Stetige Bewertungen auf topologischen Räumen

Diplomarbeit von

Regina Tix

Betreuer: Prof. Dr. K. Keimel

Fachbereich Mathematik
der Technischen Hochschule Darmstadt

Juni 1995

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Betrachtet man Computerprogramme, so ist bei einem deterministischen Programm jeder Schritt eindeutig festgelegt. Terminiert ein solches Programm, so ist der Ausgabewert durch die Eingabe eindeutig bestimmt. Nichtdeterministische Sprachen dagegen weisen ein Konstrukt auf, das es erlaubt, in einem Programmschritt eine Auswahl aus endlich vielen Möglichkeiten zu treffen. Geschieht diese Auswahl gewichtet, so spricht man von probabilistischem Nichtdeterminismus. Läuft ein solches Programm immer wieder mit demselben Eingabewert, so verhält sich die Menge der Ausgaben nach einer festen Verteilungsfunktion. Um solche Programme mathematisch zu beschreiben, benötigt man auf der Semantik der Ausgaben eine Struktur, die diese Wahrscheinlichkeitsverteilung modelliert. Dies ermöglichen stetige Bewertungen, die erstmals von J. Lawson in [9] eingeführt werden. C. Jones und G. Plotkin interpretieren dabei in [4] und [5] die möglichen Eingaben in einem topologischen Raum E und die möglichen Ausgaben in einem anderen topologischen Raum A. Häufig werden dazu spezielle topologische Räume verwendet, nämlich Bereiche mit der Scott-Topologie. Das Programm wird durch eine Abbildung $P\colon E \to \mathcal{V}_1(A)$ modelliert, wobei $\mathcal{V}_1(A)$ die Menge aller stetigen Bewertungen μ auf A mit Gesamtmasse $\mu(A) \leq 1$ bezeichnet. Ist $P(x) = \mu$, so gibt $\mu(U)$ an, mit welcher Wahrscheinlichkeit man nach Ausführung des Programms P mit Eingabe x eine Ausgabe in der Menge U erhält. Es werden dabei nur offene Mengen $U \subseteq A$ betrachtet, die der Idee von M. B. Smyth in [12] folgend mit Prädikaten identifiziert werden. Die Wahrscheinlichkeit $\mu(A)$ beschreibt z. B. die Eigenschaft des Programms, unter der gewählten Eingabe zu terminieren.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit werden Grundlagen über stetige Bewertungen, von unten halbstetige reellwertige Funktionen und Bereichskegel bereitgestellt. Wichtige Ergebnisse über stetige Bewertungen aus den Arbeiten von C. Jones [4] und O. Kirch [8] werden in Kapitel 2 zusammengefaßt. Im dritten Kapitel wird gezeigt, daß in kohärenten Räumen auf der Menge aller quasikompakten saturierten Teilmengen Funktionen mit ähnlichen Eigenschaften wie Bewertungen definiert werden können. Deren Beziehung zu stetigen Bewertungen wird ebenfalls untersucht. Die Integration einer halbstetigen Funktion bezüglich einer stetigen Bewertung, die O. Kirch für core-kompakte Räume untersucht, wird in Kapitel 4 auf alle topologischen Räume verallgemeinert. Es wird auch gezeigt, daß für diese stetigen Bewertungen immer noch eine Form des Rieszschen Darstellungssatzes gilt. Dazu ist es notwendig, die durch die Integralform definierten schwachen Topologien auf den Bereichskegeln $\mathcal{V}(X)$ und $\mathcal{L}(X)$ zu betrachten. Es bezeichnet dabei $\mathcal{V}(X)$ die Menge aller stetigen Bewertungen und $\mathcal{L}(X)$ die Menge aller halbstetigen reellwertigen Funktionen auf dem topologischen Raum X. Auf $\mathcal{V}(X)$ ist die schwache Topologie immer gleich der Produkttopologie und diese hat noch eine weitere schöne Eigenschaft: In Kapitel 5 wird gezeigt, daß die Menge $\mathcal{V}(X)$ mit der Produkttopologie immer einen nüchternen topologischer Raum bildet. Das sechste Kapitel befaßt sich mit der Frage: Erhält der Funktor $\mathcal{V}$ die Eigenschaft eines stetigen Bereichs, **RSFP**-Objekt zu sein oder die Eigenschaft FS-Bereich zu sein? Dies ist wichtig, da man sinnvolle Modelle für eine Programmiersprache nur in kartesisch abgeschlossenen Kategorien bilden kann. Mehrere Beweisideen werden vorgestellt, die bisher jedoch nur zu sehr speziellen Teilergebnissen führen.

An dieser Stelle bedanke ich mich bei allen, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt und immer wieder aufgemuntert haben. Meinen Kommilitonen danke ich für die Bereitschaft, mir bei meinen Problemen aufmerksam und kritisch zuzuhören. Bei Herrn Dr. Achim Jung bedanke ich mich für die intensiven Diskussionen und die vielen Ideen. Ein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Klaus Keimel für die geduldige Betreuung in langen Gesprächen mit vielen Anregungen, die immer wieder eine Herausforderung an mich stellten.

1 Grundlagen

Grundlegende Begriffe aus der Bereichstheorie übernehmen wir aus [1, Kapitel 2]. Dabei soll „dcpo“ mit Bereich und „domain“ mit stetiger Bereich bezeichnet werden. Ein häufig verwendetes Beispiel für einen stetigen Bereich ist $\overline{\mathbb{R}}_+$, die nichtnegativen reellen Zahlen $\mathbb{R}_+$ erweitert um ∞. Als Topologie hierauf betrachten wir stets die untere Topologie, die in diesem Fall gleich der Scott-Topologie ist. Die Rechenoperationen Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}_+$ setzen wir folgendermaßen fort:

$$\begin{array}{rcccl} x + \infty & = & \infty & = & \infty + x \\ x \cdot \infty & = & \infty & = & \infty \cdot x, \quad \text{falls } x \neq 0 \\ 0 \cdot \infty & = & 0 & = & \infty \cdot 0. \end{array}$$

Mit dieser Definition sind die Operationen $+, \cdot \colon \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ Scott-stetig.

Desweiteren werden wir Grundbegriffe der Kategorientheorie verwenden, die unter anderem in [10] nachgelesen werden können.

Grundlagen zu Bewertungen, halbstetigen Funktionen und Bereichskegeln übernehmen wir im wesentlichen aus [8, Kapitel 1]. Da wir aber eine Definition abändern, zusätzlich Beispiele benötigen und einige Lemmata häufig verwenden, fassen wir diese nochmals zusammen. Fehlende Beweise können in [8, Kapitel 1] nachgelesen werden oder bestehen aus einer kurzen Rechnung.

Definition 1.1 *Sei X ein topologischer Raum und bezeichne $\mathcal{O}(X)$ den Verband der offenen Teilmengen von X. Eine Abbildung $\mu \colon \mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt Bewertung auf X, wenn sie strikt, monoton und modular ist. Es bedeuten dabei:*

- *Striktheit:* $\mu(\emptyset) = 0$,
- *Monotonie:* $(\forall U, V \in \mathcal{O}(X))\ (U \subseteq V \Rightarrow \mu(U) \leq \mu(V))$,
- *Modularität:* $(\forall U, V \in \mathcal{O}(X))\ \mu(U) + \mu(V) = \mu(U \cup V) + \mu(U \cap V)$.

Ist die Bewertung μ zusätzlich bezüglich der Scott-Topologie auf $\mathcal{O}(X)$ stetig, so heißt μ eine stetige Bewertung. Die Menge aller stetigen Bewertungen auf X bezeichnen wir mit $\mathcal{V}(X)$. Sie soll mit der punktweisen Ordnung ausgestattet sein, d. h.

$$\mu \leq \nu \ :\Leftrightarrow\ (\forall U \in \mathcal{O}(X))\ \mu(U) \leq \nu(U).$$

Wir betrachten nun einige Beispiele von stetigen Bewertungen auf einem topologischen Raum X und geben Konstruktionsmöglichkeiten an, aus gegebenen Bewertungen neue zu erhalten. Zudem sollen bestimmte Bewertungen eine eigene Bezeichnung erhalten:

- Die konstante Nullfunktion ist eine stetige Bewertung.

- Für jeden Punkt $x \in X$ wird die Punktbewertung $\eta_x \colon \mathcal{O}(X) \to \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$\eta_x(U) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in U \\ 0 & \text{falls } x \notin U. \end{cases}$$

  Jede Punktbewertung ist eine stetige Bewertung.

- Sind $\mu, \nu \colon \mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ stetige Bewertungen, dann können sie als Funktionen punktweise addiert bzw. mit einem Skalar $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$ multipliziert werden. Die Summe $\mu + \nu$ und das skalare Vielfache $r \cdot \mu$ sind ebenfalls stetige Bewertungen.

- Insbesondere sind endliche Linearkombinationen von Punktbewertungen $\sum_{i=1}^{n} r_i \eta_{x_i}$ mit $r_i \in \mathbb{R}_+$ wieder stetige Bewertungen. Sie haben endliches Bild und eine beschränkte Gesamtmasse, d. h. $\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \eta_{x_i}\right)(X) < \infty$. Wir werden sie auch einfache Bewertungen nennen und die Menge aller einfachen Bewertungen auf X mit $\mathcal{V}_f(X)$ bezeichnen.

- Eine Bewertung μ heißt beschränkt, wenn $\mu(X) < \infty$ gilt. Die Menge aller beschränkten stetigen Bewertungen auf X heißt $\mathcal{V}_b(X)$.

- Die Einschränkung $\mu_{|W} \colon \mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ einer stetigen Bewertung μ auf eine offene Menge W wird gegeben durch $\mu_{|W}(U) := \mu(U \cap W)$ und ist eine stetige Bewertung.

- Die Einschränkung $\mu_{|A} \colon \mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ einer beschränkten stetigen Bewertung μ auf eine abgeschlossene Menge A wird gegeben durch $\mu_{|A}(U) := \mu(U) - \mu_{|X \setminus A}(U)$ und ist eine stetige Bewertung.

- Sind X, Y topologische Räume und $f \colon X \to Y$ eine stetige Funktion. Dann ist für jede stetige Bewertung μ auf X die Abbildung $\mu \circ f^{-1}$ eine stetige Bewertung auf Y.

- Ist $(\mu_i)_{i \in I}$ eine gerichtete Familie stetiger Bewertungen, dann ist auch das punktweise gebildete Supremum $\bigvee^{\uparrow}_{i \in I} \mu_i$ eine stetige Bewertung.

Weitere Eigenschaften stetiger Bewertungen, insbesondere auf speziellen topologischen Räumen, untersuchen wir in Kapitel 2. Nun führen wir die Funktionen ein, die wir in Kapitel 4 bezüglich stetiger Bewertungen integrieren wollen.

Definition 1.2 *Sei X ein topologischer Raum. Eine Funktion $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt (von unten) halbstetig, wenn sie bezüglich der unteren Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}_+$ stetig ist. Die Menge aller halbstetigen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(X)$. Sie soll mit der punktweisen Ordnung ausgestattet sein, d. h.*

$$f \leq g \;:\Leftrightarrow\; (\forall x \in X)\, f(x) \leq g(x).$$

Auch hier werden wir einige Beispiele und Konstruktionsmöglichkeiten aufzählen. Besondere halbstetige Funktionen erhalten ebenfalls eine zusätzliche Bezeichnung.

- Die konstante Nullfunktion ist halbstetig.

- Die charakteristische Funktion $\chi_U : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ einer offenen Menge $U \in \mathcal{O}(X)$ wird definiert durch
$$\chi_U(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in U \\ 0 & \text{falls } x \notin U. \end{cases}$$
und ist eine halbstetige Funktion.

- Sind $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ halbstetige Funktionen, dann auch die punktweise gebildete Summe $f + g$ und das skalare Vielfache $r \cdot f$ mit $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

- Eine halbstetige Funktion heißt einfach, wenn ihr Bild endlich ist und für alle $x \in X$ gilt $f(x) < \infty$.

Sicher ist jede endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen offener Mengen einfach. Daß auch die Umkehrung richtig ist, sagt folgendes

Lemma 1.3 *Sei X ein topologischer Raum. Jede einfache Funktion $s : X \to \mathbb{R}_+$ kann als endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen offener Mengen dargestellt werden, d. h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sowie $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}_+$ und $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{O}(X)$, so daß*
$$s = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \chi_{U_i}.$$

Beweis: Es seien $a_1 < \ldots < a_n < \infty$ die positiven Werte im Bild von s und $a_0 := 0$. Wir wählen nun ein $\varepsilon > 0$, so daß $a_i + \varepsilon < a_{i+1}$ für alle $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ und setzen $U_i := s^{-1}(]a_i - \varepsilon, \infty])$. Damit ist $s = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \chi_{U_i}$. ■

Dieser Beweis zeigt zudem, daß für s eine Standard-Darstellung gewählt werden kann, bezüglich der zusätzlich $U_n \subseteq U_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq U_1$ gilt. Machen wir nun weiter mit unserer Aufzählung von Konstruktionsprinzipien:

- Sind X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion. Dann ist für jede halbstetige Funktion $g \in \mathcal{L}(Y)$ die Komposition $g \circ f \in \mathcal{L}(X)$.

- Ist $(f_i)_{i \in I}$ eine gerichtete Familie halbstetiger Funktionen. Dann ist auch das punktweise gebildete Supremum $\bigvee^{\uparrow}_{i \in I} f_i$ halbstetig.

Jede halbstetige Funktion kann durch eine gerichtete Familie einfacher Funktionen approximiert werden. Wir geben eine Möglichkeit an, dies zu tun:

Lemma 1.4 *Sei X ein topologischer Raum und $f \in \mathcal{L}(X)$, dann gilt*
$$f = \bigvee^{\uparrow}_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \frac{1}{2^n} \chi_{f^{-1}(]\frac{i}{2^n}, \infty])}.$$

Beweis: Durch Nachrechnen. ■

Wir haben gesehen, daß für einen topologischen Raum X die Menge aller stetigen Bewertungen $\mathcal{V}(X)$ und die Menge aller halbstetigen Funktionen $\mathcal{L}(X)$ noch zusätzlich Strukturen tragen. Zum Beispiel sind sie geordnet, Elemente können addiert oder mit Skalaren aus $\overline{\mathbb{R}}_+$ multipliziert werden und Suprema über gerichtete Teilmengen existieren. Dies führt uns zum Begriff des Bereichskegels:

Definition 1.5 *Eine Menge C heißt reeller Kegel, wenn ein ausgezeichnetes Element $0 \in C$ existiert, sowie zwei Operationen $+\colon C \times C \to C$ und $\cdot\colon \overline{\mathbb{R}}_+ \times C \to C$ definiert sind, die für alle $a, b, c \in C$ und für alle $r, s \in \overline{\mathbb{R}}_+$ die folgenden Eigenschaften erfüllen:*

$$
\begin{aligned}
(a+b)+c &= a+(b+c) \\
a+b &= b+a \\
a+0 &= a \\
1\cdot a &= a \\
0\cdot a &= 0 \\
(r\cdot s)\cdot a &= r\cdot(s\cdot a) \\
r\cdot(a+b) &= (r\cdot a)+(r\cdot b) \\
(r+s)\cdot a &= (r\cdot a)+(s\cdot a)
\end{aligned}
$$

Eine Abbildung $f\colon C_1 \to C_2$ zwischen reellen Kegeln C_1 und C_2 heißt linear, falls sie die Kegeloperationen erhält. Ist C zusätzlich ein Bereich und ein topologischer Raum, so sprechen wir von einem Bereichskegel, falls die Operationen $+\colon C \times C \to C$ und $\cdot\colon \overline{\mathbb{R}}_+ \times C \to C$ stetig sind. Ist C außerdem ein stetiger Bereich, so sprechen wir von einem stetigen Bereichskegel. Morphismen zwischen Bereichskegeln sind lineare stetige Abbildungen. Bereichskegel bilden damit eine Kategorie, die **DCONE** *heißen soll.*

Für jeden topologischen Raum X sind $\mathcal{V}(X)$ und $\mathcal{L}(X)$ mit der Scott-Topologie tatsächlich Bereichskegel, was Lemma 1.1 und Lemma 1.4 in [8] beweisen. Unsere Definition von Bereichskegel ist allerdings allgemeiner als die in [8], da dort ein Kegel C die Scott-Topologie tragen muß, um Bereichskegel zu sein. Wir erlauben auch andere Topologien, sofern nur Addition und Skalarmultiplikation stetig sind. Ein Vorteil dieser Definition ist, daß in der Kategorie **DCONE** aller Bereichskegel beliebige Produkte gebildet werden können. Ein weiteres wichtiges Beispiel für Bereichskegel ist $\overline{\mathbb{R}}_+$ und Produkte hiervon.

2 Einfache Bewertungen und Bewertungen auf stetigen Bereichen

Im ersten Teil dieses Kapitels wollen wir einige Eigenschaften einfacher Bewertungen zusammenfassen. Für stetige Bereiche X können wir dann folgern, daß auch $\mathcal{V}(X)$ ein stetiger Bereich, ja sogar der freie stetige Bereichskegel über X, ist. Weiter werden wir ein Beispiel sehen, bei dem auf die Stetigkeit von X nicht verzichtet werden kann.

Zu Beginn bemerken wir, daß eine beschränkte stetige Bewertung mit endlichem Bild nicht immer eine endliche Linearkombination von Punktbewertungen ist. Betrachten wir dazu eine unendliche Menge X mit der kofiniten Topologie, d. h. neben der ganzen Menge X sind genau die endlichen Teilmengen abgeschlossen. Dann wird durch

$$\mu(U) := \begin{cases} 0 & \text{falls } U = \emptyset \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine beschränkte stetige Bewertung mit endlichem Bild definiert. Zu je endlich vielen Punkten $x_1, \ldots, x_n$ ist die Menge $U := X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ offen und nichtleer. Damit ist $\mu(U) = 1$, aber $\left(\sum_{i=1}^n r_i \eta_{x_i}\right)(U) = 0$ für jede mögliche Linearkombination. Die Bewertung μ ist also nicht einfach. Wir können aber eine Klasse topologischer Räume angeben, bei denen es solche Bewertungen nicht gibt.

Definition 2.1 *Ein topologischer Raum X heißt nüchtern, falls zu jedem vollständig primen Filter $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(X)$ genau ein Punkt $x \in X$ existiert, dessen Umgebungsfilter $\mathcal{F}$ ist.*

Damit beweisen wir folgenden Satz, der bereits bei O. Kirch in [8] steht.

Satz 2.2 *Sei X ein nüchterner Raum und $\mu\colon \mathcal{O}(X) \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Bewertung mit endlichem Bild. Dann ist μ eine einfache Bewertung.*

Beweis: Wir werden einen Induktionsbeweis über die Mächtigkeit des Bildes führen. Seien $0 =: a_0 < a_1 < \ldots < a_n < \infty$ die Werte im Bild von μ. Der Wert 0 kommt immer vor, da $\mu(\emptyset) = 0$. Ist 0 der einzige Wert im Bild von μ, so ist nichts zu zeigen.
Sei jetzt $W \in \mathcal{O}(X)$ mit $\mu(W) = a_1$. Wir betrachten die Menge $\mathcal{U} := \{V \in \mathcal{O}(X) \mid \mu(V \cap W) = \mu(W)\}$ und zeigen zunächst, daß sie ein vollständig primer Filter in $\mathcal{O}(X)$ ist.

Die Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}(X)$ ist ein Endstück, denn für $U \in \mathcal{U}$ und $V \supseteq U$ gilt $\mu(W) = \mu(U \cap W) \leq \mu(V \cap W) \leq \mu(W)$ wegen der Monotonie von μ. Damit folgt $V \in \mathcal{U}$. Als nächstes zeigen wir, daß $\mathcal{U}$ gefiltert ist. In der Tat folgt für $U, V \in \mathcal{U}$ wegen der Modularität von μ

$$\begin{aligned} \mu((U \cap V) \cap W) &= \mu(U \cap W) + \mu(V \cap W) - \mu((U \cup V) \cap W) \\ &= \mu(W) + \mu(W) - \mu(W) = \mu(W). \end{aligned}$$

Damit erhält man $U \cap V \in \mathcal{U}$. Es fehlt noch der Nachweis, daß $\mathcal{U}$ vollständig prim ist. Dazu überlegen wir uns, daß $\mathcal{U}$ prim und Scott-offen ist. Angenommen $U, V \notin \mathcal{U}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mu((U \cup V) \cap W) &= \mu((U \cap W) \cup (V \cap W)) \\ &= \mu(U \cap W) + \mu(V \cap W) - \mu((U \cap W) \cap (V \cap W)) = 0, \end{aligned}$$

d. h. auch $U \cup V \notin \mathcal{U}$. Damit ist $\mathcal{U}$ ein primer Filter. Sei jetzt eine gerichtete Teilmenge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{O}(X)$ gegeben mit $\bigvee^{\uparrow}\mathcal{D} \in \mathcal{U}$. Nach Definition von $\mathcal{U}$ und mit der Stetigkeit von μ folgt

$$\mu(W) = \mu(\bigvee{}^{\uparrow}\mathcal{D} \cap W) = \mu(\bigvee_{U \in \mathcal{D}}{}^{\uparrow}(U \cap W)) = \bigvee_{U \in \mathcal{D}}{}^{\uparrow}\mu(U \cap W).$$

Da das Bild von μ endlich ist, wird dieses Supremum auch angenommen. Es gibt also eine offene Menge $U \in \mathcal{D}$ mit $\mu(U \cap W) = \mu(W)$, d. h. aber gerade $U \in \mathcal{U}$. Dies zeigt zusammen mit der Überlegung, daß $\mathcal{U}$ ein Endstück ist, die Scott-Offenheit dieser Teilmenge in $\mathcal{O}(X)$. Damit ist nachgewiesen, daß $\mathcal{U}$ ein vollständig primer Filter ist.

