Zur Struktur freier regulärer unärer Halbgruppen

Diplomarbeit
von

Florence Micol

Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
1997
Betreuer: Prof. Dr. Chr. Herrmann

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

L. Polák hat in [Pol89] ein Modell für die freien regulären unären Halbgruppen angegeben, das das Wortproblem löst; das heißt, seine Konstruktion liefert auch ein Entscheidungsverfahren für die Gleichungstheorie der regulären unären Halbgruppen.

In dieser Konstruktion geht er von den freien unären Halbgruppen aus, und wählt Elemente aus, die die Grundmenge der freien regulären unären Halbgruppe sein werden. Auf dieser Grundmenge von Normalformen werden neue Operationen definiert, die diese zu einer regulären unären Halbgruppe machen.

In dieser Arbeit geht es darum, die Konstruktion als Verfahren zu analysieren, nicht zuletzt mit der Hoffnung, daß man für freie reguläre unäre Ringe ähnlich vorgehen könnte.
Ein erster Schwerpunkt der Arbeit ist das Prinzip der Erweiterung der Signatur, ohne bei der Termalgebra anfangen zu müssen.
Ein zweiter Schwerpunkt besteht darin, die Technik der Faktorisierung zu untersuchen.

Dafür werden einige Hilfsmittel eingesetzt: für die Erweiterung der Signatur werden bestimmte Algebren konstruiert, die den Begriff der polynomialen Algebren verallgemeinern. Spezielle Colimites bieten sich an, um Beweise zu strukturieren.
Für das Auswählen der Normalformen und die Definition der Operationen wird eine Relation verwendet, die hier axiomatisch formuliert wird.

An dieser Stelle möchte ich denjenigen danken, die meinen Aufenthalt in Darmstadt ermöglicht haben, insbesondere Herrn Prof. Dr. Keimel, der sich für das Doppel-Diplom Programm TUD-ECL eingesetzt hat.

Ich bedanke mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Herrmann für die Betreuung der Arbeit, für seine Ermunterung und seine anregenden Vorschläge.

Schließlich möchte ich Christian Elsholtz und Thomas Erker für ihre Hilfsbereitschaft, die ausführlichen Korrekturen sowie ihre freundliche Ratschläge danken.

Kapitel 1

Die freien Algebren in Varietäten und das Wortproblem

1.1 Grundlagen

1.1.1 Aus der Allgemeinen Algebra

Die grundlegenden Definitionen und Konstruktionen (Termalgebra, Faktorisierung) der Allgemeinen Algebra befinden sich z. B. in dem ersten Abschnitt des ersten Kapitels von [LN73]. Diese werden hier als Stichwörter aufgelistet. Dabei legen wir auch einige Bezeichnungen fest.

- Eine (allgemeine) Algebra bezeichnen wir meistens mit A (als Objekt einer Kategorie).
- Für die Grundmenge wollen wir keine Notation einführen, sie heißt auch A falls der Bezug zu Mengen klar ist, sonst wendet man den Vergißfunktor auf die Algebra an: $\mathcal{V}A$. Die Ordnung einer Algebra ist die Kardinalität der Grundmenge.
- Die Signatur (oder den Typ) bezeichnen wir mit Σ, und die Algebren der Signatur Σ sind Σ-Algebren. Algebren derselben Signatur heißen ähnliche Algebren. Beispiele für die Benutzung der Operationssymbole $\circ$, $'$ und f^N sind $x \circ y$ oder xy, x' und $f^N(x)$ ...

- Für eine Unteralgebra B mit Erzeugermenge E schreiben wir

$$B =< E > .$$

- Für einen injektiven Homomorphismus ι (Einbettung) schreiben wir $\overset{\iota}{\hookrightarrow}$.

- Kongruenz, Faktoralgebra sind üblicherweise mit γ, $A_{/\gamma}$ bezeichnet.

- Die Varietät der Σ-Algebren bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}_0$. Die freie Algebra in $\mathfrak{K}_0$ über der Variablenmenge X ist $T(X)$, die Termalgebra über X.

- Wir interessieren uns lediglich für Gesetze, die mit *Gleichungen* beschrieben werden (insbesondere gibt es keinen Existenz-Quantor in den Formeln, siehe die Bemerkung 1.1.4 für „reguläre Ringe", die nicht unär sind).

- Menge von Gesetzen über Σ sind $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$. Die durch $\mathcal{G}$, bzw. $\mathcal{G}'$ bestimmten Varietäten bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ und die freien Algebren über X in diesen Varietäten mit $F(X)$ und $F'(X)$.

- Für eine aufsteigende Folge von ähnlichen Algebren $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird das Supremum mit $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ oder kurz $\bigsqcup A_n$ bezeichnet (Vereinigung der Grundmengen, Erweiterung der Operationen).

Auf weitere Ergebnisse des Abschnitts 1.3 in [LN73] wird im nächsten Abschnitt hingewiesen. Der Abschnitt 1.4 liefert den Ausgangspunkt des Kapitels 2.

1.1.2 Aus der Kategorientheorie

Die Kategorientheorie bietet eine präzise und knappe Sprache an, die für die Varietäten besonders geeignet ist.
Die Begriffe, die für die Algebra schon allgemein genug sind, werden z. B. in [MLB88] erklärt und anhand von Beispielen veranschaulicht. In den Abschnitten 1 bis 6 des Kapitel IV von [MLB88] werden Objekte, Morphismen (Mono-, Epi-, Isomorphismen), Funktoren, insbesondere Vergißfunktoren (Varietäten „sind" konkrete Kategorien) eingeführt, und universelle Eigenschaften und adjungierte Funktoren in den Abschnitten 1 bis 5 und 7 des

Kapitels XV.
Andere, etwas formalere Begriffe, die wir auch verwenden wollen, werden in [ML72] definiert: Kommakategorien, universelle Pfeile, Adjunktionen, Colimites.
Wichtige Notationen:

die Kategorie $\underline{\omega}$ sei die linear geordnete Menge aller endlichen Ordinalzahlen (also, die freie Kategorie, die vom Graphen $\{0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots\}$ erzeugt wird). Ein Funktor $\mathcal{F}$ mit der Kategorie $\underline{\omega}$ als Quelle ist also schon durch die Werte für die Objekte n und die Pfeile der Form $n \longrightarrow n+1$ eindeutig bestimmt.

Colimites für Funktoren werden in [ML72] folgenderweise definiert: Gegeben seien der Funktor $\mathcal{F}\colon \underline{J} \longrightarrow \underline{C}$ und ein Diagonalfunktor $\Delta\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{C}^{\underline{J}}$, dann ist ein *Colimes für den Funktor* $\mathcal{F}$ ein universeller Pfeil $< r, u >$ von $\mathcal{F}$ nach Δ, wobei $u = \mathcal{F} \Longrightarrow \Delta r$ die natürliche Transformation bezeichnet und $\lim\limits_{\rightarrow} \mathcal{F} := r$ für die Spitze des Colimeskegels steht.

Folgenfunktor und Approximationsfunktoren sind ein Spezialfall hiervon, dem wir öfters begegnen werden.

1. Eine wachsende Folge von ähnlichen Algebren $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einer Varietät $\mathfrak{B}$ definiert einen *Folgenfunktor*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\colon \underline{\omega} &\rightarrow \underline{\mathfrak{B}} \\ n &\mapsto A_n \\ (n \hookrightarrow n+1) &\mapsto (A_n \hookrightarrow A_{n+1}), \end{aligned}$$

in Zeichen:
$\mathcal{A}\colon A_0 \xhookrightarrow{e_0} A_1 \xhookrightarrow{e_1} A_2 \xhookrightarrow{e_2} \cdots A_n \xhookrightarrow{e_n} \cdots$
Das mit $\bigsqcup_n A_n$ bezeichnete Supremum der Folge ergibt sich als Colimes für den Folgenfunktor $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, hook, "e_0"] \arrow[drrrr, hook, "a_0"] & A_1 \arrow[r, hook, "e_1"] \arrow[drrr, hook, "a_1"] & A_2 \arrow[drr, hook, "a_2"] & \cdots & A_n \arrow[r, hook, "e_n"] \arrow[d, hook, "a_n"] & \cdots \\
 & & & & \bigsqcup A_n. & \cdots
\end{tikzcd}$$

2. Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere aufsteigende Folge in $\mathfrak{B}$ mit ihrem Folgenfunktor $\mathcal{B}$. Wenn es eine natürliche Transformation $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt (beachte, im Spezialfall von $\underline{\omega}$ muß nur nachgeprüft werden, daß alle Vierecke der Form

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_n"] & A_{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\ B_n \arrow[r, hook] & B_{n+1} \end{tikzcd}$$

kommutieren), dann existiert ein eindeutiger Homomorphismus f von $\bigsqcup A_n$ nach $\bigsqcup B_n$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_0"] & A_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_2"] & \cdots & A_n \arrow[d, "f_n"] & \cdots & \bigsqcup A_n \arrow[d, dotted, "f"] \\ B_0 \arrow[r, hook] & B_1 \arrow[r, hook] & B_2 \arrow[r, hook] & \cdots & B_n & \cdots & \bigsqcup B_n . \end{tikzcd}$$

3. Man kann eine Folge von *Approximationsfunktoren* $(\mathcal{A}_n)_n$ definieren, die mit dem Folgenfunktor $\mathcal{A}$ bis zum Rang n übereinstimmen und dann stehenbleiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n : \underline{\omega} &\to \underline{\mathfrak{B}} \\ k &\mapsto \begin{cases} A_k & \text{für } k < n \\ A_n & \text{für } k \geq n \end{cases} \\ (k \hookrightarrow k+1) &\mapsto \begin{cases} e_k & \text{für } k < n \\ Id_{A_n} & \text{für } k \geq n \end{cases} . \end{aligned}$$

Es ist $A_n = \lim\limits_{\rightarrow} \mathcal{A}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Durch

$$r_{n,k} := \begin{cases} Id_{A_k} & \text{für } k < n \\ e_n & \text{für } k \geq n \end{cases}$$

wird offensichtlich eine natürliche Transformation r_n von $\mathcal{A}_n$ nach $\mathcal{A}_{n+1}$ definiert.

Der Folgenfunktor $\mathcal{A}$ ist Colimes für den Funktor:

$$\begin{array}{rcl} \underline{\omega} & \to & \underline{\mathfrak{B}^{\omega}} \\ n & \mapsto & \mathcal{A}_n \\ (n \hookrightarrow n+1) & \mapsto & (\mathcal{A}_n \xRightarrow{r_n} \mathcal{A}_{n+1}) \end{array}$$

Durch den Folgenfunktor oder die Folge der Approximationen wird dieselbe Folge dargestellt. Die Darstellung durch die Folge der Approximationen wird in dem Kapitel 4.2 für die d-Reihen verwendet. Die Folgenfunktoren werden besonders interessant für Konstruktionen, bei denen linksadjungierte Funktoren eintreten, denn es gilt folgender Satz.

Satz 1.1 *Linksadjungierte erhalten Colimites.*
Der Funktor $\mathcal{F}\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{A}$ besitze einen Rechtsadungierten, während der Funktor $\mathcal{S}\colon \underline{J} \longrightarrow \underline{X}$ einen Colimeskegel $\tau\colon \mathcal{S} \Longrightarrow s$ in $\underline{X}$ besitze. Dann besitzt $\mathcal{F}\circ\mathcal{S}$ den Colimeskegel $\mathcal{F}\tau\colon \mathcal{F}\circ\mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{F}s$ in $\underline{A}$.

Die (duale) Aussage wird z. B. in [ML72, V. Limites, 5. Verhalten von Adjungierten auf Limites] bewiesen.
Unter *Vertauschen von Colimites und Linksadjungierten* verstehen wir

$$\mathcal{F}(\lim_{\to} \mathcal{S}) = \lim_{\to}(\mathcal{F}\circ\mathcal{S})$$

1.1.3 Universelle Eigenschaft

Wir übernehmen die Bezeichnungen aus [ML72, IV.1] für die Adjunktionen. Die Einheit einer Adjunktion $<\mathcal{F},\mathcal{V},\varphi>\colon \underline{X} \rightharpoonup \underline{A}$ bezeichnen wir insbesondere mit η. Die Aussage „der Pfeil η_X ist universell von $\mathcal{V}$ nach X“ bedeutet, daß zu jedem Objekt A in $\underline{A}$ und jedem Pfeil $X \xrightarrow{h} \mathcal{V}A$ ein eindeutiger Pfeil $\mathcal{F}X \xrightarrow{h^+} A$ aus $\underline{A}$ existiert, so daß das Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\eta_X"'] \arrow[dr, "h"'] & \mathcal{V}\circ\mathcal{F}X \arrow[d, "\mathcal{V}h^+"] \\ & \mathcal{V}A \end{tikzcd}$$

Es ist dann $h^+ = \varphi^{-1}_{X,A} h$.

1.1.4 Unäre Monoide und reguläre unäre Monoide

Das Wort „unär“ steht als Übersetzung des Englischen „unary“, es weist darauf hin, daß die Signatur der üblichen Struktur um eine einstellige Operation erweitert wird. Für die Monoide haben wir also die folgenden Definitionen:

Halbgruppe (allgemeine) Algebra mit einer zweistelligen assoziativen Verkettung.

Monoid Halbgruppe mit einer Konstante λ, die links- und rechtsneutrales Element der Verkettung $\circ$ ist. (Konvention: die Klammern für die Verkettung werden nicht mehr hingeschrieben)

unäres Monoid Monoid mit einstelliger Operation $'$ und Gesetz $\lambda' = \lambda$.

reguläres unäres Monoid unäres Monoid mit den Gesetzen $a \circ a' \circ a = a$ und $a' \circ a \circ a' = a'$. Man sieht leicht ein, daß $\lambda' = \lambda$ aus der Neutralität von λ und $a \circ a' \circ a = a$ folgt.

Die folgende Tabelle faßt die Bezeichnungen der entsprechenden Kategorien zusammen:

Varietät	Bezeichnung der entsprechenden Kategorie
Halbgruppen	$\underline{Hbgr}$
Monoide	$\underline{Mon}$
unäre Monoide	$\underline{unMon}$
reguläre unäre Monoide	$\underline{runMon}$

Die Kategorie $\underline{runMon}$ ist eine volle Unterkategorie von $\underline{unMon}$.
Eine ähnliche Bezeichnung existiert für (nicht notwendigerweise kommutative) Ringe: unäre, reguläre unäre Ringe, dabei sind diese als Monoide für die Multiplikation zu verstehen.
Bemerkung: In der Literatur findet man auch den Begriff „reguläre Ringe“. Beide sind aber *nicht* äquivalent!
Ein Ring R heißt regulär, wenn für jedes $r \in R$ es (mindestens) ein Element q existiert (Quasi-Inverses), so daß gilt: $rqr = r$ und $qrq = q$. Mit dieser Definition bilden die regulären Ringe keine Varietät. Beispiele, für die die Eindeutigkeit des Quasi-Inversen nicht vorliegt, sind in [Bur80] zu finden.

