Phi_H \circ v_H$ gegeben. Mit Hilfe von [Lemma 2.4.3 \(iii\)](#) erkennen wir leicht, dass stets $r_H \circ v_H \sqsubseteq id$ gilt, was zusammen mit der Monotonie von Φ zur Folge hat, dass $\Phi'_H \sqsubseteq \Phi$ für alle $H \in \mathcal{F}$ ist.

Wir wollen nun nachweisen, dass die Diskretisierungen Φ_G von Φ den Operator Φ in dem Sinne approximieren, dass das Supremum ihrer Darstellungen Φ'_G gleich Φ ist, dass also $\bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} \Phi'_G = \Phi$ gilt. Dazu betrachten wir ein Grauwertbild $F \in (E \rightarrow T)_{ohs}^{op}$ und setzen $t_G := r_G \circ v_G$; dann ist $\Phi'_G(F) = t_G(\Phi(t_G(F)))$. Wir folgern

$$\bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} \Phi'_G(F) = \bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} t_G(\Phi(t_G(F))) = \bigsqcup_{H \in \mathcal{F}} \bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} t_G(\Phi(t_H(F))),$$

wobei wir für die letzte Gleichheit ausnutzen, dass Φ monoton ist und dass die Implikation $G \preceq H \Rightarrow t_G(F) \sqsubseteq t_H(F)$ für alle $G, H \in \mathcal{F}$ gilt. Ferner ist

$$\bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} t_G(\Phi(t_H(F))) = \Phi(t_H(F))$$

nach [Satz 2.4.2](#), da Φ auf $(E \rightarrow T)_{ohs}^{op}$ operiert. Aufgrund der Scott-Stetigkeit von Φ gilt schließlich

$$\bigsqcup_{H \in \mathcal{F}} \Phi(t_H(F)) = \Phi\left(\bigsqcup_{H \in \mathcal{F}} t_H(F)\right) = \Phi(F).$$

Wir fassen dieses Ergebnis in dem folgenden Satz zusammen.

2.5.1 Satz: *Es sei $\Phi \in (E \rightarrow T)_{ohs}^{op} \rightarrow (E \rightarrow T)_{ohs}^{op}$ ein Operator auf Grauwertbildern, wobei E ein lokalkompakter Hausdorffraum sei und T ein vollständig distributiver Verband. Ferner werde E gemäß [Abschnitt 1.4](#) mittels eines Überdeckungssystems \mathcal{F} durch die Räume E_G ($G \in \mathcal{F}$) diskretisiert. Dann diskretisieren die oben definierten Operatoren $\Phi_G \in (E_G \rightarrow T)^{op} \rightarrow (E_G \rightarrow T)^{op}$ den Operator Φ in dem Sinne, dass das Supremum ihrer Darstellungen Φ'_G gleich Φ ist, das heißt, es gilt $\bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} \Phi'_G = \Phi$.*

2.6 Diskretisierung des Grauwerttraumes

Bei der Diskretisierung von Grauwertbildern sind wir bislang davon ausgegangen, dass zwar der Grundraum E unserer Bilder diskretisiert wird, der Verband T der Grauwerte

dabei jedoch unverändert bleibt. Häufig ist aber auch eine Diskretisierung der Menge der Grauwerte von Interesse. Wir wollen daher zum Abschluss dieses Kapitels der Frage nachgehen, wie sich eine Diskretisierung des Grauwerttraumes auf Grauwertbilder auswirkt.

Der Verband T der Grauwerte ist als vollständig distributiver Verband nach [Satz 2.1.4](#) insbesondere stetig. Jeder stetige Verband wird durch die Lawson-Topologie zu einem kompakten Hausdorffraum (vgl. [\[GHK⁺03\]](#), Korollar III-1.11, Seite 215). Daher gehen wir im Folgenden davon aus, dass der Verband T mit seiner Lawson-Topologie gemäß der in [Abschnitt 1.4](#) beschriebenen Methode mit Hilfe eines Überdeckungssystems \mathcal{F} durch die Räume T_G ($G \in \mathcal{F}$) diskretisiert wird.

Die *Intervall-Topologie* auf einem Verband L ist die größte Topologie, welche die obere und die untere Topologie umfasst. Für zwei Elemente $a, b \in L$ nennen wir die Menge $[a, b] := \{x \in L : a \sqsubseteq x \sqsubseteq b\}$ ein *Intervall* in L , und die Intervalle bilden eine Basis für die abgeschlossenen Mengen der Intervall-Topologie auf L . Falls L ein vollständig distributiver Verband ist, stimmt seine Lawson-Topologie mit der Intervall-Topologie überein (vgl. [\[GHK⁺03\]](#), Abschnitt VII-2). Ein typischer Kandidat für den Verband T der Grauwerte ist daher das reelle Einheitsintervall $[0, 1]$ mit seiner üblichen Topologie, das beispielsweise wie in [Abschnitt 1.2](#) geschildert diskretisiert werden kann.

Wir werden ferner Grauwertbilder aus dem Verband $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$ betrachten, wobei E eine beliebige Menge ist, und uns hier nicht auf $(E \rightarrow T)_{\text{obs}}^{\text{op}}$ beschränken. Das eröffnet die Möglichkeit, grundsätzlich die im Folgenden beschriebene Diskretisierung derjenigen aus [Abschnitt 2.4](#) nachzuschalten.

Es sei also $F \in (E \rightarrow T)^{\text{op}}$ ein Grauwertbild und $G \in \mathcal{F}$. Dann liegt bereits auf der Hand, was wir unter der zu G gehörenden Diskretisierung von F verstehen wollen, denn die Diskretisierung T_G des Grauwerttraumes T geht durch die Abbildung $\text{cl}_G : T \rightarrow T_G$ aus T hervor. Somit ist $\text{cl}_G \circ F \in (E \rightarrow T_G)$ unsere zu G gehörende Diskretisierung von F . Dabei müssen wir achtgeben, die Ordnungen nicht durcheinander zu bringen: Zwar ist T ein Verband; für den Übergang nach T_G spielt aber nur die Topologie von T eine Rolle, denn obwohl auch T_G eine geordnete Menge ist, hat diese Ordnung im Allgemeinen nichts mit der Ordnung auf T zu tun, denn T_G ist durch seine Spezialisierungsordnung geordnet. Im Gegensatz zu $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$ betrachten wir $(E \rightarrow T_G)$ daher nicht als geordnete Menge. Nur bei günstiger Wahl des Überdeckungssystems ist es möglich, die Ordnung von T auf die Diskretisierungen zu übertragen, wo sie dann als weitere Ordnung neben der

Spezialisierungsordnung besteht. Die Diskretisierung von $[0, 1]$ in [Abschnitt 1.2](#) bietet beispielsweise diese Möglichkeit, indem man bildlich gesprochen die geordnete Menge aus [Abbildung 1.1](#) um 90 Grad dreht.

Zunächst mag das widersinnig erscheinen, die (Spezialisierungs-)Ordnung von T_G zu ignorieren. Denn wie sollten wir uns eine Abbildung aus $(E \rightarrow T_G)$ als Grauwertbild vorstellen. Das ist jedoch weniger eine Frage der Diskretisierung selbst als eine Frage ihrer Interpretation. Wir könnten beispielsweise jedem $\text{cl}_G(x) \in T_G$ den Wert $\lfloor x \rfloor_G \in T$ zuordnen und T_G damit gewissermaßen als Teilmenge von T interpretieren. (Dieser Ansatz leitet sich aus [Abschnitt 2.4](#) ab, wobei wir $E = T$ setzen und das Grauwertbild $F = \text{id}$ diskretisieren.) Der Frage nach solchen Interpretationen wollen wir hier nicht weiter nachgehen. Wir betonen an dieser Stelle jedoch, dass der Raum T_G eben „mehr“ als nur eine Teilmenge von T ist, da er auch Informationen über die topologische Beschaffenheit von T enthält.

Zu jedem $G \in \mathcal{F}$ und jedem Grauwertbild $F \in (E \rightarrow T)^{\text{op}}$ haben wir nun also eine Diskretisierung $\text{cl}_G \circ F \in (E \rightarrow T_G)$ gegeben, die wir im Folgenden mit F^G bezeichnen wollen. Damit diese Definition sinnvoll ist, müssen wir nachweisen, dass die Diskretisierungen F^G von F das Bild F approximieren. Dazu brauchen wir zunächst einen Rahmen, in dem wir die Abbildungen F^G untereinander und vor allem mit F vergleichen können.

Einen solchen Rahmen können wir mit Hilfe des Verbandes $\mathcal{K}(T)$ aller kompakter Teilmengen von T herstellen. Da T ein lokalkompakter Hausdorffraum ist, stellt der Verband $\mathcal{K}(T)$ einen Teilverband des Verbandes $\mathcal{A}(T)$ dar, denn kompakte Teilmengen sind in Hausdorffräumen stets abgeschlossen, und die Bildung beliebiger Durchschnitte in $\mathcal{K}(T)$ führt nicht aus $\mathcal{K}(T)$ heraus. (Wir werden das in [Abschnitt 3.1](#) ausführen und den Verband $\mathcal{K}(X)$ genauer kennenlernen.) Die Menge $(E \rightarrow \mathcal{K}(T))$ aller Abbildungen von E in $\mathcal{K}(T)$ wird durch punktweise Ordnung ebenso wie $\mathcal{K}(T)$ zu einem vollständigen Verband.

Die Elemente von T_G , also die Abschlüsse von Punkten in T bezüglich der Topologie $\mathcal{O}(G)$ auf T , sind kompakte Teilmengen von T - das werden wir in [Proposition 3.3.2](#) beweisen. Somit gilt $T_G \subseteq \mathcal{K}(T)$ für jedes $G \in \mathcal{F}$, und alle Abbildungen F^G sind Elemente von $(E \rightarrow \mathcal{K}(T))$. Die Abbildung F selbst ist zwar kein Element von $(E \rightarrow \mathcal{K}(T))$, da aber natürlich alle einelementigen Teilmengen von T kompakt sind, können wir $F'(x) := \{F(x)\}$ für alle $x \in E$ setzen und F durch die Abbildung $F' \in (E \rightarrow \mathcal{K}(T))$

repräsentieren. Somit ist der Verband $(E \rightarrow \mathcal{K}(T))$ der Rahmen, den wir gesucht haben.