Da nach Voraussetzung X ein nüchterner Raum ist, existiert genau ein Element $x \in X$, so daß $\mathcal{U}$ dessen Umgebungsfilter ist; für dieses gilt $\chi_{\mathcal{U}} = \eta_x$. Als nächstes betrachten wir die Abbildung $\mu - a_1\eta_x$, definiert durch $(\mu - a_1\eta_x)(U) = \mu(U) - a_1\eta_x(U)$, und zeigen, daß sie ebenfalls eine stetige Bewertung mit endlichem Bild ist. Man kann leicht nachrechnen, daß $\mu - a_1\eta_x$ strikt und modular ist:

$$(\mu - a_1\eta_x)(\emptyset) = \mu(\emptyset) - a_1\eta_x(\emptyset) = 0,$$

$$\begin{aligned}(\mu - a_1\eta_x)(U) \;&+\; (\mu - a_1\eta_x)(V) = \mu(U) + \mu(V) - a_1(\eta_x(U) + \eta_x(V)) \\ &= \mu(U \cup V) + \mu(U \cap V) - a_1(\eta_x(U \cup V) + \eta_x(U \cap V)) \\ &= (\mu - a_1\eta_x)(U \cup V) + (\mu - a_1\eta_x)(U \cap V).\end{aligned}$$

Jetzt zur Monotonie: Seien $U, V \in \mathcal{O}(X)$ mit $U \subseteq V$ gegeben. Für $U, V \notin \mathcal{U}$ oder $U, V \in \mathcal{U}$ folgt die Monotonie von $\mu - a_1\eta_x$ unmittelbar aus der von μ. Da $\mathcal{U}$ ein Endstück in $\mathcal{O}(X)$ ist, kommt der Fall $U \in \mathcal{U}, V \notin \mathcal{U}$ nicht vor. Für $U \notin \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{U}$ können wir wegen der Monotonie und Modularität von μ berechnen:

$$\begin{aligned}(\mu - a_1\eta_x)(U) &= \mu(U) = \mu(U \cup W) + \mu(U \cap W) - \mu(W) \\ &= \mu(U \cup W) + 0 - a_1 \leq \mu(V \cup W) - a_1 \\ &= \mu(V) + \mu(W) - \mu(V \cap W) - a_1 = \mu(V) + a_1 - a_1 - a_1 \\ &= \mu(V) - a_1 = (\mu - a_1\eta_x)(V).\end{aligned}$$

Nun weisen wir noch nach, daß $\mu - a_1\eta_x$ Scott-stetig ist. Sei also $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{O}(X)$ gerichtet. Wegen der Monotonie von $\mu - a_1\eta_x$ ist das Bild von $\mathcal{D}$ unter dieser Abbildung gerichtet.

1. Fall: $\bigvee^{\uparrow}\mathcal{D} \notin \mathcal{U}$. Dann gilt $U \notin \mathcal{U}$ für alle $U \in \mathcal{D}$ und damit

$$(\mu - a_1\eta_x)(\bigvee{}^{\uparrow}\mathcal{D}) = \mu(\bigvee{}^{\uparrow}\mathcal{D}) = \bigvee_{U \in \mathcal{D}}{}^{\uparrow}\mu(U) = \bigvee_{U \in \mathcal{D}}{}^{\uparrow}(\mu - a_1\eta_x)(U)$$

2. Fall: $\bigvee^{\uparrow}\mathcal{D} \in \mathcal{U}$. Da $\mathcal{U}$ ein vollständig primer Filter ist, gilt $\mathcal{D} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Diese Menge ist sogar gerichtet, und $\bigvee^{\uparrow}(\mathcal{D} \cap \mathcal{U}) = \bigvee^{\uparrow}\mathcal{D}$. Mit der Monotonie von $\mu - a_1\eta_x$ folgt

$$\begin{aligned}(\mu - a_1\eta_x)(\bigvee{}^{\uparrow}\mathcal{D}) &= (\mu - a_1\eta_x)(\bigvee{}^{\uparrow}(\mathcal{D} \cap \mathcal{U})) \\ &= \mu(\bigvee{}^{\uparrow}(\mathcal{D} \cap \mathcal{U})) - a_1\eta_x(\bigvee{}^{\uparrow}(\mathcal{D} \cap \mathcal{U})) \\ &= \bigvee_{U \in \mathcal{D} \cap \mathcal{U}}{}^{\uparrow}(\mu(U) - a_1) = \bigvee_{U \in \mathcal{D} \cap \mathcal{U}}{}^{\uparrow}(\mu - a_1\eta_x)(U) \\ &= \bigvee_{U \in \mathcal{D}}{}^{\uparrow}(\mu - a_1\eta_x)(U)\end{aligned}$$

Induktionsschritt: Wir beweisen nun, daß die Mächtigkeit des Bildes von $\mu - a_1\eta_x$ echt kleiner ist als die des Bildes von μ. Dazu zeigen wir, daß $\text{Bild}(\mu - a_1\eta_x) \subseteq \{0 = a_1 - a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_1\}$. Diese Menge enthält genau ein Element weniger als das Bild von μ. Die Beziehung $\text{Bild}(\mu - a_1\eta_x) \subseteq \{0 = a_1 - a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ ist klar. Für $V \in \mathcal{U}$ gilt $\mu(V \cap W) = a_1$, also $\mu(V) = a_k \geq a_1$ und folglich

$$(\mu - a_1\eta_x)(V) = a_k - a_1.$$

Für $V \notin \mathcal{U}$ gilt $\mu(V \cap W) = 0$ und $x \notin V$, aber $\mu(V \cup W) = a_l \geq a_1$. Also können wir wegen der Modularität von $\mu - a_1\eta_x$ berechnen

$$\begin{aligned}(\mu - a_1\eta_x)(V) &= \mu(V) - a_1\eta_x(V) = \mu(V) \\ &= \mu(V \cup W) + \mu(V \cap W) - \mu(W) = a_l - a_1.\end{aligned}$$

Es folgt $\text{Bild}\mu \subseteq \{0 = a_1 - a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_1\}$, wie wir behauptet haben. Dieses Verfahren können wir für $\mu - a_1\eta_x$ wiederholen und werden eine stetige Bewertung erhalten, deren Bild noch weniger Elemente enthält. Nach spätestens n Schritten ist nur noch die Nullbewertung übrig, und wir haben μ als endliche Linearkombination von Punktbewertungen dargestellt. ■

Sicher ist jede einfache Bewertung auch eine stetige Bewertung mit endlichem Bild, so daß die Umkehrung dieses Satzes für beliebige topologische Räume richtig ist. Wir erhalten daraus als

Folgerung 2.3 *Sei X ein endlicher Bereich. Dann ist die Menge aller einfachen Bewertungen auf X gleich der Menge aller beschränkten Bewertungen auf X, oder anders geschrieben $\mathcal{V}_f(X) = \mathcal{V}_b(X)$.*

Eine weitere Eigenschaft einfacher Bewertungen ist, daß ihre Darstellung als Linearkombination von Punktbewertungen eindeutig ist. Genauer gilt nämlich

Lemma 2.4 *Sei X ein T_0-Raum. Seien B, C endliche Teilmengen von X und $r_b, b \in B$, $s_c, c \in C$ positive reelle Zahlen . Ist $\sum_{b\in B} r_b\eta_b = \sum_{c\in C} s_c\eta_c$, dann ist $B = C$ und $r_b = s_b$ für alle $b \in B$.*

Beweis: Siehe Lemma 2.1 in [8]. ■

Eine weitere wichtige Eigenschaft haben einfache Bewertungen auf stetigen Bereichen. In [8, Satz 5.3] kann man einen Beweis dafür nachlesen, daß sie dort eine Basis für den Bereich aller stetigen Bewertungen bilden. Damit erhält man den

Satz 2.5 *Ist X ein stetiger Bereich ausgestattet mit der Scott-Topologie, dann ist $\mathcal{V}(X)$ ebenfalls ein stetiger Bereich.*

Wir zeigen nun, daß man wenig Hoffnung haben kann, daß für andere topologische Räume X, der Bereichskegel $\mathcal{V}(X)$ ein stetiger Bereich sein wird. Für $X = [0,1]$ bilden die einfachen Bewertungen nicht nur keine Basis mehr, sondern es kann auch keine andere Basis geben. Das sieht man so ein:

Beispiel 2.6 *Sei $[0,1]$ das Einheitsintervall ausgestattet mit der üblichen Hausdorffschen Topologie. Dann ist $\mathcal{V}([0,1])$ kein stetiger Bereich.*

Beweis: Sei λ das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$ eingeschränkt auf die offenen Mengen. Dann ist λ eine stetige Bewertung. Wir wollen zeigen, daß keine Bewertung ungleich der Nullbewertung weit unter λ liegt. Dazu bezeichnen wir die ε-Umgebung von $x \in [0,1]$ mit $U_\varepsilon(x) :=]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap [0,1]$. Für alle $x \in [0,1]$ gilt $\lambda = \bigvee^{\uparrow}_{\varepsilon>0} \lambda_{|[0,1]\setminus\overline{U_\varepsilon(x)}}$. Sei jetzt $\nu \ll \lambda$. Dann gibt es für alle $x \in [0,1]$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit $\nu \leq \lambda_{|[0,1]\setminus\overline{U_{\varepsilon_x}(x)}}$. Damit erhält man, $\nu(U_{\varepsilon_x}(x)) \leq \lambda_{|[0,1]\setminus\overline{U_{\varepsilon_x}(x)}}(U_{\varepsilon_x}(x)) = \lambda(\emptyset) = 0$. Da $[0,1] = \bigcup_{x\in[0,1]} U_{\varepsilon_x}(x)$ und das Einheitsintervall kompakt ist, gibt es $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,1]$, so daß $[0,1] = \bigcup_{i=1}^n U_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$. Daraus ergibt sich $\nu([0,1]) \leq \sum_{i=1}^n \nu(U_{\varepsilon_{x_i}}) = 0$. Also ist ν die Nullbewertung und $\bigvee^{\uparrow}\!\!\downarrow\!\lambda = 0 \neq \lambda$, d. h. $\mathcal{V}([0,1])$ ist kein stetiger Bereich. ■

Diese Beweisidee funktioniert auch bei anderen lokalkompakten Hausdorff-Räumen X, auf denen es eine Bewertung $\lambda \neq 0$ gibt, unter der keine einfache Bewertung außer der Nullbewertung liegt. Wir können also noch mehr Beispiele dieser Art angeben.

Jetzt kommen wir zu zwei Sätzen über die Vergleichbarkeit einfacher Bewertungen auf Bereichen, die bereits von C. Jones bewiesen wurden (siehe [4], Theorem 4.10 und Lemma 4.13).

Satz 2.7 ***(Splitting Lemma)*** *Für zwei einfache Bewertungen ξ und χ auf einem Bereich X gelte*

$$\xi = \sum_{b\in B} r_b \eta_b \leq \sum_{c\in C} s_c \eta_c = \chi.$$

Dann existieren $t_{b,c} \in \mathbb{R}_+$ so, daß $t_{b,c} \neq 0$ nur, falls $b \leq c$, und so, daß gilt

$$\begin{aligned} \sum_{c\in C} t_{b,c} &= r_b \\ \sum_{b\in B} t_{b,c} &\leq s_c \end{aligned}$$

Lemma 2.8 *Für zwei einfache Bewertungen ξ und χ auf einem Bereich X gelte*

$$\xi = \sum_{b\in B} r_b \eta_b \ll \sum_{c\in C} s_c \eta_c = \chi.$$

Dann existieren $t_{b,c} \in \mathbb{R}_+$ so, daß $t_{b,c} \neq 0$ nur, falls $b \ll c$, und so, daß gilt

$$\begin{aligned} \sum_{c\in C} t_{b,c} &= r_b \\ \sum_{b\in B} t_{b,c} &< s_c \end{aligned}$$

Von beiden Sätzen ist auch die Umkehrung richtig, so daß wir im Falle der way-below-Relation zwischen zwei einfachen Bewertungen schließen können:

Lemma 2.9 *Sei $\chi = \sum_{c \in C} s_c \eta_c$ eine einfache Bewertung. Zu jedem $c \in C$ wähle ein $b(c) \in X$ mit $b(c) \ll c$, und $r_c < s_c$. Dann ist $\xi := \sum_{c \in C} r_c \eta_{b(c)} \ll \chi$.*

Im Falle der kleiner-gleich-Relation zwischen zwei einfachen Bewertungen können wir noch eine weitere nützliche Umformulierung vornehmen. Zuerst führen wir dazu zwei Elementarschritte ein, die zu einer gegebenen Bewertung eine kleinere liefern. Sei $\chi = \sum_{c \in C} s_c \eta_c$ eine einfache Bewertung, bei der $s_c = 0$ für einige $c \in C$ erlaubt sein soll, solange nur C eine endliche Menge ist.

E 1) Für ein $a \in C$ wähle $r_a < s_a$, sonst $r_c = s_c$ für alle von a verschiedenen $c \in C$. Dann ist $\xi := \sum_{c \in C} r_c \eta_c \leq \chi$.

E 2) Für ein $a \in C$ wähle einen unteren Nachbarn a' von a in C und $0 < \delta \leq s_a$. Dann ist nach dem Splitting Lemma $\xi := \sum_{a \neq c \in C} s_c \eta_c + (s_a - \delta)\eta_a + \delta \eta_{a'} \leq \chi$.

Durch diese Elementarschritte wird die kleiner-gleich-Beziehung zwischen zwei einfachen Bewertungen auf Bereichen bereits vollständig beschrieben. Genauer haben wir folgendes

Lemma 2.10 *Für zwei einfache Bewertungen ξ, χ auf einem Bereich X gilt*

$$\xi = \sum_{b \in B} r_b \eta_b \leq \sum_{c \in C} s_c \eta_c = \chi$$

genau dann, wenn ξ aus χ durch endlich viele Elementarschritte hervorgeht. D. h. es gibt $\chi_n \leq \chi_{n-1} \leq \ldots \leq \chi_1 \leq \chi_0$ so, daß $\chi_0 = \chi, \chi_n = \xi$ und für $m = 1, \ldots, n$ geht χ_m aus χ_{m-1} durch Anwendung einer der beiden Elementarschritte hervor.

Beweis: Aus der Konstruktion der Elementarschritte ergibt sich, daß nach ihrer endlichmaligen Anwendung eine Bewertung kleiner-gleich der ursprünglichen herauskommt.

Für die andere Beweisrichtung bemerken wir zunächst, daß wir $B = C$ annehmen können. Zudem werden wir dann für die Elementarschritte nur Elemente von B verwenden müssen. Damit können wir einen Induktionsbeweis über die Mächtigkeit von B führen.

Für $|B| = 1$ sei $\xi = r_b \eta_b \leq s_b \eta_b = \chi$ gegeben. Dann muß $r_b \leq s_b$ gelten, was gerade der Anwendung eines Elementarschritts der Form (E 1) entspricht.

Induktionsschritt: Für $|B| = m$ gelte die Behauptung. Für $|B| = m+1$ seien die Elemente von B so numeriert, daß b_{m+1} maximal in B ist. Damit die Bezeichnungen übersichtlicher sind, stehe im folgenden $r_i, s_i, \eta_i, t_{i,j}$ anstelle von $r_{b_i}, s_{b_i}, \eta_{b_i}, t_{b_i, b_j}$; $i, j \in \{1, \ldots, m+1\}$. Für $\xi = \sum_{i=1}^{m+1} r_i \eta_i \leq \sum_{i=1}^{m+1} s_i \eta_i = \chi$ müssen wegen des Splitting Lemmas $t_{i,j} \in \mathbb{R}_+$ existieren mit $t_{i,j} \neq 0$ nur, falls $b_i \leq b_j$ und so, daß gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+1} t_{i,j} &= r_i \\ \sum_{i=1}^{m+1} t_{i,j} &\leq s_j \end{aligned}$$

Da b_{m+1} maximal in B ist, ist $t_{m+1,j} \neq 0$ nur für $j = m+1$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} r_{m+1} &= t_{m+1,m+1} \\ s_{m+1} &\geq \sum_{i=1}^{m} t_{i,m+1} + t_{m+1,m+1} \end{aligned}$$

Wir definieren zunächst induktiv $\chi_1, \ldots, \chi_{m+1}$ auf folgende Weise: $\chi_1 := \sum_{i=1}^{m} s_i \eta_i + (\sum_{i=1}^{m} t_{i,m+1} + t_{m+1,m+1})\eta_{m+1}$ geht aus χ durch Anwendung eines Elementarschritts der Form (E 1) hervor. Wenn wir das Splitting Lemma mit denselben $t_{i,j}$ auf ξ und χ_1 anwenden, sehen wir, daß $\xi \leq \chi_1$ ebenfalls gilt. Seien jetzt $\chi_j, j \in \{1, \ldots, i\}$ bereits definiert. Ist $t_{i,m+1} = 0$, dann setzen wir $\chi_{i+1} := \chi_i$. Andernfalls hat b_{m+1} einen unteren Nachbarn $b_j \geq b_i$ in B, und wir definieren

$$\chi_{i+1} := \chi_i - t_{i,m+1}\eta_{m+1} + t_{i,m+1}\eta_j.$$

Hierbei führen wir einen Elementarschritt der Form (E 2) aus. Setzen wir $t_{i,m+1}^{neu} := 0$, $t_{i,j}^{neu} := t_{i,j}^{alt} + t_{i,m+1}^{alt}$ und $t_{l,k}^{neu} := t_{l,k}^{alt}$ sonst, so können wir mit dem Splitting Lemma und diesen neuen $t_{l,k}^{neu}$ zeigen, daß auch $\xi \leq \chi_{i+1}$ gilt. Für $\chi_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} s'_i \eta_i$ ist $s'_{m+1} = r_{m+1}$, und so haben wir mit

$$\xi' := \xi - r_{m+1}\eta_{m+1} \leq \chi_{m+1} - r_{m+1}\eta_{m+1} =: \chi'$$

zwei einfache Bewertungen gefunden, die nur Gewichte auf der m-elementigen Menge $\{b_1, \ldots, b_m\}$ haben. Wir können hierauf die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten

$$\xi' =: \chi'_{m+n+1} \leq \chi'_{m+n} \leq \cdots \leq \chi'_{m+2} \leq \chi'_{m+1} =: \chi',$$

wobei die nächstkleinere Bewertung aus der vorherigen durch Anwendung eines der beiden Elementarschritte hervorgeht. Da bei diesen b_{m+1} nicht als unterer Nachbar in B auftreten kann, dürfen wir überall $r_{m+1}\eta_{m+1}$ hinzuaddieren, ohne die Art der Elementarschritte zu ändern. Setzen wir $\chi_i := \chi'_i + r_{m+1}\eta_{m+1}$ für $i = m+1, \ldots, m+n+1$, so haben wir mit

$$\xi =: \chi_{m+n+1} \leq \chi_{m+n} \leq \cdots \leq \chi_1 \leq \chi_0 := \chi$$

die geforderten einfachen Bewertungen gefunden. ∎

Bevor wir zeigen können, daß $\mathcal{V}(X)$ frei über X ist für stetige Bereiche X, benötigen wir noch einige Hilfsmittel. In Notation und Bezeichnung von Basen stetiger Bereiche halten wir uns an [1]. Außerdem benötigen wir noch einige kategorientheoretische Begriffe, die wir aus der Arbeit [8] übernehmen. Wir bezeichnen mit **CONT** die Kategorie aller stetigen Bereiche, mit **DCONE** die Kategorie aller Bereichskegel und mit **CCONE** deren Unterkategorie aller stetigen Bereichskegel mit der Scott-Topologie. Dadurch können wir $\mathcal{V}$: **CONT** $\to$ **CCONE** als Funktor auffassen, wobei $\mathcal{V}: X \mapsto \mathcal{V}(X)$ und $f \mapsto \mathcal{V}(f): \mathcal{V}(X) \to \mathcal{V}(Y)$, $\mu \mapsto \mu \circ f^{-1}$. Weiter definieren wir die Abbildung $\eta_X: X \to \mathcal{V}(X)$ durch $x \mapsto \eta_x$. Dadurch wird $\eta: Id_{\mathbf{CONT}} \to \mathcal{U} \circ \mathcal{V}$ zu einer natürlichen Transformation, wobei wir mit $\mathcal{U}$: **CCONE**$\to$ **CONT** den Vergißfunktor bezeichnen. Jetzt haben wir das notwendige Vokabular zusammen und zeigen folgenden

Satz 2.11 *Für einen stetigen Bereich X ist $\mathcal{V}(X)$ der freie Bereichskegel über X. Als Diagramm*[1] *geschrieben heißt das*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\forall f"'] & \mathcal{UV}(X) \arrow[d, "\mathcal{U}(\hat{f})"] & \mathcal{V}(X) \arrow[d, "\exists! \hat{f}"'] \\ & \mathcal{U}(K) & K \end{tikzcd}$$

CONT **CCONE**

Beweis: Es seien ein stetiger Bereichskegel K und eine Scott-stetige Funktion $f\colon X \to \mathcal{U}(K)$ gegeben. Wenn es überhaupt ein $\hat{f}$ mit den gewünschten Eigenschaften gibt, muß es folgendermaßen aussehen:

$$\begin{array}{llcl}
(1) & \hat{f}\colon \eta_x & \mapsto & f(x), \text{ weil das Diagramm kommutieren soll,} \\
(2) & \sum_{b\in B} r_b\eta_b & \mapsto & \sum_{b\in B} r_b f(b), \text{ weil } \hat{f} \text{ linear sein soll,} \\
(3) & \bigvee^{\uparrow}\{\xi \mid \xi \ll \mu, \xi \text{ einfach}\} & \mapsto & \bigvee^{\uparrow}\{\hat{f}(\xi) \mid \xi \ll \mu, \xi \text{ einfach}\}, \\
 & & & \text{weil } \hat{f} \text{ Scott-stetig sein soll.}
\end{array}$$