1.2 Modelle für die freien Algebren in Varietäten

1.2.1 Ein graphisches Modell für die Termalgebren

Bekanntlich sind Bäume mit markierten Knoten eine mögliche Beschreibung der Termalgebren. Die Blätter sind Variablen und die Knoten sind mit den Namen der Operationssymbole versehen (die Stelligkeit der Operationen bestimmt die Anzahl der Eingaben in den Knoten hinein). Die Definition der Operationen auf den Bäumen ist offensichtlich, ein Teilterm ist ein Ast des ganzen Baums ...

1.2.2 Faktorisierung

Faktorisierung in der Termalgebra

Sei eine Kongruenzrelation σ auf einer Algebra A. Die Abbildung, die einem Element $a \in A$ seine Äquivalenzklasse $[a]$ zuordnet, ist ein surjektiver Homomorphismus $A \xrightarrow{\pi_\sigma} A_{/\sigma}$.
Wir beschränken uns auf Klassen von Algebren deren Eigenschaften mit Hilfe einer (endlichen) Gleichungsmenge beschrieben werden. Diese Klassen sind Varietäten, und man kann die von den Gleichungen erzwungene (erzeugte) Kongruenzrelation auf der Termalgebra definieren.
Die Faktorisierung einer Termalgebra nach der von den Gleichungen erzeugten Kongruenzrelation liefert einen Beweis zur Existenz der freien Algebren in Varietäten:

Satz 1.2 *Jede nicht triviale Varietät hat freie Algebren über Erzeugermengen beliebiger Kardinalität.*

Den Beweis kann man z. B. im Abschnitt 3.21 von [LN73] finden. Hier wird die Idee kurz wiederholt.
Gegeben seien eine Variablenmenge X und eine Signatur Σ. Sei $\mathcal{G}$ eine Gleichungsmenge über Σ. Wir übernehmen die Bezeichnungen von 1.1.1 für $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}$, $T(X)$, $F(X)$. Wir nennen γ die von der Gleichungsmenge $\mathcal{G}$ erzeugte Kon-

gruenzrelation in $T(X)$. Wir haben bereits das kommutierende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\eta_X^0"'] \arrow[dr, hook, "\eta_X"'] & \mathcal{V}T(X) \arrow[d, "\mathcal{V}\pi_\gamma"] \\ & \mathcal{V}T(X)_{/\gamma} \end{tikzcd}$$

Sei nun eine Algebra H in $\mathfrak{K}$, und eine Abbildung $X \xrightarrow{h} \mathcal{V}H$. Wir wollen h homomorph auf $T(X)_{/\gamma}$ fortsetzen.
Existenz:
Zuerst setzen wir h zu einem Homomorphismus h_0 (in $\mathfrak{K}_0$) auf $T(X)$ fort. Da H die Gesetze von $\mathcal{G}$ erfüllt, gilt $\mathrm{Kern}(\pi_\gamma) \subseteq \mathrm{Kern}(t_0)$. Es existiert also ein Homomorphismus h_γ, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, two heads, "\pi_\gamma"'] \arrow[dr, "h_0"'] & T(X)_{/\gamma} \arrow[d, "h_\gamma"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Es ist h_γ ein Homomorphismus in $\mathfrak{K}$, der h auf $T(X)_{/\gamma}$ fortsetzt.
Eindeutigkeit:
Die Fortsetzung auf $T(X)$ ist eindeutig und π_γ ist ein Epimorphismus, also ist die Fortsetzung auf $T(X)_{/\gamma}$ eindeutig.

Lemma 1 *Für eine Teilmenge $N \supseteq X$ von $T(X)$ und eine Kongruenzrelation γ sind äquivalent:*

1. *N ist ein Repräsentantensystem für γ.*
2. *Zu jedem Term $t \in T(X)$ gibt es ein $n_t \in N$ mit $n_t \gamma t$, und man kann auf N Operationen $(f^N)_{f\in\Sigma}$ so definieren, daß*
   - *(a) man eine von X erzeugte algebraische Struktur erhält, die $\mathcal{G}$ erfüllt,*
   - *(b) $f^N(n_1, \ldots, n_k)\gamma f(n_1, \ldots, n_k)$ für $n_i \in N$.*

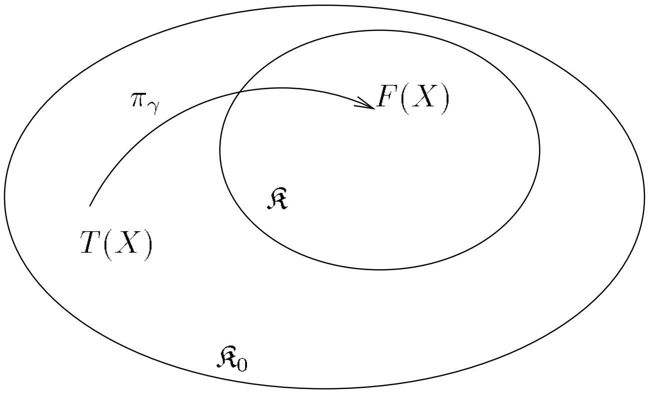


Abbildung 1.1: Faktorisierung in der Termalgebra

Definition 1 *Falls diese Bedingungen erfüllt sind, nennen wir die Elemente von N* Normalformen (bzgl. $\mathcal{G}$). *Es ist dann $(N, (f^N)_{f\in\Sigma})$ ein Modell für $F(X)$.*

Leider ist im allgemeinen Fall die Kongruenzrelation γ nicht so handlich, daß man „direkt, unmittelbar“ feststellen kann, ob zwei Elemente in derselben Äquivalenzklasse liegen; es ist dann natürlich schwierig, auf Kandidaten für die Normalformen zu kommen.

Faktorisierung in mehreren Etappen

Um die Faktorisierung nach der Kongruenzrelation zu vereinfachen, kann man versuchen, die Gleichungen in mehreren Stufen zu behandeln. Sind etwa die freien Algebren für eine größere Varietät bekannt, so möchte man *in dieser größeren Varietät* arbeiten.
Wir halten in diesem Abschnitt die Variablenmenge X und die Signatur Σ fest, und untersuchen die Rolle einer Gleichungsmenge $\mathcal{G}$ über Σ.
Eine *Erweiterung* von $\mathcal{G}$ ist eine (endliche) Gleichungsmenge $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cup \{g_1, \ldots, g_n\}$, wobei $g_1, \ldots, g_n$ endlich viele neue Gleichungen über Σ sind.

Wir ergänzen die Notationen des Abschnitts 1.2.2:

Varietät	Gleichungsmenge	erzeugte Kongruenz in T(X)	freie Algebra über X
$\mathfrak{K}_0$	$\emptyset$		$T(X)$
$\mathfrak{K}$	$\mathcal{G}$	γ	$F(X)$
$\mathfrak{K}'$	$\mathcal{G}'$	γ'	$F'(X)$

Nach dem Abschnitt 1.2.2 haben wir linksadjungierte Funktoren $\mathcal{F}$, bzw. $\mathcal{F}'$ zu den Vergißfunktoren von $\underline{\mathfrak{K}}$, bzw. $\underline{\mathfrak{K}'}$ nach $\underline{Set}$. Falls der Inklusionsfunktor $\mathcal{K}$ von $\underline{\mathfrak{K}'}$ nach $\underline{\mathfrak{K}}$ auch linksadjungierbar ist (man sagt: die Kategorie $\underline{\mathfrak{K}'}$ ist reflexiv in $\underline{\mathfrak{K}}$, mit Reflektor $\mathcal{R}$), dann gilt

Satz 1.3 $\mathcal{R}F(X) \cong F'(X) \quad$ *in* $\mathfrak{K}'$.

Denn: $\mathcal{R} \circ \mathcal{F}$ ist linksadjungiert zu $\mathcal{V} \circ \mathcal{K}$, der isomorph zu $\mathcal{V}'$ ist, also ist $\mathcal{R} \circ \mathcal{F}$ isomorph zu $\mathcal{F}'$.
Wenn die Pfeile der Einheit des Reflektors auch die Faktorisierung nach einer Kongruenzrelation beschreiben — wie das für Varietäten stets den Fall ist, dann kann man in mehreren Etappen faktorisieren.

1.3 Das Wortproblem: Grenzen der Faktorisierung — Beispiele

Die Konstruktion mit der Faktoralgebra ist zwar ein Beweis für die Existenz der freien Algebren in den Varietäten, aber wenn man damit „rechnen“ will, zum Beispiel wissen, ob zwei Elemente der Termalgebra modulo der Kongruenzrelation gleich sind, dann hilft die Faktoralgebra nicht weiter. Man bräuchte etwa ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen der Kongruenzrelation (Normalformen).

1.3.1 Assoziativ gemachte Verkettung

Als erstes Beispiel betrachten wir Halbgruppen.
Die Signatur Σ besteht aus einer zweistelligen Verkettung, die Gleichungmenge $\mathcal{G}$ aus dem Axiom der Assoziativität:

$$a(bc) = (ab)c \tag{1.1}$$

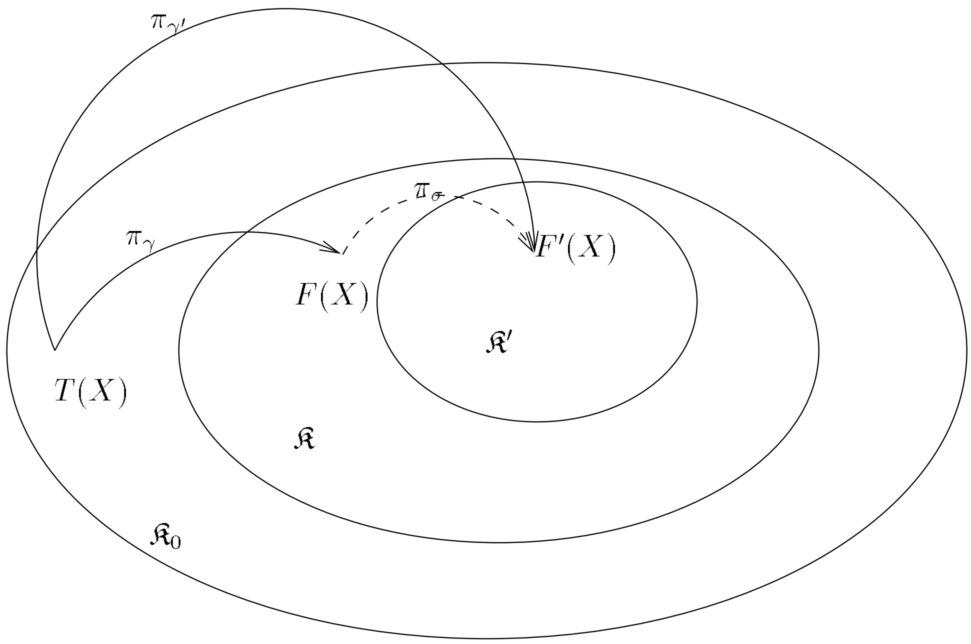


Abbildung 1.2: Faktorisierung in mehreren Etappen

Die linksgeklammerten Terme liefern ein Repräsentantensystem für die Assoziativität. Man kann leicht feststellen, ob zwei Terme in derselben Äquivalenzklasse liegen.

1.3.2 Ein graphisches Modell

Nun beschreiben wir (ohne Beweis) ein graphisches Modell für die freien unären Monoide, das das Wortproblem löst. Das Modell läßt sich intuitiv als Mittelweg zwischen Bäumen und Listen auffassen. Auf den Beweis verzichten wir an dieser Stelle, da diesem Thema ein großer Teil des Kapitels 3 gewidmet wird ...): die Schwierigkeit besteht darin, die Rekursivität der Definition zu beschreiben.

Die Grundmenge eines freien unären Monoids läßt sich graphisch darstellen, indem man die von dem neutralen Element verschiedenen Argumente der assoziativen Verkettung auf einer waagerechten Linie von links nach rechts schreibt (wie bei Listen). Das Ergebnis der einstelligen Operation steht unter dem Argument und sie sind mit einer gestrichelten Linie verbunden (wie bei Bäumen).

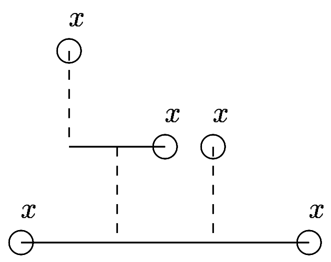
Für die Operationen geschieht Folgendes:

Die Verkettung mit dem neutralen Element ändert nichts.

Zwei andere Elemente werden bei der Verkettung nebeneinander geschrieben und mit einer vollen Linie verbunden.

Für die einstellige Operation wird unter das Argument eine gestrichelte Linie gehängt.

Zum Beispiel hat der Term (als Term in der Termalgebra, linksgeklammert) $x(x'x)'x'x$ folgende Darstellung:



1.3.3 Freie reguläre unäre Monoide

Hier geben wir ein Beispiel an, wo die Gleichheit modulo der Kongruenzrelation sich nicht so leicht feststellen läßt: reguläre unäre Monoide.
Ein Entscheidungsverfahren für die Gleichungstheorie der regulären unären Monoide wurde von L. Polák in [Pol89] beschrieben.
Sein Verfahren wird im Kapitel 4 analysiert.
Nun konstruieren wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Termen, die alle äquivalent zueinander sind, wo man aber die Gleichung in beiden Richtungen verwenden soll, um die Äquivalenz zu zeigen.
Sei X eine nichtleere Menge von Variablen und $U(X)$ das freie unäre Monoid über X. Sei $a \in U(X)$ (etwa: eine Variable $x \in X$). Wir definieren induktiv für $n \in \mathbb{N}$ (dabei verzichten wir auf die Klammerung für die assoziative Verkettung, und ihr Symbol wird nicht geschrieben):

$$\begin{aligned} b_0 &:= a \\ b_{n+1} &:= b'_n b_n \text{ also } b_{n+1} = b'_n \dots b'_0 a \\ a_n &:= a b_{n+1} \text{ also } a_n = a b'_n b_n \end{aligned}$$

Die ersten Terme der Folge sind

$$\begin{aligned} a_0 &= a\,\underbrace{a'a} \\ a_1 &= a\,\underbrace{(a'a)'a'a} \\ a_2 &= a\,\underbrace{\big((a'a)'a'a\big)'(a'a)'a'a} \\ \dots \end{aligned}$$

Behauptung 1 *Es gilt:*

$$a_n \sigma a \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

Zur Herleitung dieser Äquivalenzen führen wir drei Notationen ein, die spezielle Herleitungsregeln abkürzen:
Den Schluß $\dfrac{w := uu'u\sigma u}{t[w,\dots]\sigma t[u,\dots]}$ nennen wir je nach Richtung entweder

- *Reduktion* von w in $t[w,\dots]$, und wir schreiben dafür $t[\underline{w}_{\downarrow},\dots]\sigma t[u,\dots]$, oder

- *Aufblasen* von u in $t[u,\ldots]$, und wir schreiben dann $t[\underline{u}_{\uparrow},\ldots]\sigma t[w,\ldots]$.