Zunächst stellen wir fest, dass $F^G \sqsubseteq F'$ für alle $G \in \mathcal{F}$ gilt: Denn für jedes $x \in E$ ist $F^G(x) = \text{cl}_G(F(x)) \sqsubseteq \{F(x)\} = F'(x)$. Und F' ist nicht nur obere Schranke aller F^G , sondern ihr Supremum, das heißt, es gilt $\bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} F^G = F'$: Denn für alle $x \in E$ gilt

$$\bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} F^G(x) = \bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} \text{cl}_G(F(x)) = \bigcap_{G \in \mathcal{F}} \text{cl}_G(F(x)) = \bigcap_{G \in \mathcal{F}} \text{cl}^G(\{F(x)\}) = \overline{\{F(x)\}} = F(x),$$

wobei wir die Gleichung von Seite 24 verwenden zusammen mit der Tatsache, dass Punkte in Hausdorffräumen abgeschlossen sind. Die Erkenntnisse dieses Abschnitts halten wir in nachstehendem Satz fest.

2.6.1 Satz: *Es sei $F \in (E \rightarrow T)^{\text{op}}$ ein Grauwertbild, wobei E eine beliebige Menge und T ein vollständig distributiver Verband sei. Ferner werde T bezüglich seiner Intervall-Topologie gemäß [Abschnitt 1.4](#) mittels eines Überdeckungssystems \mathcal{F} durch die Räume T_G ($G \in \mathcal{F}$) diskretisiert. Dann diskretisieren die oben definierten Abbildungen $F^G \in (E \rightarrow T_G)$ das Grauwertbild F in dem Sinne, dass ihr Supremum in $(E \rightarrow \mathcal{K}(T))$ gleich der oben definierten Darstellung F' von F ist, das heißt, es gilt $\bigsqcup_{G \in \mathcal{F}} F^G = F'$.*

Bewertungen

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir Modelle für Grauwertbilder und binäre Bilder kennengelernt, die in der Theorie morphologischer Bildoperatoren eine Rolle spielen. Dabei werden binäre Bilder als Teilmengen einer Grundmenge modelliert. Während dieser Ansatz für eine diskrete Grundmenge unkritisch ist, treten bei der Betrachtung von Kontinua gewisse Schwierigkeiten auf. So stellt sich beispielsweise die Frage, ob man den Rand einer Teilmenge des \mathbb{R}^2 überhaupt „sehen“ kann. Indem man sich auf regulär abgeschlossene Teilmengen beschränkt, kann man dieses Problem um den Preis anderer Schwierigkeiten etwas entschärfen. Häufig beschränkt man sich nur auf abgeschlossene Mengen, so dass im \mathbb{R}^2 dann immer noch einzelne Punkte sichtbar sind. Über die charakteristischen Funktionen übertragen sich derartige Fragestellungen auch auf Grauwertbilder.

Vor diesem Hintergrund könnten Bewertungen ein interessantes alternatives Modell für Grauwertbilder sein. Bewertungen sind, vereinfacht formuliert, so etwas wie Maße, die nur offene Mengen messen. Nach Kenntnis des Verfassers wurden sie im Kontext der Theorie morphologischer Bildoperatoren bislang nicht betrachtet. Da die vorliegende Arbeit ordnungstheoretische Aspekte betont und Bewertungen starke Bezüge zur Theorie der Bereiche haben, betrachten wir Bewertungen statt Maße. In [Abschnitt 3.2](#) werden Bewertungen genauer vorgestellt. Die zugrunde liegende Intuition ist dennoch, ein Grauwertbild als Massenverteilung auf der Grundmenge anzusehen.

Es würde den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen, eine mögliche Theorie morphologischer Bildoperatoren basierend auf Bewertungen zu beginnen. In [Abschnitt 3.4](#) wird dargelegt, dass Bewertungen zumindest auf der Ebene der Diskretisierungen in gewissem

Sinn als gleichwertig zu den Grauwertbildern aus [Kapitel 2](#) angesehen werden können. Dies überträgt sich jedoch nicht auf die „idealen“ Bilder, was gerade eine Motivation für die Betrachtung von Bewertungen ist.

Wir konzentrieren uns auf das Hauptthema des vorliegenden Textes, nämlich Diskretisierungen, und werden eine Möglichkeit zur Diskretisierung von Bewertungen im Zusammenhang mit der Diskretisierung des Grundraums gemäß [Abschnitt 1.4](#) entwickeln. Vorbereitend dazu beginnen wir mit einer Zusammenstellung wichtiger Eigenschaften kompakt-saturierter Mengen.

3.1 Kompakt-saturierte Mengen

Eine Teilmenge H eines topologischen Raumes Y nennen wir *saturiert*, wenn H Durchschnitt offener Mengen ist. Mit $\text{sat } M$ bezeichnen wir die kleinste saturierte Menge, die $M \subseteq Y$ enthält, das heißt, $\text{sat } M = \bigcap \{O \in \mathcal{O}(Y) : M \subseteq O\}$.

3.1.1 Proposition: *In jedem T_0 -Raum Y , versehen mit der Spezialisierungsordnung, gilt:*

- (a) *Jede abgeschlossene Menge $A \subseteq Y$ ist eine untere Menge, das heißt, es gilt $A = \downarrow A$.*
- (b) *Jede offene Menge $U \subseteq Y$ ist eine obere Menge, das heißt, es gilt $U = \uparrow U$.*
- (c) *Für jede beliebige Teilmenge $M \subseteq Y$ gilt $\text{sat } M = \uparrow M$.*

Beweis:

- (a) Ist $y \in \downarrow A$, so gibt es ein $a \in A$ mit $y \sqsubseteq a$, so dass $y \in \overline{\{a\}} \subseteq A$ ist.
- (b) Folgt aus (a), da $Y \setminus U$ abgeschlossen ist.
- (c) Ist $y \in \uparrow M$, so gibt es ein $m \in M$ mit $m \sqsubseteq y$. Mit (b) schließen wir, dass y in jeder offenen Menge liegt, die M enthält. Somit ist $y \in \text{sat } M$, also $\uparrow M \subseteq \text{sat } M$. Ist umgekehrt $y \notin \uparrow M$, so ist $\downarrow y \cap M = \emptyset$. Folglich ist $Y \setminus \downarrow y$ eine offene Menge, die M enthält aber nicht y , so dass $y \notin \text{sat } M$ ist. Das zeigt $\text{sat } M \subseteq \uparrow M$. \square

3.1.2 Proposition: *Ist $K \subseteq Y$ kompakt, so gilt dies auch für $\text{sat } K$.*

Beweis: Jede Überdeckung U_i ($i \in I$) von $\text{sat } K$ ist auch eine Überdeckung von K , so dass bereits endlich viele U_{i_1}, \dots, U_{i_n} die Menge K überdecken. Die Vereinigung $U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ ist also eine offene Menge, die K enthält, so dass auch $\text{sat } K$ darin liegt und daher U_{i_1}, \dots, U_{i_n} eine Überdeckung von $\text{sat } K$ ist. Damit ist $\text{sat } K$ kompakt. \square

Mit $\mathcal{Q}(Y)$ bezeichnen wir die Menge der kompakten Teilmengen von Y , die zugleich saturiert sind. Wir nennen sie auch *kompakt-saturiert*.

3.1.3 Proposition: Für zwei Mengen $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}(Y)$ ist auch $Q_1 \cup Q_2 \in \mathcal{Q}(Y)$.

Beweis: Es gibt Systeme offener Mengen U_i ($i \in I$) und V_j ($j \in J$) mit $Q_1 = \bigcap_{i \in I} U_i$ und $Q_2 = \bigcap_{j \in J} V_j$, denn Q_1 und Q_2 sind saturiert. Dann ist $Q_1 \cup Q_2 = \bigcap_{i \in I} (U_i \cup Q_2) = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} (U_i \cup V_j)$, also Durchschnitt offener Mengen und damit ebenfalls saturiert. Außerdem ist die Vereinigung zweier kompakter Mengen wieder kompakt. \square

Wir ordnen nun die Elemente von $\mathcal{Q}(Y)$ durch umgekehrte Mengeninklusion, das heißt, wir definieren

$$Q_1 \sqsubseteq Q_2 \Leftrightarrow Q_1 \supseteq Q_2$$

für alle $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}(Y)$. Als nächstes definieren wir einen Begriff, unter dessen Voraussetzung $\mathcal{Q}(Y)$ zu einer dcpo wird.

3.1.4 Definition: Ein topologischer Raum Y wird *wohlgefiltert* genannt, wenn es zu jeder Filterbasis $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Q}(Y)$ und jeder offenen Menge $U \subseteq Y$ mit $\bigcap \mathcal{C} \subseteq U$ ein $K \in \mathcal{C}$ gibt mit $K \subseteq U$.

3.1.5 Lemma: $\mathcal{Q}(Y)$ ist für jeden wohlgefilterten Raum Y eine dcpo.

Beweis: Es sei $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Q}(Y)$ eine gerichtete Menge; diese ist insbesondere eine Filterbasis. Offenbar ist $\bigcap \mathcal{C}$ saturiert. Um die Kompaktheit von $\bigcap \mathcal{C}$ nachzuweisen, betrachten wir eine offene Überdeckung \mathcal{U} von $\bigcap \mathcal{C}$. Da Y wohlgefiltert ist, gibt es eine kompakt-saturierte Menge $K \in \mathcal{C}$, die von \mathcal{U} überdeckt wird. Um K zu überdecken genügen aber endlich viele Elemente von \mathcal{U} , die ebenfalls $\bigcap \mathcal{C}$ überdecken. \square

In wohlgefilterten Räumen haben wir ferner eine einfache hinreichende Bedingung für die Tatsache, dass zwei Elemente von $\mathcal{Q}(Y)$ durch die *weit-unter*-Relation verbunden sind.