Weil die einfachen Bewertungen eine Basis von $\mathcal{V}(X)$ bilden, ist $\hat{f}\colon \mathcal{V}(X) \to K$ durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Überlegen wir uns nun die Existenz von $\hat{f}$. Dazu bemerken wir, daß diese Abbildung durch (2) auf $\mathcal{V}_f(X)$ wegen der eindeutigen Darstellbarkeit einfacher Bewertungen wohldefiniert ist. Da die einfachen Bewertungen eine Basis von $\mathcal{V}(X)$ bilden, wird $\hat{f}$ durch (3) für alle stetigen Bewertungen definiert. Das Diagramm kommutiert wegen der Konstruktion von $\hat{f}$. Wir müssen damit nur noch zeigen, daß $\hat{f}$ ein Morphismus von Bereichskegeln also Scott-stetig und linear ist. Überlegen wir uns zunächst die Monotonie von $\hat{f}$. Seien erstmal einfache Bewertungen $\xi = \sum_{b\in B} r_b\eta_b \leq \sum_{c\in C} s_c\eta_c = \chi$ gegeben. Dann existieren wegen des Splitting Lemmas $t_{b,c} \in \mathbb{R}_+$ mit $t_{b,c} \neq 0$ nur, falls $b \leq c$ und so, daß

$$\begin{aligned} \sum_{c\in C} t_{b,c} &= r_b \\ \sum_{b\in B} t_{b,c} &\leq s_c. \end{aligned}$$

Damit läßt sich die Beziehung zwischen ξ und χ auch folgendermaßen darstellen

$$\xi = \sum_{b\in B} r_b\eta_b = \sum_{b\in B}\sum_{c\in C} t_{b,c}\eta_b \leq \sum_{c\in C}\sum_{b\in B} t_{b,c}\eta_c \leq \sum_{c\in C} s_c\eta_c = \chi.$$

Wegen der Monotonie von f und nach Definition von $\hat{f}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &\leq \hat{f}\left(\sum_{b\in B}\sum_{c\in C} t_{b,c}\eta_b\right) = \sum_{b\in B}\sum_{c\in C} t_{b,c} f(b) \\ &\leq \sum_{c\in C}\sum_{b\in B} t_{b,c} f(c) \leq \sum_{c\in C} s_c f(c) = \hat{f}(\chi), \end{aligned}$$

[1] Dieses und alle folgenden Diagramme in dieser Arbeit sind mit Paul Taylors „diagrams“ gezeichnet.

wenn wir noch berücksichtigen, daß $t_{b,c} \neq 0$ nur für $b \leq c$ möglich ist. Die Funktion $\hat{f}$ wird durch (3) auf ganz $\mathcal{V}(X)$ monoton fortgesetzt. Bevor wir die Scott-Stetigkeit von $\hat{f}$ nachrechnen, überlegen wir noch, daß Gleichung (3) auch für einfache Bewertungen richtig ist. Sei also $\chi = \sum_{c \in C} s_c \eta_c$ eine einfache Bewertung. Wegen der Monotonie von $\hat{f}$ gilt

$$\hat{f}(\chi) \geq \bigvee{}^{\uparrow}\{\hat{f}(\xi) \mid \xi \ll \chi \text{ einfach}\}.$$

Für die andere Ungleichung verwenden wir Lemma 2.9. Wenn wir für jedes $c \in C$ ein $b_c \ll c$ und ein $r_c < s_c$ wählen, dann gilt $\xi := \sum_{c \in C} r_c \eta_{b(c)} \ll \chi$. Außerdem ist die Menge aller so gebildeten einfachen Bewertungen gerichtet und Teilmenge von $\twoheaddownarrow\chi \cap \mathcal{V}_f(X)$. Wegen der Monotonie von $\hat{f}$ sowie der Scott-Stetigkeit von Addition, Skalarmultiplikation und f gilt

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\chi) &= \sum_{c \in C} s_c f(c) = \sum_{c \in C} s_c f\Big(\bigvee_{b(c) \ll c}{}^{\uparrow}\; b(c)\Big) \\
&= \sum_{c \in C} \bigvee_{r_c < s_c}{}^{\uparrow} r_c \bigvee_{b(c) \ll c}{}^{\uparrow} f(b(c)) = \bigvee_{r_c < s_c}{}^{\uparrow} \bigvee_{b(c) \ll c}{}^{\uparrow} \sum_{c \in C} r_c f(b(c)) \\
&= \bigvee{}^{\uparrow}\Big\{\hat{f}\Big(\sum_{c \in C} r_c \eta_{b(c)}\Big) \mid \forall c \in C\ b(c) \ll c, r_c < s_c\Big\} \\
&\leq \bigvee{}^{\uparrow}\{\hat{f}(\xi) \mid \xi \ll \chi,\ \xi \text{ einfach}\}
\end{aligned}$$

Damit gilt für eine einfache Bewertung χ ebenfalls $\hat{f}(\chi) = \bigvee{}^{\uparrow}\{\hat{f}(\xi) \mid \xi \ll \chi,\ \xi \text{ einfach}\}$. Sei nun eine gerichtete Familie $(\mu_i)_{i \in I}$ stetiger Bewertungen gegeben. Mit dem eben bemerkten sowie der Monotonie von $\hat{f}$ und der Interpolationseigenschaft der way-below-Relation folgt

$$\hat{f}\Big(\bigvee_{i \in I}{}^{\uparrow}\mu_i\Big) = \bigvee{}^{\uparrow}\{\hat{f}(\xi) \mid \xi \ll \bigvee_{i \in I}{}^{\uparrow}\mu_i\} = \bigvee_{i \in I}{}^{\uparrow} \bigvee_{\xi \ll \mu_i}{}^{\uparrow} \hat{f}(\xi) = \bigvee_{i \in I}{}^{\uparrow}\hat{f}(\mu_i).$$

Es fehlt noch der Nachweis für die Linearität von $\hat{f}$. Auf den einfachen Bewertungen ist $\hat{f}$ nach Konstruktion linear. Daraus folgt für andere stetige Bewertungen die Linearität mit der Scott-Stetigkeit von Addition und Skalarmultiplikation. ∎

Die freie Eigenschaft zeigt, daß der Funktor $\mathcal{V}\colon \mathbf{CONT} \to \mathbf{CCONE}$ linksadjungiert zu dem Vergißfunktor $\mathcal{U}\colon \mathbf{CCONE} \to \mathbf{CONT}$ ist. Die natürliche Transformation $\eta\colon Id_{\mathbf{CONT}} \to \mathcal{U} \circ \mathcal{V}$ ist die Einheit dieser Adjunktion. Die Koeinheit bezeichnen wir mit $\varepsilon\colon \mathcal{V} \circ \mathcal{U} \to Id_{\mathbf{CCONE}}$. Dann ist $(\mathcal{U} \circ \mathcal{V}, \eta, \mathcal{U}\varepsilon_{\mathcal{V}})$ eine Monade und zwar dieselbe Monade, die O. Kirch in [8, Kapitel 6] beschreibt.

3 Bewertungen auf $\mathcal{Q}(X)$

Für kohärente Räume X können wir aus einer stetigen Bewertung auf den offenen Teilmengen $\mathcal{O}(X)$ eine Abbildung auf $\mathcal{Q}(X)$, der Menge aller quasikompakten saturierten Teilmengen von X, definieren, die ähnliche Eigenschaften hat. Außerdem können wir von dieser Abbildung auch wieder zurück zu der ursprünglichen Bewertung kommen.

Zunächst definieren wir einen kohärenten Raum und überprüfen einige seiner Eigenschaften, mit denen sich dann das Hauptergebnis dieses Abschnitts beweisen läßt.

Definition 3.1 *1. Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt saturiert, wenn sie Schnitt ihrer Umgebungen ist.*

2. Ein topologischer Raum heißt lokal quasikompakt, wenn jede Umgebung eines beliebigen Punktes eine quasikompakte Umgebung dieses Punktes enthält.

3. Ein topologischer Raum heißt kohärent, wenn er nüchtern und lokal quasikompakt ist, und wenn der Schnitt zweier quasikompakter saturierter Teilmengen ebenfalls quasikompakt ist.

Wir bemerken, daß Teilmengen eines Bereiches mit der Scott-Topologie genau dann saturiert sind, wenn sie Endstücke sind. Der Schnitt zweier saturierter Teilmengen ist ebenfalls saturiert, so daß $\mathcal{Q}(X)$ für kohärente Räume X gegen endliche Schnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossen ist. Nun können wir mit diesen Definitionen auf folgende Eigenschaften schließen.

Lemma 3.2 *1. Sei C eine quasikompakte Teilmenge in einem lokal quasikompakten Raum, und sei U eine offene Umgebung von C. Dann enthält U eine quasikompakte saturierte Umgebung von C.*

2. Sei C eine quasikompakte saturierte Teilmenge in einem kohärenten Raum X. Dann ist die Teilmenge C bereits der gefilterte Schnitt über alle ihre quasikompakten saturierten Umgebungen.

3. Sei X ein nüchterner Raum. Wenn der gefilterte Schnitt $\bigcap_{\downarrow i\in I} C_i$ einer Familie quasikompakter saturierter Teilmengen in einer offenen Menge O enthalten ist, dann ist bereits ein Element der Familie in O enthalten.

Beweis: 1. Da X lokal quasikompakt ist, existiert für jeden Punkt $x \in C$ eine quasikompakte Umgebung dieses Punktes $C_x \subseteq U$. Damit gilt

$$C \subseteq \bigcup_{x\in C} \mathrm{int} C_x \subseteq \bigcup_{x\in C} C_x \subseteq U,$$

und wegen der Quasikompaktheit von C überdecken C bereits endlich viele dieser offenen Mengen, z. B.

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{int} C_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_{x_i} \subseteq U.$$

Als endliche Vereinigung quasikompakter Mengen ist $\bigcup_{i=1}^n C_{x_i}$ ebenfalls quasikompakt. Die Saturierung hiervon ist immer noch quasikompakt und in U enthalten. Sie ist somit die gesuchte Umgebung von C.

2. Wir überlegen uns folgendes

$$\begin{aligned} C &= \bigcap\{U \mid U \text{ Umgebung von } C\} \text{ , da } C \text{ saturiert ist} \\ &= \bigcap\{U \mid C \subseteq \mathrm{int}U, U \in \mathcal{Q}(X)\} \text{ , wegen 1.} \\ &= \bigcap\nolimits_{\downarrow}\{U \mid C \subseteq \mathrm{int}U, U \in \mathcal{Q}(X)\} \text{ , da } X \text{ kohärent ist.} \end{aligned}$$

3. Siehe Korollar 7.2.11. in [1]. ∎

Daraus können wir für kohärente Räume auf zwei Eigenschaften schließen, die wir später zum Nachweis der Modularität benötigen.

Lemma 3.3 *Sei X ein kohärenter Raum, dann gilt*

1. Seien $K, L \in \mathcal{Q}(X)$ und $W \in \mathcal{O}(X)$ so gegeben, daß $K \cap L \subseteq W$. Dann existieren $U, V \in \mathcal{O}(X)$ mit $K \subseteq U$, $L \subseteq V$ und $U \cap V \subseteq W$.

2. Seien $K \in \mathcal{Q}(X)$ und $U, V \in \mathcal{O}(X)$ so gegeben, daß $K \subseteq U \cup V$. Dann existieren $L, M \in \mathcal{Q}(X)$ mit $L \subseteq U$, $M \subseteq V$ und $K \subseteq L \cup M$.

Beweis:

1. Seien K, L und W wie vorausgesetzt gegeben mit $K \cap L \subseteq W$. Nach Lemma 3.2.2 ist $K = \bigcap_{\downarrow}\{C_i \mid K \subseteq \mathrm{int}C_i, C_i \in \mathcal{Q}(X)\}$ und $L = \bigcap_{\downarrow}\{C_j \mid L \subseteq \mathrm{int}C_j, C_j \in \mathcal{Q}(X)\}$. Dadurch können wir den Schnitt dieser beiden Mengen auch schreiben als

$$K \cap L = \bigcap\nolimits_{\downarrow}\{C_i \cap C_j \mid K \subseteq \mathrm{int}C_i, L \subseteq \mathrm{int}C_j,\ C_i, C_j \in \mathcal{Q}(X)\} \subseteq W.$$

Nach Lemma 3.2.3 existiert ein Paar (i, j), so daß bereits $C_i \cap C_j \subseteq W$. Für $U := \mathrm{int}C_i$, $V := \mathrm{int}C_j$ gilt damit $U, V \in \mathcal{O}(X)$, $K \subseteq U$, $L \subseteq V$ und $U \cap V \subseteq W$.

2. Gegeben seien $K \in \mathcal{Q}(X)$ und $U, V \in \mathcal{O}(X)$ mit $K \subseteq U \cap V$. Da der Raum X lokal quasikompakt ist, können wir die offenen Teilmengen auch schreiben als $U = \bigcup\{\mathrm{int}C \mid C \subseteq U, C \in \mathcal{Q}(X)\}$ und $V = \bigcup\{\mathrm{int}C \mid C \subseteq V, C \in \mathcal{Q}(X)\}$. Damit gilt

$$K \subseteq U \cup V = \bigcup\{\mathrm{int}C \mid C \subseteq U, C \in \mathcal{Q}(X)\} \cup \bigcup\{\mathrm{int}C \mid C \subseteq V, C \in \mathcal{Q}(X)\}$$

und wegen der Quasikompaktheit von K existieren $C_1, \ldots, C_m \subseteq U$ und $C_{m+1}, \ldots, C_n \subseteq V$ so, daß $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathrm{int}C_i \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i$. Setzen wir $L := \bigcup_{i=1}^m C_i$ und $M := \bigcup_{i=m+1}^n C_i$, dann haben wir $L, M \in \mathcal{Q}(X)$ gefunden mit $L \subseteq U$, $M \subseteq V$ und $K \subseteq L \cup M$. ∎

Jetzt können wir für kohärente Räume X auch Bewertungen auf $\mathcal{Q}(X)$ definieren. Sei dazu eine stetige Bewertung $\mu\colon \mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gegeben. Wir definieren $\overline{\mu}\colon \mathcal{Q}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mittels $\overline{\mu}(C) := \bigwedge_{C \subseteq U} \mu(U)$. Die Eigenschaften, die sich für $\overline{\mu}$ daraus ergeben, fassen wir in einem Satz zusammen.

Satz 3.4 *Sei X ein kohärenter Raum, $\mu \in \mathcal{V}(X)$ und $\overline{\mu}\colon \mathcal{Q}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definiert durch $\overline{\mu}(C) := \bigwedge_{C \subseteq U} \mu(U)$. Dann gilt*

1. *Man kann μ aus $\overline{\mu}$ rekonstruieren, denn es gilt $\mu(U) = \bigvee_{C \subseteq U} \overline{\mu}(C)$.*

2. *Die Abbildung $\overline{\mu}$ ist strikt, d. h. $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$.*

3. *Die Abbildung $\overline{\mu}$ ist monoton und $\overline{\mu}(\bigcap_{\downarrow i \in I} C_i) = \bigwedge_{i \in I} \overline{\mu}(C_i)$.*

4. *Die Abbildung $\overline{\mu}$ ist modular, d. h. $\overline{\mu}(C_1 \cup C_2) + \overline{\mu}(C_1 \cap C_2) = \overline{\mu}(C_1) + \overline{\mu}(C_2)$ für alle $C_1, C_2 \in \mathcal{Q}(X)$.*

Beweis: 1. Wegen der Monotonie von μ ist $\overline{\mu}(C) = \bigwedge_{C \subseteq V} \mu(V) \leq \mu(U)$ für alle $C \subseteq U$. Damit gilt auch

$$\bigvee_{C \subseteq U} \overline{\mu}(C) \leq \mu(U).$$

Weiter können wir in einem lokal quasikompakten Raum X eine offene Menge U schreiben als $U = \bigcup^{\uparrow}_{C \subseteq U} \mathrm{int} C$, wobei $C \in \mathcal{Q}(X)$. Mit der Monotonie von μ erhalten wir $\overline{\mu}(C) \geq \mu(\mathrm{int} C)$. Wegen der Scott-Stetigkeit von μ folgt

$$\bigvee_{C \subseteq U} \overline{\mu}(C) \geq \bigvee^{\uparrow}_{C \subseteq U} \mu(\mathrm{int} C) = \mu(\bigcup^{\uparrow}_{C \subseteq U} \mathrm{int} C) = \mu(U).$$

2. $\overline{\mu}(\emptyset) = \bigwedge_{\emptyset \subseteq U} \mu(U) = \mu(\emptyset) = 0$

3. Nach Definition der Abbildung $\overline{\mu}$ folgt ihre Monotonie direkt daraus, daß die Bewertung μ monoton ist. Sei nun $(C_i)_{i \in I}$ eine gefilterte Familie quasikompakter saturierter Teilmengen von X. Da $\overline{\mu}$ monoton ist, ergibt sich $\overline{\mu}(\bigcap_{\downarrow i \in I} C_i) \leq \overline{\mu}(C_i)$ für alle $i \in I$ und damit auch

$$\overline{\mu}(\bigcap_{i \in I}{\downarrow} C_i) \leq \bigwedge_{i \in I} \overline{\mu}(C_i).$$

Außerdem gilt nach Lemma 3.2.3 für alle offenen Mengen U mit $\bigcap_{\downarrow i \in I} C_i \subseteq U$, daß es ein $i \in I$ gibt, so daß bereits $C_i \subseteq U$. Damit haben wir auch $\mu(U) \geq \bigwedge_{C_i \subseteq V} \mu(V) = \overline{\mu}(C_i)$ und erst recht $\mu(U) \geq \bigwedge_{i \in I} \overline{\mu}(C_i)$. Da dies nun für alle $U \supseteq \bigcap_{\downarrow i \in I} C_i$ richtig ist, folgt

$$\overline{\mu}(\bigcap_{i \in I}{\downarrow} C_i) = \bigwedge_{\bigcap_{\downarrow} C_i \subseteq U} \mu(U) \geq \bigwedge_{i \in I} \overline{\mu}(C_i).$$

4. Wir bemerken, daß wir das Gesetz der Modularität überhaupt nur für kohärente Räume so hinschreiben können, da sonst $\mathcal{Q}(X)$ nicht gegen endliche Schnitte abgeschlossen zu sein braucht. Aus Lemma 3.3.1 folgern wir, daß $\bigwedge\{\mu(U) \mid C_1 \cap C_2 \subseteq U\} = \bigwedge\{\mu(V \cap W) \mid C_1 \subseteq V, C_2 \subseteq W\}$, und somit läßt sich berechnen

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}(C_1 \cup C_2) + \overline{\mu}(C_1 \cap C_2) &= \bigwedge\{\mu(U) \mid C_1 \cup C_2 \subseteq U\} + \bigwedge\{\mu(U) \mid C_1 \cap C_2 \subseteq U\} \\
&= \bigwedge\{\mu(V \cup W) \mid C_1 \subseteq V, C_2 \subseteq W\} + \bigwedge\{\mu(V \cap W) \mid C_1 \subseteq V, C_2 \subseteq W\} \\
&= \bigwedge\{\mu(V \cup W) + \mu(V \cap W) \mid C_1 \subseteq V, C_2 \subseteq W\} \\
&= \bigwedge\{\mu(V) + \mu(W) \mid C_1 \subseteq V, C_2 \subseteq W\}
\end{aligned}$$

$$= \bigwedge\{\mu(V) \mid C_1 \subseteq V\} + \bigwedge\{\mu(W) \mid C_2 \subseteq W\}$$
$$= \overline{\mu}(C_1) + \overline{\mu}(C_2)$$

Damit haben wir nachgewiesen, daß $\overline{\mu}$ modular ist. ∎

Bis jetzt haben wir gesehen, daß wir von einer stetigen Bewertung zu einer Abbildung $\overline{\mu}\colon \mathcal{Q}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mit gewissen Eigenschaften kommen können und daraus auch wieder die ursprüngliche Bewertung zurückerhalten. Diese Vorschrift in Satz 3.4.1 legt nahe, sie als Definition zu nutzen, um aus einer Abbildung $\overline{\mu}\colon \mathcal{Q}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, die die Bedingungen 2. bis 4. erfüllt, eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ zu erhalten. Diese wird sogar eine stetige Bewertung sein:

Satz 3.5 *Sei X ein kohärenter Raum, $\overline{\mu}\colon \mathcal{Q}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ habe die Eigenschaften 2. bis 4. aus Satz 3.4. Dann ist $\mu\colon \mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, definiert durch $\mu(U) := \bigvee_{C\subseteq U} \overline{\mu}(C)$, eine stetige Bewertung. Aus dieser wird $\overline{\mu}$ zurückerhalten durch $\overline{\mu}(C) = \bigwedge_{C\subseteq U} \mu(U)$.*

Beweis: Die Abbildung ist strikt, denn $\mu(\emptyset) = \bigwedge_{C\subseteq\emptyset} \overline{\mu}(C) = \overline{\mu}(\emptyset) = 0$.