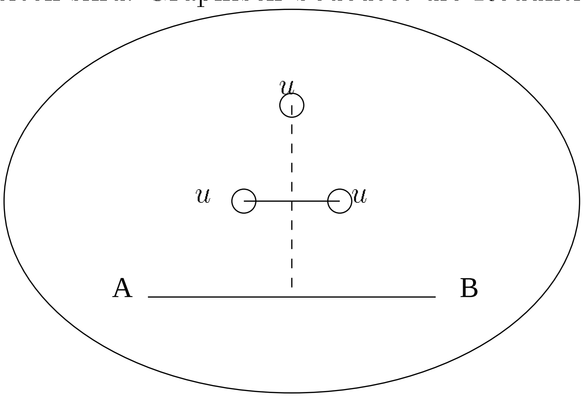
- Wenn das Ergebnis $w\sigma u$ durch Kombination der zwei vorigen entsteht, dann bezeichnen wir das partielle Einsetzen von u für w mit $t[\underline{w},\ldots]\sigma t[u,\ldots]$.

Beweis durch vollständige Induktion über n:
Der Fall $n = 0$ ist klar.
Mit der Definition von a_n und der Induktionsannahme gilt $a\sigma ab_n$:

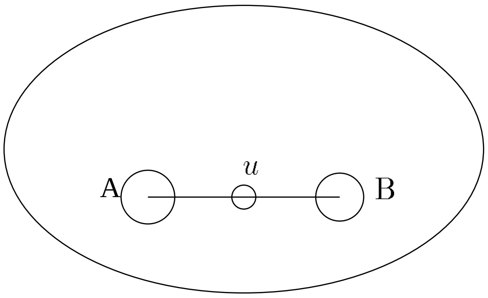
$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & \overset{Def.}{=} & \underline{a}b'_n b_n \\ a_{n+1} & \sigma & a\underline{b_n b'_n b_n}_{\downarrow} \\ & \sigma & \underline{ab_n} \\ & \sigma & a \end{array}$$

■

Bemerkung: Es ist naheliegend, zunächst zu versuchen, nur mit einer ausgezeichneten Regel zu arbeiten, etwa nur mit der Reduktion.
Das Beispiel zeigt aber, daß manche Äquivalenzen in dieser Weise nicht herzuleiten sind. Graphisch bedeutet die Reduktion, daß ein Teil der Form



durch



ersetzt wird.

Im vorigen Abschnitt wurde die graphische Darstellung des Elements $x(x'x)'x'x$ angegeben, also a_1 mit der Variable x als Element a. Das obige Muster liegt für keine der drei gestrichelten Linien vor. Für die oberste und die untere rechts fehlt nämlich ein x auf der linken Seite, und für die untere Linie links fehlt ein x' auf der linken Seite.

Kapitel 2

Hilfskonstruktionen für die Erweiterung der Signatur

Polynomiale Algebren und ähnliche Strukturen bieten sich als Möglichkeit an, um Erweiterungen zu konstruieren. Sie stehen sogar im Mittelpunkt der Konstruktion, wenn man diese als Verfahren analysieren will.
In diesem Rahmen werden manche Beweise klarer, weil sie sich aus einfachen Eigenschaften der polynomialen Algebren ergeben.

2.1 Polynomiale Algebren

2.1.1 Definition

Motivation:
In dem vierten Abschnitt des ersten Kapitels in [LN73] werden sogenannte polynomiale Algebren konstruiert.
Wir gehen von der dort angegebenen Definition aus, und wollen eine Charakterisierung der polynomialen Algebren aufstellen. Es stellt sich heraus, daß die polynomialen Algebren durch eine universelle Eigenschaft charakterisiert sind (und folglich, daß sie nur bis auf Isomorphie in der Varietät definiert sind). Wir weisen zunächst auf Eigenschaften hin, die sich aus der Konstruktion der polynomialen Algebren ergeben. Dann zeigen wir, daß alle Algebren, die diese Bedingungen erfüllen, eigentlich isomorph zu der Konstruktion sind.

Notwendige Bedingungen für die Konstruktion

Gegeben seien eine Varietät $\mathfrak{B}$, eine Algebra A der Varietät $\mathfrak{B}$ und eine Variablenmenge X. Die polynomiale Algebra $A(X, \mathfrak{B})$ wird mittels Faktorisierung durch eine Kongruenzrelation in der Termalgebra über $A \cup X$ (hier: Grundmenge von A) konstruiert.
In der Proposition 4.11 in [LN73] werden folgende Eigenschaften für $A(X, \mathfrak{B})$ formuliert:
Es ist $A(X, \mathfrak{B})$ eine Algebra aus $\mathfrak{B}$, A eine Unteralgebra von $A(X, \mathfrak{B})$ und $A(X, \mathfrak{B})$ wird von $A \uplus X$ erzeugt.
Ein Ergebnis über die Eindeutigkeit der Darstellung der Elemente in $A(X, \mathfrak{B})$ wird in Proposition 4.21 gegeben:
Falls $|A| = 1$ und $\mathfrak{B}$ halbausgeartet[1], dann werden alle Elemente von $A \cup X$ in $A(X, \mathfrak{B})$ identifiziert.
Sonst sind die Elemente alle verschieden.

Satz 2.1 *(Bilanz)*
Falls die Elemente von $A \cup X$ in $A(X, \mathfrak{B})$ verschieden sind, erhalten wir zwei Einbettungen in Set und $\underline{\mathfrak{B}}$:

$$\begin{aligned} \iota_X : X &\hookrightarrow A(X, \mathfrak{B}) \\ x &\mapsto x \in A(X, \mathfrak{B}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \iota_A : A &\hookrightarrow A(X, \mathfrak{B}) \\ a &\mapsto a \in A(X, \mathfrak{B}) \quad . \end{aligned}$$

Bemerkung: In der Tat ist für die Einbettung in *Set* die *Grundmenge* der Algebra $A(X, \mathfrak{B})$ als Zielmenge der Abbildung gemeint, während für die Einbettung in $\underline{\mathfrak{B}}$ die Algebra selbst das Ziel des Homomorphismus ist.
Konvention: der Lesbarkeit halber schreiben wir keinen Vergißfunktor. So entsteht ein gemischtes Diagramm (den Begriff werden wir in 2.2.1 systematischer definieren). Die linke Hälfte des Diagramms ist in *Set* und die rechte Hälfte in $\underline{\mathfrak{B}}$ zu lesen. Wir schreiben also:

[1] $\mathfrak{B}$ ist halbausgeartet, genau dann wenn keine Algebra A von $\mathfrak{B}$ mit Ordnung ungleich 1 eine Unteralgebra der Ordnung 1 enthält.

$$\boxed{\begin{array}{c}\underline{Set}\star\underline{\mathfrak{B}}\\[1em] X \xhookrightarrow{\iota_X} A(X,\mathfrak{B}) \xhookleftarrow{\iota_A} A\end{array}}\ \text{statt}$$

$$\boxed{\begin{array}{r}\underline{Set}\\[1em] X \xhookrightarrow{\iota_X} \mathcal{V}(A(X,\mathfrak{B}))\end{array}}\ \text{und}\ \boxed{\begin{array}{l}\underline{\mathfrak{B}}\\[1em] A(X,\mathfrak{B}) \xhookleftarrow{\iota_A} A\end{array}}$$

Behauptung 2 *Sei eine Algebra H der Varietät $\mathfrak{B}$, mit einem Homomorphismus h_A in $\mathfrak{B}$ und einer Abbildung h_X, in Zeichen:*

$$\boxed{\begin{array}{c}\underline{Set}\star\underline{\mathfrak{B}}\\[1em] X \xrightarrow{h_X} H \xleftarrow{h_A} A\end{array}},$$

dann existiert ein eindeutiger Homomorphismus $A(X,\mathfrak{B}) \xrightarrow{h} H$ in $\mathfrak{B}$, der h_A und h_X auf $A(X,\mathfrak{B})$ fortsetzt.

Beweis Die Fortsetzung existiert, weil $A(X,\mathfrak{B})$ durch $A \uplus X$ erzeugt wird, und die Eindeutigkeit liegt vor, weil die Werte schon durch h_A, h_X bestimmt sind und die Einbettungen ι_A und ι_X injektiv sind. ∎

Bemerkung: Die Bedingung der homomorphen Fortsetzung bedeutet, daß das folgende gemischte Diagramm kommutiert (die zwei Hälften kommutieren im üblichen Sinne):

$$\underline{Set}\star\underline{\mathfrak{B}}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "\iota_X"] \arrow[dr, "h_X"'] & A(X,\mathfrak{B}) \arrow[d, dotted, "h"] & A \arrow[l, hook', "\iota_A"'] \arrow[dl, "h_A"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, das heißt

$$\begin{array}{c}\hfill \underline{Set}\\ \begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota_X"] \arrow[dr, "h_X"'] & \mathcal{V}(A(X,\mathfrak{B})) \arrow[d, dotted, "\mathcal{V}h"] \\ & \mathcal{V}H \end{tikzcd}\end{array}$$

kommutiert , sowie

$$\begin{array}{c}\underline{\mathfrak{B}}\hfill\\ \begin{tikzcd} A(X,\mathfrak{B}) \arrow[d, dotted, "h"'] & A \arrow[l, hook', "\iota_A"'] \arrow[dl, "h_A"] \\ H \end{tikzcd}\end{array}$$

.

Charakterisierung mit einer universellen Eigenschaft

Sei umgekehrt eine Algebra A' der Varietät $\mathfrak{B}$, zusammen mit einem Homomorphismus i_A in $\mathfrak{B}$ und einer Abbildung i_X:

$$\begin{array}{c}\underline{Set} \star \underline{\mathfrak{B}}\\ \begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] & A' & A \arrow[l, "i_A"'] \end{tikzcd}\end{array}$$

, so daß zu jeder Algebra H und jeder Abbildung h_X bzw. jedem Homomorphismus h_A in $\mathfrak{B}$ der Form

$$\begin{array}{c}\underline{Set} \star \underline{\mathfrak{B}}\\ \begin{tikzcd} X \arrow[r, "h_X"] & H & A \arrow[l, "h_A"'] \end{tikzcd}\end{array}$$

, eine eindeutige homomorphe Fortsetzung $A' \xrightarrow{h} H$ in $\mathfrak{B}$ existiert mit

$$\begin{array}{c}\underline{Set} \star \underline{\mathfrak{B}}\\ \begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "h_X"'] & A' \arrow[d, dotted, "h"] & A \arrow[l, "i_A"'] \arrow[dl, "h_A"] \\ & H \end{tikzcd}\end{array}$$

, dann gilt $A' \cong A(X,\mathfrak{B})$.

Das Einsetzen von $X \xrightarrow{i_X} A' \xleftarrow{i_A} A$ bzw. $X \xhookrightarrow{\iota_X} A(X,\mathfrak{B}) \xhookleftarrow{\iota_A} A$ anstelle von $X \xrightarrow{h_X} H \xleftarrow{h_A} A$ in das Diagramm für $A(X,\mathfrak{B})$ bzw. A' liefert das Gewünschte.

Satz 2.2 *(Bilanz für die Definition)*
Es ist $A(X, \mathfrak{B})$ bis auf Isomorphie durch folgende universelle Eigenschaft eindeutig bestimmt:

Für alle

$$\boxed{\begin{array}{c}\underline{Set} \star \underline{\mathfrak{B}} \\ \begin{tikzcd} X \arrow[r, "h_X"] & H & A \arrow[l, "h_A"'] \end{tikzcd}\end{array}}$$

existiert ein eindeutiger Homomorphismus $A(X, \mathfrak{B}) \xrightarrow{h} H$, so daß folgendes Diagramm kommutiert.

$$\boxed{\begin{array}{c}\underline{Set} \star \underline{\mathfrak{B}} \\ \begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota_X"] \arrow[dr, "h_X"'] & A(X, \mathfrak{B}) \arrow[d, dotted, "h"] & A \arrow[l, hook', "\iota_A"'] \arrow[dl, "h_A"] \\ & H & \end{tikzcd}\end{array}}$$

2.1.2 Eigenschaften

Das Theorem 4.6 in [LN73] besagt, daß $A(X, \mathfrak{B}) \cong \big(A(Y, \mathfrak{B})\big)(Z, \mathfrak{B})$, falls $X = Y \uplus Z$.
Daraus folgt insbesondere:

Korollar 1 *1.*

$$\textit{Für } S_n = \biguplus_{k=0 \ldots n} X_k \textit{ gilt: } A(X, \mathfrak{B}) \cong \Big(\big(A(X_n, \mathfrak{B})\big)(X_{n-1}, \mathfrak{B}) \ldots \Big)(X_0, \mathfrak{B}).$$

2. Für $Y \subseteq X$ kommutiert das folgende Diagramm.

$$\boxed{\begin{array}{c}\underline{Set} \star \underline{\mathfrak{B}} \\ \begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "\iota_Y"] \arrow[d, hook] & A(Y, \mathfrak{B}) \arrow[d, hook] & A \arrow[l, hook'] \arrow[dl, hook] \\ X \arrow[r, hook, "\iota_X"] & A(X, \mathfrak{B}) & \end{tikzcd}\end{array}}$$

Bemerkung:

1. Allgemeiner gilt:

Für Algebren A_1, A_2 der Varietät $\mathfrak{B}$ mit einem Homomorphismus $A_1 \xrightarrow{h_A} A_2$ in $\mathfrak{B}$ und Mengen X_1, X_2 mit einer Abbildung $X_1 \xrightarrow{h_X} X_2$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus $A_1(X_1, \mathfrak{B}) \xrightarrow{h} A_2(X_2, \mathfrak{B})$ in $\mathfrak{B}$, so daß das folgende gemischte Diagramm kommutiert.

$$\underline{Set} \star \underline{\mathfrak{B}}$$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, hook, "\iota_{X_1}"] \arrow[d, "h_X"'] & A_1(X_1, \mathfrak{B}) \arrow[d, dotted, "h"] & A_1 \arrow[l, hook', "\iota_{A_1}"'] \arrow[d, "h_A"] \\
X_2 \arrow[r, hook, "\iota_{X_2}"] & A_2(X_2, \mathfrak{B}) & A_2 \arrow[l, hook', "\iota_{A_2}"']
\end{tikzcd}$$

Es ist h durch (h_X, h_A) eindeutig bestimmt.

Die Zuordnung (mit den obigen Notationen)

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}\colon \underline{Set} \times \underline{\mathfrak{B}} & \to & \underline{\mathfrak{B}} \\ (X; A) & \mapsto & A(X, \mathfrak{B}) \\ (h_X; h_A) & \mapsto & h \end{array}$$

ist funktoriell, denn sie respektiert die Identitäten und die Verkettung (klar).

2. Freie Algebren in $\mathfrak{B}$ sind Spezialfälle von polynomialen Algebren:

Sei O die freie Algebra in $\mathfrak{B}$ über $\emptyset$, also das initiale Objekt in $\mathfrak{B}$. Für eine Menge X ist die polynomiale Algebra $O(X, \mathfrak{B})$ die freie Algebra in $\mathfrak{B}$ über X (es gilt insbesondere $O(\emptyset, \mathfrak{B}) \cong O$).

Die universelle Eigenschaft für die freien Algebren drückt man üblicherweise auch mit kommutierenden Diagrammen aus:

Zu jedem h existiert ein eindeutiges h^+, so daß das Diagramm kommutiert:

$$\underline{Set} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "h"] \\ \mathcal{V}H \end{tikzcd}$$

$$\underline{\mathfrak{B}} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}X \arrow[d, dotted, "h^+"] \\ H \end{tikzcd}$$

$$\underline{Set} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\eta_X"] \arrow[dr, "h"'] & \mathcal{V}\mathcal{F}X \arrow[d, "\mathcal{V}h^+"] \\ & \mathcal{V}H \end{tikzcd}$$

Äquivalent dazu ist das folgende gemischte Diagramm.