3.1.6 Proposition: *Der Raum Y sei wohlgefiltert, und für zwei kompakt-saturierte Mengen $K_1, K_2 \in \mathcal{Q}(Y)$ sowie eine offene Teilmenge $U \subseteq Y$ gelte $K_2 \subseteq U \subseteq K_1$. Dann ist $K_1 \ll K_2$ in $\mathcal{Q}(Y)$.*

Beweis: Es sei $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Q}(Y)$ gerichtet mit $K_2 \sqsubseteq \bigsqcup \mathcal{C}$, also $\bigcap \mathcal{C} \subseteq K_2$. Folglich ist $\bigcap \mathcal{C} \subseteq U$, und es gibt ein $\hat{K} \in \mathcal{C}$ mit $\hat{K} \subseteq U$, da Y wohlgefiltert ist. Dies beweist $K_1 \sqsubseteq \hat{K}$. \square

In lokalkompakten Räumen ist die Bedingung aus [Proposition 3.1.6](#) sogar notwendig. Doch bevor wir das beweisen, zeigen wir ein paar nützliche Eigenschaften von $\mathcal{Q}(Y)$ im lokalkompakten Fall.

3.1.7 Proposition: *In jedem lokalkompakten Raum Y gilt:*

- (i) *Jede Umgebung eines Punktes $y \in Y$ enthält eine kompakt-saturierte Umgebung von y .*
- (ii) *Jede Umgebung einer kompakt-saturierten Menge $K \in \mathcal{Q}(Y)$ enthält eine kompakt-saturierte Umgebung von K .*
- (iii) *Jede kompakt-saturierte Menge ist Durchschnitt all ihrer kompakt-saturierten Umgebungen.*

Beweis:

- (i) Jede offene Umgebung U des Punktes y besitzt eine kompakte Umgebung K , da Y lokalkompakt ist. Die kompakt-saturierte Menge $\text{sat } K$ (vgl. [Proposition 3.1.2](#)) ist dann ebenfalls Umgebung von y und liegt in U .
- (ii) Sei $U \subseteq Y$ offen mit $K \subseteq U$. Zu jedem $k \in K$ gibt es nach (i) eine kompakt-saturierte Umgebung $C_k \subseteq U$. Die Mengen C_k° überdecken K , so dass es endlich viele C_{k_1}, \dots, C_{k_n} gibt mit $K \subseteq (C_{k_1} \cup \dots \cup C_{k_n})^\circ \subseteq C_{k_1} \cup \dots \cup C_{k_n} \subseteq U$. Nach [Proposition 3.1.3](#) ist $C_{k_1} \cup \dots \cup C_{k_n}$ kompakt-saturiert.
- (iii) Ist K kompakt-saturiert, so ist K der Durchschnitt all seiner Umgebungen. Mit (ii) folgt dann direkt die Behauptung. \square

3.1.8 Lemma: *Es sei Y ein lokalkompakter Raum, und es seien $K_1, K_2 \in \mathcal{Q}(Y)$ mit $K_1 \ll K_2$. Dann gibt es eine offene Menge $U \subseteq Y$ mit $K_2 \subseteq U \subseteq K_1$.*

Beweis: Wir betrachten das System $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Q}(Y)$ aller kompakt-saturierten Umgebungen von K_2 . Mit [Proposition 3.1.7](#) schließen wir, dass \mathcal{C} gerichtet ist und dass $\bigsqcup \mathcal{C} = K_2$ gilt. Folglich gibt es ein $C \in \mathcal{C}$ mit $K_1 \sqsubseteq C$. Für $U := C^\circ$ gilt dann $K_2 \subseteq U \subseteq K_1$. \square

3.1.9 Satz: *Ist Y ein wohlgefilterter lokalkompakter Raum, so ist $\mathcal{Q}(Y)$ ein Bereich.*

Beweis: Nach [Lemma 3.1.5](#) ist $\mathcal{Q}(Y)$ eine dcpo. Für jede kompakt-saturierte Umgebung K' einer kompakt-saturierten Menge $K \in \mathcal{Q}(Y)$ gilt $K \subseteq K'^\circ \subseteq K'$, so dass $K' \ll K$ nach [Proposition 3.1.6](#) folgt. Mit Hilfe von [Proposition 3.1.7](#) sehen wir, dass die kompakt-saturierten Umgebungen von K eine gerichtete Menge bilden, deren Supremum gleich K ist. Damit ist die Stetigkeit von $\mathcal{Q}(Y)$ nachgewiesen. \square

3.1.10 Korollar: *Der Raum Y sei wohlgefiltert und lokalkompakt. Dann bilden die Mengen der Form $\mathcal{K}^F := \{K \in \mathcal{Q}(Y) : K \cap F = \emptyset\}$ eine Basis der Scott-Topologie auf $\mathcal{Q}(Y)$, wobei $F \subseteq Y$ abgeschlossen ist.*

Beweis: Die Scott-Offenheit von \mathcal{K}^F sieht mal leicht mit Hilfe von [Proposition 3.1.7](#) ein. Ist $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{Q}(Y)$ Scott-offen und $K \in \mathcal{V}$, so gibt es ein $K' \in \mathcal{V}$ mit $K' \ll K$. Damit gilt $K \in \mathcal{K}^{Y \setminus K'^\circ} \subseteq \mathcal{V}$, so dass die Mengen der Form \mathcal{K}^F eine Basis der Scott-Topologie auf $\mathcal{Q}(Y)$ bilden. \square

Ein wichtiger Spezialfall des Bereichs $\mathcal{Q}(Y)$ ist der Verband $\mathcal{K}(X)$ aller kompakter Teilmengen eines lokalkompakten Hausdorffraumes X . In Hausdorffräumen sind Punkte nämlich abgeschlossen, so dass sich das Komplement jeder Teilmenge von X als Vereinigung (eielementiger) abgeschlossener Teilmengen darstellen lässt, womit alle Teilmengen von X saturiert sind und $\mathcal{K}(X) = \mathcal{Q}(X)$ gilt. Das kann man auch so verstehen, dass Hausdorffräume bezüglich ihrer Spezialisierungsordnung „flach“ sind, weil je zwei verschiedene Punkte stets unvergleichbar sind. Jede Teilmenge von X ist damit natürlich auch obere, also saturierte Menge. Außerdem ist jeder Hausdorffraum wohlgefiltert:

3.1.11 Proposition: *Jeder Hausdorffraum ist wohlgefiltert.*

Beweis: Es sei X ein Hausdorffraum, $U \subseteq X$ offen in X und $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}(X)$ eine Filterbasis, die $\bigcap \mathcal{C} \subseteq U$ erfüllt. Wir nehmen nun an, dass $K \subseteq U$ für kein $K \in \mathcal{C}$ erfüllt ist. Dann bildet auch $\mathcal{C}' := \{K \cap U^c : K \in \mathcal{C}\}$ eine Filterbasis mit $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{K}(X)$, so dass

$\bigcap \mathcal{C}' \neq \emptyset$ gilt. Daraus folgt jedoch $\bigcap \mathcal{C} \cap U^c \neq \emptyset$, was im Widerspruch zur Voraussetzung $\bigcap \mathcal{C} \subseteq U$ steht. Somit ist $K \subseteq U$ für ein $K \in \mathcal{C}$. \square

Damit ist $\mathcal{K}(X)$ für jeden lokalkompakten Hausdorffraum X ein Bereich. Weil zudem der Durchschnitt endlich vieler Elemente von $\mathcal{K}(X)$ wieder in $\mathcal{K}(X)$ liegt, ist $\mathcal{K}(X)$ sogar unter der Bildung beliebiger Durchschnitte abgeschlossen und folglich ein stetiger Verband.

Wir können $\mathcal{Q}(Y)$ daher auch als Verallgemeinerung von $\mathcal{K}(X)$ auf Nicht-Hausdorff-Räume verstehen, bei der die Struktur von $\mathcal{K}(X)$ im Wesentlichen erhalten bleibt.

3.2 Stetige Bewertungen

Wir wollen im Weiteren mit stetigen Bewertungen arbeiten und stellen diese dazu im Folgenden vor. Dabei verweisen wir auch kurz auf verwandte Themenbereiche.

Ein Mengensystem $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ auf einer beliebigen Menge M nennen wir einen *Mengenverband*, wenn \mathcal{L} die leere Menge enthält und unter der Bildung endlicher Durchschnitte und Vereinigungen abgeschlossen ist. Eine Abbildung $\mu: \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]$ heißt *Bewertung* auf \mathcal{L} , wenn sie strikt, monoton und modular ist, was bedeutet, dass sie für alle $A, B \in \mathcal{L}$ den folgenden Bedingungen genügt:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$ (Striktheit)
- (ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)
- (iii) $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$ (Modularität)

Hierbei erweitern wir die Addition von $[0, \infty)$ auf $[0, \infty]$, indem wir $\infty + x = \infty = x + \infty$ für alle $x \in [0, \infty]$ setzen. Eine Bewertung μ ist *beschränkt*, wenn $\mu(\mathcal{L}) \subseteq [0, \infty)$ gilt.

Der Verband $\mathcal{O}(Y)$ aller offener Mengen eines topologischen Raumes Y ist ein Mengenverband. Eine Bewertung $\mu: \mathcal{O}(Y) \rightarrow [0, \infty]$ nennen wir *stetig*, wenn für jede gerichtete Teilmenge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{O}(Y)$ die Gleichung

$$\mu\left(\bigcup \mathcal{D}\right) = \sup\{\mu(V) : V \in \mathcal{D}\}$$

erfüllt ist, das heißt, wenn μ eine stetige Abbildung bezüglich der Scott-Topologien auf $\mathcal{O}(Y)$ und $[0, \infty]$ ist. (Da auf $[0, \infty]$ die Scott-Topologie mit der oberen Topologie übereinstimmt, sind die Scott-offenen Mengen genau die Intervalle $(x, \infty]$, wobei $x \in [0, \infty)$ ist.) Die Menge aller stetiger Bewertungen auf $\mathcal{O}(Y)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{V}(Y)$.

3.2.1 Beispiele:

- (a) Die konstante Nullfunktion ist eine stetige Bewertung.
 (b) Für jeden Punkt $y \in Y$ ist durch die Zuordnung

$$\delta_y(U) := \begin{cases} 1 & \text{falls } y \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine stetige Bewertung auf $\mathcal{O}(Y)$ definiert, die als *Punktbewertung* für den Punkt y bezeichnet wird.