Aus der Monotonie von $\overline{\mu}$ und der Definition von μ folgt unmittelbar, daß μ monoton ist. Um die Scott-Stetigkeit von μ zu zeigen, geben wir uns eine gerichtete Familie offener Mengen $(U_i)_{i\in I}$ vor. Mit der Monotonie von μ erhalten wir

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in I}^{\uparrow} U_i\Big) \geq \bigvee_{i\in I}^{\uparrow} \mu(U_i).$$

Für eine quasikompakte Menge $C \subseteq \bigcup^{\uparrow}_{i\in I} U_i$ gilt, da diese Familie gerichtet ist, sogar $C \subseteq U_i$ für ein $i \in I$, und wir folgern

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in I}^{\uparrow} U_i\Big) = \bigvee_{C\subseteq\bigcup^{\uparrow} U_i} \overline{\mu}(C) \leq \bigvee_{i\in I} \bigvee_{C\subseteq U_i} \overline{\mu}(C) = \bigvee_{i\in I}^{\uparrow} \mu(U_i).$$

Damit ist μ eine Scott-stetige Funktion.

Aus Lemma 3.3.2 folgern wir $\bigvee\{\overline{\mu}(C) \mid C \subseteq U_1 \cup U_2\} = \bigvee\{\overline{\mu}(L_1 \cup L_2) \mid L_1 \subseteq U_1, L_2 \subseteq U_2\}$ und berechnen

$$\begin{aligned}
\mu(U_1 \cup U_2) \;&+\; \mu(U_1 \cap U_2) = \bigvee\{\overline{\mu}(C) \mid C \subseteq U_1 \cup U_2\} + \bigvee\{\overline{\mu}(C) \mid C \subseteq U_1 \cap U_2\} \\
&= \bigvee\{\overline{\mu}(L_1 \cup L_2) \mid L_1 \subseteq U_1, L_2 \subseteq U_2\} + \bigvee\{\overline{\mu}(L_1 \cap L_2) \mid L_1 \subseteq U_1, L_2 \subseteq U_2\} \\
&= \bigvee\{\overline{\mu}(L_1 \cup L_2) + \overline{\mu}(L_1 \cap L_2) \mid L_1 \subseteq U_1, L_2 \subseteq U_2\} \\
&= \bigvee\{\overline{\mu}(L_1) + \overline{\mu}(L_2) \mid L_1 \subseteq U_1, L_2 \subseteq U_2\} \\
&= \bigvee\{\overline{\mu}(L_1) \mid L_1 \subseteq U_1\} + \bigvee\{\overline{\mu}(L_2) \mid L_2 \subseteq U_2\} \\
&= \overline{\mu}(U_1) + \overline{\mu}(U_2).
\end{aligned}$$

Jetzt haben wir auch die Modularität von μ nachgewiesen und somit gezeigt, daß μ eine stetige Bewertung ist.

Wegen der Monotonie von $\overline{\mu}$ ist $\mu(U) := \bigvee_{D\subseteq U} \overline{\mu}(C)$ für alle $C \subseteq U$. Damit gilt auch

$$\bigwedge_{C\subseteq U} \mu(U) \geq \overline{\mu}(C).$$

Nach Lemma 3.2.2 können wir die quasikompakte saturierte Teilmenge C schreiben als $C = \bigcap_{\downarrow}\{D \mid C \subseteq \mathrm{int}D,\ D \in \mathcal{Q}(X)\}$. Mit der Monotonie von $\overline{\mu}$ folgt $\overline{\mu}(D) \geq \mu(\mathrm{int}D)$, und mit Eigenschaft 3 aus Satz 3.4 erhalten wir

$$\bigwedge_{C\subseteq U} \mu(U) \leq \bigwedge_{C\subseteq \mathrm{int}D} \mu(\mathrm{int}D) \leq \bigwedge_{C\subseteq \mathrm{int}D} \overline{\mu}(D) = \overline{\mu}(\bigcap_{\downarrow}\{D \mid C \subseteq \mathrm{int}D,\ D \in \mathcal{Q}(X)\}) = \overline{\mu}(C).$$

$\blacksquare$

4 Integration

Für core-kompakte Räume X wird in [8, Kapitel 4] das Integral einer halbstetigen Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ bezüglich einer stetigen Bewertung definiert. Dabei heißt ein topologischer Raum core-kompakt, wenn seine offenen Teilmengen durch Inklusion geordnet einen stetigen Verband bilden. Wir geben nun für beliebige topologische Räume eine Integrationsvorschrift an, weisen einige Eigenschaften davon nach und zeigen, daß sie für core-kompakte Räume der Definition aus [8] entspricht. In einem weiteren Teil dieses Abschnitts versuchen wir, die Dualität von $\mathcal{V}(X)$ und $\mathcal{L}(X)$, die in [8, Kapitel 8] für stetige Bereiche X bewiesen wurde, mit dem neuen Integralbegriff soweit wie möglich zu verallgemeinern. Dabei werden wir sehen, daß sich der Rieszsche Darstellungssatz für alle topologischen Räume beweisen läßt. Der Nachweis, daß mit geeigneten Topologien versehen $\mathcal{L}(X)$ und $\mathcal{V}(X)^*$ isomorph sind, ist bisher leider nicht gelungen, wenn die einfachen Bewertungen keine Basis von $\mathcal{V}(X)$ bilden. Zudem machen wir noch einige Bemerkungen zu verschiedenen Topologien auf $\mathcal{V}(X)$ und $\mathcal{L}(X)$.

4.1 Integration halbstetiger Funktionen

Um für jeden topologischen Raum X das Integral $\int f d\mu$ einer halbstetigen Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ bezüglich einer stetigen Bewertung μ auf X zu definieren, benötigen wir die Hilfsfunktion $f_\mu\colon \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Sie wird gegeben durch

$$f_\mu(r) := \mu(f^{-1}(]r,\infty])).$$

Das Integral soll als uneigentliches Riemann-Integral hierüber definiert werden. Damit dies wohldefiniert und sinnvoll ist, benötigen wir zwei Eigenschaften der Funktion f_μ.

Lemma 4.1 *1. Die Funktion $f_\mu\colon \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ist monoton fallend.*

2. Es gilt $f_\mu(\bigwedge\!\downarrow_{i\in I} r_i) = \bigvee^{\uparrow}_{i\in I} f_\mu(r_i)$.

Beweis: 1. Sei $r_1 \leq r_2$, dann ist $f^{-1}(]r_1,\infty]) \supseteq f^{-1}(]r_2,\infty])$. Wegen der Monotonie von μ ergibt sich $\mu(f^{-1}(]r_1,\infty])) \geq \mu(f^{-1}(]r_2,\infty]))$, was genau besagt, daß f_μ monoton fallend ist.

2. Sei $\bigwedge\!\downarrow_{i\in I} r_i = r_0$. Dann gilt $\bigcup^{\uparrow}_{i\in I}]r_i,\infty] =]r_0,\infty]$, und wir berechnen

$$\begin{aligned}
f_\mu(\bigwedge_{i\in I}\!\downarrow r_i) &= f_\mu(r_0) = \mu(f^{-1}(]r_0,\infty])) = \mu(f^{-1}(\bigcup_{i\in I}^{\uparrow}]r_i,\infty])) \\
&= \mu(\bigcup_{i\in I}^{\uparrow} f^{-1}(]r_i,\infty])) = \bigvee_{i\in I}^{\uparrow}\mu(f^{-1}(]r_i,\infty])) = \bigvee_{i\in I}^{\uparrow} f_\mu(r_i).
\end{aligned}$$

■

Wir müssen also das Riemann-Integral monoton fallender Funktionen genauer untersuchen. Dies tun wir in einem weiteren Lemma.

Lemma 4.2 *Auf der Menge aller monoton fallenden Funktionen $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ist das uneigentliche Riemann-Integral $\varphi \mapsto \int_0^\infty \varphi(r)dr$ linear und Scott-stetig. Dies bedeutet, daß für monoton fallende Funktionen $\varphi, \psi\colon \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$, gerichtete Familien $(\varphi_i)_{i\in I}$ monoton fallender Funktionen $\varphi_i\colon \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ und $s \in \overline{\mathbb{R}}_+$ gilt:*

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (\varphi+\psi)(r)dr &= \int_0^\infty \varphi(r)dr + \int_0^\infty \psi(r)dr \\
\int_0^\infty (s\varphi)(r)dr &= s\int_0^\infty \varphi(r)dr \\
\int_0^\infty (\bigvee_{i\in I}^{\uparrow}\varphi_i)(r)dr &= \bigvee_{i\in I}^{\uparrow}\int_0^\infty \varphi_i(r)dr.
\end{aligned}$$

Beweis: Wenn eine Funktion φ monoton fallend ist, existiert ihr uneigentliches Integral und ist gleich dem Grenzwert der Untersummen $S_n(\varphi) := \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n2^n}\varphi(\frac{i}{2^n})$, d. h. $\int_0^\infty \varphi(r)dr = lim_{n\to\infty}S_n(\varphi)$. Diese Berechnung ist auch richtig, wenn der Wert des Integrals ∞ ergibt. In dieser Darstellung läßt sich die Linearität gut nachrechnen, wobei wir auch für $s=\infty$ erhalten, daß $\int_0^\infty s\varphi(r)dr = s\int_0^\infty \varphi(r)dr$ gilt.

Um die Scott-Stetigkeit des Integrals nachzuweisen, sei eine gerichtete Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ monoton fallender Funktionen $\varphi_i\colon \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gegeben. Dann ist auch $\varphi := \bigvee^{\uparrow}_{i\in I}\varphi_i$ monoton fallend, da dieses Supremum punktweise gebildet wird. Jetzt müssen wir zeigen

$$\int_0^\infty \varphi(r)dr = \bigvee_{i\in I}^{\uparrow}\int_0^\infty \varphi_i(r)dr.$$

1. Fall: Es gilt $\int_0^\infty \varphi(r)dr < \infty$. Dann ist $\varphi_i \le \varphi$ für alle $i\in I$ und damit auch $\int_0^\infty \varphi_i(r)dr \le \int_0^\infty \varphi(r)dr$. Wir zeigen nun für alle $\varepsilon > 0$, daß es ein $i \in I$ gibt, für das die Differenz

$$\int_0^\infty \varphi(r)dr - \int_0^\infty \varphi_i(r)dr < \varepsilon$$

erfüllt. Dann gilt auch $\int_0^\infty \varphi(r)dr = \bigvee^{\uparrow}_{i\in I}\int_0^\infty \varphi_i(r)dr$, was genau die Scott-Stetigkeit des Integrals für diesen Fall zeigt. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir ein $n\in\mathbb{N}$ mit $\int_0^\infty \varphi(r)dr - S_n(\varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$. Weiter wählen wir $i\in I$ so, daß $\varphi(\frac{j}{2^n}) - \varphi_i(\frac{j}{2^n}) < \frac{\varepsilon}{2\cdot n}$ für alle $j = 1,\ldots,n\cdot 2^n$. Für dieses $i \in I$ gilt damit

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi(r)dr - \int_0^\infty \varphi_i(r)dr &< S_n(\varphi) + \frac{\varepsilon}{2} - S_n(\varphi_i) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{n2^n}(\varphi(\frac{j}{2^n}) - \varphi_i(\frac{j}{2^n})) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n}\cdot n\cdot 2^n\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot n} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

2. Fall: Es gilt $\int_0^\infty \varphi(r)dr = \infty$ und es gibt ein $x > 0$ mit $\varphi(x) = \infty$. Dann existiert ein $n\in\mathbb{N}$, so daß $\frac{1}{2^n} \le x$ und damit auch $\varphi(\frac{1}{2^n}) = \infty$, da φ monoton fallend ist. Die Familie

$(\varphi_i)_{i\in I}$ approximiert die Funktion φ. Deshalb muß für alle $M > 0$ ein $i \in I$ existieren mit $\varphi_i(\frac{1}{2^n}) \geq M$. Für das Integral von φ_i ergibt sich

$$\int_0^\infty \varphi_i(r)dr \geq S_n(\varphi_i) \geq \frac{1}{2^n} \cdot \varphi_i(\frac{1}{2^n}) \geq \frac{M}{2^n},$$

und das Supremum über alle diese Integrale berechnet sich zu

$$\bigvee_{i\in I}^{\uparrow} \int_0^\infty \varphi_i(r)dr \geq \bigvee_{M>0}^{\uparrow} \frac{M}{2^n} = \infty.$$

3. Fall: Es gilt $\int_0^\infty \varphi(r)dr = \infty$ und für alle $x > 0$ ist $\varphi(x) < \infty$. Dann gibt es zu jedem $M > 0$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so daß die Untersumme $S_n(\varphi) \geq 2M$. Da die gerichtete Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ die Funktion φ approximiert, können wir einen Index $i \in I$ so wählen, daß $\varphi(\frac{j}{2^n}) - \varphi_i(\frac{j}{2^n}) \leq \frac{M}{n}$ für alle $j = 1, \ldots, n \cdot 2^n$ und damit $S_n(\varphi) - S_n(\varphi_i) \leq M$. Für das Integral von φ_i berechnen wir

$$\int_0^\infty \varphi_i(r)dr \geq S_n(\varphi_i) \geq S_n(\varphi) - M \geq 2M - M = M,$$

woraus sich für das Supremum über alle diese Integrale ergibt

$$\bigvee_{i\in I}^{\uparrow} \int_0^\infty \varphi_i(r)dr \geq \bigvee_{M>0}^{\uparrow} M = \infty.$$

■

Damit ist das uneigentliche Riemann-Integral über die monoton fallende Funktion $f_\mu \colon \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ wohldefiniert und folgende Definition ist möglich:

Definition 4.3 *Sei X ein topologischer Raum. Das Integral einer halbstetigen Funktion $f \in \mathcal{L}(X)$ bezüglich einer stetigen Bewertung $\mu \in \mathcal{V}(X)$ wird mit $\int f d\mu$ bezeichnet und gegeben durch*

$$\int f d\mu := \int_0^\infty f_\mu(r)dr$$

Dabei wird $f_\mu \colon \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (uneigentlich) Riemann-integriert und ∞ soll als Wert zugelassen sein. Als weitere Bezeichnung für das Integral $\int f d\mu$ wird auch $\langle \mu, f\rangle$ verwendet.

Über diese Integration können wir nun einen allgemeinen Satz beweisen. Um die symmetrischen Eigenschaften der Integralform in f und μ deutlich sichtbar zu machen, verwenden wir dabei die Bezeichnung $\langle \mu, f\rangle$.

Satz 4.4 ***(Integral-Bilinearform)*** *Für jeden topologischen Raum X ist die Integration $\langle\cdot,\cdot\rangle \colon \mathcal{V}(X) \times \mathcal{L}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, gegeben durch $(\mu, f) \mapsto \langle \mu, f\rangle := \int f d\mu$, eine bilineare Abbildung, die komponentenweise Scott-stetig ist.*

Beweis: Um die komponentenweise Scott-Stetigkeit von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zu überprüfen, werden wir die Scott-Stetigkeit des Riemann-Integrals monoton fallender Funktionen aus Lemma 4.2 verwenden.

Sei zunächst eine gerichtete Familie stetiger Bewertungen $(\mu_i)_{i \in I}$ gegeben. Ihr Supremum $\bigvee^{\uparrow}_{i\in I} \mu_i$ ist ebenfalls eine stetige Bewertung, da die Menge aller stetigen Bewertungen $\mathcal{V}(X)$ einen Bereich bilden. Zudem ist mit $(\mu_i)_{i \in I}$ auch die Familie $(f_{\mu_i})_{i\in I}$ für jedes $f \in \mathcal{L}(X)$ gerichtet, und wir berechnen

$$\begin{aligned}
\langle \bigvee_{i\in I}^{\uparrow} \mu_i, f\rangle &= \int_0^\infty (\bigvee_{i\in I}^{\uparrow} \mu_i)(f^{-1}(]r,\infty]))dr = \int_0^\infty \bigvee_{i\in I}^{\uparrow} \mu_i(f^{-1}(]r,\infty]))dr \\
&= \int_0^\infty \bigvee_{i\in I}^{\uparrow} f_{\mu_i}(r)dr = \bigvee_{i\in I}^{\uparrow} \int_0^\infty f_{\mu_i}(r)dr \\
&= \bigvee_{i\in I}^{\uparrow} \langle \mu_i, f\rangle.
\end{aligned}$$

Sei nun eine gerichtete Familie halbstetiger Funktionen $(f_i)_{i\in I}$ gegeben. Die Menge aller halbstetigen Funktionen $\mathcal{L}(X)$ bildet einen Bereich, weshalb das Supremum $\bigvee^{\uparrow}_{i\in I} f_i$ ebenfalls halbstetig ist. Zudem gilt $(\bigvee^{\uparrow}_{i\in I} f_i)^{-1}(]r,\infty]) = \bigcup^{\uparrow}_{i\in I} f_i^{-1}(]r,\infty])$, so daß wegen der Scott-Stetigkeit einer Bewertung $\mu \in \mathcal{V}(X)$ auch die Familie $(f_{i_\mu})_{i\in I}$ gerichtet ist. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\langle \mu, \bigvee_{i\in I}^{\uparrow} f_i\rangle &= \int_0^\infty \mu((\bigvee_{i\in I}^{\uparrow} f_i)^{-1}(]r,\infty]))dr \\
&= \int_0^\infty \mu(\bigcup_{i\in I}^{\uparrow} f_i^{-1}(]r,\infty]))dr \\
&= \int_0^\infty \bigvee_{i\in I}^{\uparrow} \mu(f_i^{-1}(]r,\infty]))dr \\
&= \int_0^\infty \bigvee_{i\in I}^{\uparrow} f_{i_\mu}(r)dr \\
&= \bigvee_{i\in I}^{\uparrow} \int_0^\infty f_{i_\mu}(r)dr \\
&= \bigvee_{i\in I}^{\uparrow} \langle \mu, f_i\rangle.
\end{aligned}$$

Als nächstes überlegen wir, daß für alle stetigen Funktionen $f \in \mathcal{L}(X)$ die Abbildung $\langle \cdot, f\rangle \colon \mathcal{V}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ linear ist. Für $s \in \overline{\mathbb{R}}_+$ und $\mu, \nu \in \mathcal{V}(X)$ sind auch das skalare Vielfache und die Summe $s \cdot \mu, \mu + \nu \in \mathcal{V}(X)$, da $\mathcal{V}(X)$ ein Kegel ist. Wegen der Definition von punktweiser Addition und Skalarmultiplikation auf $\mathcal{V}(X)$ folgt die Linearität von $\langle \cdot, f\rangle$ direkt aus der Linearität des Riemann-Integrals.

Zum Schluß müssen wir noch zeigen, daß für alle stetigen Bewertungen $\mu \in \mathcal{V}(X)$ die Abbildung $\langle \cdot, \mu\rangle \colon \mathcal{L}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ linear ist. Da $\mathcal{L}(X)$ ein Kegel ist, sind mit $s \in \overline{\mathbb{R}}_+$ und $f, g \in \mathcal{L}(X)$ auch $s \cdot f, f + g \in \mathcal{L}(X)$.Zunächst werden wir die skalaren Vielfachen einer Funktion in einer Fallunterscheidung behandeln.

1. Fall: Für $s = 0$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \langle \mu, 0 \cdot f \rangle &= \int_0^\infty \mu((0 \cdot f)^{-1}(]r, \infty]))dr \\ &= \int_0^\infty \mu(\emptyset)dr \\ &= \int_0^\infty 0dr = 0 = 0 \cdot \langle \mu, f \rangle. \end{aligned}$$

2. Fall: Für $s = \infty$ rechnen wir soweit wir kommen

$$\begin{aligned} \langle \mu, \infty \cdot f \rangle &= \int_0^\infty \mu((\infty \cdot f)^{-1}(]r, \infty]))dr \\ &= \int_0^\infty \mu(f^{-1}(]0, \infty]))dr \\ &= \int_0^\infty f_\mu(0)dr \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } f_\mu(0) = 0 \\ \infty & \text{falls } f_\mu(0) \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Bevor wir $\infty \cdot \langle \mu, f \rangle$ ausrechnen, überlegen wir uns, daß $\langle \mu, f \rangle \neq 0$ genau dann gilt, wenn $f_\mu(0) \neq 0$. Angenommen $f_\mu(0) = 0$, dann folgt $f_\mu(r) = 0$ für alle $r \in \mathbb{R}$, da f_μ monoton fallend ist. Damit ist auch

$$\langle \mu, f \rangle = \int_0^\infty f_\mu(r)dr = \int_0^\infty 0dr = 0.$$

Ist $f_\mu(0) \neq 0$, dann ist nach Lemma 4.1.2 auch

$$\bigvee_{r>0}^{\uparrow} f_\mu(r) = f_\mu(\bigwedge_{r>0}{}_{\downarrow} r) = f_\mu(0) \neq 0,$$

d. h. es existiert eine reelle Zahl $x > 0$ mit $f_\mu(x) \neq 0$. Da f_μ monoton fallend ist, gilt $f_\mu(r) > 0$ für alle $r \in [0, x]$, so daß sich das Integral abschätzen läßt durch

$$\langle \mu, f \rangle = \int_0^\infty f_\mu(r)dr \geq \int_0^x f_\mu(r)dr \geq \int_0^x f_\mu(x)dr = x \cdot f_\mu(x) > 0.$$

Damit können wir weiterrechnen

$$\infty \cdot \langle \mu, f \rangle = \begin{cases} \infty \cdot 0 = 0 & \text{falls } f_\mu(0) = 0 \\ \infty \cdot (> 0) = \infty & \text{falls } f_\mu(0) \neq 0 \end{cases}$$

Dies zeigt nun genau, daß

$$\langle \mu, \infty \cdot f \rangle = \infty \cdot \langle \mu, f \rangle.$$

3. Fall: Für $s \neq 0, \infty$ setzen wir $t := \frac{r}{s}$ und berechnen

$$\begin{aligned} \langle \mu, s \cdot f \rangle &= \int_{r=0}^\infty \mu((s \cdot f)^{-1}(]r, \infty]))dr = \int_{r=0}^\infty \mu(f^{-1}(]\frac{r}{s}, \infty]))dr \\ &= \int_{t=0}^\infty \mu(f^{-1}(]t, \infty]))sdt = s \cdot \int_{t=0}^\infty \mu(f^{-1}(]t, \infty]))dt = s \cdot \langle \mu, f \rangle. \end{aligned}$$

Auch die Additivität der Abbildung $\langle\mu,\cdot\rangle\colon \mathcal{L}(X)\to\overline{\mathbb{R}}_+$ werden wir in mehreren Schritten nachweisen.

