Logik und Spiele
aus modelltheoretischer Sicht

TUD 2004

Inhalt

Logik $\longrightarrow$ Spiele

- Semantik-Spiele, model checking
- Äquivalenz–Spiele

Spiele $\longrightarrow$ Logik

- Beispiel: a pub game
- model checking automatentheoretisch

Ausblicke

- maßgeschneiderte Logiken
- infinitäre Spiele

Semantik-Spiele

Beispiel: Logik erster Stufe, FO, über gerichteten Graphen

$G = (V, E, P)$ $\qquad$ $\varphi = \forall x\Big(Px \vee \exists y(Exy \wedge Py)\Big) \vee \exists x \forall y Exy$

gefärbter Graph $\qquad$ Formel

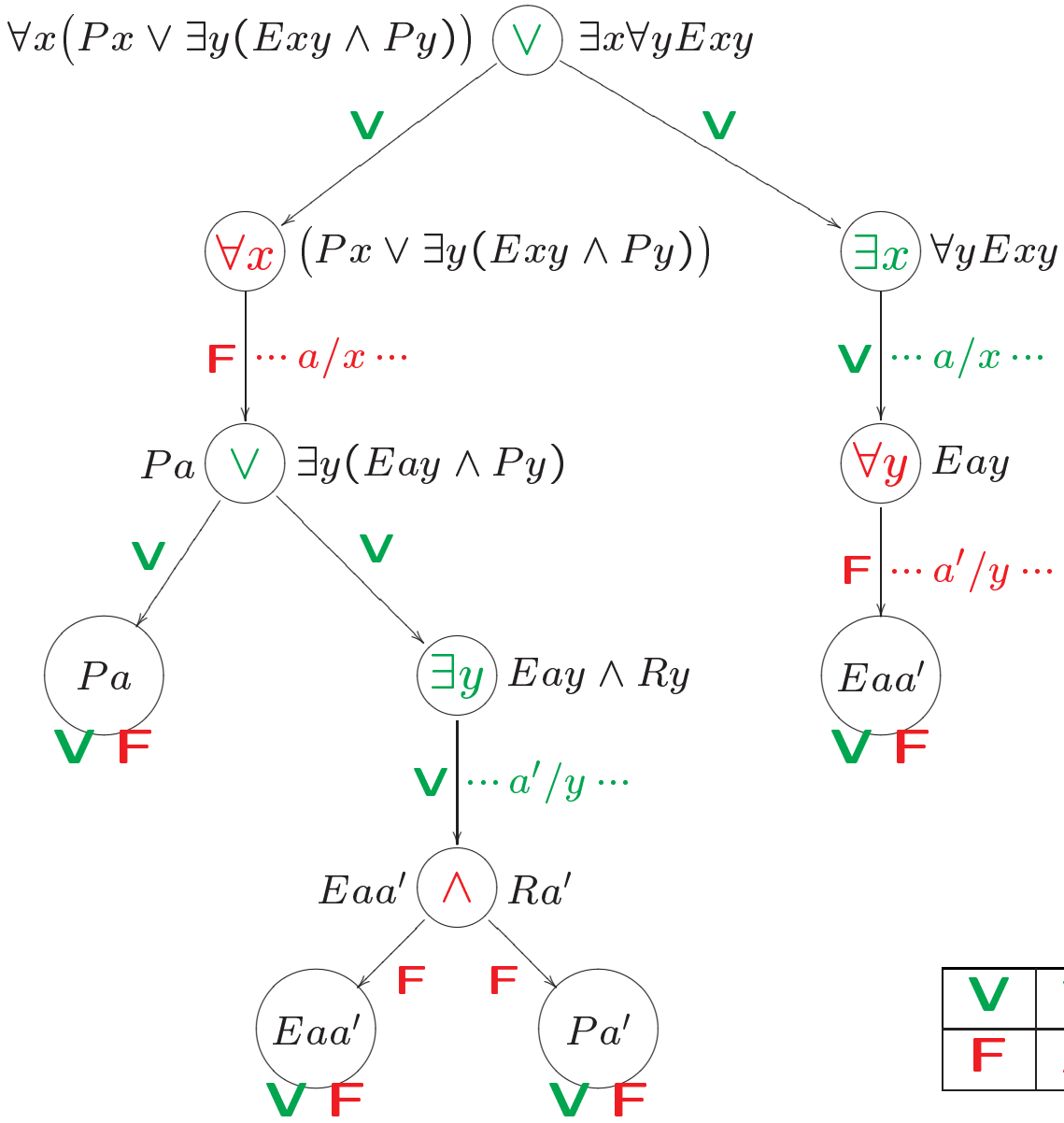
model checking: entscheide, ob $G \models \varphi$

$\mathrm{Spiel}(G, \varphi)$

Proponent	vs	Opponent	auf	Subformeln mit
Verifizierer		**Falsifizierer**		Belegungen freier Variablen über G