$\underline{Set} \star \underline{\mathfrak{B}}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "\iota_X"] \arrow[dr, "h_X"'] & O(X, \mathfrak{B}) \arrow[d, dotted, "h^+"] & O \arrow[l, hook', "\iota_O"'] \arrow[dl, "h_O"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

Die Bedingungen über den Pfeilen von dem initialen Objekt O aus sind nämlich immer erfüllt.
Überleitung:
In der Tat bestehen solche Zusammenhänge, weil diese universellen Eigenschaften einfach bedeuten, daß bestimmte Funktoren adjungiert sind. Das wollen wir im nächsten Abschnitt mit den gemischten Coprodukten beschreiben.

2.2 Gemischte Coprodukte

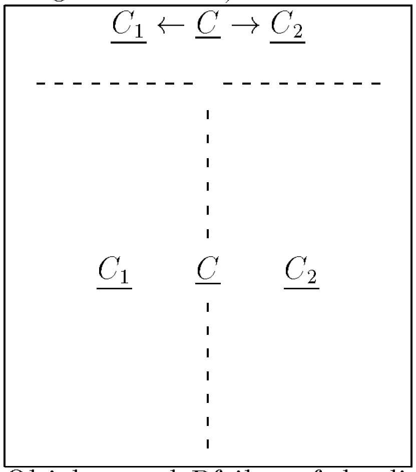
Motivation: Die polynomialen Algebren sind ein Spezialfall von “gemischten Coprodukten“.
Wir haben eine Menge mit einer Algebra einer Varietät verknüpft, um eine neue Algebra zu gewinnen. Die neue Algebra sollte einer gewissen universellen Eigenschaft genügen. Diese universelle Eigenschaft läßt sich aber mit Hilfe von adjungierten Funktoren „leicht“ beschreiben und diese Vorgehensweise weist darauf hin, wie die neuen Objekte zu konstruieren sind.
Wie angekündigt führen wir zunächst eine Schreibweise systematischer ein, die uns erlaubt, zwei bestimmte Diagramme in einem einzigen zusammenzufassen: das *gemischte Diagramm*.

2.2.1 Gemischte Diagramme

Angenommen, wir haben drei Kategorien $\underline{C}, \underline{C_1}, \underline{C_2}$ und zwei Vergißfunktoren $\mathcal{V}_1$ bzw. $\mathcal{V}_2$ von $\underline{C}$, die wir die *Hauptkategorie* nennen, nach $\underline{C_1}$ bzw. $\underline{C_2}$:

$$\underline{C_1} \xleftarrow{\mathcal{V}_1} \underline{C} \xrightarrow{\mathcal{V}_2} \underline{C_2}$$

Die Idee der gemischten Diagramme besteht darin, daß man die Vergißfunktoren nicht mehr hinschreibt. Dafür ist für beide Kategorien $\underline{C_1}$ und $\underline{C_2}$ jeweils eine Hälfte des Diagramms reserviert.
Ganz oben werden die Kategorien angegeben: $\underline{C_1}$ wird links eingetragen, $\underline{C_2}$ rechts und die Hauptkategorie $\underline{C}$ in die Mitte (die Pfeile symbolisieren die Vergißfunktoren).



Objekte und Pfeile auf der linken Seite gehören zu C_1, die auf der rechten Seite zu C_2 und die in der Mitte zu C. Pfeile von der Mitte weg oder auf die Mitte zu gehören zu C_i, wobei auf die Objekte von C der Vergißfunktor (implizit) angewendet wird.
Ein gemischtes Diagramm *kommutiert*, wenn seine zwei Hälften jeweils kommutieren (im üblichen Sinne). Konvention: in allen Diagrammen werden (implizit) alle Dreiecke kommutierend vorausgesetzt.

Beispielsweise schreiben wir:

$$\boxed{\begin{array}{c}\underline{C_1} \leftarrow \underline{C} \rightarrow \underline{C_2}\\[1ex]
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & C \arrow[d, "f"] & C_2 \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
& C' &
\end{tikzcd}\end{array}}$$

(kommutiert)

für:

$$\boxed{\begin{array}{r}\underline{C_1}\\[1ex]
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & \mathcal{V}_1 C \arrow[d, "\mathcal{V}_1 f"] \\
& \mathcal{V}_1 C'
\end{tikzcd}\end{array}}
\quad \text{und} \quad
\boxed{\begin{array}{l}\underline{C_2}\\[1ex]
\begin{tikzcd}
\mathcal{V}_2 C \arrow[d, "\mathcal{V}_2 f"'] & C_2 \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
\mathcal{V}_2 C' &
\end{tikzcd}\end{array}}$$

(kommutieren).

2.2.2 Gemischte Coprodukte

Mit δ bezeichnen wir den Diagonalfunktor $\delta\colon \underline{C} \to \underline{C \times C}$.
Wir geben drei äquivalente Formulierungen der Eigenschaft, die die gemischten Coprodukte charakterisieren soll:

1. Wir wollen jedem Paar $(A_1; A_2)$ der Kategorie $\underline{C_1 \times C_2}$ ein Objekt $A_1 * A_2$ in der Hauptkategorie $\underline{C}$ zusammen mit einem Paar von Pfeilen $(\iota_1; \iota_2)$ in $\underline{C_1 \times C_2}$ zuordnen, wobei $A_i \xrightarrow{\iota_i} \mathcal{V}_i(A_1 * A_2)$ für $i = 1, 2$; oder, mit der gemischten Schreibweise: $\boxed{\begin{array}{c}\underline{C_1} \leftarrow \underline{C} \rightarrow \underline{C_2}\\[1ex] A_1 \xrightarrow{\iota_1} A_1 * A_2 \xleftarrow{\iota_2} A_2\end{array}}$, so daß Folgendes gilt:
   Zu jedem Objekt H in $\underline{C}$ mit Pfeilen h_i in $\underline{C_i}$ für $i = 1, 2$, in Zeichen $\boxed{\begin{array}{c}\underline{C_1} \leftarrow \underline{C} \rightarrow \underline{C_2}\\[1ex] A_1 \xrightarrow{h_1} H \xleftarrow{h_2} A_2\end{array}}$, gibt es einen eindeutigen Morphis-

mus h von $A_1 * A_2$ nach H in $\underline{C}$, der das Diagramm kommutieren läßt:

$\underline{C_1} \leftarrow \underline{C} \rightarrow \underline{C_2}$

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "h_1"'] & A_1 * A_2 \arrow[d, dotted, "h"] & A_2 \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "h_2"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

2. Wir wollen jedem Paar $(A_1; A_2)$ der Kategorie $\underline{C_1 \times C_2}$ „das“ initiale Objekt in der Kommakategorie $\big((A_1; A_2) \downarrow \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \circ \delta\big)$ zuordnen.

3. Wir wollen jedem Paar $(A_1; A_2)$ der Kategorie $\underline{C_1 \times C_2}$ den universellen Pfeil $(\iota_1; \iota_2)$ von $(A_1; A_2)$ nach dem Funktor $(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) \circ \delta$ zuordnen.

Satz 2.3 *(und Definition)*
Mit den obigen Notationen, existiert ein —bis auf Isomorphie in $\underline{C}$— eindeutiges Objekt $A_1 * A_2$ (zusammen mit den Pfeilen ι_1, ι_2), und wir nennen es das gemischte Produkt *von A_1 und A_2.*

Beweis Zur Existenz:

Wir suchen einen universellen Pfeil $(\iota_1; \iota_2)$ von $(A_1; A_2)$ nach dem Funktor $(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) \circ \delta$.
Idee: den Funktor $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \circ \delta$ in mehreren Schritten „behandeln“.
Die Einzelteile 1. und 3. befinden sich sogar in einer Tabelle in [ML72] (IV Adjungierte Funktoren, 2. Beispiele für Adjungierte).
1. Schritt:
Angenommen, $\mathcal{V}_1$ bzw. $\mathcal{V}_2$ hat einen linksadjungierten Funktor $\mathcal{F}_1$ bzw. $\mathcal{F}_2$, dann ist $A_i \longrightarrow (\mathcal{V}_i \circ \mathcal{F}_i)A_i$ initial in $(A_i \downarrow \mathcal{V}_i)$.
2. Schritt:
Der Funktor $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ ist linksadjungiert zu $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$, es ist also

$$(A_1; A_2) \longrightarrow \big((\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) \circ (\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)\big)(A_1; A_2)$$

initial in $((A_1; A_2) \downarrow \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)$.
3. Schritt:
Das initiale Objekt in $((C_1; C_2) \downarrow \delta)$ ist auch wohl bekannt: es ist das Coprodukt $C_1 \amalg C_2$ von C_1 und C_2.

Die Bezeichnung $\amalg$ steht für den Bifunktor von $\underline{C \times C}$ nach $\underline{C}$, der einem Paar $(C_1; C_2)$ die Spitze seines Coprodukts $C_1 \amalg C_2$ zuordnet.

$$\underline{C_1} \leftarrow \underline{C} \rightarrow \underline{C_2}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & A \amalg B \arrow[d, "a \amalg b"'] & B \arrow[l] \arrow[d, "b"] \\
A' \arrow[r] & A' \amalg B' & B' \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

4. Schritt:
jetzt werden die Teile zusammengesetzt: ein Kandidat für das initiale Objekt in $((A_1; A_2) \downarrow \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \circ \delta)$ ist das Coprodukt von $\mathcal{F}_1 A_1$ und $\mathcal{F}_2 A_2$.

Behauptung 3 *Der Funktor* $\amalg \circ (\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ *ist linksadjungiert zum Funktor* $(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) \circ \delta$.

Begründung:
Die Verkettung von linksadjungierten Funktoren ist (bis auf natürliche Isomorphie) der Linksadjungierte der Verkettung der Funktoren.
■

Bemerkung: 1. Zu den Namen „gemischtes Coprodukt“ und „gemischtes Diagramm“: Wenn man nur in der Hauptkategorie arbeitet, so hat man tatsächlich die üblichen Coprodukte und die gemischten Diagramme sind übliche Diagramme.
2. Die polynomialen Algebren über einer Varietät $\mathfrak{B}$ sind spezielle gemischte Coprodukte für $\underline{C} := \underline{C_1} := \underline{\mathfrak{B}}$ und $\underline{C_2} := \underline{Set}$.
3. Die Hauptkategorie habe endliche Coprodukte und sie sei Quelle von Funktoren $\mathcal{V}_i, i = 1, \ldots, n$ mit Linksadjungierten $\mathcal{F}_i, i = 1, \ldots, n$. Dann existieren gemischte Coprodukte und man erhält sie über die Linksadjungierten: $\amalg_n \circ (\mathcal{F}_1 \times \cdots \times \mathcal{F}_n)$ zu $(\mathcal{V}_1 \times \cdots \times \mathcal{V}_n) \circ \delta_n$.
Linksadjungierbare Funktoren sind abgeschlossen unter Verkettung und „verträglich“ mit der Produktkategorie.
Beispiel: 1. Die polynomialen Algebren über $\underline{Mon}$ lassen sich also mit einem Funktor $\mathcal{P}_{Mon}$ beschrieben.

$$\begin{array}{rrcl}
\mathcal{P}_{Mon}: & \underline{Mon \times Set} & \rightarrow & \underline{Mon} \\
 & (M; X) & \mapsto & M[X] := M \amalg_{Mon} X^*
\end{array}$$

Der Funktor $\mathcal{P}_{Mon}$ ergibt sich aus der Verkettung folgender Funktoren:

1. Coproduktbildung in $\underline{Mon}$,
2. Adjunktion eines neutralen Elements (Linksadjungierter des Vergißfunktors von $\underline{Mon}$ nach $\underline{Hbgr}$),
3. Bildung der freien Halbgruppen (nichtleere Listen).

2. Adjunktion eines neutralen Elements:
Offensichtlich wird eine beliebige Halbgruppe S zu einem Monoid S_λ , wenn man ein neues Element λ als neutrales Element hinzunimmt und die Definition der assoziativen Verkettung für λ entsprechend erweitert. Die Morphismen in $\underline{Hbgr}$ werden auch zu Morphismen in $\underline{Mon}$ gemacht, indem das neutrale Element auf das neutrale Element abgebildet wird.

Behauptung 4 *Diese Zuordnung definiert einen Funktor $-_\lambda$, der Linksadjungierter zum Vergißfunktor von $\underline{Mon}$ nach $\underline{Hbgr}$ ist (die eindeutige homomorphe Fortsetzung der Halbgruppen-Morphismen ist klar).*

Wir haben also folgendes Diagramm für die Linksadjungierten zu den Vergißfunktoren:

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{Mon} & \\
\underline{Hbgr} \arrow[ur, "-_\lambda"] & & \underline{Mon} \arrow[ul, "Id"'] \\
\underline{Set} \arrow[u, "\mathcal{F}"'] \arrow[uur, "-^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

Wir bezeichnen das gemischte Coprodukt einer Halbgruppe S und eines Monoids M mit $S \star M$.

Satz 2.4 *(Bilanz für die Beispiele)*
Für eine Menge Y und ein Monoid M gilt folgende Isomorphie in $\underline{Mon}$:
$\mathcal{F}(Y) \star M \;\cong M[Y] \;\cong M \amalg_{Mon} Y^*$.