1. Schritt: Wir betrachten zunächst die Summe einer einfachen Funktion $s\colon X\to\overline{\mathbb{R}}_+$ mit Werten in $\mathbb{N}$ und der charakteristischen Funktion $\chi_V : X\to\overline{\mathbb{R}}_+$ einer offenen Menge V. Nach Lemma 1.3 hat s eine Standard-Darstellung $s=\sum_{j=1}^m \chi_{U_j}$, wobei $U_m\subseteq U_{m-1}\subseteq\ldots\subseteq U_1$. Für $\mu\in\mathcal{V}(X)$ berechnen wir

$$\langle\mu,s\rangle=\int_0^\infty \mu((\sum_{j=1}^m \chi_{U_j})^{-1}(]r,\infty[))dr=\sum_{j=1}^m\int_{j-1}^j \mu(U_j)dr=\sum_{j=1}^m \mu(U_j).$$

Jetzt überlegen wir, wie die Standard-Darstellung von $s+\chi_V$ aussieht.

$$s+\chi_V=\sum_{j=1}^m \chi_{U_j}+\chi_V=\chi_{U_1\cup V}+\sum_{j=1}^{m-1}\chi_{U_{j+1}\cup(U_j\cap V)}+\chi_{U_m\cap V}$$

Diese Summe ist ebenfalls eine einfache Funktion mit Werten in $\mathbb{N}$, so daß wir ihr Integral bezüglich einer stetigen Bewertung μ wie oben berechnen können:

$$\begin{aligned}
\langle\mu,s+\chi_V\rangle &= \mu(U_1\cup V)+\sum_{j=1}^{m-1}\mu(U_{j+1}\cup(U_j\cap V))+\mu(U_m\cap V)\\
&= \mu(U_1)+\mu(V)-\mu(U_1\cap V)\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m-1}(\mu(U_{j+1})+\mu(U_j\cap V)-\mu(U_{j+1}\cap(U_j\cap V)))+\mu(U_m\cap V)\\
&= \mu(U_1)+\mu(V)-\mu(U_1\cap V)\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m-1}\mu(U_{j+1})+\sum_{j=1}^{m-1}\mu(U_j\cap V)-\sum_{j=1}^{m-1}\mu(U_{j+1}\cap V)+\mu(U_m\cap V)\\
&= \sum_{j=1}^m \mu(U_j)+\mu(V)\\
&= \langle\mu,s\rangle+\langle\mu,\chi_V\rangle.
\end{aligned}$$

Da wir hierbei die Modularität von μ in der Form $\mu(U\cup V)=\mu(U)+\mu(V)-\mu(U\cap V)$ verwendet haben, ist die Gleichheit durch diese Rechnung nur für $\mu(U_j)<\infty$ für alle $j=1,\ldots,m$ und für $\mu(V)<\infty$ gezeigt. Andernfalls ist sie wegen

$$\langle\mu,s+\chi_V\rangle=\infty=\langle\mu,s\rangle+\langle\mu,\chi_V\rangle$$

ebenfalls gegeben.

2. Schritt: Seien jetzt s und t einfache Funktionen mit Werten in $\mathbb{N}$. Die Funktion t habe die Standard-Darstellung $t=\sum_{k=1}^n \chi_{V_k}$. Wir werden die Additivität von $\langle\mu,\cdot\rangle\colon\mathcal{L}(X)\to\overline{\mathbb{R}}_+$ für die Summe von s und t rekursiv nachweisen und definieren für $i=0,\ldots,n$ dazu

$$\begin{aligned}
t_i &:= \sum_{k=1}^i \chi_{V_k}\\
s_i &:= s+\sum_{k=i+1}^n \chi_{V_k}.
\end{aligned}$$

Es gilt damit

$$\begin{array}{llll} t_0 = 0, & t_n = t, & t_{i+1} = t_i + \chi_{V_{i+1}} & \text{für } i = 0, \dots, n-1 \\ s_0 = s + t, & s_n = s, & s_i = s_{i+1} + \chi_{V_{i+1}} & \text{für } i = 0, \dots, n-1 \\ s + t = s_i + t_i & & & \text{für } i = 0, \dots, n. \end{array}$$

Außerdem sind s_i und t_i für alle $i = 0, \dots, n$ einfache Funktionen mit Werten in $\mathbb{N}$. Für $i = 0$ berechnen wir

$$\langle \mu, s_0 + t_0 \rangle = \langle \mu, s_0 + 0 \rangle = \langle \mu, s_0 \rangle + 0 = \langle \mu, s_0 \rangle + \langle \mu, t_0 \rangle.$$

Sei nun für $k \in \{0, 1, \dots, i\}$ bereits gezeigt, daß $\langle \mu, s_k + t_k \rangle = \langle \mu, s_k \rangle + \langle \mu, t_k \rangle$. Dann können wir damit und mit dem Ergebnis aus Schritt 1 für $i + 1$ folgendes berechnen

$$\begin{aligned} \langle \mu, s_{i+1} + t_{i+1} \rangle &= \langle \mu, s + t \rangle \\ &= \langle \mu, s_i + t_i \rangle \\ &= \langle \mu, s_i \rangle + \langle \mu, t_i \rangle \\ &= \langle \mu, s_{i+1} + \chi_{V_{i+1}} \rangle + \langle \mu, t_i \rangle \\ &= \langle \mu, s_{i+1} \rangle + \langle \mu, \chi_{V i+1} \rangle + \langle \mu, t_i \rangle \\ &= \langle \mu, s_{i+1} \rangle + \langle \mu, t_i + \chi_{V_{i+1}} \rangle \\ &= \langle \mu, s_{i+1} \rangle + \langle \mu, t_{i+1} \rangle. \end{aligned}$$

Für $i + 1 = n$ folgt also

$$\langle \mu, s + t \rangle = \langle \mu, s_n + t_n \rangle = \langle \mu, s_n \rangle + \langle \mu, t_n \rangle = \langle \mu, s \rangle + \langle \mu, t \rangle.$$

3. Schritt: Für $n \in \mathbb{N}$ und zwei einfache Funktionen s, t mit Werten in $\frac{1}{2^n}\mathbb{N}$ sind $2^n s, 2^n t$ einfache Funktionen mit Werten in $\mathbb{N}$. Auf diese können wir das Ergebnis von Schritt 2 anwenden und mit der Homogenität von $\langle \mu, \cdot \rangle$ folgt

$$\begin{aligned} \langle \mu, s + t \rangle &= \langle \mu, \frac{1}{2^n}(2^n s + 2^n t) \rangle \\ &= \frac{1}{2^n} \langle \mu, 2^n s + 2^n t \rangle \\ &= \frac{1}{2^n} (\langle \mu, 2^n s \rangle + \langle \mu, 2^n t \rangle) \\ &= \langle \mu, \frac{1}{2^n} 2^n s \rangle + \langle \mu, \frac{1}{2^n} 2^n t \rangle \\ &= \langle \mu, s \rangle + \langle \mu, t \rangle. \end{aligned}$$

4. Schritt: Beliebige Funktionen $f, g \in \mathcal{L}(X)$ können nach Lemma 1.4 geschrieben werden als

$$f = \bigvee_{n \in N}^{\uparrow} f_n, \text{ wobei } f_n := \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \frac{1}{2^n} \chi_{f^{-1}(]\frac{i}{2^n}, \infty])}.$$

Entsprechend werden $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $((f + g)_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gebildet, so daß gilt

$$\begin{aligned} g &= \bigvee_{n \in \mathbb{N}}^{\uparrow} g_n \\ f + g &= \bigvee_{n \in \mathbb{N}}^{\uparrow} (f + g)_n. \end{aligned}$$

Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_n + g_n \leq (f+g)_n \leq f_{2n} + g_{2n},$$

folgt zudem auch

$$f + g = \bigvee_{n\in\mathbb{N}}{}^{\uparrow}(f_n + g_n).$$

Hieraus, aus den Ergebnissen von Schritt 3 und mit der Scott-Stetigkeit der Integralform im zweiten Argument sowie der Addition in $\overline{\mathbb{R}}_+$ folgt

$$\begin{aligned}
\langle \mu, f+g\rangle &= \langle \mu, \bigvee_{n\in\mathbb{N}}{}^{\uparrow}(f_n+g_n)\rangle \\
&= \bigvee_{n\in\mathbb{N}}{}^{\uparrow}\langle \mu, f_n+g_n\rangle \\
&= \bigvee_{n\in\mathbb{N}}{}^{\uparrow}(\langle \mu, f_n\rangle + \langle \mu, g_n\rangle) \\
&= \bigvee_{n\in\mathbb{N}}{}^{\uparrow}\langle \mu, f_n\rangle + \bigvee_{n\in\mathbb{N}}{}^{\uparrow}\langle \mu, g_n\rangle \\
&= \langle \mu, \bigvee_{n\in\mathbb{N}}{}^{\uparrow} f_n\rangle + \langle \mu, \bigvee_{n\in\mathbb{N}}{}^{\uparrow} g_n\rangle \\
&= \langle \mu, f\rangle + \langle \mu, g\rangle.
\end{aligned}$$

Damit ist die Additivität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im zweiten Argument gezeigt und der Beweis beendet.
■

Wir erhalten mittels einer kurzen Rechnung, daß für Punktbewertungen gilt

$$\langle \eta_x, f\rangle = f(x) \text{ für alle } f \in \mathcal{L}(X).$$

Damit sehen wir auch, daß $\mathcal{V}(X)$ die Punkte von $\mathcal{L}(X)$ trennt.

Das Integral über die charakteristische Funktion einer offenen Menge berechnet sich zu

$$\langle \mu, \chi_U\rangle = \mu(U) \text{ für alle } \mu \in \mathcal{V}(X),$$

woraus wir entsprechend folgern, daß $\mathcal{L}(X)$ die Punkte von $\mathcal{V}(X)$ trennt. Außerdem zeigt dies, daß unser Integralbegriff für charakteristische Funktionen von offenen Mengen mit dem aus [8, Kapitel 4] übereinstimmt. Davon ausgehend definiert O. Kirch das Integral einer einfachen Funktion s mit Standard-Darstellung $\sum_{i=1}^{n} r_i \chi_{U_i}$ bezüglich einer stetigen Bewertung als

$$\int s d\mu := \sum_{i=1}^{n} r_i \mu(U_i).$$

Er kann zeigen, daß diese Definition unabhängig von der Darstellung der einfachen Funktion s ist und monoton auf $\mathcal{V}_f(X)$. Dadurch ist das Integral einer beliebigen halbstetigen Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ wohldefiniert, wenn er setzt

$$\int f d\mu := \bigvee{}^{\uparrow}\left\{\int s d\mu \mid s \leq f,\ s \text{ einfach}\right\}.$$

Für core-kompakte Räume X zeigt er, daß $f \mapsto \int f d\mu \colon \mathcal{L}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ für alle $\mu \in \mathcal{V}(X)$ linear und Scott-stetig ist. Da dies auch für $\langle \mu, \cdot \rangle \colon \mathcal{L}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gilt, beide Integralformen auf den charakteristischen Funktionen offener Mengen übereinstimmen und alle halbstetigen Funktionen nach Lemma 1.4 als gerichtetes Supremum einfacher Funktionen geschrieben werden können, stimmen sie für core-kompakte Räume auch auf diesen überein. Unsere Definition des Integrals einer halbstetigen Funktion bezüglich einer stetigen Bewertung verallgemeinert damit den Integralbegriff aus [8].

4.2 Topologien auf $\mathcal{V}(X)$ und $\mathcal{L}(X)$

Wir haben gesehen, daß die Integral-Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathcal{V}(X) \times \mathcal{L}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ komponentenweise Scott-stetig ist. Die Scott-Topologie auf $\mathcal{V}(X)$ bzw. $\mathcal{L}(X)$ könnte nun mehr offene Mengen enthalten als für diese Stetigkeit notwendig sind. Es gibt aber jeweils eine gröbste Topologie, bezüglich der die Integral-Bilinearform gerade noch komponentenweise stetig ist. Diese soll nun einen Namen erhalten, und wir weisen einige ihrer Eigenschaften nach.

Definition 4.5 *Für einen topologischen Raum X definieren wir die schwache Topologie auf $\mathcal{V}(X)$ als die gröbste, bezüglich der die Abbildungen $\langle \cdot, f \rangle \colon \mathcal{V}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ für alle $f \in \mathcal{L}(X)$ stetig sind. Als schwache Topologie auf $\mathcal{L}(X)$ bezeichnen wir die gröbste Topologie, bezüglich der die Abbildungen $\langle \mu, \cdot \rangle \colon \mathcal{L}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ für alle $\mu \in \mathcal{V}(X)$ stetig sind.*

Diese Topologien sind auch in einem anderen Sinne noch nicht zu grob; die Mengen $\mathcal{V}(X)$ und $\mathcal{L}(X)$ sind immer noch Bereichskegel.

Satz 4.6 *Bezüglich der schwachen Topologie auf $\mathcal{V}(X)$ und $\mathcal{L}(X)$ sind Addition und Skalarmultiplikation stetig.*

Beweis: Zunächst bemerken wir, daß die Abbildung $i \colon \mathcal{V}(X) \to {\overline{\mathbb{R}}_+}^{\mathcal{L}(X)}$, $\mu \mapsto (\langle \mu, f \rangle)_{f \in \mathcal{L}(X)}$ injektiv ist, da $\mathcal{L}(X)$ die Punkte von $\mathcal{V}(X)$ trennt. Damit ist die schwache Topologie auf $\mathcal{V}(X)$ nach Definition gleich der Spurtopologie induziert von ${\overline{\mathbb{R}}_+}^{\mathcal{L}(X)}$. Als Produkt von $\overline{\mathbb{R}}_+$ ist ${\overline{\mathbb{R}}_+}^{\mathcal{L}(X)}$ ausgestattet mit der Produkttopologie ein Bereichskegel. Insbesondere sind Addition und Skalarmultiplikation hierauf stetig. Daraus folgt die Stetigkeit der Addition auf $\mathcal{V}(X)$ bezüglich der schwachen Topologie, wenn wir noch zeigen, daß folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}(X) \times \mathcal{V}(X) \arrow[r, "+"] \arrow[d, "i \times i"'] & \mathcal{V}(X) \arrow[d, "i"] \\
{\overline{\mathbb{R}}_+}^{\mathcal{L}(X)} \times {\overline{\mathbb{R}}_+}^{\mathcal{L}(X)} \arrow[r, "+"] & {\overline{\mathbb{R}}_+}^{\mathcal{L}(X)}
\end{tikzcd}$$

Die Skalarmultiplikation ist stetig, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathcal{V}(X) & \xrightarrow{\cdot} & \mathcal{V}(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle id \times i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i} \\ \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{L}(X)} & \xrightarrow{\cdot} & \overline{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{L}(X)} \end{array}$$

kommutiert. Beide Diagramme kommutieren wegen der Linearität der Integralform im ersten Argument.

Die Stetigkeit von Addition und Skalarmultiplikation bezüglich der schwachen Topologie auf $\mathcal{L}(X)$ kann man mit entsprechenden Überlegungen nachweisen. ∎

Bemerkung 4.7 *Es soll nochmals betont werden, daß die schwache Topologie auf $\mathcal{V}(X)$ und $\mathcal{L}(X)$ gröber ist als die jeweilige Scott-Topologie. Damit sind schwach-stetige Funktionen $\Lambda\colon \mathcal{V}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ bzw. $\Lambda\colon \mathcal{L}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ immer auch Scott-stetig.*

Es liegt nahe, noch eine weitere Topologie auf $\mathcal{V}(X)$ bzw. $\mathcal{L}(X)$ zu betrachten, nämlich die von $\overline{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{O}(X)}$ bzw. $\overline{\mathbb{R}}_+^{X}$ induzierte.

Definition 4.8 *Für einen topologischen Raum X definieren wir die Produkttopologie auf $\mathcal{V}(X)$ als die gröbste, bezüglich der die Abbildungen $\varepsilon_U\colon \mathcal{V}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+\colon \mu \mapsto \mu(U)$ für alle $U \in \mathcal{O}(X)$ stetig sind. Als Produkttopologie auf $\mathcal{L}(X)$ bezeichnen wir die gröbste Topologie, bezüglich der die Abbildungen $\varepsilon_x\colon \mathcal{L}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+\colon f \mapsto f(x)$ für alle $x \in X$ stetig sind.*

Mit den gleichen Methoden, mit denen wir gesehen haben, daß $\mathcal{V}(X)$ und $\mathcal{L}(X)$ bezüglich der schwache Topologie Bereichskegel sind, könnten wir uns auch überlegen, daß sie es bezüglich der Produkttopologie sind. Das werden wir jetzt aber nicht tun. Für $\mathcal{V}(X)$ ist es zudem nicht nötig, da die Produkttopologie keine wirklich neue Topologie liefert. Immerhin erhalten wir dadurch eine weitere nützliche Möglichkeit, die schwache Topologie zu betrachten.

Lemma 4.9 *Für einen topologischen Raum X ist die schwache Topologie auf $\mathcal{V}(X)$ gleich der Produkttopologie.*

Beweis: Die schwache Topologie auf $\mathcal{V}(X)$ ist feiner als die Produkttopologie, denn für alle $U \in \mathcal{O}(X)$ ist $\chi_U \in \mathcal{L}(X)$ und, da $\varepsilon_U = \langle \cdot, \chi_U \rangle$, sind diese Abbildungen stetig.

Betrachten wir nun die Produkttopologie auf $\mathcal{V}(X)$, d. h. für alle $U \in \mathcal{O}(X)$ ist ε_U und damit auch $\langle \cdot, \chi_U \rangle$ stetig. Wegen der Linearität von $\langle \mu, \cdot \rangle$ und der Stetigkeit von Addition und Multiplikation in $\overline{\mathbb{R}}_+$ ist dann auch für jede einfache Funktion $s \in \mathcal{L}(X)$ die Abbildung $\langle \cdot, s \rangle\colon \mathcal{V}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ stetig. Da jedes $f \in \mathcal{L}(X)$ als gerichtetes Supremum einfacher Funktionen geschrieben werden kann, z. B. $f = \bigvee^{\uparrow}_{n \in \mathbb{N}} f_n$, wobei $f_n := \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \frac{1}{2^n} \chi_{f^{-1}(]\frac{i}{2^n}, \infty])}$, und da

$\langle \mu, \cdot \rangle$ Scott-stetig ist, gilt $\langle \cdot, f \rangle = \bigvee^{\uparrow}_{n \in \mathbb{N}} \langle \cdot, f_n \rangle$. Die stetigen Funktionen von einem topologischen Raum in einen Bereich mit der Scott-Topologie bilden bezüglich der punktweisen Ordnung wieder einen Bereich. Damit ist die Abbildung $\langle \cdot, f \rangle$ als gerichtetes Supremum stetiger Funktionen ebenfalls stetig. Dies bedeutet nun genau, daß die Produkttopologie auf $\mathcal{V}(X)$ auch feiner ist als die schwache Topologie, also sind sie gleich. ∎

Für stetige Bereiche haben wir sogar eine viel stärkere Aussage.

Satz 4.10 *Für einen stetigen Bereich X sind auf $\mathcal{V}(X)$ und $\mathcal{L}(X)$ die Scott-Topologie, die schwache Topologie und die Produkttopologie gleich.*

Beweis: Da für stetige Bereiche unser Integralbegriff mit dem aus [8] übereinstimmt, siehe Kapitel 8.3 bzw. Kapitel 8.4 in [8]. ∎

Für andere topologische Räume X könnten die drei vorgestellten Topologien auf $\mathcal{L}(X)$ tatsächlich alle verschieden sein. Dann wissen wir zumindest, daß die Scott-Topologie die feinste und die schwache Topologie immer noch feiner als die Produkttopologie ist.

Fragen wir uns nun nach einem weiteren Zusammenhang zwischen diesen Topologien, nämlich nach ihrer Beziehung zu der gegebenen Ordnung. Für einen topologischen T_0-Raum X wird die Spezialisierungsordnung gegeben durch

$$x \leq y \;:\Leftrightarrow\; x \in \overline{\{y\}} \;\Leftrightarrow\; (\forall U \in \mathcal{U}(x))\; y \in U.$$

Bemerkung 4.11 *Ist D eine geordnete Menge versehen mit einer Topologie, so daß deren Spezialisierungsordnung gleich der gegebenen Ordnung ist, dann gilt dies für jede Teilmenge $A \subseteq D$ bezüglich der induzierten Ordnung und der induzierten Topologie. Zum Beispiel hat ein Bereich mit der Scott-Topologie diese Eigenschaft. Zudem bleibt sie bei Produktbildung erhalten.*

Betrachten wir zunächst die Spezialisierungsordnungen der verschiedenen Topologien auf $\mathcal{V}(X)$. Die Bemerkung zeigt, daß die Produkttopologie und die Scott-Topologie dieselbe Spezialisierungsordnung liefern, nämlich die extensional gegebene, d. h. $\mu \leq \nu$ genau dann, wenn $\mu(U) \leq \nu(U)$ für alle $U \in \mathcal{O}(X)$. Da nach Lemma 4.9 die schwache Topologie auf $\mathcal{V}(X)$ gleich der Produkttopologie ist, sind auch ihre Spezialisierungsordnungen gleich.