- (c) Die (punktweise) gebildete Summe $\mu + \nu$ zweier stetiger Bewertungen $\mu, \nu \in \mathcal{V}(Y)$ ist stetig. Ferner ist für jedes Skalar $r \in [0, \infty]$ die Bewertung $r \cdot \mu$ stetig, wobei wir die Multiplikation von $[0, \infty)$ auf $[0, \infty]$ erweitern, indem wir $\infty \cdot x = \infty = x \cdot \infty$ für alle $x \neq 0$ und $\infty \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \infty$ setzen.
 (d) Endliche Linearkombinationen

$$\sum_{i=1}^n r_i \delta_{y_i} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \text{ sowie } r_i \in [0, \infty) \text{ und } y_i \in Y \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}$$

von Punktbewertungen sind stetig. Diese werden auch *einfache Bewertungen* genannt. Man beachte, dass nur reellwertige Koeffizienten zugelassen sind, so dass einfache Bewertungen stets beschränkt sind und ein endliches Bild haben.

- (e) Für jede Bewertung $\mu \in \mathcal{V}(Y)$ und jede stetige Abbildung $f: Y \rightarrow Y'$ ist durch

$$\nu(U) := \mu(f^{-1}(U))$$

eine stetige Bewertung $\nu \in \mathcal{V}(Y')$ gegeben, die als *Bildbewertung* von μ entlang der Abbildung f bezeichnet wird.

Es lässt sich zeigen, dass die Menge $\mathcal{V}(Y)$ vermöge punktweiser Ordnung

$$\mu \sqsubseteq \nu \quad :\Leftrightarrow \quad \mu(U) \leq \nu(U) \text{ für alle } U \in \mathcal{O}(Y)$$

eine dcpo ist. Falls Y ein Bereich ist, folgt sogar, dass auch $\mathcal{V}(Y)$ ein Bereich ist.

3.2.2 Satz (vgl. [GHK⁺03], Satz IV-9.16): *Die dcpo $\mathcal{V}(Y)$ ist für jeden Bereich Y selbst ein Bereich. Jede stetige Bewertung μ ist das gerichtete Supremum einfacher Bewertungen, die weit unter μ liegen.*

Die Theorie der stetigen Bewertungen ist so etwas wie die „Maßtheorie für Bereiche“. Zahlreiche Ergebnisse der klassischen Maßtheorie stehen unter der Prämisse, dass der Grundraum ein Hausdorffraum ist. In Bereichstheoretischen Zusammenhängen ist diese Voraussetzung aber häufig gerade nicht gegeben. Die Scott-Topologie auf dem Bereich $\mathcal{O}(Y)$ eines lokalkompakten Raumes Y ist dazu ein Beispiel, das wir bereits kennen gelernt haben. Ferner haben wir schon gesehen, dass die Spezialisierungsordnung eines Hausdorffraumes diesen zu einer Antikette macht, womit er ordnungstheoretisch wenig interessant ist. Hinzu kommt, dass in bereichstheoretischen Fragestellungen meist nur das „Maß“ offener Mengen von Bedeutung ist. Diese Aspekte haben zu der Motivation beigetragen, Bewertungen genauer zu untersuchen. Satz 3.2.2 macht darüber hinaus die eigenständige Bedeutung von Bewertungen innerhalb der Bereichstheorie deutlich.

Bezüglich des Zusammenhangs zwischen Bewertungen und Maßen wollen wir kurz festhalten, dass jedes reguläre Borel-Maß eine stetige Bewertung darstellt, wenn man es auf die offenen Mengen einschränkt: Denn die Regularität eines Borel-Maßes ν auf dem Raum Y besagt, dass $\nu(U) = \sup\{\nu(K) : K \subseteq U, K \text{ kompakt}\}$ für jede offene Menge $U \subseteq Y$ ist. Falls nun $U = \bigcup \mathcal{D}$ für eine gerichtete Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{O}(Y)$ gilt, so wird jede kompakte Menge $K \subseteq U$ von \mathcal{D} überdeckt, so dass K bereits in einem $V \in \mathcal{D}$ liegt. Es gilt dann $\sup\{\nu(K) : K \subseteq U, K \text{ kompakt}\} = \sup\{\nu(V) : V \in \mathcal{D}\}$, und aus der Regularität von ν folgt die Stetigkeit der Bewertung $\nu|_{\mathcal{O}(Y)}$.

Umgekehrt lassen sich stetige Bewertungen zwar nicht allgemein zu regulären Borel-Maßen fortsetzen, es gibt aber verschiedene Sätze, die hinreichende Bedingungen für die Existenz solcher Fortsetzungen benennen. Näheres dazu findet sich beispielsweise in [KL05], wo einige jüngere Fortsetzungssätze innerhalb eines abstrakteren Theorie-Rahmens behandelt und zusammengefasst werden. In [Eda95] zeigt EDALAT Verbindungen zwischen Bereichs- und Maßtheorie auf, die auf der Betrachtung von Bewertungen beruhen.

3.3 Diskretisierung von Bewertungen

Wir gehen im Folgenden der Frage nach, wie sich stetige Bewertungen auf einem Raum X diskretisieren lassen, wenn der lokalkompakte Hausdorffraum X gemäß [Abschnitt 1.4](#) mit Hilfe eines Überdeckungssystems \mathcal{F} von den Räumen X_F diskretisiert wird. Zunächst stellen wir dazu ein paar Hilfsmittel bereit.

3.3.1 Proposition: *Für jedes $F \in \mathcal{F}$ besitzt die Menge $N_F := \{\mathfrak{n}_F(x) : x \in X\}$ der kleinsten Umgebungen der Punkte von X die Eigenschaft, dass jede Teilmenge $M \subseteq N_F$ mit $\bigcap M \neq \emptyset$ endlich ist.*

Beweis: Zunächst halten wir fest, dass jede Teilmenge $E \subseteq F$ mit $\bigcap E \neq \emptyset$ endlich ist: Es gibt dann nämlich einen Punkt $y \in \bigcap E$, das heißt, es ist $y \in U$ für alle $U \in E \subseteq F$; andererseits ist y nur in endlich vielen Elementen von F enthalten, da F lokalendlich ist.

Auch für das System S aller nichtleerer Durchschnitte von Elementen von F gilt, dass jede Teilmenge $R \subseteq S$ mit $\bigcap R \neq \emptyset$ endlich ist: Für jedes $T \in R$ gilt dann nämlich $T = \bigcap E_T$, wobei E_T jeweils eine endlich Teilmenge von F ist. Folglich ist für die Menge $M := \{U \in F : U \in E_T \text{ für ein } T \in R\}$ der Durchschnitt $\bigcap M = \bigcap R$ nichtleer, so dass M endlich ist. Daher ist auch R endlich, denn jedes $T \in R$ ist Durchschnitt von Elementen aus M . Schließlich folgt die Aussage dieser Proposition aus der Tatsache, dass $N_F \subseteq S$ ist. \square

3.3.2 Proposition: *Für jedes $F \in \mathcal{F}$ und jedes $x \in X$ ist der Punktabschluss $\text{cl}_F(x)$ kompakt.*

Beweis: Der Punktabschluss $\text{cl}_F(x)$ wird von den kleinsten Umgebungen seiner Punkte überdeckt: $\text{cl}_F(x) \subseteq \bigcup M$ mit $M := \{\mathfrak{n}_F(y) : y \in \text{cl}_F(x)\}$. Da $y \in \text{cl}_F(x)$ äquivalent zu $x \in \mathfrak{n}_F(y)$ ist, gilt $\bigcap M \neq \emptyset$, so dass M nach [Proposition 3.3.1](#) endlich ist. Somit wird $\text{cl}_F(x)$ von endlich vielen relativ kompakten Mengen überdeckt und ist folglich kompakt. \square

3.3.3 Proposition: *Eine Teilmenge $Q \subseteq X_F$ des Raumes X_F ($F \in \mathcal{F}$) ist genau dann kompakt-saturiert, wenn Q endliche Vereinigung von Teilmengen der Form $\uparrow \text{cl}_F(x)$ mit $x \in X$ ist. Dann ist insbesondere Q selbst endlich.*

Beweis: Für jedes $x \in X$ ist die Menge $\uparrow \text{cl}_F(x) \subseteq X_F$ nach [Proposition 1.4.10](#) endlich, also kompakt, und offenbar saturiert; dies gilt ebenso für endliche Vereinigungen solcher Mengen. Falls umgekehrt $Q \subseteq X_F$ kompakt-saturiert ist, so ist Q die Vereinigung aller Mengen der Form $\uparrow \text{cl}_F(x)$, die in Q enthalten sind. Diese Menge sind offen in X_F , so dass aufgrund der Kompaktheit von Q eine endliche Vereinigung von Mengen der Form $\uparrow \text{cl}_F(x)$ genügt, um Q zu bilden. \square

3.3.4 Proposition: *Es seien U, W offen in X mit $W \ll U$. Dann existieren ein $F \in \mathcal{F}$ und eine F -offene Menge $V \subseteq X$ derart, dass $W \subseteq V \ll U$ ist.*

Beweis: Da $\mathcal{O}(X)$ ein stetiger Verband ist (vgl. [Abschnitt 1.6](#)) und $W \ll U$ gilt, gibt es eine offene Menge $U' \subseteq X$ mit $W \ll U' \ll U$. Wegen $W \ll U'$ gibt es eine kompakte Menge $K \subseteq X$ mit $W \subseteq K \subseteq U'$. Da $\bigcup \mathcal{F}$ Basis der Topologie auf X ist, kann U' als Vereinigung von Elementen aus $\bigcup \mathcal{F}$ dargestellt werden, die dann K überdecken. Folglich gibt es endlich viele Elemente $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{F}$ und zu jedem $i \in \{1, \dots, n\}$ eine G_i -offene Mengen $U'_i \in G_i$ derart, dass $U'_i \subseteq U'$ und $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U'_i$ ist. Wir wählen ein $F \in \mathcal{F}$ mit $G_i \prec F$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$; dann sind auch alle U'_i Elemente von F , so dass für $V := \bigcup_{i=1}^n U'_i$ schließlich $V \in \mathcal{O}(F)$ sowie $W \subseteq V \subseteq U'$ gilt. Hieraus folgt $W \subseteq V \ll U$. \square

Es sei nun μ eine stetige Bewertung auf X und $F \in \mathcal{F}$. Dann bezeichnen wir mit μ_F die Bildbewertung von μ entlang der Quotientenabbildung cl_F , das heißt, μ_F ist für alle offenen Mengen $V \subseteq X_F$ durch $\mu_F(V) := \mu(\text{cl}_F^{-1}(V))$ gegeben. Die Bewertung μ_F ist der naheliegende Kandidat für die zu $F \in \mathcal{F}$ gehörende Diskretisierung von μ . Das folgende Lemma ist dabei ein wichtiger Bestandteil der noch nachzuweisenden Approximationseigenschaft der Bewertungen μ_F .