2.3 Konkrete Konstruktionen

2.3.1 Binäres Coprodukt von Monoiden

Wir geben zunächst eine Konstruktion von $A \amalg_{Mon} B$ für beliebige Monoide A und B an.
Die Rolle der Monoide A und B sind natürlich symmetrisch (man lese etwa die Elemente in der Grundmenge von rechts nach links).
Die Grundmenge besteht aus den Elementen der Länge k für alle $k \geq 0$: (A^- steht für $A \setminus \{\lambda\}$).
Die Menge der Elemente der Länge 0 ist $A \times B$.
Die Menge der Elemente der Länge k ($k \geq 1$) ist
$A \times \underbrace{(B^- \times A^-) \times \cdots \times (B^- \times A^-)}_{k} \times B$.
Die Länge eines Elements ist eindeutig bestimmt.
Ein Element läßt sich also eindeutig als Tupel $(a_0, (b_1, a_1), \ldots, (b_k, a_k), b_{k+1})$ schreiben (für $k = 0$: (a_0, b_1)). Der Lesbarkeit halber lassen wir die Klammern weg und gehen davon aus, daß die Bestandteile in der Mitte alternierend aus B^- und A^- sind: $a_0 b_1 a_1 \ldots b_k a_k b_{k+1}$.
Verkettung:
Sei $p = a_0 b_1 a_1 \ldots b_k a_k b_{k+1}$, und $q = c_0 d_1 c_1 \ldots d_l c_l d_{l+1}$. Den Anfang von p bezeichnen wir mit $u := a_0 b_1 a_1 \ldots b_k$, und das Ende von q mit $v := c_1 \ldots d_l c_l d_{l+1}$; es ist also: $p = u a_k b_{k+1}$ und $q = c_0 d_1 v$. Konvention: der Teil u bzw v entfällt, falls $k = 0$, bzw $l = 0$. So kann man die Fälle, bei denen die Rekursion hält, formal wie die anderen angeben.
Das Prinzip der Verkettung ist das Zusammenfassen der Bestandteile, solange (Rekursion …) sie in demselben Monoid liegen, und das Weglassen der neutralen Elemente.

$$\begin{aligned} p \circ (\lambda_A, \lambda_B) &:= p \\ (\lambda_A, \lambda_B) \circ p &:= p. \end{aligned}$$

$$p \circ q := \begin{cases} u a_k b_{k+1} c_0 d_1 v & \text{falls } b_{k+1} \neq \lambda_B \text{ und } c_0 \neq \lambda_A \quad (a) \\ u(a_k \circ_A c_0) d_1 v & \text{falls } b_{k+1} = \lambda_B \text{ und } a_k \circ_A c_0 \neq \lambda_A \quad (b) \\ u \circ (\lambda_A d_1 v) & \text{falls } b_{k+1} = \lambda_B \text{ und } a_k \circ_A c_0 = \lambda_A \quad (c) \\ u a_k (b_{k+1} \circ_B d_1) v & \text{falls } c_0 = \lambda_A \text{ und } b_{k+1} \circ_B d_1 \neq \lambda_B \quad (d) \\ (u a_k \lambda_B) \circ v & \text{falls } c_0 = \lambda_A \text{ und } b_{k+1} \circ_B d_1 = \lambda_B \quad (e) \end{cases}$$

Diese Verkettung ist wohldefiniert:
* alle Fälle sind abgedeckt,
* die Rekursion terminiert,
* die Eindeutigkeit liegt vor, auch wenn mehrere Regeln anwendbar sind,
* sie liefert ein Element der Grundmenge (Fallunterscheidung!).
Die Verkettung ist assoziativ und hat (λ_A, λ_B) als neutrales Element.
Wegen der Rekursion ist der Beweis der Wohldefiniertheit und der Assoziativität der Verkettung aufwendig, man kann ähnlich wie Polák in [Pol89] vorgehen und induktiv über die Länge eine schwächere Variante der Assoziativität zeigen. Im Laufe des Induktionsbeweises zeigt man Folgendes (die Regel (a) ist stets anwendbar):

Behauptung 5 *Jedes Element wird durch Verkettung seiner Bestandteile erzeugt, es gilt:*

$$p = a_0 b_1 a_1 \dots b_k a_k b_{k+1} = a_0 \circ b_1 \circ a_1 \cdots \circ b_k \circ a_k \circ b_{k+1}.$$

Somit ist $A \amalg_{Mon} B$ ein Monoid.
Einbettungen:
Man prüft nach, daß die Zuordnung $a \mapsto (a, \lambda_B)$ bzw. $b \mapsto (\lambda_A, b)$ Einbettungen in $\underline{Mon}$ definiert:

$$\begin{aligned} \iota_A \colon A &\hookrightarrow A \amalg_{Mon} B \\ \iota_B \colon B &\hookrightarrow A \amalg_{Mon} B \end{aligned}$$

Satz 2.5 *(Eindeutige homomorphe Fortsetzung)*
Zu beliebigen Pfeilen $A \xrightarrow{h_A} H$ *und* $B \xrightarrow{h_B} H$ *gibt es einen eindeutigen*

Morphismus $h\colon A \amalg B \longrightarrow H$, so daß das Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "\iota_A"] \arrow[dr, "h_A"'] & A \amalg B \arrow[d, dotted, "h"] & B \arrow[l, hook', "\iota_B"'] \arrow[dl, "h_B"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

Beweis Die Fortsetzung der Homomorphismen definiert man nach der obigen Behauptung:

$$h(p) = h_A(a_0) \circ h_B(b_1) \circ h_A(a_1) \cdots \circ h_B(b_k) \circ h_A(a_k) \circ h_B(b_{k+1}).$$

Die Abbildung h ist wohldefiniert wegen der Eindeutigkeit der Darstellung der Elemente in $A \amalg_{Mon} B$. Sie ist mit jeder Regel der Definition der Verkettung verträglich, also ist h ein Morphismus. Die Eindeutigkeit der Fortsetzung liegt vor, weil der Morphismus durch die Werte für die Bestandteile schon überall definiert ist.

■

2.3.2 Gemischtes Coprodukt einer Halbgruppe und eines Monoids

Wir haben bereits: $S \star M \cong S_\lambda \amalg M$.
In der Grundmenge ändert man folgenderweise die Darstellung und die Definition der Länge der Elemente:
Mit der vorigen Schreibweise gilt $S_\lambda^- = S$. Man sieht leicht ein, daß die Mengen

$$\mathcal{M}_0 := \biguplus_{k \geq 0} S_\lambda \times \underbrace{(M^- \times S) \times \cdots \times (M^- \times S)}_{k} \times M$$

und

$$\mathcal{M}_1 := M \cup \bigcup_{k \geq 0} M \times \underbrace{(S \times M^-) \times \cdots \times (S \times M^-)}_{k} \times (S \times M)$$

isomorph sind.
Von $\mathcal{M}_0$ nach $\mathcal{M}_1$:

$$p = s_0 m_1 s_1 \dots m_k s_k m_{k+1} \to i(p) := \begin{cases} \lambda_M s_0 m_1 s_1 \dots m_k s_k m_{k+1} & \text{falls } s_0 \neq \lambda \\ m_1 s_1 \dots m_k s_k m_{k+1} & \text{falls } s_0 = \lambda \end{cases}$$

Von $\mathcal{M}_1$ nach $\mathcal{M}_0$ zurück:
Wenn ein Element von $\mathcal{M}_1$ mit λ_M anfängt, dann wird das λ_M weggelassen, sonst fügt man ein λ am Anfang dazu.
Wir nehmen $\mathcal{M}_1$ als Beschreibung der Grundmenge von $S \star M$. Ein Element läßt sich also eindeutig schreiben als: m oder $m_0 \underbrace{s_1 m_1 \dots s_k m_k}_{\text{nichts für } k=0} s_{k+1} m_{k+1}$. Dabei lassen wir wie vorher die Klammer weg und gehen davon aus, daß die Bestandteile alternierend aus M und S sind.
In der Definition der Verkettung und der Einbettungen wird die neue Darstellung (also $i(s)$ statt s für alle Elemente $s \in S$) eingesetzt:
Sei $p = m_0 s_1 m_1 \dots s_k m_k$, $q = n_0 t_1 n_1 \dots t_l n_l$ (für die Fälle $p \in M$ oder $Q \in M$ gibt es kein s, bzw. kein t). Die Regeln (c), (d), (e) der Definition der Verkettung treten nicht mehr auf. Es bleibt:

$$\begin{aligned} p \circ \lambda_M &:= p \\ \lambda_M \circ p &:= p \end{aligned}$$

$$p \circ q := \begin{cases} m_0 s_1 m_1 \dots s_k (m_k \circ_M n_0) t_1 n_1 \dots t_l n_l & \text{falls } m_k \circ_M n_0 \neq \lambda_M & (a) \\ m_0 s_1 m_1 \dots (s_k \circ_S t_1) n_1 \dots t_l n_l & \text{sonst } (\lambda_M \text{ falls } s \text{ und } t \text{ leer}) & (b) \end{cases}$$

Die Einbettungen sind:

$$\begin{aligned} \iota_M \colon M &\hookrightarrow S \star M \\ m &\mapsto m \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \iota_S \colon S &\hookrightarrow S \star M \\ s &\mapsto (\lambda_M, s, \lambda_M). \end{aligned}$$

2.3.3 Polynomiale Algebren über Monoiden

Wir wissen: $F(Y) \star M \cong M[Y]$.
Wir gehen wie im letzten Abschnitt vor und ändern noch einmal die Beschreibung der Grundmenge, die Definition der Verkettung und die Einbettungen: Man überlegt sich leicht, daß

$$M \cup \bigcup_{k \geq 0} M \times \underbrace{(Y \times M) \times \cdots \times (Y \times M)}_{k}$$

auch die Grundmenge beschreibt. Ein Element läßt sich eindeutig schreiben als: $m_0 \underbrace{y_1 m_1 \ldots y_k m_k}_{\text{nichts für } k=0}$. Wir lassen wie immer die Klammer weg und gehen davon aus, daß die Bestandteile alternierend aus M und Y sind.
Sei $p = m_0 y_1 m_1 \ldots y_k m_k$, $q = n_0 z_1 n_1 \ldots z_l n_l$, die Verkettung von p und q wird mit Hilfe der folgenden Regeln definiert:
Sei $p = m_0 y_1 m_1 \ldots y_k m_k$, $q = n_0 z_1 n_1 \ldots z_l n_l$, definiere:

$$p \circ q := \begin{cases} (m_0 \circ_M n_0) z_1 n_1 \ldots z_l n_l & \text{falls } k = 0 \quad (a) \\ m_0 y_1 m_1 \ldots y_k (m_k \circ_M n_0) & \text{falls } l = 0 \quad (b) \\ m_0 y_1 m_1 \ldots y_k (m_k \circ_M n_0) z_1 n_1 \ldots z_l n_l & \text{sonst} \quad (c) \end{cases}$$

Die Einbettungen sind:

$$\begin{aligned} \iota_M : M &\hookrightarrow M[Y] \\ m &\mapsto m \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \iota_Y : Y &\hookrightarrow M[Y] \\ y &\mapsto (\lambda_M, y, \lambda_M). \end{aligned}$$

2.4 Erweiterungen mit polynomialen Algebren

Wir schreiben kurz X^f für die freie Algebra über X in $\mathfrak{B}$ (das heißt: $O(X, \mathfrak{B})$), und $A[X]$ für $A(X, \mathfrak{B})$.

Wir definieren induktiv über n eine wachsende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Algebren in $\mathfrak{B}$:

$$\begin{aligned} A_0 &:= X^f \\ U_0 &:= A_0 \setminus \emptyset^f \\ A_{n+1} &:= A_n[U_n] \\ U_{n+1} &:= A_{n+1} \setminus A_n \end{aligned}$$

Die Notationen für die Einbettungen sind aus dem Diagramm abzulesen:

$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{Set} \star \underline{\mathfrak{B}} \\[2em] U_n \overset{()'_n}{\hookrightarrow} A_n[U_n] \overset{e_n}{\hookleftarrow} A_n \end{array}}$$

Sei noch

$$S_n := X \uplus \biguplus_{k=0,\ldots,n} U'_k$$

und

$$S := X \uplus \biguplus_{k\geq 0} U'_k.$$

Mit dem Korollar 1 erhalten wir:

$$A_{n+1} = A_n[U_n] = A_{n-1}[U_{n-1}][U_n] = \cdots = A_0[U_0]\ldots[U_n].$$

Mit $A_0 = X^f$ haben wir $A_{n+1} = \emptyset^f[X][U_0]\ldots[U_n]$, und somit folgenden Satz:

Satz 2.6 *Es gilt* $A_{n+1} \cong S^f_{n+1}$.

Die Supremumbildung kann auch gleich untersucht werden.

Satz 2.7 *Es gilt* $\bigsqcup_{k\geq 0} A_k \cong (\bigcup_{k\geq 0} S_k)^f$ *in* $\mathfrak{B}$.

Beweis Es ist $(-)^f$ Linksadjungierter des Vergißfunktor und $\bigcup_{k\geq 0} S_k$ Colimes in $\underline{Set}$. Mit dem Satz über die Vertauschbarkeit von Linksadjungierten und Colimites erhalten wir die Aussage. ■

Bemerkung: Formal sieht dieser Limesübergang auch so aus:

$$A_n = \bigsqcup_{k \leq n} A_k = \emptyset^f[X][U_0]\dots[U_{n-1}]$$

$$U = \bigsqcup_{k \geq 0} A_k = \emptyset^f[X][U_0]\dots[U_n]\dots$$

Kapitel 3

Die freien unären Monoide

3.1 Ein Modell für die freien unären Monoide

Motivation:
In diesem Abschnitt konstruieren wir ein Modell für die freien unären Monoide. Das Prinzip der Konstruktion ist aber allgemeiner und liefert eine Methode für die Signaturerweiterung.

3.1.1 Erzeugung der unären Monoide als Monoide

Motivation:
Ein freies unäres Monoid $U(X)$ über einer Variablenmenge X ist insbesondere ein unäres Monoid, das von X erzeugt wird.
Wir bemerken auch gleich, daß $U(X)$ das kleinste Untermonoid von $U(X)$ ist, das X umfaßt und unter $'$ abgeschlossen ist (die Gleichung $\lambda' = \lambda$ gilt ohnehin).
Wir betrachten zunächst einmal allgemein das folgende Problem:
Gegeben sei ein unäres Monoid U, das (nicht notwendigerweise frei) von einer Menge E erzeugt wird, in Zeichen: $U =< E >_{\underline{unMon}}$. Gesucht ist ein Verfahren, das eine Menge E' liefert, die U als *Monoid* erzeugt, in Zeichen: $U =< E' >_{\underline{Mon}}$ (in dem Rest des Abschnitts lassen wir diesen Index weg und schreiben einfach $U =< E' >$). Man versucht in der Tat, den Verlust an Struktur durch eine Vergrößerung der Erzeugermenge auszugleichen.
Dann wenden wir dieses Verfahren auf den Fall an, in dem U frei über X ist: wir bekommen eine Erzeugermenge S, die den Schlüssel für die Konstruktion

von U liefert.

Zerlegung

Sei U ein unäres Monoid, das von einer Menge E erzeugt wird.
Nun wird induktiv U *als Monoid* zerlegt und die *Tiefe* der Elemente definiert.
Bemerkung: Das Verfahren wird stationär, falls eines der U_n leer ist.
Das geschieht schon beim ersten Schritt, wenn die Erzeugermenge leer ist. Dann besteht das von $\emptyset$ erzeugte unäre Monoid nur aus dem neutralen Element (dieses ist offensichtlich das freie unäre Monoid über $\emptyset$).

$\triangle$ Induktionsanfang
Wir definieren, welche Elemente die Tiefe 0 haben.
Sei V_0, das von E erzeugte Untermonoid, in Zeichen also: $V_0 :=< E >$.
Die Menge der Elemente der Tiefe 0 sei $U_0 := V_0 \setminus \{\lambda\}$; die (einzige) Konstante λ bekommt die Tiefe $-\infty$.
Somit besteht V_0 aus den Elementen der Tiefe ≤ 0.
$\triangle$ Induktionsschritt
Wir nehmen an, die Elemente der Tiefe $\leq n$ sind schon definiert, und geben an, welche die Tiefe $n+1$ haben.
Setze $V_{n+1} :=< V_n \cup U'_n >$.
Die Menge der Elemente der Tiefe $n+1$ sei $U_{n+1} := V_{n+1} \setminus V_n$: das sind die Elemente, die nicht ohne U'_n erzeugt werden können. Per Definition gilt insbesondere $U'_n \subset V_{n+1}$.
V_{n+1} besteht aus den Elementen der Tiefe $\leq n+1$.
$\triangle$ Supremumbildung
Das Supremum der Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wohldefiniert, da die Folge wachsend ist, und das folgende Lemma gilt.