Folgerung 4.12 *Auf $\mathcal{V}(X)$ sind die Spezialisierungsordnungen der Scott-Topologie, der schwachen Topologie und der Produkttopologie gleich, und zwar gleich der extensionalen Ordnung. Insbesondere sind auch die von $\overline{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{O}(X)}$ und von $\overline{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{L}(X)}$ induzierten Ordnungen gleich,d. h. für $\mu, \nu \in \mathcal{V}(X)$ gilt*

$$\mu \leq \nu \;:\Leftrightarrow\; (\forall U \in \mathcal{O}(X))\; \mu(U) \leq \nu(U) \;\Leftrightarrow\; (\forall f \in \mathcal{L}(X))\; \langle \mu, f \rangle \leq \langle \nu, f \rangle.$$

Auf $\mathcal{L}(X)$ sind die Spezialisierungsordnungen der Produkttopologie und der Scott-Topologie ebenfalls nach Bemerkung 4.11 gleich. Diese Ordnung wollen wir wieder extensional nennen. Sie wird gegeben durch $f \leq g$ genau dann, wenn $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X$.

Zu einer feineren Topologie gehört eine gröbere Spezialisierungsordnung, d. h. weniger Elemente stehen in Relation. Wenden wir dies nun auf die schwache Topologie an. Sie ist feiner als die Produkttopologie, also ist ihre Spezialisierungsordnung gröber als die extensionale Ordnung. Andererseits ist die schwache Topologie gröber als die Scott-Topologie, womit ihre Spezialisierungsordnung feiner als die extensionale Ordnung ist.

Folgerung 4.13 *Auf $\mathcal{L}(X)$ sind die Spezialisierungsordnungen der Scott-Topologie, der schwachen Topologie und der Produkttopologie gleich. Insbesondere sind damit die von $\overline{\mathbb{R}}_+^{\,X}$ und von $\overline{\mathbb{R}}_+^{\,\mathcal{V}(X)}$ induzierten Ordnungen gleich, d. h. für $f, g \in \mathcal{L}(X)$ gilt*

$$f \leq g \;:\Leftrightarrow\; (\forall x \in X)\; f(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; (\forall \mu \in \mathcal{V}(X))\; \langle \mu, f\rangle \leq \langle \mu, g\rangle.$$

4.3 Duale Kegel

Wir haben gesehen, daß für einen topologischen Raum X die Kegel $\mathcal{V}(X)$ und $\mathcal{L}(X)$ nicht nur mit der Scott-Topologie zu einem Bereichskegel werden. Es soll nun für beliebige Bereichskegel der Dualraum definiert werden und so mit einer Topologie versehen werden, daß er ebenfalls ein Bereichskegel wird. Für Bereichskegel mit der Scott-Topologie kann man dies auch in [8, Kapitel 8] nachlesen.

Definition 4.14 *Ist C ein Bereichskegel, dann bezeichnen wir mit C^* die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $\Lambda\colon C \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mit der punktweisen Ordnung. Wir können $\overline{\mathbb{R}}^{C}$ mit der Produkttopologie versehen und C^* als Teilmenge hiervon auffassen. Dadurch erhalten wir eine Spurtopologie auf C^*. So ausgestattet soll C^* der duale Kegel von C heißen. Für eine lineare stetige Abbildung $f\colon C_1 \to C_2$ definieren wir $f^*\colon C_2^* \to C_1^*\colon \Lambda \mapsto \Lambda \circ f$.*

Lemma 4.15 *Die Abbildung * ist eine Endofunktor der Kategorie* **DCONE** *aller Bereichskegel.*

Beweis: Da $\overline{\mathbb{R}}_+$ ein reeller Kegel ist, ist C^* bezüglich der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen ebenfalls ein reeller Kegel. Das punktweise Supremum stetiger linearer Funktionen nach $\overline{\mathbb{R}}_+$ ist wieder stetig, und es ist linear, da Addition und Multiplikation in $\overline{\mathbb{R}}_+$ stetig sind. Damit ist C^* ein Bereich. In C^* sind Addition und Skalarmultiplikation stetig, da sie es in $\overline{\mathbb{R}}_+^{\,C}$ sind. Also ist C^* wieder ein Bereichskegel.

Die Verkettung stetiger linearer Funktionen ist wieder stetig und linear. Somit ist für stetiges und lineares $f\colon C_1 \to C_2$ und für $\Lambda \in C_1^*$ das Bild $f^*(\Lambda) = \Lambda \circ f$ in C_2^* enthalten. Da Addition und Skalarmultiplikation für Funktionen aus C_2^* punktweise definiert sind, ist f^* selbst auch linear. Seien $i\colon C_1^* \to \overline{\mathbb{R}}_+^{\,C_1}$ und $j\colon C_2^* \to \overline{\mathbb{R}}_+^{\,C_2}$ die jeweiligen Einbettungen. Damit f^* bezüglich der Produkttopologie stetig ist, müssen wir zeigen, daß für alle $x \in C_1$ die Abbildungen $pr_x \circ i \circ f^*\colon C_2^* \to \overline{\mathbb{R}}_+$ stetig sind. Dies sind sie, da folgendes Diagramm kommutiert und auch die Projektionen $pr_{f(x)}\colon \overline{\mathbb{R}}_+^{\,C_2} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ stetig sind.

$$
\begin{tikzcd}
C_1^* \arrow[r, "i"] & \overline{\mathbb{R}}_+^{\,C_1} \arrow[r, "pr_x"] & \overline{\mathbb{R}}_+ \\
C_2^* \arrow[u, "f^*"'] \arrow[r, "j"] & \overline{\mathbb{R}}_+^{\,C_2} \arrow[u, "\_\circ f"'] \arrow[r, "pr_{f(x)}"] & \overline{\mathbb{R}}_+ \arrow[u, "id"']
\end{tikzcd}
$$

■

Damit haben wir die Voraussetzungen bereitgestellt, um eine Verallgemeinerung des Rieszschen Darstellungssatzes zu formulieren.

Satz 4.16 ***(Rieszscher Darstellungssatz)*** *Für jeden topologischen Raum X ist*

$$\Phi_X : \mathcal{V}(X) \to \mathcal{L}(X)^* : \mu \to \langle \mu, \cdot \rangle$$

ein Isomorphismus von Bereichskegeln. Dabei sollen $\mathcal{V}(X)$ und $\mathcal{L}(X)$ mit der schwachen Topologie versehen sein.

Beweis: Für alle $\mu \in \mathcal{V}(X)$ gilt $\Phi_X(\mu) \in \mathcal{L}(X)^*$, denn $\langle \mu, \cdot \rangle \colon \mathcal{L}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ist nach Definition schwach stetig und nach Satz 4.4 linear.

Die Abbildung Φ_X ist injektiv, denn aus $\Phi_X(\mu) = \Phi_X(\nu)$, d. h. $\langle \mu, f \rangle = \langle \nu, f \rangle$ für alle $f \in \mathcal{L}(X)$ erhalten wir mit Folgerung 4.12 bereits $\mu = \nu$.

Als nächstes beweisen wir die Surjektivität von Φ_X. Dazu sei $\Lambda \in \mathcal{L}(X)^*$. Mit χ_U bezeichnen wir die charakteristische Funktion einer offenen Menge $U \in \mathcal{O}(X)$. Wir definieren $\mu\colon \mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ durch $\mu(U) := \Lambda(\chi_U)$ und zeigen, daß dieses μ eine stetige Bewertung ist, für die $\Phi_X(\mu) = \Lambda$ gilt. Die Abbildung μ ist strikt, denn

$$\mu(\emptyset) = \Lambda(\chi_\emptyset) = \Lambda(0) = 0.$$

Um die Scott-Stetigkeit von μ zu zeigen, sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{O}(X)$ gerichtet. Nach Bemerkung 4.7 ist Λ auch Scott-stetig, und es gilt

$$\mu\Big(\bigcup\nolimits^{\uparrow} \mathcal{D}\Big) = \Lambda(\chi_{\bigcup^{\uparrow} \mathcal{D}}) = \Lambda\Big(\bigvee_{U \in \mathcal{D}}^{\uparrow} \chi_U\Big) = \bigvee_{U \in \mathcal{D}}^{\uparrow} \Lambda(\chi_U) = \bigvee_{U \in \mathcal{D}}^{\uparrow} \mu(U).$$

Für die Modularität seien $U, V \in \mathcal{O}(X)$. Für diese berechnen wir

$$
\begin{aligned}
\mu(U) + \mu(V) &= \Lambda(\chi_U) + \Lambda(\chi_V) = \Lambda(\chi_U + \chi_V) = \Lambda(\chi_{U \cup V} + \chi_{U \cap V}) \\
&= \Lambda(\chi_{U \cup V}) + \Lambda(\chi_{U \cap V}) = \mu(U \cup V) + \mu(U \cap V).
\end{aligned}
$$

Damit ist μ eine stetige Bewertung. Für die charakteristische Funktion einer offenen Menge U ist $\Phi_X(\mu)(\chi_U) = \Lambda(\chi_U)$ nach Definition von μ. Eine beliebige stetige Funktion $f \in \mathcal{L}(X)$ ist nach Lemma 1.4 gerichtetes Supremum einfacher Funktionen, so daß wir die Gleichheit

$\Phi_X(\mu)(f) = \Lambda(f)$ aus der Linearität und Scott-Stetigkeit von $\Phi_X(\mu)$ und Λ erhalten. Es ist also $\Phi_X(\mu) = \Lambda$.

Die Abbildung Φ_X ist linear nach Satz 4.4 und stetig nach Definition der schwachen Topologie.

Seien $i\colon \mathcal{L}(X)^* \to \overline{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{L}(X)}$ und $j\colon \mathcal{V}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{L}(X)}$ die jeweiligen Einbettungen. Die Umkehrabbildung $\Phi_X^{-1}\colon \mathcal{L}(X)^* \to \mathcal{V}(X)$ sei wie oben definiert. Dann ist sie stetig bezüglich der schwachen Topologie auf $\mathcal{V}(X)$, wenn für alle $f \in \mathcal{L}(X)$ die Verkettung $pr_f \circ j \circ \Phi_X^{-1}\colon \mathcal{L}(X)^* \to \overline{\mathbb{R}}_+\colon \Lambda \mapsto \langle \mu, f\rangle = \Lambda(f)$ stetig ist. Dazu betrachten wir folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(X)^* \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\Phi_X^{-1}"] & \overline{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{L}(X)} \arrow[r, "pr_f"] \arrow[d, "id"] & \overline{\mathbb{R}}_+ \arrow[d, "id"] \\
\mathcal{V}(X) \arrow[r, "j"] & \overline{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{L}(X)} \arrow[r, "pr_f"] & \overline{\mathbb{R}}_+
\end{tikzcd}$$

Es ist $pr_f \circ j \circ \Phi_X^{-1} = pr_f \circ i$ und diese Abbildung ist stetig, da $\mathcal{L}(X)^*$ die von $\overline{\mathbb{R}}^{\mathcal{L}(X)}$ induzierte Topologie trägt. ■

Mit dem nächsten Ergebnis erhalten wir, daß der Bereichskegel aller stetigen Bewertungen $\mathcal{V}(X)$ von einem topologischen Raum X in seinen Doppeldualraum eingebettet werden kann.

Lemma 4.17 *Für jeden topologischen Raum X ist*

$$\Psi_X : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{V}(X)^*\colon f \mapsto \langle \cdot, f\rangle$$

ein injektiver Morphismus von Bereichskegeln. Dabei sollen $\mathcal{V}(X)$ und $\mathcal{L}(X)$ mit der schwache Topologie versehen sein.

Beweis: Nach Definition der schwache Topologie und nach Satz 4.4 ist Ψ_X wohldefiniert, linear und stetig. Sind für $f, g \in \mathcal{L}(X)$ die Bilder unter Ψ_X gleich, d. h. $\langle \mu, f\rangle = \langle \mu, g\rangle$ für alle $\mu \in \mathcal{V}(X)$, dann ist wegen Folgerung 4.13 bereits $\mu = \nu$. ■

Für einen stetigen Bereich X ist Ψ_X auch surjektiv, wie [8, Lemma 8.2] zeigt. Für einen beliebigen topologischen Raum ist dieser Nachweis bisher leider nicht gelungen, auch nicht unter zusätzlichen schwächeren Voraussetzungen an X, etwa daß er ein lokal quasikompakter Raum ist.

Wir bemerken noch, daß für alle $\mu \in \mathcal{V}(X)$ und für alle $f, g \in \mathcal{L}(X)$ gilt $\langle \mu, g \circ f\rangle = \langle \mu \circ f^{-1}, g\rangle$. Deshalb definieren Φ_X und Ψ_X natürliche Transformationen $\Phi\colon \mathcal{V} \to {}^* \circ \mathcal{L}$ und $\Psi\colon \mathcal{L} \to {}^* \circ \mathcal{V}$.

5 Eine nüchterne Topologie auf dem Bereich aller stetigen Bewertungen

Nüchterne Räume sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß man sie aus dem Verband ihrer offenen Teilmengen rekonstruieren kann. Als Hauptergebnis dieses Abschnitts erhalten wir, daß für einen beliebigen topologischen Raum X der Bereich aller stetigen Bewertungen $\mathcal{V}(X)$ mit der Produkttopologie nüchtern ist. Der Beweis wird nach einer Idee von Reinhold Heckmann geführt. Zunächst verschaffen wir uns aber eine für diese Zwecke handlichere Formulierung von nüchtern.

Wir haben bereits gesagt, daß ein topologischer Raum nüchtern heißen soll, wenn jeder vollständig prime Filter auf $\mathcal{O}(X)$ Umgebungsfilter von genau einem Punkt aus X ist. Ist der vollständig prime Filter $\mathcal{F}$ Umgebungsfilter des Punktes $x \in X$, dann können wir dazu die prime offene Menge $W := \bigcup_{U \notin \mathcal{F}} U$ konstruieren. Für diese Menge gilt $W = X \setminus \overline{\{x\}}$. Sei andererseits eine prime offenen Menge W gegeben. Dann erhalten wir mittels $\mathcal{F} := \{U \in \mathcal{O}(X) \mid U \not\subseteq W\}$ einen vollständig primen Filter. Gehen wir nun durch Komplementbildung auf den Verband der abgeschlossenen Teilmengen über. Eine prime offene Menge wird dabei zu einer abgeschlossenen irreduziblen und umgekehrt. Den Begriff der Irreduzibilität werden wir nun verallgemeinern.

Definition 5.1 *Sei X ein topologischer Raum. Eine beliebige Teilmenge $C \subseteq X$ heißt c-irreduzibel, wenn ihr Abschluß $\overline{C}$ irreduzibel ist.*

Wir fassen zusammen:

Lemma 5.2 *Ein topologischer Raum X heißt nüchtern, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.*

1. Ist $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(X)$ ein vollständig primer Filter, dann gibt es genau einen Punkt $x \in X$, dessen Umgebungsfilter $\mathcal{F}$ ist.

2. Ist W eine offene prime Teilmenge von X, dann gibt es genau einen Punkt $x \in X$ mit $W = X \setminus \overline{\{x\}}$.

3. Ist A eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge von X, dann gibt es genau einen Punkt $x \in X$ mit $A = \overline{\{x\}}$.

4. Ist C eine c-irreduzible Teilmenge von X, dann gibt es genau einen Punkt $x \in X$ mit $\overline{C} = \overline{\{x\}}$.

Beweis: Durchführung der oben skizzierten Überlegungen. ∎

Da das stetige Bild einer abgeschlossenen Menge nicht immer abgeschlossen ist, wird auch Irreduzibilität von stetigen Abbildungen nicht erhalten. Die Eigenschaft einer Menge, c-irreduzibel zu sein, dagegen schon:

Lemma 5.3 *Seien X, Y topologische Räume, C eine c-irreduzible Teilmenge von X und $f\colon X \to Y$ eine stetige Funktion. Dann ist $f(C)$ eine c-irreduzible Teilmenge von Y.*

Beweis: Seien A, B abgeschlossene Teilmengen von Y mit $f(C) \subseteq A \cup B$. Dann ist $C \subseteq f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, wobei $f^{-1}(A)$ und $f^{-1}(B)$ abgeschlossene Teilmengen von X sind, da f stetig ist. Die Menge C ist nach Voraussetzung c-irreduzibel und somit folgt $C \subseteq f^{-1}(A)$ oder $C \subseteq f^{-1}(B)$. Dies heißt wiederrum $f(C) \subseteq A$ oder $f(C) \subseteq B$, was genau bedeutet, daß $f(C)$ ebenfalls c-irreduzibel ist. ∎

Im folgenden werden wir eine Reihe von Zwischenbehauptungen beweisen, aus denen wir dann schließen können:

Satz 5.4 *Für jeden topologischen Raum X ist der Bereich aller stetigen Bewertungen $\mathcal{V}(X)$ mit der Produkttopologie nüchtern.*

Wir beginnen mit

Lemma 5.5 *Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{S}$ eine Subbasis für die abgeschlossenen Mengen. Dann läßt sich eine abgeschlossene irreduzible Menge A bereits als Schnitt von Subbasismengen schreiben.*

Beweis: Da A abgeschlossen ist, gibt es Mengen S_{ij} in $\mathcal{S}$ mit $A = \bigcap_i (S_{i1} \cup \ldots \cup S_{in_i})$. Für alle i gilt also $A \subseteq S_{i1} \cup \ldots \cup S_{in_i}$. Weil A irreduzibel ist, gibt es für alle i ein k_i mit $A \subseteq S_{ik_i}$. Damit folgt $A = \bigcap_i S_{ik_i}$, wie behauptet. ∎

Lemma 5.6 *Ein vollständiger Verband L mit der unteren Topologie ist nüchtern.*

Beweis: Die untere Topologie auf L hat als Subbasis für die abgeschlossenen Mengen $\mathcal{S} = \{\downarrow a \mid a \in L\}$. Sei A eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge von L. Nach Lemma 5.5 können wir A schreiben als $A = \bigcap_i \downarrow a_i$ für gewisse $a_i \in L$. Der Verband L ist vollständig und so gilt, daß $\bigcap_i \downarrow a_i = \downarrow (\bigwedge_i a_i) = \overline{\{\bigwedge_i a_i\}}$ der Abschluß genau eines Punktes ist. Damit ist L nüchtern. ∎

Beispiel 5.7 *Die um ∞ erweiterten nichtnegativen reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}}_+$ mit der unteren Topologie sind nüchtern.*

Lemma 5.8 *Seien X, Y topologische Räume, Y sei zudem nüchtern. Dann ist der Raum aller stetigen Funktionen $[X \to Y]$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz nüchtern.*

Beweis: Sei $F \subseteq [X \to Y]$ abgeschlossen und irreduzibel. Nach Lemma 5.3 ist für alle $x \in X$ die Menge $F(x) := \{f(x) \mid f \in F\}$ in Y c-irreduzibel, da die Projektionen pr_x stetig sind. Der Raum Y ist nüchtern, und so gibt es für alle $x \in X$ genau ein $g(x) \in Y$ mit $\overline{F(x)} = \overline{\{g(x)\}}$. Dadurch wird eine eindeutige Funktion $g\colon X \to Y$ definiert. Als nächstes werden wir zeigen, daß diese Funktion stetig ist. Betrachten wir dazu ihr Urbild einer abgeschlossenen Menge $A \subseteq Y$. Nach Definition von g gilt für alle $x \in X$

$$g(x) \in A \;\Leftrightarrow\; \overline{\{g(x)\}} = \overline{F(x)} \subseteq A \;\Leftrightarrow\; (\forall f \in F)\; f(x) \in A.$$

Damit ist

$$g^{-1}(A) = \{x \in X \mid g(x) \in A\} = \bigcap_{f \in F} \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

als Schnitt abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen, und g ist stetig. Der Punktabschluß $\overline{\{g\}}$ ist in $[X \to Y]$ irreduzibel. Nach Voraussetzung ist auch F abgeschlossen und irreduzibel, so daß mit Lemma 5.5 folgt

$$\overline{\{g\}} = \bigcap_{x \in X} pr_x^{-1}(\overline{\{g(x)\}}) = \bigcap_{x \in X} pr_x^{-1}(\overline{F(x)}) = \overline{F} = F.$$

Damit haben wir nachgewiesen, daß $[X \to Y]$ nüchtern ist. ∎

Nach Beispiel 5.7 ist $\overline{\mathbb{R}}_+$ nüchtern. Damit ist für jeden topologischen Raum X der Raum aller stetigen Funktionen $[X \to \overline{\mathbb{R}}_+]$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz nüchtern. Insbesondere ist der Raum aller stetigen Funktionen $[\mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+]$ nüchtern. Mit der Produkttopologie bilden die stetigen Bewertungen einen Teilraum hiervon, in dem zusätzlich bestimmte Gleichungen gelten. Wir werden nun Voraussetzungen nennen, unter denen ein Teilraum eines nüchternen Raumes ebenfalls nüchtern ist.

Lemma 5.9 *Seien X ein nüchterner Raum, Y ein T_0-Raum und $f, g\colon X \to Y$ stetige Funktionen. Dann ist der Equalizer-Teilraum $Z := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ mit der Spurtopologie nüchtern.*

Beweis: Sei A eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge von Z. Wir zeigen zuerst, daß dann der Abschluß $\overline{A}$ von A in X irreduzibel ist. Seien dazu B, C abgeschlossene Teilmengen von X mit $\overline{A} = B \cup C$. Dann sind $A \cap B, A \cap C$ abgeschlossene Teilmengen von Z mit $A = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Da A irreduzibel in Z ist, folgt $A \subseteq B$ oder $A \subseteq C$ und damit $\overline{A} = B$ oder $\overline{A} = C$. Also ist $\overline{A}$ irreduzibel in X.