3.3.5 Lemma: *Es sei μ eine stetige Bewertung auf X , U offen in X und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $F \in \mathcal{F}$ und eine offene Menge $V \subseteq X_F$ derart, dass $\text{cl}_F^{-1}(V) \ll U$ und $\mu(U) - \mu_F(V) < \varepsilon$ ist.*

Beweis: Der Verband $\mathcal{O}(X)$ der offenen Mengen von X ist stetig, so dass U das gerichtete Supremum aller $W \in \mathcal{O}(X)$ mit $W \ll U$ ist. Da μ eine stetige Bewertung ist, folgt $\mu(U) = \mu(\bigcup_{W \ll U} W) = \sup_{W \ll U} \mu(W)$. Es existiert daher ein $W \in \mathcal{O}(X)$ mit $W \ll U$ und $\mu(U) - \varepsilon < \mu(W)$. Nach [Proposition 3.3.4](#) gibt es dann ein $F \in \mathcal{F}$ und eine F -offene Menge $S \subseteq X$ mit $W \subseteq S \ll U$. Mit $V := \text{cl}_F(S)$ ist $S = \text{cl}_F^{-1}(V) \ll U$ und $\mu(W) \leq \mu(S) = \mu(\text{cl}_F^{-1}(V)) = \mu_F(V)$, also $\mu(U) - \mu_F(V) < \varepsilon$. \square

In [Abschnitt 3.1](#) haben wir ausgeführt, dass sich die Menge $\mathcal{K}(X)$ aller kompakter Teilmengen von X durch umgekehrte Mengeninklusion ($K_1 \sqsubseteq K_2 \Leftrightarrow K_2 \subseteq K_1$) ordnen lässt und so zu einem (stetigen) Bereich wird. Dabei ist $K_U := \{K \in \mathcal{K}(X) : K \subseteq U\}$ für jede offene Menge $U \subseteq X$ (Scott-)offen in $\mathcal{K}(X)$, und diese Mengen K_U bilden eine Basis der (Scott-)Topologie auf $\mathcal{K}(X)$. Wir wollen den Bereich $\mathcal{K}(X)$ als Rahmen nutzen, in dem wir die Bewertungen μ_F mit der Bewertung μ vergleichen und ihre Approximationseigenschaft formulieren können. Die folgende Proposition stellt die passenden Verbindungen her.

3.3.6 Proposition:

- (a) Die Abbildung $s: X \rightarrow \mathcal{K}(X)$ mit $s(x) = \{x\}$ ist eine Einbettung von X in $\mathcal{K}(X)$.
- (b) Für jedes $F \in \mathcal{F}$ ist durch die Zuordnung $q_F(\text{cl}_F(x)) := \overline{\mathfrak{n}_F(x)}$ eine stetige Abbildung $q_F: X_F \rightarrow \mathcal{K}(X)$ definiert.

Beweis:

- (a) Offenbar ist s eine Bijektion zwischen X und $s(X)$. Für jede basis-offene Menge $K_U \subseteq \mathcal{K}(X)$ gilt $s^{-1}(K_U) = U$, so dass s stetig ist. Zugleich ist s offen als Abbildung auf ihr Bild, denn für jede offene Menge $U \subseteq X$ gilt $s(U) = s(X) \cap K_U$.
- (b) Da $u \in \text{cl}_F(v) \Leftrightarrow v \in \mathfrak{n}_F(u)$ für alle $u, v \in X$ gilt, ist $\text{cl}_F(u) = \text{cl}_F(v)$ äquivalent zu $\mathfrak{n}_F(u) = \mathfrak{n}_F(v)$, so dass q_F wohldefiniert ist. Betrachten wir eine basis-offene Menge $K_U \subseteq \mathcal{K}(X)$, so ist $q_F^{-1}(K_U)$ eine obere und damit offene Menge in X_F , denn aus $\text{cl}_F(x) \in q_F^{-1}(K_U)$ und $\text{cl}_F(y) \supseteq \text{cl}_F(x)$ folgt einerseits $\overline{\mathfrak{n}_F(x)} \subseteq U$ und andererseits $\mathfrak{n}_F(y) \subseteq \mathfrak{n}_F(x)$, also insgesamt $\overline{\mathfrak{n}_F(y)} \in K_U$. Damit haben wir die Stetigkeit von q_F nachgewiesen. \square

[Proposition 3.3.6](#) gestattet uns, Bewertungen auf X sowie auf allen X_F in Bewertungen auf $\mathcal{K}(X)$ zu überführen: Einer Bewertung μ auf X ordnen wir eine Bewertung $\hat{\mu}$ auf $\mathcal{K}(X)$ zu, indem wir $\hat{\mu}(U) := \mu(s^{-1}(U))$ für alle offene Mengen $U \subseteq \mathcal{K}(X)$ setzen, also die Bildbewertung entlang s verwenden. Entsprechend ordnen wir einer Bewertung ν auf X_F eine Bewertung $\hat{\nu}$ auf $\mathcal{K}(X)$ zu, indem wir $\hat{\nu}(U) := \nu(q_F^{-1}(U))$ für alle offene Mengen $U \subseteq \mathcal{K}(X)$ setzen.

An dieser Stelle sind ein paar Erläuterungen zu den Abbildungen q_F sinnvoll, denn im Vergleich zur Abbildung s liegt hier nicht unbedingt auf der Hand, wie man diese Abbildung findet. Unser Ziel ist eine Übersetzung von Bewertungen auf X_F in Bewertungen

auf $\mathcal{K}(X)$. Der natürliche Weg dazu ist der zu einer passenden Bildbewertung, so dass wir eine stetige Abbildung von X_F nach $\mathcal{K}(X)$ suchen. Dabei ist es nützlich, das Analogon von $\mathcal{K}(X)$ in Bezug auf X_F zu betrachten, nämlich den Bereich $\mathcal{Q}(X_F)$, den wir in [Abschnitt 3.1](#) näher untersucht haben. (Die Ausführungen dort erläutern auch, dass die Betrachtung von $\mathcal{K}(X_F)$ ungeeignet wäre, da X_F kein Hausdorffraum ist.) Das folgende Diagramm hilft, die Situation zu beleuchten.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\text{cl}_F} & X_F \\
 \downarrow s & & \downarrow s_F \\
 \mathcal{K}(X) & \xleftarrow{\overline{\text{cl}_F^{-1}}} & \mathcal{Q}(X_F)
 \end{array}$$

Der Raum X ist mittels der Abbildung s in den Bereich $\mathcal{K}(X)$ eingebettet. Ferner geht der Raum X_F aus X vermöge der Quotientenabbildung cl_F hervor. In [Abschnitt 1.9](#) haben wir festgestellt, dass X_F ein nüchterner Raum ist. Damit ist er insbesondere wohlgefiltert (siehe dazu beispielsweise Satz II-1.21 in [\[GHK⁺03\]](#)), so dass $\mathcal{Q}(X_F)$ ein Bereich ist. Der Einbettung s entspricht die Einbettung s_F , die für alle $\text{cl}_F(x) \in X_F$ durch $s_F(\text{cl}_F(x)) = \text{sat}(\{\text{cl}_F(x)\}) = \uparrow \text{cl}_F(x)$ gegeben ist. (Tatsächlich arbeitet die Abbildung s genauso, nur dass hier $\text{sat}(\{x\}) = \{x\}$ für alle $x \in X$ gilt, da X ein Hausdorffraum ist.) Damit bleibt schließlich noch der Weg von $\mathcal{Q}(X_F)$ nach $\mathcal{K}(X)$ zu klären. Da wir mit cl_F von X nach X_F kommen, versuchen wir es mit cl_F^{-1} . Dank [Proposition 3.3.3](#) genügt dabei die Betrachtung von Mengen der Form $\uparrow \text{cl}_F(x)$. Es ist

$$\text{cl}_F^{-1}(\uparrow \text{cl}_F(x)) = \{y \in X : \text{cl}_F(y) \supseteq \text{cl}_F(x)\} = \{y \in X : x \sqsubseteq_F y\} = \mathfrak{n}_F(x)$$

Zwar ist $\mathfrak{n}_F(x)$ nicht kompakt, aber relativ kompakt, so dass wir nach cl_F^{-1} einfach noch zum Abschluss übergehen und diese Abbildung insgesamt mit $\overline{\text{cl}_F^{-1}}$ bezeichnen. Die gesuchte Abbildung q_F ist nun die Verkettung der Abbildungen s_F und $\overline{\text{cl}_F^{-1}}$, und wir haben gerade gesehen, dass $q_F(\text{cl}_F(x)) = \overline{\mathfrak{n}_F(x)}$ ist.

Zwecks einfacherer Notation definieren wir noch die Abbildungen $r_F: X \rightarrow \mathcal{K}(X)$ für alle $F \in \mathcal{F}$ durch $r_F := q_F \circ \text{cl}_F$. Dann ist $r_F(x) = \overline{\mathfrak{n}_F(x)}$ für alle $x \in X$.

3.3.7 Lemma: *Es sei U offen in $\mathcal{K}(X)$ und K kompakt in X mit $K \subseteq s^{-1}(U)$. Dann gibt es ein $F \in \mathcal{F}$ derart, dass $r_F(K) \subseteq U$ ist.*

Beweis: Die Menge U ist Vereinigung von offene Mengen der Form K_V , deren Urbilder $V = s^{-1}(K_V)$ dann K überdecken. Betrachten wir also ein $k \in K$, so liegt dieses in einem V_k mit $K_{V_k} \subseteq U$. Des Weiteren gibt es nach Lemma 1.4.5 ein $G_k \in \mathcal{F}$ und eine G_k -abgeschlossene, kompakte Umgebung A_k von k derart, dass $A_k \subseteq V_k$ und folglich $A_k \in K_{V_k}$ ist.