Lemma 2 *Für $n \geq 0$ gilt:*

$$V_{n+1} =< E \cup \bigcup_{0\leq k\leq n} U'_k >= \bigcup_{0\leq k\leq n+1} U_k \cup \{\lambda\} \tag{3.1}$$

$$U = \bigcup_{k\geq 0} U_k \cup \{\lambda\} \tag{3.2}$$

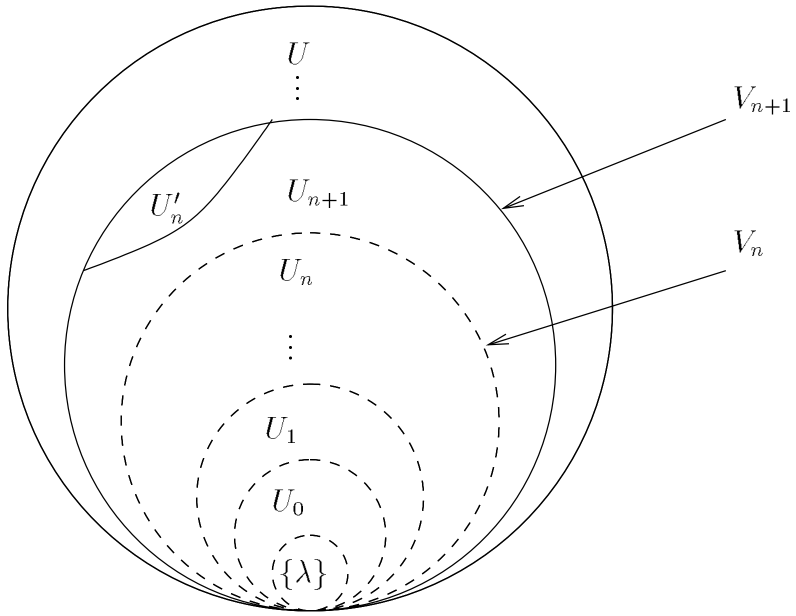


Abbildung 3.1: Zerlegung eines unäres Monoids U

U ist Cokegel des Folgenfunktor der Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Beweis Zu 3.1: Induktion.

Zu 3.2:

Die Menge $\bigcup_{k\geq 0} U_k \cup \{\lambda\}$ ist ein Untermonoid von U, das unter $'$ abgeschlossen ist und E umfaßt. Also muß sie nach der Definition von „erzeugt als unäres Monoid" gleich U sein.

Die Einbettungen von den V_n nach U kommutieren. Sie bilden die Kanten eines Cokegels mit Spitze U.

■

Die Mengen $\{\lambda\}$ und U_n (für $n \geq 0$) sind paarweise disjunkt, so daß die Tiefe als Funktion tiefe wohldefiniert ist.
Unter bestimmten Voraussetzungen, die wir als nächstes betrachten, ist die Funktion tiefe ein Monoid-Homomorphismus …

Rolle der Tiefe

Wir konstruieren ein unäres Monoid $\mathfrak{T}$, das mit der Tiefe zusammenhängt.

Definition 2 *($\mathfrak{T}$)*
Die Grundmenge von $\mathfrak{T}$ ist $\{-\infty\} \cup \mathbb{N}$.
Die assoziative Verknüpfung ist das Supremum mit $-\infty$ als neutrales Element.
Die einstellige Operation $'$ wirkt wie die Nachfolgerfunktion für die natürlichen Zahlen und man definiert $-\infty' := -\infty$.

Bemerkung: (Einige Eigenschaften des Monoids $\mathfrak{T}$)
1. Offensichtlich ist $\mathfrak{T}$ kommutativ.
2. Linearität:
Die Operation $'$ ist linear bezüglich der Verknüpfung (das heißt: $(a \circ b)' = a' \circ b'$ für $a, b \in \mathfrak{T}$).
Wir nennen ein unäres Monoid *linear*, wenn die Operation $'$ diese Eigenschaft hat.
Da die Linearität mit einer Gleichung definiert werden kann, bilden die linearen unären Monoide eine Untervarietät der Varietät der unären Monoide, <u>*lunMon*</u> ist also eine volle Unterkategorie von <u>*unMon*</u>.
Ist $U(X)$ frei, so existiert ein eindeutiger Homomorphismus $U(X) \longrightarrow \mathfrak{T}$, der die Nullabbildung von X nach $\mathfrak{T}$ auf $U(X)$ fortsetzt und dieser ist gerade wie die Funktion $tiefe$ definiert, die man durch die Zerlegung des freien unären Monoid über X mit X als Erzeugermenge erhält

$$\begin{array}{rcl} \text{tiefe} : U(X) & \to & \mathfrak{T} \\ \lambda & \mapsto & -\infty \\ u \in U_n & \mapsto & n \quad . \end{array}$$

Eigentlich hängt der Morphismus tiefe von der Erzeugermenge ab, das heißt daß man einen Morphismus tiefe_X für jede Erzeugermenge X definieren sollte. Für die leere Menge ist $\text{tiefe}_\emptyset$ konstant (mit Wert neutrales Element), sonst ist tiefe_X surjektiv.
Seien X, Y Mengen mit $X \subseteq Y$, dann existiert ein eindeutiger Morphismus f von $U(X)$ nach $U(Y)$ mit $f(x) = x$ für $x \in X$. Es gilt $\text{tiefe}_X = \text{tiefe}_Y \circ f$.

Dies liefert einen Cokegel über den freien unären Monoiden:

$$\begin{tikzcd}
U(\emptyset) \arrow[r, hook] \arrow[dr] & U(X) \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "\text{tiefe}_X"'] & U(Y) \arrow[dl, "\text{tiefe}_Y"] & \cdots \\
& \mathfrak{T} & &
\end{tikzcd}$$

3.1.2 Ein Modell für die freien unären Monoide

Konstruktion

Wir konstruieren induktiv eine wachsende Folge von Monoiden $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, das heißt einen Folgenfunktor:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U}\colon \underline{\omega} & \to & \underline{Mon} \\ n & \mapsto & V_n \end{array}$$

△ Induktionsanfang
Wir konstruieren die Elemente der Tiefe ≤ 0.
Setze $V_0 := X^*$ für die Grundmenge sowie für die assoziative Verknüpfung $\cdot$ und das neutrale Element λ.
Sei $U_0 := V_0 \setminus \{\lambda\}$ die Menge der Elemente der Tiefe 0. Die Tiefe von λ wird gleich $-\infty$ gesetzt.
Da $\{\lambda\}$ und U_0 disjunkt sind, ist die Tiefe eindeutig bestimmt.
△ Induktionsschritt
Wir nehmen an, wir haben die Approximationen bis zum Rang n folgenderweise definiert:
Wir haben paarweise disjunkte Mengen U_k (für $k \leq n$), deren Vereinigung mit einer neuen Konstante λ die Grundmenge eines Monoids V_n ist:

$$V_n = \{\lambda\} \cup \bigcup_{0\leq k\leq n} U_k$$

und es ist $V_n = S_n^*$, mit

$$S_n := X \cup \bigcup_{0\leq k\leq n-1} U'_k.$$

Wir konstruieren eine Erweiterung V_{n+1} von V_n.
Sei $V_{n+1} := V_n[U_n]$ (siehe gemischte Coprodukte). Das Monoid V_n läßt sich mit e_n und die Menge U_n mit $()'_n$ in V_{n+1} einbetten:

$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{Set} \star \underline{Mon} \\[2em] U_n \xhookrightarrow{()'_n} V_n[U_n] \xhookleftarrow{e_n} V_n \end{array}}$$

Setze $U_{n+1} := V_{n+1} \setminus V_n$ (das sind die neuen Elemente, die nicht ohne U'_n erzeugt werden können, sie haben die Tiefe n+1).
V_{n+1} besteht aus Elementen der Tiefe $\leq n+1$.
Nach dem Satz 2.6 im Abschnitt 2.4 gilt $V_{n+1} = S^*_{n+1}$, wobei $S_{n+1} := S_n \cup U'_n$.
$\triangle$ Supremumbildung
Der Abschnitt 2.4 liefert auch die Konstruktion für U als Colimes des Folgenfunktors der Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach dem Satz 2.7 ist U das freie Monoid über S, mit $S := \bigcup_{n\geq 0} S_n$.
Definiert man noch $\lambda' := \lambda$, dann ist U ein unäres Monoid.

Satz 3.1 *U ist das freie unäre Monoid über X.*

Ein ähnlicher Beweis wird im nächsten Abschnitt geführt.

Bilanz für das Wortproblem

Wie sind nun imstande, das graphische Modell von 1.3.2 zu rechtfertigen. Mit der konkreten Konstruktion der polynomialen Algebren über Monoiden können wir die Darstellung der Elemente von U angeben. Es ist

$$U_0 := \biguplus_{k\geq 0} \{x_1 \cdots x_{k+1} | x_i \in X\}$$

$$U_{n+1} := \biguplus_{k\geq 1} \{v_1 u'_1 v_2 \cdots v_k u'_k v_{k+1} | v_i \in V_n, u_i \in U_n\}$$

Die Verknüpfung von zwei Elementen p, q hängt von der Tiefe der Elemente ab: ($p = v_1 u'_1 v_2 \cdots v_k u'_k v_{k+1}$ und $q = t_1 s'_1 t_2 \cdots t_k s'_k t_{l+1}$)

$$p \circ q = \begin{cases} (p \circ t_1) s'_1 t_2 \cdots t_k s'_k t_{l+1} & \text{falls tiefe}(p) < \text{tiefe}(q), \\ v_1 u'_1 v_2 \cdots v_k u'_k (v_{k+1} \circ q) & \text{falls tiefe}(p) > \text{tiefe}(q), \\ v_1 u'_1 v_2 \cdots v_k u'_k (v_{k+1} \circ t_1) s'_1 t_2 \cdots t_k s'_k t_{l+1} & \text{falls tiefe}(p) = \text{tiefe}(q). \end{cases}$$

Die einstellige Operation $'$ ist klar.

3.1.3 Eine Methode für die Signaturerweiterung

Wir interessieren uns für einen Spezialfall, wo die Signatur um eine einzige einstellige Operation erweitert wird. In der Tat kann man die letzte Konstruktion für die unären Monoide beinahe „abschreiben". In der letzten Konstruktion haben wir auch gleich die Gleichung $\lambda' = \lambda$ behandelt.
Wir gehen also ähnlich wie im Falle der Monoide vor, und nehmen uns eine beliebige Algebra A^+ in $\mathfrak{K}^+$ her, die eine Erzeugermenge E besitzt, zerlegen sie, um auf eine Charakterisierung zu kommen, die den Schlüssel zu der eigentlichen Konstruktion liefert, falls die Erzeugermenge eine Basis ist.
Zunächst ein paar Notationen:
Wir bezeichnen mit X eine beliebige Variablenmenge. Wir betrachten zwei Varietäten, die sich nur um eine einstellige Operation in der Signatur unterscheiden, und legen folgende Notationen fest:

Bezeichnung der Varietät:	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{K}^+$
Signatur:	Σ	$\Sigma^+ = \Sigma \cup \{g\}$ (g: die neue einstellige Operation)
Gleichungsmenge:	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$
Freie Algebra über X:	$F(X)$	$F(X)^+$

Die Strategie lautet:

1. „Vergessen", daß die Algebra A^+ in $\mathfrak{K}^+$ lebt und diese als Algebra in $\mathfrak{K}$ betrachten,

2. Induktiv über die Tiefe zerlegen. Die Zerlegung kann dabei stationär werden (etwa für eine leere Erzeugermenge bei den unären Monoiden, oder für eine Algebra in $\mathfrak{K}$, wo g als Identität interpretiert wird, so daß die Algebra auch in $\mathfrak{K}^+$ liegt, oder $g^2 = Id$, usw.). Man hofft dabei, daß man „am Ende" A^+ ausgeschöpft hat.

3. Alle Stücke wieder zusammenbauen (Supremum der Folge der im Laufe der Zerlegung entstandenen Stücke), um die ganze Algebra zu gewinnen,

4. Sich auf $F(X)^+$ konzentrieren und in diesem Fall die Stücke als freie Strukturen identifizieren,

5. Das Modell nach dem erhaltenen Muster konstruieren (Anfang, Induktionsschritt, Supremum, Definition der neuen Operation)!

6. Die universelle Eigenschaft beweisen.

Zerlegung

Wir zerlegen also eine Algebra A^+, die von einer Menge E in $\mathfrak{K}^+$ (nicht unbedingt frei) erzeugt wird:
Da A^+ die Erzeugermenge E umfaßt, existiert das Erzeugnis (bezüglich der alten Signatur Σ) von E in A^+, wir bezeichnen es mit $< E >_\Sigma$. Dies liefert uns den Induktionsanfang:
$\triangle$ Induktionsanfang
Wir setzen

$$B_0 :=< E >_\Sigma \text{ und } A_0 := B_0$$

$\triangle$ Induktionsschritt

$$B_{n+1} :=< B_n \cup g(A_n) >_\Sigma \text{ und } A_{n+1} := B_{n+1} \setminus B_n$$

$\triangle$ Supremumbildung
Es ist $A^+ = \bigcup_{k\geq 0} A_k$, wegen des Satzes über die Vertauschbarkeit von Linksadjungierten und Colimites.
Ferner gilt für die freie Algebra über X in $\mathfrak{K}^+$:

Satz 3.2 *Falls $A^+ = F(X)^+$ gilt, dann sind folgende Algebren isomorph in $\mathfrak{K}$:*

$$\begin{aligned} B_0 &\cong F(X) \\ B_{n+1} &\cong F(X \uplus \biguplus_{0\leq k\leq n} g(A_k)) \text{ für } n \geq 0 \\ F(X)^+ &\cong F(X \uplus \biguplus_{k\geq 0} g(A_k)) \end{aligned}$$

Beweis Die Operation g ist injektiv und die A_k disjunkt, so daß die Mengen $g(A_k)$ disjunkt sind. Dann kann man mit dem Korollar 1 schließen. ∎

Ein Modell für die freie Algebra der erweiterten Signatur

$\triangle$ Induktionsanfang
Wir konstruieren die Elemente der Tiefe 0.
Setze $B_0 := F(X)$.
Sei $A_0 := B_0$, die Menge der Elemente der Tiefe 0, und $S_0 := X$.

$\triangle$ Induktionsschritt
Wir haben schon paarweise disjunkte Mengen A_k (für $k \leq n$) konstruiert, deren Vereinigung mit die Grundmenge einer Algebra B_n in $\mathfrak{K}$ ist:

$$B_n = X \uplus \biguplus_{0 \leq k \leq n} A_k,$$

so daß gilt: $B_n = F(S_n)$, für $S_n := X \uplus \biguplus_{0 \leq k \leq n-1} g(A_k)$.
Wir konstruieren eine Erweiterung B_{n+1} von B_n.
Seien $B_{n+1} := B_n[A_n]$ und $A_{n+1} := B_{n+1} \setminus B_n$.
Die Menge A_{n+1} enthält die neuen Elemente, die nicht ohne $g(A_n)$ erzeugt werden können, sie haben die Tiefe n+1.
B_{n+1} besteht aus Elementen der Tiefe $\leq n+1$.
$\triangle$ Supremumbildung
Nach dem Abschnitt 2.4 konstruieren wir den Colimes des Folgenfunktors der Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und nach 2.7 ist dieser Colimes die freie Algebra in $\mathfrak{K}$ über S, mit $S := X \uplus \biguplus_{n \geq 0} g(A_n)$.
Die neue Operation g kann nun als solche auf $F(S)$ eingeführt werden.