Der Raum X ist nach Voraussetzung nüchtern, d. h. es existiert ein eindeutiges Element $a \in X$ mit $\overline{A} = \overline{\{a\}}$ in X. Wir werden nun zeigen, daß dieses a auch ein Element von Z ist. Nehmen wir dazu an, $f(a) \neq g(a)$ würde gelten. Da Y ein T_0-Raum ist, können wir o.B.d.A. $f(a) \notin \overline{\{g(a)\}}$ annehmen. Dann ist $f(a) \in Y \setminus \overline{\{g(a)\}}$, d. h. $a \in f^{-1}(Y \setminus \overline{\{g(a)\}})$ und diese Menge ist offen. Es ist $a \in \overline{A}$, und somit gibt es ein Element $a' \in A \cap f^{-1}(Y \setminus \overline{\{g(a)\}})$. Also gilt $f(a') \notin \overline{\{g(a)\}}$. Andererseits folgt aus $a' \in A \subseteq Z$, daß $f(a') = g(a') \in g(A) \subseteq g(\overline{A}) = g(\overline{\{a\}}) \subseteq \overline{\{g(a)\}}$. Dies ist ein Widerspruch, und $f(a) = g(a)$ muß gelten. Damit ist A der Abschluß von $\{a\}$ in Z. Da a in X eindeutig ist, kann es auch in Z kein weiteres Element mit dieser Eigenschaft geben. Dies besagt, daß der Equalizer-Teilraum Z nüchtern ist. ∎

Dieses Lemma wenden wir nun auf die Gleichungen an, die in $\mathcal{V}(X)$ gelten sollen.

Beweis von Satz 5.4: Wir müssen noch zeigen, daß der Teilraum aller strikten modularen Funktionen von $[\mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+]$ nüchtern ist.

Striktheit: Es ist $[\mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+]$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ein nüchterner Raum und $\overline{\mathbb{R}}_+$ ein T_0-Raum. Betrachten wir die Funktionen $f, g\colon [\mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+] \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mit

$$\begin{aligned} f\colon m &\mapsto m(\emptyset) \\ g\colon m &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Die Funktion $f = pr_\emptyset$ ist in der Topologie der punktweisen Konvergenz stetig. Die Funktion g ist als konstante Funktion ebenfalls stetig. Wir können also Lemma 5.9 anwenden. Dies besagt, der Raum

$$[\mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+]_s := \{m \in [\mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+] \mid m(\emptyset) = 0\}$$

aller strikten Funktionen ist nüchtern.

Modularität: Wie wir eben gezeigt haben, ist $[\mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+]_s$ nüchtern. Mit der Produkttopologie ist $\overline{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{O}(X)\times\mathcal{O}(X)}$ ein T_0-Raum. Betrachten wir die Funktionen $f, g\colon [\mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+]_s \to \overline{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{O}(X)\times\mathcal{O}(X)}$ mit

$$\begin{aligned} f\colon m &\mapsto f_m = ((U,V) \mapsto m(U) + m(V)) \\ g\colon m &\mapsto g_m = ((U,V) \mapsto m(U\cup V) + m(U \cap V)). \end{aligned}$$

Die Funktionen f und g sind stetig, wenn für alle $(U,V) \in \mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(X)$ die Abbildungen $pr_{(U,V)} \circ f$ bzw. $pr_{(U,V)} \circ g$ stetig sind. Es gilt aber $pr_{(U,V)} \circ f = pr_U + pr_V$ und $pr_{(U,V)} \circ g = pr_{U\cup V} + pr_{U\cap V}$. Die Projektionen $pr_U, pr_V, pr_{U\cup V}, pr_{U\cap V}\colon \overline{\mathbb{R}}_+^{\mathcal{O}(X)} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ sind stetig, ebenso die Addition auf $\overline{\mathbb{R}}_+$ und damit wie gefordert auch $pr_{(U,V)} \circ f$ und $pr_{(U,V)} \circ g$. Wir können wieder Lemma 5.9 anwenden und erhalten, daß

$$\mathcal{V}(X) = \{m \in [\mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+]_s \mid \forall U, V \in \mathcal{O}(X)\ m(U) + m(V) = m(U \cup V) + m(U \cap V)\}$$

nüchtern ist. ∎

Wie für die strikten Funktionen hätten wir auch zeigen können, daß die modularen Funktionen einen nüchternen Teilraum von $[\mathcal{O}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+]$ bilden. Um daraus die strikten modularen Funktionen zu erhalten, müssen wir die beiden Teilräume schneiden. Dann können wir mit folgendem Lemma auf die Nüchternheit von $\mathcal{V}(X)$ schließen.

Lemma 5.10 *Seien X, Y, Z nüchtern, wobei Y und Z Unterräume von X sind. Dann ist auch ihr Schnitt $Y \cap Z$ nüchtern.*

Beweis: Sei A eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge von $Y \cap Z$. Die Einbettungen $i_X\colon Y \cap Z \to X$, $i_Y\colon Y \cap Z \to Y$ und $i_Z\colon Y \cap Z \to Z$ sind stetig. Damit ist nach Lemma 5.3 die Menge A c-irreduzibel in X, Y und Z. Diese Räume sind nüchtern und so existieren genau ein $x \in X$ mit $\overline{A}^X = \overline{\{x\}}^X$, genau ein $y \in Y$ mit $\overline{A}^Y = \overline{\{y\}}^Y$ und genau ein $z \in Z$ mit $\overline{A}^Z = \overline{\{z\}}^Z$. Wenn wir nun noch zeigen, daß $x = y = z$ ist, dann ist A in $Y \cap Z$ der Abschluß dieses eindeutig bestimmten Punktes. O.B.d.A. zeigen wir $x = y$. Aus $A \subseteq Y \subseteq X$ folgt

$$\overline{\{x\}}^X = \overline{A}^X = \overline{(\overline{A}^Y)}^X = \overline{(\overline{\{y\}}^Y)}^X = \overline{\{y\}}^X.$$

Wegen der Eindeutigkeit von $x \in X$ mit der Eigenschaft $\overline{\{x\}}^X = \overline{A}^X$ erhalten wir $x = y$. ∎

6 Eine offene Frage

Für die Semantik funktionaler Programmiersprachen werden, wenn möglich, kartesisch abgeschlossene Kategorien verwendet. Haben die Grundtypen eine Semantik erhalten, so können hierin auf kanonische Weise Produkte, Abstraktion und Applikation interpretiert werden. Für die Interpretation nichtdeterministischer Programmiersprachen mittels probabilistischer Potenzbereiche sollte die entsprechende Kategorie zusätzlich unter dieser Konstruktion abgeschlossen sein. Besonders eignen sich Unterkategorien der Kategorie aller stetigen Bereiche **CONT** für ein Modell. Tatsächlich wissen wir auch aus Satz 2.5 bereits, daß **CONT** abgeschlossen unter Anwendung von $\mathcal{V}$ ist. Die Kategorie **CONT** selbst ist jedoch nicht kartesisch abgeschlossen. Geeignete kartesisch abgeschlossene Unterkategorien scheinen jedoch die Retrakte bifiniter Bereiche **RSFP** oder die Kategorie der FS-Bereiche **FS** zu sein.

Wir geben nun an, durch welche Eigenschaften Objekte dieser Kategorien gekennzeichnet sind. Für Objekte in **RSFP** benötigen wir noch eine

Definition 6.1 *Sei D ein Bereich. Eine Scott-stetige Funktion $f\colon D \to D$ heißt Deflation auf D, falls $f \leq id_D$ gilt und f endliches Bild hat.*

Satz 6.2 *Ein Bereich D ist Retrakt eines bifiniten Bereichs genau dann, wenn es eine gerichtete Familie $(f_i)_{i\in I}$ von Deflationen auf D gibt, so daß $\bigvee^{\uparrow}_{i\in I} f_i = id_D$.*

Beweis: Siehe Theorem 4.2 in [6]. ∎

Die Definition von FS-Bereichen orientiert sich an dieser Charakterisierung bifiniter Bereiche.

Definition 6.3 *Sei D ein Bereich. Eine Scott-stetige Funktion $f\colon D \to D$ heißt endlich separiert von id_D, wenn es eine endliche Menge $M \subseteq D$ derart gibt, daß für alle $x \in D$ ein $m \in M$ existiert mit $f(x) \leq m \leq x$. Ein Bereich D heißt FS-Bereich, wenn es eine gerichtete Familie $(f_i)_{i\in I}$ von Funktionen $f_i\colon D \to D$ gibt, die von id_D endlich separiert sind und für die $\bigvee^{\uparrow}_{i\in I} f_i = id_D$ gilt.*

Stellen wir uns nun die

Frage: Erhält der Funktor $\mathcal{V}$ die Eigenschaft eines stetigen Bereichs, **RSFP**-Objekt zu sein oder die Eigenschaft FS-Bereich zu sein?

Wir untersuchen dieses Problem zuerst für **RSFP** und betrachten an einem Beispiel, wie Satz 6.2 angewendet werden kann:

Beispiel 6.4 *Das Intervall $[0,1]$ mit der üblichen Ordnung ist Retrakt eines bifiniten Bereichs. Betrachten wir dazu die Funktionen $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$ mit $f_n(r) := \max\{s \mid s \in \frac{1}{2^n}\mathbb{N}, s < r\}$. Diese bilden sogar eine linear geordnete Familie von Deflationen* *mit* $\bigvee^{\uparrow}_{n\in\mathbb{N}} f_n = id_{[0,1]}$. *Entsprechend kann für jedes beschränkte abgeschlossene Intervall* $[0,a]$ *gezeigt werden, daß es Retrakt eines bifiniten Bereichs ist. Auch* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *ist Retrakt eines bifiniten Bereichs, denn für* $n \in \mathbb{N}$ *bilden die Funktionen* $f_n\colon \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *mit* $f_n(r) := \max\{s \mid s \in \frac{1}{2^n}\mathbb{N} \cap [0,n], s < r\}$ *eine Familie von Deflationen mit den gewünschten Eigenschaften.*

Für eine Bewertung $\mu \in \mathcal{V}(X)$ und eine offene Menge $U \in \mathcal{O}(X)$ wird der Wert $\mu(U)$ als Wahrscheinlichkeit interpretiert, mit der das Ergebnis einer Berechnung Werte in der offenen Menge U annimmt. Da Wahrscheinlichkeiten nur Werte im Intervall $[0,1]$ annehmen, beschränken wir unsere Überlegungen auf den Bereich $\mathcal{V}_1(X) := \{\mu \in \mathcal{V}_b(X) \mid \mu(X) \leq 1\}$. Wir nehmen noch eine weitere Einschränkung vor und untersuchen zunächst $\mathcal{V}_1(X)$ für endliche Bereiche X. Dies ist sinnvoll, da alle endlichen geordneten Mengen Objekte in **RSFP** sind und die übrigen Objekte dieser Kategorie in gewissem Sinne erzeugen. Fassen wir unser reduziertes Problem zusammen zu

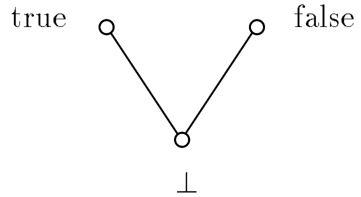
Frage 1: Ist für eine endliche geordnete Menge X der Bereich $\mathcal{V}_1(X)$ Retrakt eines bifiniten Bereichs?

Aus Folgerung 2.3 und Lemma 2.4 schließen wir, daß jede Bewertung $\mu \in \mathcal{V}_1(X)$ eine einfache Bewertung ist und als solche eine eindeutige Darstellung hat. Selbstabbildungen von $\mathcal{V}_1(X)$, die für jede Bewertung $\sum_i a_i \eta_{x_i}$ vorschreiben, wohin für jeden Punkt x_i seine Masse a_i abgebildet wird, sind damit zumindest wohldefiniert. Versuchen wir also, eine gerichtete Familie von Deflationen auf $\mathcal{V}_1(X)$ mit den gewünschten Eigenschaften über die Bilder der Punktmassen zu definieren:

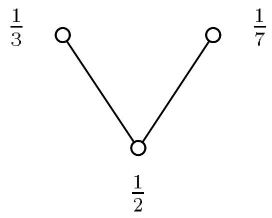
Idee 1: Seien $x_1, \ldots, x_n$ die Elemente der endlichen geordneten Menge X. Der besseren Lesbarkeit wegen schreiben wir η_i für die Punktbewertung η_{x_i}. Die Funktionen $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$ seien definiert durch $f(r) := \max\{s \mid s \in \frac{1}{2^n}\mathbb{N}, s < r\}$. Wir definieren $F_n\colon \mathcal{V}_1(X) \to \mathcal{V}_1(X)$ mittels

$$F_n\left(\sum_{i=1}^n a_i \eta_i\right) := \sum_{i=1}^n f_n(a_i)\eta_i.$$

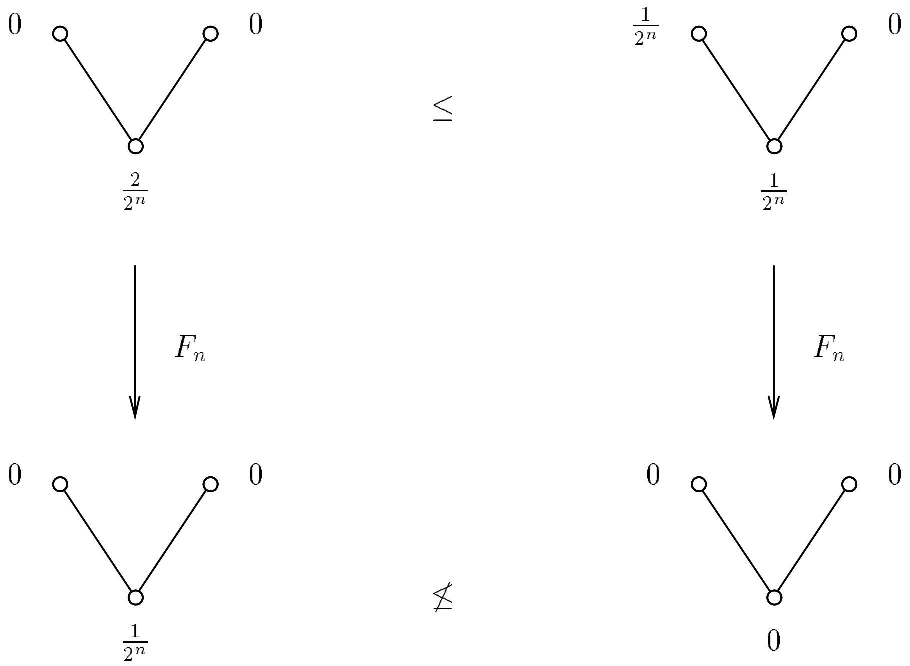
Sicher ist F_n eine Abbildung mit endlichem Bild, und nach Lemma 2.10 gilt $F_n \leq id_{\mathcal{V}_1(X)}$, da $F_n\left(\sum_{i=1}^n a_i\eta_i\right)$ aus $\sum_{i=1}^n a_i\eta_i$ durch höchstens n-maliges Anwenden eines Elementarschritts der Form (E 1) hervorgeht. Auch um die Monotonie von F_n zu überprüfen, sind die Elementarschritte sehr nützlich. Es reicht nämlich die Monotonie für Bewertungen nachzurechnen, die sich nur durch Anwendung eines Elementarschritts unterscheiden. Hier machen Schritte der Form (E 2) jedoch Probleme. Betrachten wir dazu den flachen booleschen Bereich

$\mathbb{B}_\perp =$ 

Bewertungen auf endlichen Bereichen wollen wir ab nun angeben, indem wir die Masse jedes Punktes neben den Punkt im Hasse-Diagramm des Bereichs schreiben. Es steht also zum Beispiel



für die Bewertung $\frac{1}{2}\eta_\perp + \frac{1}{3}\eta_{\text{true}} + \frac{1}{7}\eta_{\text{false}}$. Nun kommen wir zu dem Beispiel, das zeigt, daß die Abbildungen F_n nicht monoton sind:



Problematisch an den Abbildungen F_n ist offenbar, daß die Gesamtmasse einer Bewertung nicht kanonisch verkleinert wird. Für $\mathbb{B}_\perp$ können wir dies anschaulich gesprochen dadurch beheben, daß die Masse, die an den maximalen Elementen weggenommen wird, erst durch einen Schritt der Form (E 2) nach unten fließt und dann erst auf diese neue Masse die Abbildung f_n angewendet wird. Mit dieser Idee können wir für Bäume induktiv über die Höhe der Elemente Deflationen F'_n definieren. Im folgenden präzisieren wir diese Idee.

Definition 6.5 *Sei X ein endlicher Baum, d. h. eine endliche geordnete Menge mit kleinstem Element $\perp$, in der jedes Element $x \neq \perp$ einen eindeutig bestimmten unteren Nachbarn hat. Die Höhe $h(x)$ eines Elements x sei die Länge der Kette von x zu $\perp$. Damit ist $h(\perp) = 0,\ h(x) = 1$, falls x ein oberer Nachbar von $\perp$ ist, usw.*

Damit formulieren wir

Idee 2: Sei X ein endlicher Baum und $m := \max\{h(x) \mid x \in X\}$ seine Höhe. Zunächst definieren wir für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Menge von Hilfsfunktionen $G_n^k \colon \mathcal{V}_1(X) \to \mathcal{V}_1(X)$, indem wir angeben, worauf jede Punktmasse abgebildet wird:

$$G_n^k(a_x) := \begin{cases} a_x & \text{falls } h(x) > k \\ f_n(a_x) & \text{falls } h(x) = k \\ a_x + \sum_{y \in oN(x)} (a_y - f_n(a_y)) & \text{falls } h(x) = k-1 \\ a_x & \text{falls } h(x) < k-1 \end{cases}$$

Dabei bezeichne $oN(x)$ die Menge aller oberen Nachbarn von x. Damit definieren wir $F_n' \colon \mathcal{V}_1(X) \to \mathcal{V}_1(X)$ durch

$$F_n' := G_n^0 \circ G_n^1 \circ \ldots \circ G_n^m.$$

Diese Abbildungen leisten tatsächlich das Gewünschte. Dazu zeigen wir

Lemma 6.6 *Ist X ein endlicher Baum, dann ist $\mathcal{V}_1(X)$ Retrakt eines bifiniten Bereichs.*

Beweis: Wir zeigen, daß die in Idee 2 definierten Abbildungen F_n' Deflationen sind, für die $\bigvee^{\uparrow}_{n\in\mathbb{N}} F_n' = id_{\mathcal{V}_1(X)}$ gilt. Dazu bemerken wir zunächst, daß für Hauptfilter $\uparrow x$, $x \in X$ gilt $F_n(\mu)(\uparrow x) = f_n(\mu(\uparrow x))$. Für endliche Bäume bilden die Hauptfilter eine Basis für die Scott-Topologie mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß jede offene Menge als disjunkte Vereinigung von geeigneten Hauptfiltern geschrieben werden kann. Wegen der Striktheit und Modularität von Bewertungen gilt für eine offene Menge $U = \bigcup_i \uparrow x_i$, wobei die Hauptfilter $\uparrow x_i$ disjunkt sind

$$\mu(U) = \mu\left(\bigcup \uparrow x_i\right) = \sum_i \mu\left(\uparrow x_i\right).$$

An den Hauptfilter-Komponenten ist F_n' Scott-stetig, da f_n es ist. Wegen der Scott-Stetigkeit der Addition in $[0,1]$ und obiger Gleichung ist dann F_n' Scott-stetig. Ebenso gilt wegen $f_n \leq id_{[0,1]}$ für Hauptfilter $F_n'(\mu)(\uparrow x) = f_n(\mu(\uparrow x)) \leq \mu(\uparrow x)$ und damit $F_n'(\mu)(U) \leq \mu(U)$ für alle offenen Mengen $U \in \mathcal{O}(X)$, was genau $F_n' \leq id_{\mathcal{V}_1(X)}$ bedeutet. Da auf den endlich vielen Punkten $x \in X$ im Bild von F_n' nur noch endlich viele Massen, nämlich Werte im Bild von f_n, vorkommen können, hat F_n' endliches Bild. Die Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist linear geordnet und damit auch $(F_n')_{n\in\mathbb{N}}$. Für jede Bewertung μ gilt für den Wert eines Hauptfilters

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} F_n'(\mu)(\uparrow x) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} f_n(\mu(\uparrow x)) = \mu(\uparrow x)$$

und damit auch $\bigvee^{\uparrow}_{n\in\mathbb{N}} F_n' = id_{\mathcal{V}_1(X)}$. Also ist $\mathcal{V}_1(X)$ Retrakt eines bifiniten Bereichs. ∎

Diese Beweisidee können wir nicht auf Bereiche verallgemeinern, in denen ein Element mehrere untere Nachbarn hat. Wie sollte man denn die Masse, die oben weggenommen wird, auf diese verteilen? Eine andere erfolgversprechende Idee zur Konstruktion geeigneter Deflationen ist mir zur Zeit leider nicht bekannt. Bearbeiten wir also das Problem für FS-Bereiche und stellen uns dazu

Frage 2: Ist für eine endliche geordnete Menge X der Bereich $\mathcal{V}_1(X)$ ein FS-Bereich?

Wir betrachten zuerst wieder an einem Beispiel, wie wir einen Bereich als FS-Bereich erkennen können.

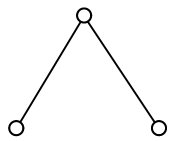
Beispiel 6.7 *Das Einheitsintervall mit der üblichen Ordnung ist Retrakt eines bifiniten Bereichs, also erst recht ein FS-Bereich. Die Funktionen, mit denen wir das einsehen, sind jedoch einfacher anzugeben als Deflationen. Wir definieren dazu für* $x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+$

$$x \dot{-} y := \begin{cases} x - y & \textit{falls } x > y \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Für $\varepsilon > 0$ *wird die Funktion* $f_\varepsilon \colon [0,1] \to [0,1]$ *definiert durch* $f_\varepsilon(r) := r \dot{-} \varepsilon$. *Sie wird durch die Menge* $M_\varepsilon := \varepsilon\mathbb{N} \cap [0,1]$ *endlich separiert von* $id_{[0,1]}$, *und es gilt* $\bigvee^{\uparrow}_{\varepsilon > 0} f_\varepsilon = id_{[0,1]}$.