Das Innere eines jeden A_k ist Vereinigung von Elementen aus $\bigcup \mathcal{F}$, und die A_k überdecken K , so dass es endlich viele offene Mengen $W_1, \dots, W_n \subseteq X$ derart gibt, dass $K \subseteq W_1 \cup \dots \cup W_n$ ist und für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Menge W_i in einem A_{k_i} liegt und H_i -offen für ein $H_i \in \mathcal{F}$ ist. Es sei $F \in \mathcal{F}$ eine gemeinsame Verfeinerung der Überdeckungen $G_{k_1}, \dots, G_{k_n}, H_1, \dots, H_n$. Ein $k \in K$ liegt in einem W_i für ein $i \in \{1, \dots, n\}$, so dass $\mathfrak{n}_F(k) \subseteq W_i$ gilt, da W_i eine F -offene Menge ist, und folglich $r_F(k) \subseteq A_{k_i}$ gilt, da A_{k_i} eine F -abgeschlossene Menge ist. Insgesamt haben wir $r_F(k) \in K_{V_{k_i}}$ und damit $r_F(k) \in U$ nachgewiesen. \square

Der folgende Satz belegt nun, dass die Diskretisierungen μ_F einer stetigen Bewertung μ auf X diese approximieren, und zwar in dem Sinne, dass das Supremum ihrer Darstellungen in $\mathcal{K}(X)$ die Darstellung von μ ist.

3.3.8 Satz: *Es sei μ eine stetige Bewertung auf X , und für jedes $F \in \mathcal{F}$ sei μ_F die Bild-Bewertung von μ entlang cl_F . Dann gilt für die zugehörigen Bewertungen auf $\mathcal{K}(X)$, dass $\hat{\mu} = \bigsqcup_{F \in \mathcal{F}} \hat{\mu}_F$ ist.*

Beweis: Es sei U offen in $\mathcal{K}(X)$. Dann ist $\hat{\mu}_F(U) = \underline{\mu}_F(q_F^{-1}(U)) = \mu(\text{cl}_F^{-1}(q_F^{-1}(U))) = \mu(r_F^{-1}(U))$. Betrachten wir ein $x \in r_F^{-1}(U)$, so gilt $\mathfrak{n}_F(x) \in U$ und folglich $s(x) \in U$, da $\overline{\mathfrak{n}_F(x)} \sqsubseteq \{x\} = s(x)$ und U eine obere Menge ist. Wir haben damit $r_F^{-1}(U) \subseteq s^{-1}(U)$ nachgewiesen, was wiederum $\mu(r_F^{-1}(U)) \leq \mu(s^{-1}(U))$ und damit $\hat{\mu}_F(U) \leq \hat{\mu}(U)$ beweist. Es ist also $\hat{\mu}$ obere Schranke aller $\hat{\mu}_F$.

Erneut sei U offen in $\mathcal{K}(X)$ und damit $O := s^{-1}(U)$ offen in X . Ferner sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Lemma 3.3.5 ein $F \in \mathcal{F}$ und ein V offen in X_F mit $\text{cl}_F^{-1}(V) \ll O$ und $\mu(O) - \mu_F(V) < \varepsilon$. Wir setzen $S := \text{cl}_F^{-1}(V)$, und wegen $S \ll O$ gibt es eine kompakte Menge $K \subseteq X$ mit $S \subseteq K \subseteq O$. Nach Lemma 3.3.7 gibt es daher ein $G \in \mathcal{F}$ derart, dass $r_G(K) \subseteq U$ und damit insbesondere $S \subseteq K \subseteq r_G^{-1}(U)$ ist.

Es gilt nun $\hat{\mu}_G(U) = \mu(r_G^{-1}(U)) \geq \mu(S) = \mu_F(V)$. Des Weiteren ist $\hat{\mu}(U) = \mu(s^{-1}(U)) = \mu(O)$ und $\mu(O) - \mu_F(V) < \varepsilon$. Zusammen genommen ergibt das $\hat{\mu}(U) - \hat{\mu}_G(U) < \varepsilon$. Da U und ε beliebig gewählt waren, sehen wir insgesamt, dass $\hat{\mu} = \bigsqcup_{F \in \mathcal{F}} \hat{\mu}_F$ ist. \square

3.4 Vergleich zwischen Bewertungen und Grauwertbildern

Wir haben stetige Bewertungen als alternative Möglichkeit zur Modellierung von Grauwertbildern vorgestellt. Zugleich haben wir in [Kapitel 2](#) einen Einblick in die vorhandene Theorie zu Grauwertbildern erhalten, die auf dem dort beschriebenen Modell für Grauwertbilder aufbaut. Es ist natürlich sinnvoll, nach Verbindungen zwischen den beiden Modellen zu suchen. Dazu werden wir im Folgenden darlegen, dass die beiden Ansätze auf der Ebene der Diskretisierungen in gewissem Sinn als gleichwertig anzusehen sind. Anschließend werden wir sehen, dass sich dies jedoch nicht auf die Ebene der „idealen“ Bilder übertragen lässt.

Wir starten auf der Seite der Bewertungen und betrachten eine stetige Bewertung ν auf X_F , wobei X_F die zu $F \in \mathcal{F}$ gehörende Diskretisierung des Raumes X vermöge eines Überdeckungssystems \mathcal{F} gemäß [Abschnitt 1.4](#) sei. Für jeden Punkt $x \in X_F$ (wobei natürlich $x = \text{cl}_F(y)$ für ein $y \in X$ gilt) sind die Mengen $\uparrow x$ und $\uparrow x \setminus \{x\}$ obere und damit offene Mengen in X_F . Wir können daher jedem $x \in X_F$ einen Wert

$$w_\nu(x) := \nu(\uparrow x) - \nu(\uparrow x \setminus \{x\})$$

zuordnen. Daraus resultiert eine Abbildung $w_\nu: X_F \rightarrow [0, \infty]$, $x \mapsto w_\nu(x)$. Diese Abbildung w_ν können wir als diskretes Grauwertbild im Sinne von [Abschnitt 2.4](#) ansehen, denn es ist $w_\nu \in (X_F \rightarrow [0, \infty])$.

Umgekehrt können wir zu einer Abbildung $w: X_F \rightarrow [0, \infty]$ eine stetige Bewertung ν_w auf X_F finden. Dazu legen wir ν_w zunächst auf allen kompakt-saturierten Teilmengen $Q \subseteq X_F$ fest, indem wir

$$\nu_w(Q) := \sum_{x \in Q} w(x)$$

setzen. Diese Definition ist sinnvoll, da Q nach [Proposition 3.3.3](#) stets eine endliche offene Teilmenge von X_F ist. Eine beliebige offene Menge $U \subseteq X_F$ ist das gerichtete Supremum aller kompakt-saturierter Mengen $Q \subseteq U$. Daher können wir ν_w zu einer stetig Bewertung auf X_F fortsetzen, indem wir

$$\nu_w(U) := \sup_{Q \subseteq U} \nu_w(Q)$$

für alle offenen Mengen $U \subseteq X_F$ definieren. Diesen Sachverhalt stellen wir abkürzend durch folgenden Ausdruck dar, wobei δ_x die Punktbewertung für $x \in X_F$ ist:

$$\nu_w = \sum_{x \in X_F} w(x) \delta_x$$

Falls die Abbildung w mittels einer stetigen Bewertung ν auf X_F gebildet wurde, falls also $w = w_\nu$ gilt, so gewinnen wir diese Bewertung als $\nu_w = \nu$ zurück: Um das nachzuvollziehen müssen wir sehen, dass $\nu_w(Q) = \sum_{x \in Q} w(x) = \nu(Q)$ für alle kompakt-saturierten Mengen $Q \subseteq X_F$ gilt. Das ist per Induktion über die Mächtigkeit $|Q|$ von Q möglich. Den Induktionsanfang liefert die Menge $Q = \{q\}$ für ein $q \in X_F$, denn hier gilt $\nu_w(Q) = w(q) = \nu(\uparrow q) - \nu(\uparrow q \setminus \{q\}) = \nu(\{q\})$. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, die Menge $Q \subseteq X_F$ habe Mächtigkeit $|Q| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann wählen wir ein $q \in Q$ das minimal in Q ist. Damit folgt $Q = Q \setminus \{q\} \cup \uparrow q$, so dass wir $\nu(Q) = \nu(Q \setminus \{q\}) + \nu(\uparrow q) - \nu(Q \setminus \{q\} \cap \uparrow q) = \nu(Q \setminus \{q\}) + \nu(\uparrow q) - \nu(\uparrow q \setminus \{q\}) = \nu_w(Q \setminus \{q\}) + w(q) = \nu_w(Q)$ folgern können.

Trivialerweise gewinnen wir eine Abbildung w als $w = w_\nu$ zurück, wenn die Bewertung ν mittels w als $\nu = \nu_w$ gebildet wurde. Diese Beobachtungen halten wir zusammenfassend in der folgenden Proposition fest.

3.4.1 Proposition: *Zu jedem $F \in \mathcal{F}$ seien die Abbildungen β_F und γ_F wie folgt gegeben:*

$$\beta_F: (X_F \rightarrow [0, \infty]) \rightarrow \mathcal{V}(X_F) \quad \gamma_F: \mathcal{V}(X_F) \rightarrow (X_F \rightarrow [0, \infty])$$

$$w \mapsto \sum_{x \in X_F} w(x) \delta_x \quad \nu \mapsto (x \mapsto \nu(\uparrow x) - \nu(\uparrow x \setminus \{x\}))$$

Dann sind β_F und γ_F jeweils zueinander inverse Bijektionen; alle Abbildungen β_F sind zudem monoton.

Der Beschreibungswechsel, den die vorstehende Proposition darlegt, lässt sich nicht allgemein auf Bewertungen aus $\mathcal{V}(X)$ bzw. Grauwertbilder aus $(X \rightarrow [0, \infty])$ übertragen. Das können wir exemplarisch an Grauwertbildern aus $\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ nachvollziehen: Eine sinnvolle Möglichkeit, einem Grauwertbild $w \in (X \rightarrow [0, \infty])$ eine Bewertung auf \mathbb{R} zuzuordnen ergibt sich aus dem Ansatz, w als Dichte einer Verteilungsfunktion aufzufassen. Das „Maß“ einer offenen Menge ist dann – unter geeigneten Voraussetzungen – das Integral von w über dieser offenen Menge. Damit ergibt sich sofort, dass einzelne Punkte aus \mathbb{R} das Maß Null haben. Wenn wir nun zu einer Diskretisierung D_i von \mathbb{R} übergehen, wie wir sie in [Abschnitt 1.2](#) kennen gelernt haben, so müssen wir konsequenterweise den Elemente von $\text{cl}_i(x) \in D_i$, die einelementige Teilmengen von \mathbb{R} sind – also den Randpunkten der Überdeckungsintervalle von F_i –, den Wert Null zuweisen, da hier die Maße der Mengen $\uparrow \text{cl}_i(x)$ und $\uparrow \text{cl}_i(x) \setminus \{\text{cl}_i(x)\}$ gleich sind. Tatsächlich erhält $\text{cl}_i(x)$

bei der in [Abschnitt 2.4](#) beschriebenen Diskretisierung nach [Lemma 2.4.3](#) jedoch den Wert $\sup w([x]_i)$, der im Allgemeinen nicht Null ist.