Satz 3.3 *Es ist $F(S)$ die freie Algebra der Varietät $\mathfrak{K}^+$ über X.*

Beweis Induktiv über n prüft man nach, daß die Algebren der Folge, die wir hier konstruiert haben, und die Unteralgebren die bei der Zerlegung der freien Algebra über X in $\mathfrak{K}^+$ entstehen, isomorph sind.
Daraus folgt die Isomorphie für den Colimes. ■

3.2 Von den freien unären zu den freien regulären unären Monoiden

3.2.1 Dualität

Symmetrie Eigenschaften

Jedem unären Monoid $M = (M, \circ, ', \lambda)$ ordnet man wie folgt ein unäres Monoid M^d zu:

$$\begin{array}{rcl} M^d & := & M \\ m1 \circ^d m2 & := & m2 \circ m1 \text{ für alle } m1, m2 \in M \\ m'^d & := & m^{d'} \text{ für alle } m \in M \end{array}$$

Für ein *freies* unäres Monoid gilt $U(X)^d \cong_{\underline{unMon}} U(X)$. Das bedeutet einfach, daß man die Elemente (Listen) von links nach rechts oder von rechts nach links lesen kann. Der Isomorphismus ist offensichtlich eine Involution: $\text{rückw} : U \to U$. Die Definition geschieht über Termaufbau:

$$\begin{array}{lll} x \in X & \text{rückw}\,(x) & := x \\ t1, t2 & \text{rückw}\,(t1 \circ t2) & := \text{rückw}\,(t2) \circ \text{rückw}\,(t1) \\ t & \text{rückw}\,(t') & := \text{rückw}\,(t)' \\ \lambda & \text{rückw}\,(\lambda) & := \lambda. \end{array}$$

Definition 3 *($T \subseteq U$)*
T heißt symmetrisch*, genau dann wenn T unter dem Morphismus* rückw *abgeschlossen ist. In diesem Fall gilt* $\text{rückw}\, T = T$ *wegen der Involution.*

Beispiel: Die U_n sind symmetrisch; (Beweis: Induktion über n)

Dualisierung der Hilfsrelationen und Operationen

Hat man eine 2-stellige Relation $\geq$ auf einer symmetrischen Teilmenge T von U, so entsteht folgendermaßen eine weitere 2-stellige Relation $\leq$ auf T (wenn es möglich ist, wählen wir das umgedrehte Relationssymbol für die neue Relation):

$$t1, t2 \in T \quad t1 \leq t2 :\Leftrightarrow \text{rückw}\,(t2) \geq \text{rückw}\,(t1) \tag{3.3}$$

Entsprechend läßt sich eine 2-stellige Operation / auf T *dualisieren* (die neue Operation schreiben wir \):

$$t1, t2 \in T \quad t1 \backslash t2 := \text{rückw}\,\big(\text{rückw}\,(t2)/\text{rückw}\,(t1)\big) \tag{3.4}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} a \vdash b & :\Leftrightarrow & a\sigma ab'b \\ b \dashv a & \overset{Def}{\Leftrightarrow} & \text{rückw}\,(a) \vdash \text{rückw}\,(b) \end{array}$$

Es gilt $x(x'x)'x'x\sigma x$ also $x \vdash x'x$ und folglich $xx' \dashv x$.
Die im Beispiel eingeführte binäre Relation $\vdash$ liefert eigentlich den Schlüssel für das Aussuchen der Normalformen in U.
Nun kann man aber wenig mit dieser axiomatischer Formulierung anfangen, vor allem ist sie nicht entscheidbar in dieser Form ...
Deshalb geben wir eine andere Relation $\geq$ an, mit der man „rechnen“ kann, und wir beweisen im Laufe der Konstruktion, daß diese konkrete Relation tatsächlich die Axiome der Relation $\vdash$ erfüllt.
Im Abschnitt über axiomatische Formulierung analysiert man hinreichende und notwendige Bedingungen, die zur Äquivalenz zwischen der konkreten Definition und dem gewünschten Ergebnis führen.

3.2.2 Hilfsmittel für das Aussuchen der Normalformen

Motivation:
Für eine gegebene nichtleere Erzeugermenge X haben wir eine Folge von Monoiden $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruiert, die wir jetzt mit einer einstelligen Operation und einer binären Relation versehen wollen. Wir werden induktiv über n Teilmengen D_n von V_n konstruieren. Die binäre Relation ist ein Hilfsmittel, um bestimmte Elemente von V_n auszuschließen: manche Kombinationen von Bestandteilen werden nicht mehr zugelassen.
Notation:
Die einstellige Operation nennen wir $\hat{}$ und die binäre Relation $\geq$, und die „zugehörige“ duale Operation bzw. Relation nennen wir $\tilde{}$ bzw. $\leq$ (die entsprechenden Definitionen wurden in 3.3 bzw. 3.4 gegeben).
Die Definition von $\hat{}$ geschieht mit Hilfe vollständiger Induktion über die Tiefe n (also eigentlich jedesmal mit einem Index n, aber da jede Operation die vorige erweitert, kann man auf die Indizes verzichten).
Konstruktion:
$\triangle$ Induktionsanfang
In U_0:
Wir setzen

$$\hat{p}, \tilde{p} := p \quad \text{für alle } p \in V_0. \tag{3.5}$$

Für alle $p, q \in V_0$,

$$q \geq_0 p :\Leftrightarrow q = u\hat{p} \text{ für ein } u \in V_0. \tag{3.6}$$

Bemerkung: Die Relation ändert sich nicht, wenn man statt $u \in V_0$ lediglich $u \in U$ verlangt: es gibt höchstens ein solches Element, und falls es überhaupt existiert, dann liegt es tatsächlich in V_0.
Zur Begründung:
Da tiefe ein Morphismus ist, gilt $\text{tiefe}\,(u) \geq \text{tiefe}\,(q))$; also liegt u in V_0.
Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Darstellung der Elemente in V_0.
$\triangle$ Induktionsschritt
In U_{n+1} für $n \geq 0$:
Sei $p = a_1 b_1' \dots a_{k+1} \in U_{n+1}$ (für die alten Elemente, wie vorher), wir unterscheiden folgende Fälle:

$$p \text{ erfüllt} \begin{cases} \text{CASE A:} & a_1 \neq \lambda \quad b_1 \geq_n a_1 \\ \text{CASE B:} & a_1 \neq \lambda \quad \neg b_1 \geq_n a_1 \\ \text{CASE C:} & a_1 = \lambda \quad b_1 \leq_n a_2 \\ \text{CASE D:} & a_1 = \lambda \quad \neg b_1 \leq_n a_2. \end{cases}$$

Definiere

$$\hat{p} := \begin{cases} b_1' \widehat{\dots a_{k+1}} & \text{CASE A} \\ \widehat{a_1} b_1' \dots a_{k+1} & \text{CASE B} \\ a_2 \widehat{\dots a_{k+1}} & \text{CASE C} \\ p & \text{CASE D.} \end{cases}$$

Definiere für $p, q \in V_{n+1}$

$$q \geq_{n+1} p \quad :\Leftrightarrow \quad q = u\hat{p} \text{ für ein } u \in V_{n+1}.$$

Bemerkung: Falls ein u mit $q = u\widehat{p}$ existiert, muß es tatsächlich in V_{n+1} liegen, also kann man die Bedingung auch „$u \in U$“ formulieren. Die Begründung ist ähnlich wie in V_0.
Daraus folgt, daß diese Definition die alte binäre Relation auf V_n erweitert, das heißt: die alten Elemente stehen genau dann in der neuen Relation, wenn sie schon in der alten standen).

Hilfssatz 1 *Für $p \in V_n$ gilt $\widehat{\widehat{p}} = \widehat{p}$.*

Beweis induktiv über n und k

In CASE B wird die Induktionsannahme bezüglich n verwendet, in den anderen Fällen nicht:

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\hat{p}} & = & \widehat{a_1}\widehat{b_1' \ldots a_{k+1}} \\
\widehat{\hat{p}} & \overset{CASEB}{=} & \widehat{\widehat{a_1}}b_1' \ldots a_{k+1} \\
\widehat{\hat{p}} & \overset{IA}{=} & \widehat{a_1}b_1' \ldots a_{k+1} \\
\widehat{\hat{p}} & \overset{CASEB}{=} & \widehat{p}
\end{array}$$

Für $a_1 \neq \lambda$ gilt $\widehat{a_1} \neq \lambda$ und falls nicht $b_1 \geq_n a_1$, dann auch nicht $b_1 \geq_n \widehat{a_1}$, denn: $u\widehat{\widehat{a_1}} = u\widehat{a_1}$.

■

△ Supremumbildung

Wie üblich in U, da wir bemerkt haben, daß die Relationen sich erweitern.

Beispiel: 1

Sei $p := a(a'a)'a'a \in U_{k+2}$ für $a \in U_k$.

Es gilt

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{p} & \overset{CASEA}{=} & \widehat{(a'a)'a'a} \\
 & \overset{CASEC}{=} & \widehat{a'a} \\
 & \overset{CASEC}{=} & \widehat{a}
\end{array}$$

Insbesondere gilt $x\widehat{(x'x)'x'x} = x$ für eine Variable $x =: a$.

Beispiel: 2

Wir greifen wieder nach unserer Lieblingsfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die folgendermaßen definiert war:

$$\begin{array}{lcl}
b_0 & \overset{Def}{=} & a \\
a_0 & \overset{Def}{=} & ab_0'b_0 \\
b_{n+1} & \overset{Def}{=} & b_n'b_n \\
a_n & \overset{Def}{=} & ab_n'b_n
\end{array}.$$

Es gilt $b_n \geq a$.

Es gilt $\widehat{b_n} = \widehat{a}$, denn:

$$\widehat{b_0} \overset{Def}{=} \widehat{a}$$

und

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{b_{n+1}} & \overset{Def}{=} & \widehat{b_n'b_n} \\
 & \overset{CASEC}{=} & \widehat{b_n}
\end{array}$$

Wir haben $\widetilde{b_0} = \tilde{a}$ und $\widetilde{b_{n+1}} = b'_n$, denn:

$$\begin{aligned}\widetilde{b_{n+1}} &\overset{Def}{=} \widetilde{b'_n b_n} \\ &\overset{CASEA}{=} \widetilde{b'_n} \\ &\overset{CASED}{=} b'_n\end{aligned}$$

Es gilt $\widehat{a_n} = \hat{a}$ und $\widetilde{a_n} = \tilde{a}$, denn:

$$\begin{aligned}\widehat{a_{n+1}} &\overset{Def}{=} \widehat{ab'_n b_n} \\ &\overset{CASEA}{=} \widehat{b'_n b_n} \\ &\overset{Def}{=} \widehat{b_{n+1}}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\widetilde{a_n} &\overset{Def}{=} \widetilde{ab'_n b_n} \\ &\overset{CASEA}{=} \widetilde{ab'_n} \\ &\overset{CASEC}{=} \tilde{a}\end{aligned}$$

Mit der axiomatischen Formulierung des nächsten Abschnitts werden wir folgende Behauptungen beweisen.

Behauptung 6

$$p \geq q \Leftrightarrow p \geq \hat{q},$$

$$p \geq q \Rightarrow p\hat{q}'\hat{q}\sigma p,$$

$$p \geq q \Rightarrow pq'q\sigma p.$$

Bemerkung: Die Rückrichtung in der letzten Aussage gilt auch, und sie wird mit der Konstruktion von Polák bewiesen. Die Relation, die wir hier konstruiert haben ist also tatsächlich die Relation $\vdash$ aus dem Beispiel in 3.2.1.

3.2.3 Axiomatische Formulierung

Gegeben ein System von drei einstelligen Operationen auf U, f, f^L, f^* so daß gilt:

$$f^2 = f \tag{3.7}$$

$$\mathrm{id} = \cdot(f^L, f) \tag{3.8}$$

$$f\sigma \cdot (f^*, \mathrm{id}), \text{ (punktweise).} \tag{3.9}$$

Eine binäre Relation $\geq$ wird folgenderweise auf U definiert:

$$a \geq b :\Leftrightarrow \text{ es existiert } u \in U \text{ mit } a = \cdot(u, f(b)). \tag{3.10}$$

Hilfssatz 2 *Es gilt:*

$$a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad a \geq f(b) \tag{3.11}$$

$$a \geq b \quad \Rightarrow \quad af(b)'f(b)\sigma a \tag{3.12}$$

$$a \geq b \quad \Rightarrow \quad ab'b\sigma a \tag{3.13}$$

Beweis Zu 3.11: $f^2(b) = f(b)$ (verwendet nur 3.7)
Zu 3.12: nach Voraussetzung gilt $a = uf(b)$ und σ ist eine Kongruenzrelation auf U.
Für den Beweis wurde 3.10 verwendet.
Zu 3.13:

$$\begin{aligned} f(b) \quad & \sigma \quad f^*(b)\underline{b}_{\uparrow} \\ & \sigma \quad \underline{f^*(b)b}b'b \\ & \sigma \quad f(b)b'b. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} af(b)'\underline{f(b)} \quad & \sigma \quad \underline{af(b)'f(b)}b'b \\ & \sigma \quad ab'b \quad , \end{aligned}$$

denn $af(b)'f(b)\sigma a$. ∎

Bemerkung: Für den Beweis wurden 3.12, also 3.10 und 3.9 verwendet. Glücklicherweise erfüllt die Operation ^ die Voraussetzungen für f, falls man f^L wie $()^L$ definiert (da hat man sowieso keine andere Möglichkeit wegen der Eindeutigkeit der Darstellung):

$$p^L := \begin{cases} a_1(b_1'a_2\dots)^L & \text{CASE A} \\ (a_1)^L & \text{CASE B} \\ b_1'(a_2\dots)^L & \text{CASE C} \\ \lambda & \text{CASE D}, V_0. \end{cases}$$

Für f^* kann man zum Beispiel folgende Operation $()^*$ nehmen:

$$p^* := \begin{cases} (b_1'a_2\dots)^* b_1' b_1 a_1' & \text{CASE A} \\ (a_1)^* & \text{CASE B} \\ (a_2\dots)^* b_1 & \text{CASE C} \\ \lambda & \text{CASE D}, V_0. \end{cases}$$

Behauptung 7 *Es gilt*

$$T_n \quad \hat{p}\sigma p^* p \quad \textit{für alle } p \in V_n. \tag{3.14}$$

Daraus folgt natürlich

$$a \geq b \Rightarrow ab'b\sigma a \quad \textit{für alle } a \in U, b \in V_n. \tag{3.15}$$

Beweis Es gilt T_0, weil $\hat{p} = p$ für alle $p \in V_0$.

Von T_n nach T_{n+1}: mit Hilfe vollständiger Induktion L_k über Länge k, die nur für den Fall CASE C benötigt wird: die anderen sind direkt beweisbar.

Zu L_0:

Für CASE D: klar.