Zunächst versuchen wir Frage 2 für den einfachsten Fall eines Bereichs zu lösen, in dem ein Element mehrere untere Nachbarn hat.

Idee 3a: Es seien x_1, x_2 die minimalen Elemente und x_3 das größte Element von

$X =$ 

Wir definieren $F_\varepsilon \colon \mathcal{V}_1(X) \to \mathcal{V}_1(X)$ durch

$$\begin{aligned} F_\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{3} a_i \eta_i\right) &:= f_{\varepsilon \dot{-} a_3}(a_1)\eta_1 + f_{\varepsilon \dot{-} a_3}(a_2)\eta_2 + f_\varepsilon(a_3)\eta_3 \\ &= \begin{cases} a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + f_\varepsilon(a_3)\eta_3 & \text{falls } a_3 \geq \varepsilon \\ f_{\varepsilon \dot{-} a_3}(a_1)\eta_1 + f_{\varepsilon \dot{-} a_3}(a_2)\eta_2 & \text{falls } a_3 < \varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

Dies ist sogar eine linear geordnete Familie Scott-stetiger Funktionen, die die Identität auf $\mathcal{V}_1(X)$ approximiert. Jede Funktion F_ε wird durch die Menge $M_\varepsilon := \{\sum_{i+1}^{3} m_i\eta_i \mid m_i \in \frac{\varepsilon}{3}\mathbb{N} \cap [0,1]\}$ von der Identität auf $\mathcal{V}_1(X)$ endlich separiert. Diese Idee läßt sich ohne größeren Aufwand auf umgekehrte Bäume verallgemeinern. Wir definieren dazu die Tiefe eines Elements in einem umgekehrten Baum analog zur Höhe eines Elements in einem Baum.

Definition 6.8 *Sei* X *ein endlicher umgekehrter Baum, d. h. eine endliche geordnete Menge mit größtem Element* $\top$, *in der jedes Element* $x \neq \top$ *einen eindeutig bestimmten oberen Nachbarn hat. Die Tiefe* $t(x)$ *eines Elements* x *sei die Länge der Kette von* x *zu* $\top$.

Damit verallgemeinern wir Idee 3a zu

Idee 3b: Sei X ein endlicher umgekehrter Baum. Für jede stetige Bewertung $\mu = \sum_{x \in X} a_x\eta_x \in \mathcal{V}_1(X)$ und jedes Element $x \in X$ definieren wir induktiv über die Tiefe $t(x)$ die Masse $\varepsilon(\mu, x)$, die von der Punktmasse a_x noch abgezogen wird:

$$\varepsilon(\mu, x) := \varepsilon, \text{ falls } t(x) = 0.$$

Ist für $t(x) = k$ die Masse $\varepsilon(\mu, x)$ bereits definiert, so wird sie für $t(x) = k+1$ gegeben durch

$$\varepsilon(\mu, x) = \varepsilon(\mu, y) \dot{-} a_y,$$

wobei y den oberen Nachbarn von x in X bezeichne. Hat der endliche umgekehrte Baum X noch zusätzlich ein kleinstes Element $\perp$, so soll

$$\varepsilon(\mu, \perp) := \sum_{y \in oN(\perp)} (\varepsilon(\mu, y) \dot{-} a_y)$$

sein. Wir definieren $F_\varepsilon \colon \mathcal{V}_1(X) \to \mathcal{V}_1(X)$ mittels

$$F_\varepsilon(\mu) = \sum_{x \in X} f_{\varepsilon(\mu,x)}(a_x)\eta_x.$$

Mit diesen Abbildungen läßt sich folgendes zeigen:

Lemma 6.9 *Ist X ein endlicher umgekehrter Baum mit oder ohne adjungiertem kleinsten Element, dann ist $\mathcal{V}_1(X)$ ein FS-Bereich.*

Beweis: Wir zeigen, daß die in Idee 3b definierten Abbildungen F_ε Scott-stetig, endlich separiert von der Identität sind und diese approximieren. Aufwendig ist dabei vor allem der Nachweis der Monotonie. Es reicht wieder diese für Bewertungen nachzuweisen, die sich nur um einen Elementarschritt unterscheiden. Schritte der Form (E1) sind dabei unproblematisch. Schritte der Form (E2) finden im wesentlichen in einer Struktur statt, die dem Bereich aus Idee 3a entspricht, wenn die Masse eines möglichen kleinsten Elements unverändert bleibt. Hierfür können Monotonie und Scott-Stetigkeit nachgerechnet und dann auf den allgemeinen Fall übertragen werden. Auch ein zusätzliches kleinstes Element macht dabei keine Probleme. Die Menge

$$M_\varepsilon := \Big\{ \sum_{x \in X} m_x \eta_x \mid m_x \in \frac{\varepsilon}{|X|}\mathbb{N} \cap [0.1] \Big\}$$

separiert F_ε von der Identität auf $\mathcal{V}_1(X)$. Durch die Abbildung F_ε wird der Wert jeder offenen Menge um höchstens $\varepsilon|X|$ verändert. Da $|X|$ endlich und die Familie $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ linear geordnet ist, gilt damit $\bigvee^{\uparrow}_{\varepsilon>0} F_\varepsilon = id_{\mathcal{V}_1(X)}$. ∎

Versuchen wir nun diese Idee auf alle endlichen geordneten Mengen X zu verallgemeinern. Wir können einem Element $x \in X$ nun keine eindeutig bestimmte Höhe oder Tiefe mehr zuordnen. Trotzdem können wir eine Familie $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ von Funktionen $F_\varepsilon \colon \mathcal{V}_1(X) \to \mathcal{V}_1(X)$ so definieren, daß die Punktmasse eines Elements erst verändert wird, wenn alle seine oberen Nachbarn bereits eine neue Masse erhalten haben.

Idee 3c: Sei X eine endliche geordnete Menge. Für jede stetige Bewertung $\mu = \sum_{x \in X} a_x \eta_x \in \mathcal{V}_1(X)$ und jedes Element $x \in X$ definieren wir induktiv die Masse $\varepsilon(\mu, x)$, die von der Punktmasse a_x abgezogen werden soll:

$$\varepsilon(\mu, x) := \varepsilon, \text{ falls } x \text{ maximal in } X.$$

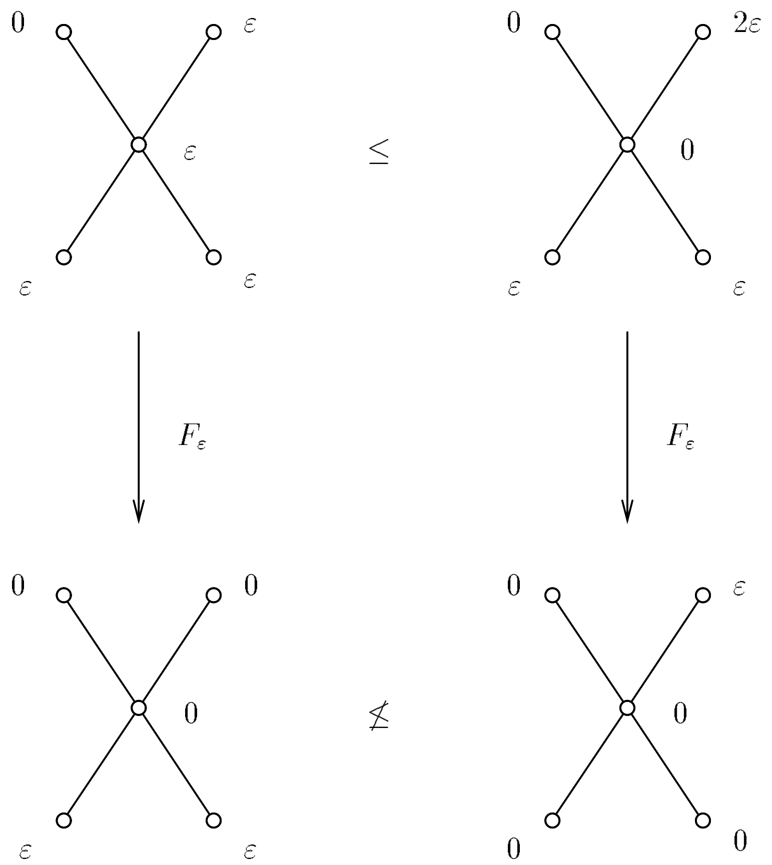
Sei nun für alle $y \in oN(x)$ die Masse $\varepsilon(\mu, y)$ bereits definiert, dann wird sie für x gegeben durch

$$\varepsilon(\mu, x) := \sum_{y \in oN(x)} (\varepsilon(\mu, y) \dot{-} a_y) \, .$$

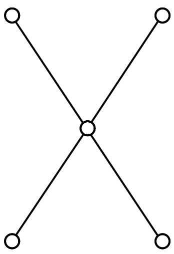
Wir definieren wieder $F_\varepsilon : \mathcal{V}_1(X) \to \mathcal{V}_1(X)$ durch

$$F_\varepsilon(\mu) = \sum_{x \in X} f_{\varepsilon(\mu,x)}(a_x)\eta_x.$$

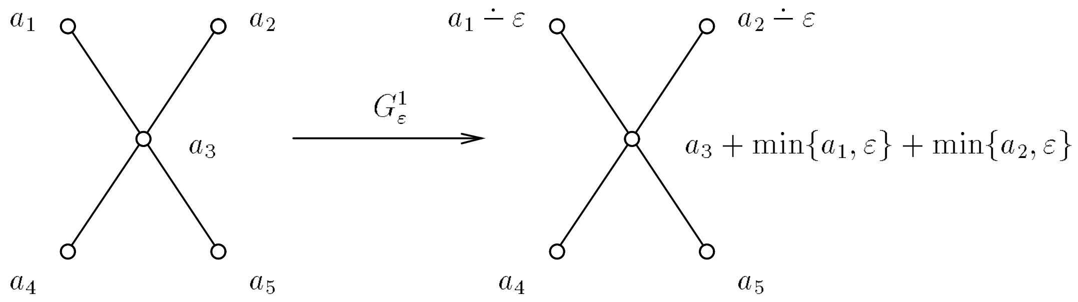
Diese Abbildungen haben für endliche geordnete Mengen, in denen die maximale Kettenlänge höchstens zwei ist, die gewünschten Eigenschaften. Andernfalls müssen diese Abbildungen nicht monoton sein. Elementarschritte der Form (E 2) sind wieder problematisch, wie folgendes Beispiel zeigt:



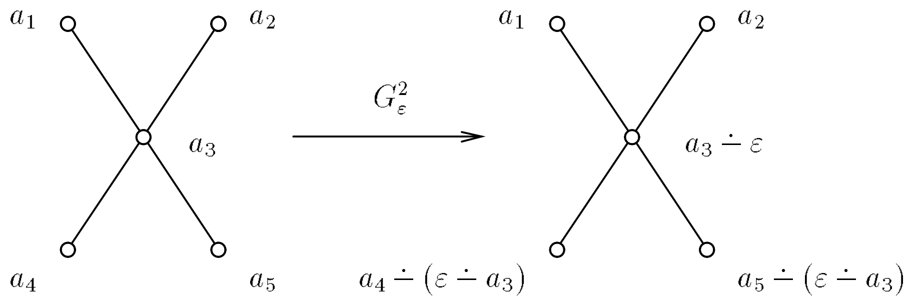
Dennoch ist für

$X =$ 

der Bereich $\mathcal{V}_1(X)$ ein FS-Bereich. Dies sehen wir mit einer linear geordneten Familie $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ von Scott-stetigen Funktionen $F_\varepsilon : \mathcal{V}_1(X) \to \mathcal{V}_1(X)$ ein, die von $id_{\mathcal{V}_1(X)}$ endlich separiert sind und für die $\bigvee^{\uparrow}_{\varepsilon>0} F_\varepsilon = id_{\mathcal{V}_1(X)}$ gilt. Zur Definition dieser Funktionen verwenden wir Idee 2 und Idee 3a. In den Abbildungen $G^1_\varepsilon\colon \mathcal{V}_1(X) \to \mathcal{V}_1(X)$ definiert durch



erkennen wir Idee 2 wieder. Idee 3a findet in den Abbildungen $G^2_\varepsilon\colon \mathcal{V}_1(X) \to \mathcal{V}_1(X)$ ihre Anwendung. Sie werden gegeben durch



Wir definieren damit $F_\varepsilon := G^2_\varepsilon \circ G^1_\varepsilon$. Diese Idee nimmt allerdings zu sehr auf die spezielle Struktur von X Bezug, um sie auf alle endlichen geordneten Mengen verallgemeinern zu können. Mit dem Ansatz für jede Punktmasse vorzuschreiben, wie sie verändert werden soll, erhalten wir offenbar leicht Funktionen, die endlich separiert von der Identität sind und diese approximieren. Jedoch ist es nur für Spezialfälle gelungen Funktionen anzugeben, die zusätzlich monoton sind. Die Idee für einen anderen Ansatz kommt von folgendem

Beispiel 6.10 *Wir geben für das Einheitsintervall mit der üblichen Ordnung noch eine andere Familie von Funktionen als in Beispiel 6.4 an, die zeigt, daß es ein FS-Bereich ist.*

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$d_\varepsilon(r) := \begin{cases} 0 & \textit{falls } r \leq \varepsilon \\ (1-\varepsilon)r & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Diese Scott-stetige Funktion wird durch die Menge $M_\varepsilon := \varepsilon^2\mathbb{N} \cap [0,1]$ *endlich separiert von der Identität auf* $[0,1]$, *und es gilt* $\bigvee^{\uparrow}_{\varepsilon>0} d_\varepsilon = id_{[0,1]}$.

Es ist bei diesen Funktionen unbedingt nötig, eine konvexe Nullumgebung auf 0 abzubilden, da Abbildungen der Form $r \mapsto (1-\varepsilon)r$ nicht von $id_{[0,1]}$ endlich separiert sind. Darauf aufbauend formulieren wir

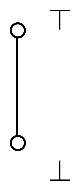
Idee 4: Sei X eine endliche geordnete Menge. Zu jedem $\varepsilon > 0$ geben wir eine Teilmenge $A_\varepsilon \subseteq \mathcal{V}_1(X)$ an mit $0 \in A_\varepsilon$, und für $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ ist auch $A_{\varepsilon_1} \subseteq A_{\varepsilon_2}$. Außerdem soll $\bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon = \{0\}$ gelten. Dann definieren wir $D_\varepsilon \colon \mathcal{V}_1(X) \to \mathcal{V}_1(X)$ durch

$$D_\varepsilon(\mu) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \mu \in A_\varepsilon \\ (1-\varepsilon)\mu & \text{sonst.} \end{cases}$$

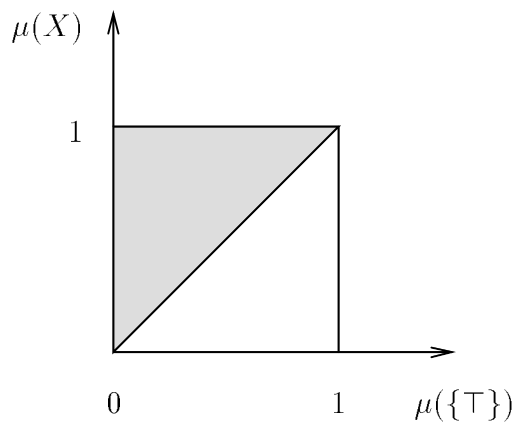
Leider kann es uns nicht gelingen, eine Familie $(A_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ von Teilmengen $A_\varepsilon \subseteq \mathcal{V}_1(X)$ so anzugeben, daß die dadurch definierten Funktionen D_ε monoton, endlich separiert von $id_{\mathcal{V}_1(X)}$ sind und die Familie $(D_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ die Identität auf $\mathcal{V}_1(X)$ approximiert.

Betrachten wir als Beispiel

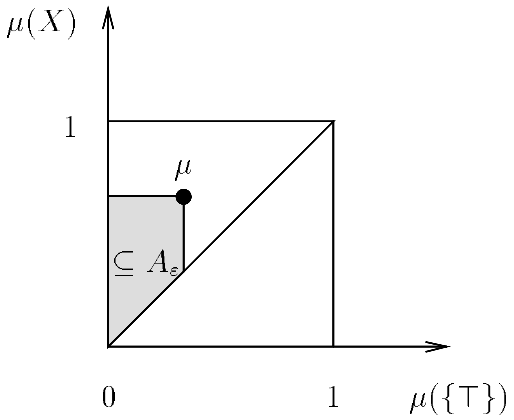
$X =$



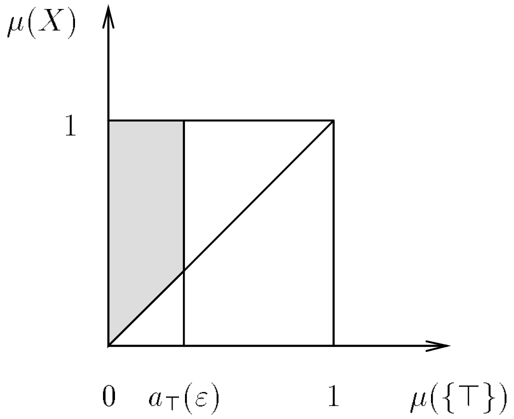
Dann ist $\mathcal{O}(X) = \{\emptyset, \{\top\}, X\}$ und $\mathcal{V}_1(X)$ als Teilmenge von $[0,1]^{\mathcal{O}(X)} = [0,1]^3$ auffaßbar. Da jede stetige Bewertung strikt ist, können wir uns sogar auf $[0,1]^2$ beschränken. Folgende Punkte werden dabei mit einer stetigen Bewertung auf X identifiziert:



Die Ordnung auf $\mathcal{V}(X)$ ist punktweise. Damit D_ε monoton ist, ist es notwendig, daß mit $\mu \in A_\varepsilon$ auch für jede kleinere Bewertung $\nu \leq \mu$ gilt $\nu \in A_\varepsilon$. Verdeutlichen wir uns dies an einem Bild:



Damit D_ε zusätzlich endlich separiert von der Identität auf $\mathcal{V}_1(X)$ ist, darf die Masse auf $\top$ nicht beliebig klein sein, wenn die Bewertung mit $(1-\varepsilon)$ multipliziert wird. Es gibt also ein $a_\top(\varepsilon) > 0$, so daß $D_\varepsilon(a_\top(\varepsilon)\eta_\top + (1-a_\top(\varepsilon))\eta_\perp) = 0$, oder anders ausgedrückt $a_\top(\varepsilon)\eta_\top + (1-a_\top(\varepsilon))\eta_\perp \in A_\varepsilon$. Wegen der Monotonie wird dann mindestens folgende Menge auf Null abgebildet:



Dies zeigt, daß $\eta_\top \in A_\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ gelten muß, wenn D_ε monoton und endlich separiert von $id_{\mathcal{V}_1(X)}$ sein soll. Damit können diese Funktionen aber nicht die Identität approximieren, denn es gilt:

$$\bigvee_{\varepsilon>0}^{\uparrow} D_\varepsilon(\eta_\top) = \bigvee^{\uparrow} 0 = 0 \neq \eta_\top.$$

Es scheint damit angebracht, zu der ursprünglichen Idee zurückzukehren und eine Vorschrift zu suchen, wie die Punktmassen geändert werden können. Dies geht offensichtlich nur mit einer komplizierten Fallunterscheidung der relativen Lage eines Elements im Bereich. Wie diese aussehen könnte, muß noch untersucht werden.

Literatur

[1] S. Abramsky, A. Jung, *Domain Theory.* In S. Abramsky, D. M. Gabbay und T. S. E. Maibaum, Herausgeber, *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 3. Clarendon Press, 1995.

[2] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove, D. S. Scott, *A Compendium of Continuous Lattices.* Springer Verlag, 1980.

[3] R. Heckmann, *Valuations.* In Preprint zum Workshop Domains, Technische Hochschule Darmstadt, 1994.

[4] C. Jones, *Probabilistic Non-Determinism.* Thesis, University of Edinburgh, 1990.

[5] C. Jones, G. Plotkin, *A Probabilistic Powerdomain of Evaluations.* In *Proceedings of the IEEE Fourth Annual Symposium on Logic in Computer Science*,pp. 186-195, Computer Society Press, 1989.

[6] A. Jung, *Cartesian Closed Categories of Domains.* Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, 1988.

[7] J. Kindler, *A Mazur-Orlicz Type Theorem for Submodular Set Functions.* In *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, volume 120, pp. 533-546, 1986.

[8] O. Kirch, *Bereiche und Bewertungen.* Diplomarbeit, Technische Hochschule Darmstadt, 1993.

[9] J. D. Lawson, *Valuations on Continuous Lattices and Related Topics.* In Mathematische Arbeitspapiere 27, Bremen 1982.

[10] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician.* Springer Verlag, 1980.

[11] W. Rudin, *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, 1986.

[12] M. B. Smyth, *Powerdomains and Predicate Transformers: A Topological View.* In J. Diaz, Herausgeber, *Proceedings ICALP 1983, LNCS 154.* Springer Verlag, 1983.

Erklärung:

Hiermit erkläre ich, daß ich diese Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.
Ich bin damit einverstanden, daß der Betreuer meiner Diplomarbeit diese nach Abschluß der Prüfung zu wissenschaftlichen Zwecken weitergeben kann.

Darmstadt, im Juni 1995