Die geschilderte Diskrepanz lässt sich möglicherweise durch einen anderen Diskretisierungsansatz entschärfen – im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden wir das nicht mehr thematisieren. Andererseits ist die in [Kapitel 2](#) geschilderte Diskretisierung eine konsequente Weiterführung der Diskretisierung von binären Bildern durch abgeschlossene Mengen, wie sie in [Abschnitt 1.8](#) dargestellt wurde. Es scheint daher sinnvoll, bereits an dieser Stelle die Bedeutung von Bewertungen genauer zu beleuchten. Betrachten wir beispielsweise die charakteristische Funktion eines einzelnen Punktes in \mathbb{R}^2 , so impliziert die Auffassung, diese Funktion als Grauwertbild anzusehen, dass der einzelne Punkt „sichtbar“ ist. Fasst man die Funktion hingegen als Dichte einer Verteilungsfunktion auf, deren zugehöriges Maß das Grauwertbild sein soll, so ist der einzelne Punkt nicht sichtbar. Vor diesem Hintergrund sind dann insbesondere die Konstruktionen bekannter Bildoperatoren neu zu überdenken.

Literaturverzeichnis

- [Eda95] EDALAT, Abbas: Dynamical systems, measures, and fractals via domain theory. In: *Information and Computation* 120 (1995), Nr. 1, S. 32–48
- [GHK⁺03] GIERZ, Gerhard ; HOFMANN, Karl H. ; KEIMEL, Klaus ; LAWSON, Jimmie. D. ; MISLOVE, Michael ; SCOTT, Dana S.: *Continuous Lattices and Domains*. 1. Auflage. Cambridge University Press, 2003 (Encyclopedia of mathematics and its applications 93)
- [Hei94] HEIJMANS, Henk J. A. M.: *Morphological Image Operators*. 1. Auflage. Academic Press, 1994 (Advances in Electronics and Electron Physics 24)
- [Kel55] KELLEY, John L.: *General Topology*. 1. Auflage. D. van Nostrand, 1955 (The University Series in Higher Mathematics)
- [KKM90] KHALIMSKY, Efim ; KOPPERMAN, Ralph D. ; MEYER, Paul R.: Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets. In: *Topology and its Applications* 36 (1990), Nr. 1, S. 1–17
- [KKM91] KONG, T. Yung ; KOPPERMAN, Ralph D. ; MEYER, Paul R.: A topological approach to digital topology. In: *American Mathematical Monthly* 98 (1991), Nr. 10, S. 901–917
- [KKW01] KENNEDY, Judy A. ; KOPPERMAN, Ralph D. ; WILSON, Richard G.: The chainable continua are the spaces approximated by finite COTS. In: *Applied General Topology* 2 (2001), Nr. 2, S. 165–177
- [KL05] KEIMEL, Klaus ; LAWSON, Jimmie D.: Measure extension theorems for T_0 -spaces. In: *Topology and its Applications* (2005), Nr. 149, S. 57–83
- [Kop05] KOPPERMAN, Ralph D.: On storage of topological information. In: *Discrete Applied Mathematics* 147 (2005), Nr. 2-3, S. 287–300
- [KTW03] KOPPERMAN, Ralph D. ; TKACHUK, Vladimir V. ; WILSON, Richard G.: The approximation of compacta by finite T_0 -spaces. In: *Quaestiones Mathematicae* 26 (2003), Nr. 3, S. 355–370

- [KW97] KOPPERMAN, Ralph. D. ; WILSON, Richard. G.: Finite Approximation of Compact Hausdorff Spaces. In: *Topology Proceedings* 22 (Summer) (1997), S. 175–200
- [KW04] KOPPERMAN, Ralph. D. ; WILSON, Richard. G.: On the role of finite, hereditarily normal spaces and maps in the genesis of compact Hausdorff spaces. In: *Topology and its Applications* 135 (2004), Nr. 1-3, S. 265–275
- [Mat75] MATHERON, Georges: *Random Sets and Integral Geometry*. 1. Auflage. John Wiley & Sons, 1975 (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics 23)
- [Ran52] RANEY, George N.: Completely distributive complete lattices. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 3 (1952), S. 667–680
- [Ran61] RANEY, George N.: Tight Galois connections and complete distributivity. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 97 (1961), S. 418–426
- [Rin75] RINOW, Willi: *Lehrbuch der Topologie*. 1. Auflage. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1975 (Hochschulbücher für Mathematik 79)
- [Smy95] SMYTH, Michael B.: Semi-metrics, closure spaces and digital topology. In: *Theoretical Computer Science* 151 (1995), Nr. 1, S. 257–276
- [SW02] SMYTH, Michael B. ; WEBSTER, Julian: Finite approximation of stably compact spaces. In: *Applied General Topology* 3 (2002), Nr. 2, S. 197–223
- [Web97] WEBSTER, Julian: Connectivity of stably compact spaces. In: *Topology Proceedings* 22 (Summer) (1997), S. 583–608

Symbolverzeichnis

\preceq	$F \preceq G$ bezeichnet die Tatsache, dass die Überdeckung G eine Verfeinerung der Überdeckung F ist.	21
\ll	Die „weit unter“-Relation	39
\gg	Die „weit über“-Relation	66
\lll	Die „weit weit unter“-Relation	65
\ggg	Die „weit weit über“-Relation	65
\perp	Kleinstes Element einer geordneten Menge	38
\top	Größtes Element einer geordneten Menge	38
$\downarrow x$	Menge aller Punkte kleiner oder gleich x	14
$\uparrow x$	Menge aller Punkte größer oder gleich x	14
$\sqcap M$	Infimum der Menge M	39
$\sqcup M$	Supremum der Menge M	39
$[x]_F$	Äquivalenzklasse von x bezüglich \sim_F	22
\sqsubseteq_F	Einerseits Spezialisierungs-Relation bezüglich der Topologie $\mathcal{O}(F)$ auf dem Grundraum X – dort keine Ordnung. Andererseits Spezialisierungsordnung auf dem Faktorraum X_F	21
\sim_F	Äquivalenzrelation bezüglich der Topologie $\mathcal{O}(F)$. Es ist $x \sim_F y \Leftrightarrow (x \sqsubseteq_F y) \wedge (y \sqsubseteq_F x)$	21
$\mathcal{A}(X)$	System aller abgeschlossener Teilmengen des topologischen Raumes X	42
$\text{cl}^F(M)$	Abschluss der Menge M bezüglich der Topologie $\mathcal{O}(F)$	24
$\text{cl}_F(x)$	Abschluss von $\{x\}$ bezüglich der Topologie $\mathcal{O}(F)$	21
δ_y	Punktbewertung für den Punkt y	103
$(E \rightarrow T)_{ohs}$	Nach oben halbstetige Abbildungen von E in T	88
$\mathcal{F}_{G_1, \dots, G_n}^K$	Basis-Mengen der Hit-or-Miss-Topologie	44
F^∇	Isomorphismus von $T \xrightarrow{\sqcap} \mathfrak{B}(E)^{\text{op}}$ auf $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$	83
F^Δ	Isomorphismus von $T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{B}(E)^{\text{op}}$ auf $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$	83
$\check{\text{I}}(X)$	Kleinste \sqcap -erhaltende Abbildung, die größer oder gleich $X \in T \xrightarrow{m} L$ ist	76
$\hat{\text{I}}(X)$	Größte \sqcup -erhaltende Abbildung, die kleiner oder gleich $X \in T \xrightarrow{m} L$ ist	75

$\mathcal{K}(X)$	System aller kompakter Teilmengen des topologischen Raumes X	101
\overline{M}	Topologischer Abschluss der Menge M	
M^c	Komplement der Menge M	
M°	Topologisches Inneres der Menge M	
$n_F(x)$	Kleinste Umgebung des Punktes x bezüglich der Topologie $\mathcal{O}(F)$	21
$\mathcal{O}(F)$	Von der Überdeckung F als Subbasis erzeugte Topologie	21
$\mathcal{O}(X)$	System aller offener Teilmengen des topologischen Raumes X	13
$\mathfrak{P}(M)$	Potenzmenge der Menge M	
Φ^∇	Auf $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$ gelifteter Operator φ	86
Φ^Δ	Auf $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$ gelifteter Operator φ	86
φ^∇	Auf $(T \xrightarrow{\square} L) \xrightarrow{m} (T \xrightarrow{\square} L)$ gelifteter Operator φ	80
φ^\diamond	Auf $(T \xrightarrow{m} L) \xrightarrow{m} (T \xrightarrow{m} L)$ gelifteter Operator φ	79
φ^Δ	Auf $(T \xrightarrow{\sqcup} L) \xrightarrow{m} (T \xrightarrow{\sqcup} L)$ gelifteter Operator φ	80
P^{op}	Dual der geordneten Menge P	13
$\mathcal{Q}(X)$	System der kompakt-saturierten Teilmengen des topologischen Raumes X	99
sat M	Saturierung der Menge M	98
$T \xrightarrow{\square} L$	Verband der \square -erhaltenden Abbildungen zwischen den vollständigen Verbänden T und L	76
$T \xrightarrow{m} L$	Verband der monotonen Abbildungen zwischen den vollständigen Verbänden T und L	75
$T \xrightarrow{\sqcup} L$	Verband der \sqcup -erhaltenden Abbildungen zwischen den vollständigen Verbänden T und L	75
\mathcal{U}_K	Alle offenen Mengen, welche die kompakte Menge K enthalten	41
$\mathcal{V}(X)$	Menge aller stetiger Bewertungen auf $\mathcal{O}(X)$	103
X_F	Der T_0 -Raum X / \sim_F	22
X^∇	Isomorphismus von $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$ auf $T \xrightarrow{\square} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$	83
X^Δ	Isomorphismus von $(E \rightarrow T)^{\text{op}}$ auf $T \xrightarrow{\sqcup} \mathfrak{P}(E)^{\text{op}}$	83

Index

Kursiv gesetzte Seitenzahlen verweisen auf Definitionen.