Für CASE B: klar mit T_n für a_1.

Für CASE C: $b_1 \leq a_2$ also $a_2\sigma b_1 b_1' a_2$.

Daraus folgt für L_0:

$$\begin{aligned} p^*p &= a_2^*\underline{b_1 b_1' a_2} \\ &\sigma\ a_2^* a_2 \\ &\sigma\ \hat{p} \text{ (wegen } T_n \text{ für } a_2). \end{aligned}$$

Von L_k nach L_{k+1}:

$$
\begin{array}{rcl}
p^*p & = & (a_2 \dots)^* \underline{b_1 b_1' a_2} \dots \\
 & \sigma & (a_2 \dots)^* a_2 \dots \\
 & \sigma & \hat{p} \text{ (Induktionsannahme bezüglich der Länge).}
\end{array}
$$

Für CASE A: nach Voraussetzung gilt $b_1 \geq a_1$. Also mit der Induktionsannahme T_n gilt $b_1 a_1' a_1 \sigma b_1$ und somit

$$
b_1' \underline{b_1 a_1' a_1} b_1' \sigma \underline{b_1' b_1 b_1'}_{\downarrow} \sigma b_1'. \tag{3.16}
$$

Daher

$$
\begin{array}{rcl}
p^*p & = & (b_1' a_2 \dots)^* \underline{b_1' b_1 a_1' a_1 b_1'} a_2 \dots \\
 & \sigma & (b_1' a_2 \dots)^* b_1' a_2 \dots \\
 & \sigma & \hat{p} \text{ (mit CASE C, bzw. CASE D, Tiefe } n+1\text{).}
\end{array}
$$

■

Kapitel 4

Die freien regulären unären Monoide

4.1 Ein Rahmen für die Konstruktion: d-Reihen

4.1.1 Definition und Beispiele

Definition

Mit Hilfe der aufsteigenden Folge der Monoide $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haben wir U mit zusätzlichen Operationen versehen: wir haben zwei aufsteigende Folgen von einstelligen Operationen mit Supremum$\hat{}$und $()^L$ definiert. Die dualen Operationen haben wir mit$\tilde{}$und $()^R$ bezeichnet.
Das waren Hilfsmittel für das Aussuchen der Normalformen in U. Nun bereiten wir die induktive Konstruktion der Operationen auf der Menge der Normalformen vor. Wenn die Hilfsoperationen und Relationen auf einem D_n gewisse Bedingungen erfüllen, läßt sich die Korrektheit der Konstruktion im nächsten Schritt beweisen. Die Voraussetzungen fassen wir in einem Begriff *d-Reihe* zusammen.

Definition 4 *Eine* d-Reihe $\mathcal{D}$ *wird definiert durch:*

- *eine aufsteigende Folge von Teilmengen $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $D_n \subseteq V_n$. Wir* *bezeichnen mit D das Supremum der D_n, und setzen*

$$\begin{aligned} C_0 &:= D_0 \setminus \{\lambda\} \\ C_{n+1} &:= D_{n+1} \setminus D_n \text{ für } n \geq 0, \end{aligned}$$

- *eine aufsteigende Folge von zweistelligen Operationen*

  $$\circ_n \colon D_n \times D_n \to D_n$$

  (das Supremum wird ohne Index notiert),

- *eine aufsteigende Folge von einstelligen Operationen*

  $$()_{L,n} \colon D_n \times D_n \to D_n$$

  (das Supremum wird auch ohne Index notiert, und die duale Operation mit $()_R$ bezeichnet),

- *folgende Voraussetzungen:*

  $$\textit{(0)} \begin{cases} X \subseteq D_n \subseteq V_n, \\ D_n \textit{ist unter}\,\widehat{}\,\textit{und } ()^L \textit{ abgeschlossen}, \\ D_n \textit{ ist symmetrisch}, \\ \text{rückw}\,(a \circ b) = \text{rückw}\,(b) \circ \text{rückw}\,(a) \textit{ für alle } a, b \in D, \end{cases}$$

  (1) $(D_n, \circ_n, \lambda)$ *ist ein Monoid,*

  (2) für $p, q \in U$ *gilt* $pq \in C_n \Rightarrow p, q \in D_n$ *und* $p \circ q = pq$*,*

  (3) für $p \in D_n, q \in C_n$ *gilt* $p \circ \widehat{q} = r\widehat{q}$ *für ein* $r \in D_n$*,*

  (4) für $p \in D$ *gilt* $\widehat{p} = p_L \circ p$*.*

Bemerkung: In (3) kann man wegen (2) auch $r \in U$ voraussetzen.

Beispiele

- Die Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der „alten“ Verkettung als $\circ$ und $()^L$ als $()_L$ ist eine d-Reihe.

- Die stationäre Folge $(V_0)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\circ$ und $()_L$ wie oben ist eine weitere d-Reihe.

- Allgemeiner kann eine d-Reihe $\mathcal{D}$ durch die Folge ihrer Approximationen definiert werden, das heißt eine aufsteigende Folge von d-Reihen $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei die d-Reihe $\mathcal{D}_n$ bis zum Rang n mit $\mathcal{D}$ übereinstimmt und dann stehen bleibt. Wir nennen stehenbleibende d-Reihen *stationär*.
  Für die Konstruktion des Modells von Polák werden wir eine d-Reihe durch ihre Approximationen definieren.

4.1.2 Weitere Hilfsoperationen

Für eine d-Reihe $\mathcal{D}$ schränken wir die Hilfsrelation $\geq$ auf $D \times D$ ein. Aus der Voraussetzung (2) folgt für Elemente $p, q \in D$:

$$p = u\widehat{q} \text{ mit } u \in D \Leftrightarrow p = u\widehat{q} \text{ mit } u \in U \tag{4.1}$$

Falls es existiert, ist das Element u eindeutig bestimmt. Also ist die partielle zweistellige Operation / wohldefiniert auf D: für $p, q \in D$, setze

$$p/q := \begin{cases} u \circ q_L & \text{falls } p \geq q, p = u\widehat{q} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls p/q definiert ist, liefert es einen Wert in D, weil das u auch in D liegt. Die Hilfsoperation läßt sich natürlich als $\backslash$ dualisieren.
Mit Hilfe dieser Relationen und Operationen lassen sich Eigenschaften der d-Reihen formulieren, die uns erlauben, eine Folge stationärer d-Reihen induktiv zu konstruieren.

4.1.3 Eigenschaften

Für eine beliebige d-Reihe $\mathcal{D}$ haben wir folgende Eigenschaften:

Lemma 3 *(für jedes n)*

(5) für $p \in D_n, q \in C_n$ gilt $p \circ q \geq q$,

(6) für $p, r \in D_n, q \in C_n$ *mit* $p \geq q \leq r$ *gilt* $(p/q) \circ r = p \circ (q \backslash r)$*,*

(7) für $p \in D_n, q \in C_n$ *gilt* $p \geq q \Rightarrow p/q \circ q = p$*,*

(8) für $p \in D_n, q \in C_n$ *gilt* $p \geq q \Leftrightarrow p = r \circ q$ *für ein* $r \in D_n$*,*

(9) für $p, r \in D_n, q \in C_n$ *mit* $p \geq q$ *und* $r \leq p/q$ *gilt* $r \leq p$*.*

Beweis (mit den obigen Notationen)

Zu (5)

$$\begin{aligned} p \circ q &\overset{[4]}{=} p \circ (q^L \widehat{q}) \\ &\overset{[2]}{=} p \circ q^L \circ \widehat{q} \\ &\overset{[1]}{=} (p \circ q^L) \circ \widehat{q} \\ &\overset{[3]}{=} r\widehat{q}, \text{für } r \in D_n. \end{aligned}$$

Zu (6)

$$\begin{aligned} (p/q) \circ r &\overset{Def}{=} (u \circ q_L) \circ r \\ &\overset{Vor}{=} (u \circ q_L) \circ (\widetilde{q} \circ v) \\ &\overset{[4dual]}{=} (u \circ q_L) \circ \big((q \circ q_R) \circ v\big) \\ &\overset{[1]}{=} u \circ q_L \circ q \circ q_R \circ v \end{aligned}$$

Dual gilt auch

$$\text{rückw}\big(p \circ (q \backslash r)\big) = \text{rückw}\big(u \circ q_L \circ q \circ q_R \circ v\big),$$

also $(p/q) \circ r = p \circ (q \backslash r)$.

Zu (7)

$$p \geq q \text{ heißt } p = u\widehat{q}.$$

$$\begin{aligned} (u \circ q_L) \circ q &\overset{[1]}{=} u \circ (q_L \circ q) \\ &\overset{[4]}{=} u \circ \widehat{q} \\ &\overset{[2]}{=} u\widehat{q} \\ &\overset{[Vor]}{=} p. \end{aligned}$$

Zu (8) „$\Rightarrow$“ erhält man mit $r := u \circ q_L$ in [7].
„$\Leftarrow$“ gilt wegen $p = r \circ q$ in [5].

Zu (9) Mit [8dual] gilt $p/q = r \circ v$ für ein $v \in D_n$, und mit [7] $(p/q) \circ q = p$.

$$\begin{aligned}(p/q) \circ q &\overset{[8dual]}{=} (r \circ v) \circ q \\ &\overset{[1]}{=} r \circ (v \circ q) \\ (p/q) \circ q &\overset{[7]}{=} p,\end{aligned}$$

Daraus folgt $p = r \circ (v \circ q)$ und $r \leq p$ mit [8dual].

∎

4.2 Poláks Modell

Motivation: In diesem Abschnitt konstruieren wir induktiv eine Folge von d-Reihen $(\mathcal{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4.2.1 Konstruktion

△ Induktionsanfang

Die d-Reihe $\mathcal{D}_0$ ist schon bekannt: wir nehmen die stationäre d-Reihe $(V_0)_{n \in \mathbb{N}}$, wie sie im Abschnitt 4.1.1 definiert wurde …
△ Induktionsschritt

Aus einer d-Reihe $\mathcal{D}$, die ab der Tiefe n stehen bleibt, konstruieren wir nun eine d-Reihe $\mathcal{D}^+$, die ab der Tiefe $n+1$ stehen bleibt.

1. Folge der unterliegenden Mengen $(D_k^+)_{k \in \mathbb{N}}$
Die Folge bleibt bis zur Tiefe n unverändert: $D_k^+ = D_k$ für $k \leq n$, und wir erweitern die unterliegende Menge bis zur Tiefe $n+1$ mit $D_{n+1}^+ := C_{n+1}^+ \uplus D_n$, wobei $C_{n+1} \subseteq U_{n+1}$,

$$C_{n+1} := \biguplus_{k \geq 1} \left\{ a_1 b_1' a_2 \cdots a_k b_k' a_{k+1} | a_i \in D_n, b_i \in C_n \text{ und } \clubsuit \right\}$$

♣ heißt $\neg(a_i \geq b_i \leq a_{i+1})$ und $\neg(b_i = a_{i+1} = b_{i+1})$ für alle i.
Es ist klar, daß C_{n+1}^{+} symmetrisch ist.

2. Erweiterung der Operationen
Die Verknüpfung $\circ_{n+1}$ muß für ein altes und ein neues Element sowie für zwei neue Elemente definiert werden, die Hilfsoperation $()_{L,n+1}$ für die neuen Elemente. Die Definitionen von Polák können in [Pol89, 186] nachgelesen werden. Die Definition der Verknüpfung ist rekursiv über die Länge k der Elemente (siehe die obige Beschreibung der Grundmenge) und basiert auf fünf Regeln, die man nicht deterministisch anwenden kann. Es ist zu zeigen, daß die Verkettung auf D^{+} korrekt definiert ist, und daß sie assoziativ ist.
Dieses wird induktiv über die Summe der Länge der Elemente gezeigt. Dafür werden die Aussagen (1) bis (9) des Lemmas 1 in 4.1.3 benutzt. Der Beweis der Aussagen (1) bis (4) des Lemmas 1 zeigt, daß die Folge $(D_k^{+})_{k\in\mathbb{N}}$ tatsächlich eine d-Reihe $\mathcal{D}^{+}$ definiert. Mit der Voraussetzungen, die wir an der d-Reihen gestellt haben, erhalten wir die Eigenschaften, die in 4.1.3 bewiesen wurden, also die Aussagen (5) bis (9) des Lemmas 1 in [Pol89, 187].

$\triangle$ Supremumbildung
Mit der Folge der d-Reihen $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bekommt man ein Monoid als Supremum der Monoide $(D_n, \circ_n, \lambda)$. Es ist die Grundmenge $C := \bigcup V_n$ unter der Operation $'$ abgeschlossen, also ist $(C, \circ, ', \lambda)$ ein unäres Monoid.
Im nächsten Abschnitt weisen wir nach, daß C die gewünschten Gesetze erfüllt.

4.2.2 Korrektheit

Die Beweise stehen in [Pol89, 193]. Zunächst zitieren wir noch die Aussagen (10) und (11) des Lemmas 1 von Polák. Sie werden hier natürlich für die d-Reihen formuliert. Der Beweis wird induktiv über n geführt.
Die Aussagen sind klar für $n = 0$.
Für den Induktionsschritt darf man die Aussagen (1) bis (9) des Lemmas 1 von Polák benutzen. Die Aussagen (1) bis (4) gelten nach der Definition der d-Reihen. Die Aussagen (5) bis (9) sind Eigenschaften der d-Reihen.

Lemma 4 *(für jedes n)*
In der d-Reihe $\mathcal{D}_{n+1}$ *haben wir:*

(10) Für $p, r \in D_n, q \in C_n$ *mit* $p \geq q \leq r$ *gilt* $pq'r\sigma(p/q) \circ r$.

(11) Für alle $p, r \in D_n$ *gilt* $p \circ r \sigma pr$.

Bemerkung: Es ist $p \geq q \leq q$, also gilt insbesondere $p \geq q \Leftrightarrow pq'q\sigma p$.

Satz 4.1 *Es ist* $(C, \circ, ', \lambda)$ *das frei unäre reguläre Monoid über* X.

Ein Entscheidungsverfahren für das Wortproblem

Man erhält die Normalform $c(p)$ eines Elements $p = a_1 b_1' \cdots a_k b_k' a_{k+1}$ indem man rekursiv die alte Verkettung durch die neue Verkettung $\circ$ ersetzt:

$$c(p) = c(a_1) \circ c(b_1)' \circ \cdots c(a_k) \circ c(b_k)' \circ c(a_{k+1}).$$

Literaturverzeichnis

[Bur80] W. D. Burgess. On free commutative regular rings. In *Communications in Algebra*, volume 8(7), pages 671–683, 1980.

[LN73] Hans Lausch and Wilfried Nöbauer. *Algebra of Polynomials*. North-Holland Publishing Compagny, Amsterdam, 1973.

[ML72] Saunders Mac Lane. *Categories. For the Working Mathematician*. Springer Verlag, 1972.

[MLB88] Saunders Mac Lane and Garrett Birkoff. *Algebra*. Chelsea Publishing Compagny, New York, third edition edition, 1988.

[Pol89] Libor Polák. Free regular unary semigroups. In John Rhodes Ed., editor, *Monoids and Semigroups with applications*, pages 184–197, Singapore, 1989. World Scientific.