Symbole

- \sqcap -irreduzibles Element 69
- \sqcup -irreduzibles Element 69
- \sim_F -saturierte Menge 22

A

Abbildung

- anti-extensive . (siehe: anti-extensive Abbildung)
- extensive (siehe: extensive Abbildung)
- halbstetige
 - nach oben (siehe: nach oben halbstetige Abbildung)
- idempotente (siehe: idempotente Abbildung)

Adjungierte

- obere (siehe: obere Adjungierte)
- untere ... (siehe: untere Adjungierte)

Adjunktion 48, 49, 53, 77, 78, 85

Alexandroff-Topologie 14, 16, 18, 23

ansteigende Familie 80

anti-extensive Abbildung 50

Approximation 17, 19, 28, 38

B

Bereich 39, 101, 102, 104, 107

Bewertung 102

beschränkte 102

einfache (siehe: einfache Bewertung)

stetige ... (siehe: stetige Bewertung)

Bild

- binäres (siehe: binäres Bild)
- Bildoperator 55, 56
 - morphologischer (siehe: morphologischer Bildoperator)
- binäres Bild 45, 51

D

Darstellung 34

dcpo 39, 99, 103

stetige (siehe: stetige dcpo)

Dilatation 46, 47, 82, 87

Diskretisierung ... 28, 35, 52, 55, 56, 91, 93, 96

distributiver Verband 58, 69

endlicher 71

E

Ebene 32

Ecke 33

Eckpunkt 33

eigentliche Seite 33

einfache Bewertung 103

Element

\sqcap -irreduzibles (siehe: \sqcap -irreduzibles Element)

\sqcup -irreduzibles (siehe: \sqcup -irreduzibles Element)

größtes (siehe: größtes Element)

irreduzibles (siehe: irreduzibles Element)

kleinstes (siehe: kleinstes Element)

- ko-primes (siehe: ko-primes Element)
 kompaktes (siehe: kompaktes Element)
 maximales (siehe: maximales Element)
 minimales (siehe: minimales Element)
 primes (siehe: primes Element),
 (siehe: primes Element)
 strukturierendes (siehe: strukturierendes Element)
 Erosion 46, 47, 82, 87
 euklidischer Komplex 34
 euklidisches Polyeder 34
 euklidisches Simplex 33
 extensive Abbildung 50
- F**
- F*-abgeschlossene Menge 21
F-offene Menge 21, 106
 Familie
 ansteigende (siehe: ansteigende Familie)
 zugrunde liegende . . . (siehe: zugrunde liegende Familie)
 Feinheit 37
 Filter 58
- G**
- geordnete Menge 13
 gerichtete Menge 39
 größtes Element 38
 Grauwertbild 47, 83, 87, 91, 93, 96
- H**
- Hülle
 konvexe (siehe: konvexe Hülle)
 Hüllen-Kern-Topologie 59
 Hüllenoperator 51, 76, 81, 87
 topologischer (siehe: topologischer Hüllenoperator)
 Halbraum 33
 Hausdorff-Reflexion 28
 Hit-or-Miss-Topologie 43, 44
 Hyperebene 32
- I**
- idempotente Abbildung 50
 Infimum 39
 Interpolationseigenschaft 67, 69
 Intervall 94
 Intervall-Topologie 94
 inverser Limes 16, 18, 23, 28, 63
 irreduzibles Element 58
- K**
- Kante 33
 Kern-Operator 50
 Kette 13
 kleinste Umgebung 14, 15, 18, 21, 105
 kleinstes Element 38
 ko-primes Element 69
 kompakt-saturierte Menge 99
 kompakte Menge
 relativ (siehe: relativ kompakte Menge)
 kompaktes Element 39
 Komplex
 euklidischer (siehe: euklidischer Komplex)
 lokalendlicher (siehe: lokalendlicher Komplex)
 simplicialer (siehe: simplicialer Komplex)
 topologischer (siehe: topologischer simplicialer Komplex)
 konvexe Hülle 32
 konvexe Menge 32
 konvexe Zelle 33

konvexes Raumstück 33

L

Lawson-Topologie 41, 44

Limes

inverser (siehe: inverser Limes)

linear unabhängig 32

lokalendliche Überdeckung ... 20, 29, 35

lokalendliche Ordnung 30

lokalendlicher Komplex 34

M

maximales Element 38

Menge

\sim_F -saturierte ... (siehe: \sim_F -saturierte Menge)

abgeschlossene

irreduzible 59

F -abgeschlossene ... (siehe: F -abgeschlossene Menge)

F -offene ... (siehe: F -offene Menge)

geordnete (siehe: geordnete Menge)

gerichtete (siehe: gerichtete Menge)

kompakt-saturierte ... (siehe: kompakt-saturierte Menge)

konvexe (siehe: konvexe Menge)

obere (siehe: obere Menge)

saturierte (siehe: saturierte Menge)

untere (siehe: untere Menge)

Mengeninklusion 15

Mengenverband 102

minimales Element 38

Minkowski-Differenz 45

Minkowski-Summe 45

monoton 14

morphologischer Bildoperator 45

N

nüchterner Raum 59

nach oben halbstetige Abbildung 88

O

obere Adjungierte 48, 50, 62, 84

obere Menge 98

obere Schranke 38

obere Topologie 14, 103

Öffnung 50, 51, 82, 88

offene Sternüberdeckung 35

offene Sternumgebung 35

offener Stern 35

Ordnung 13

lokalendliche ... (siehe: lokalendliche Ordnung)

ordnungserhaltend (siehe: monoton)

ordnungserzeugend 62

P

parakompakt 29

Polyeder

euklidisches (siehe: euklidisches Polyeder)

topologisches (siehe: topologisches Polyeder)

primes Element 58, 69

Projektions-Einbettungs-Paar 26, 85

Punktabschluss 15, 26, 105

Punktbewertung 103

R

Raum

nüchterner (siehe: nüchterner Raum)

triangulierbarer (siehe: triangulierbarer Raum)

wohlgefilterter (siehe: wohlgefilterter Raum)

Raumstück

- konvexes (siehe: konvexes
 Raumstück)
 relativ kompakte Menge 20
 Retraktion 26
- S**
- saturierte Menge 98
 Schließung 50, 51, 82, 88
 Schranke
 obere (siehe: obere Schranke)
 untere (siehe: untere Schranke)
 Scott-Topologie 39
 Seite 33, 34
 eigentliche (siehe: eigentliche
 Seite)
 uneigentliche ... (siehe: uneigentliche
 Seite)
 Seitenebene 33
 Simplex 33
 euklidisches (siehe: euklidisches
 Simplex)
 topologisches (siehe: topologi-
 sches Simplex)
 simplizialer Komplex 34
 Spektrum 58
 Spezialisierungsordnung 14, 23, 101
 Stützebene 32
 stark zulässiger Verband 68, 70, 72,
 78
 Stern
 offener (siehe: offener Stern)
 Sternüberdeckung
 offene (siehe: offene
 Sternüberdeckung)
 Sternumgebung
 offene (siehe: offene Sternumge-
 bung)
 stetige Bewertung 102, 106, 109
 stetige dcpo 39
 stetiger Verband 39, 40, 42, 102
 strukturierendes Element 45
- Supremum 39
- T**
- T_0 -Raum
 endlicher 15
 Topologie 13
 Alexandroff- (siehe: Alexandroff-
 Topologie)
 Hüllen-Kern- ... (siehe: Hüllen-Kern-
 Topologie)
 Hit-or-Miss- (siehe: Hit-or-Miss-
 Topologie)
 Intervall- (siehe: Intervall-Topo-
 logie)
 Lawson- (siehe: Lawson-Topo-
 logie)
 obere (siehe: obere Topologie)
 Scott- (siehe: Scott-Topologie)
 untere (siehe: untere Topologie)
 topologische Zelle 34
 topologischer Hüllenoperator 54
 topologischer simplizialer Komplex ... 34
 topologischer Zellenkomplex 34
 topologisches Polyeder 34
 topologisches Simplex 34
 total geordnete Menge 13
 Trägerebene 32
 Trennungssaxiom T_0 13
 triangulierbarer Raum 35
 Triangulierung 34
- U**
- Überdeckung 20
 lokalendliche ... (siehe: lokalendliche
 Überdeckung)
 Umgebung
 kleinste (siehe: kleinste Umge-
 bung)
 unabhängig
 linear (siehe: linear unabhängig)
 uneigentliche Seite 33

- untere Adjungierte 48, 50, 84
 untere Menge 98
 untere Schranke 38
 untere Topologie 14, 41
 Unterteilung 34
- topologischer (siehe: topologischer Zellenkomplex)
 Zellenzerlegung 34
 zugrunde liegende Familie 80, 87
 zulässiger Verband 68

V

- Verband 39
 distributiver (siehe: distributiver Verband)
 endlicher (siehe: distributiver Verband, endlicher)
 vollständig (siehe: vollständig distributiver Verband)
 stetiger (siehe: stetiger Verband)
 vollständiger ... (siehe: vollständiger Verband)
 zulässiger (siehe: zulässiger Verband)
 stark (siehe: stark zulässiger Verband)
- Verbindungsstrecke 32
 Verfeinerung 21
 vollständig distributiver Verband 66, 67–70, 83
 vollständiger Verband 39, 66

W

- weit-über-Relation 66
 weit-unter-Relation 39, 66
 weit-weit-über-Relation 65
 weit-weit-unter-Relation 65
 wohlgefilterter Raum 99

Z

- Zelle
 konvexe (siehe: konvexe Zelle)
 topologische (siehe: topologische Zelle)
- Zellenkomplex

Wissenschaftlicher Werdegang des Autors

Oktober 1994 - Februar 2002

Studium der Mathematik an der Technischen
Universität Darmstadt

seit 1. März 2002

Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich
Mathematik der Technischen Universität Darmstadt