$G \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **Gewinnstrategie für Verifizierer in** $\mathrm{Spiel}(G, \varphi)$

$\mathbf{Spiel}(\boldsymbol{G}, \forall \boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{Px} \vee \exists \boldsymbol{y}(\boldsymbol{Exy} \wedge \boldsymbol{Py})\big) \vee \exists \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} \boldsymbol{Exy})$



V	$\vee, \exists$	$+$
F	$\wedge, \forall$	$-$

Verifizierer
Falsifizierer

Model Checking Komplexität

Strategiesuche in $\mathbf{Spiel}(G, \varphi)$ realisiert optimale Schranken

MC in
- **Pspace** für **FO**
- **Ptime** für $\mathbf{FO}^k$ (k Variablen)
- $\mathcal{O}(|\varphi| \cdot |G|)$ für $\mathbf{FO}^2$ **und Modallogik**

entscheidend:
- Größe der Spielkonfigurationen [Platz]
- Tiefe des Spielbaumes [Zeit]

Äquivalenz-Spiele — Ehrenfeucht-Fraïssé

- Vergleich von zwei Strukturen:
  logische Komplexität von Unterscheidungsmerkmalen
- Analyse von Ausdrucksstärke/Definierbarkeit

$\mathrm{Spiel}(G, G')$

Herausforderer $G \not\approx G'$ vs **Verteidiger** $G \approx G'$ auf markierten Konfigurationen über G und G'

$G \approx G' \Leftrightarrow$ **Gewinnstrategie für Verteidiger in** $\mathrm{Spiel}(G, G')$

Grundidee Ehrenfeucht-Fraïssé

$\mathrm{Spiel}(G, G')$: **H**erausforderer vs **V**erteidiger

eine Runde:

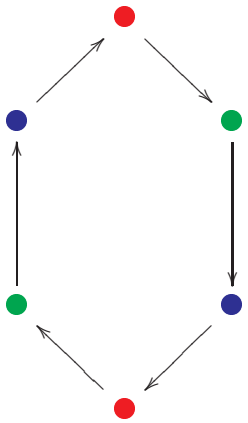
- **H** markiert beliebigen (weiteren) Knoten in G (oder G')
- **V** muß Konfiguration in G' (bzw. G) isomorph ergänzen

$\mathrm{Spiel}(G, G')$ mit q Runden:

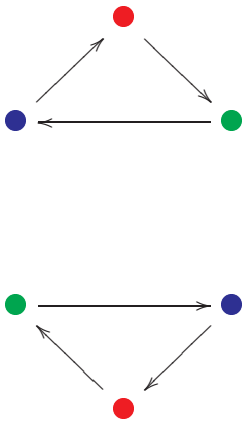
Gewinnstrategie für V $\Leftrightarrow$ $G \equiv_q G'$

Äquivalenz in Quantorentiefe q

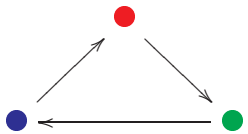
Ehrenfeucht-Fraïssé: Beispiel



G



G'

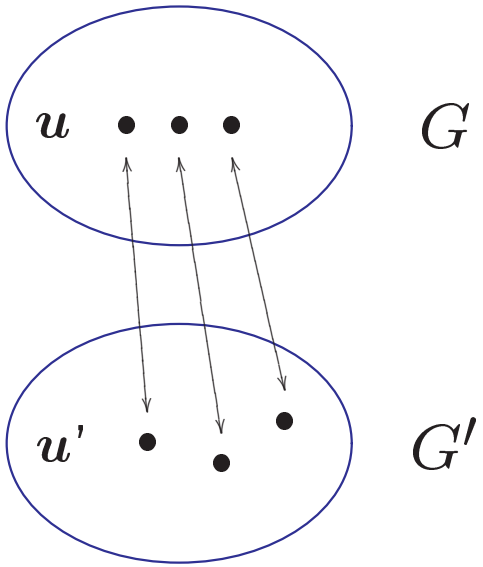


G''

Ehrenfeucht-Fraïssé Satz

äquivalent in Spiel-Konfiguration G, u ; G', u':

- **V**erteidiger hat
  Gewinnstrategie für q Runden
- u und u' erfüllen dieselben
  FO-Formeln von Quantorentiefe q



$\longrightarrow$ charakteristische FO-Formeln der Quantorentiefe q:
Existenz einer Strategie für q Runden gegenüber G, u

$\longrightarrow$ Normalform für FO_q

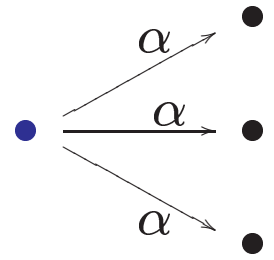
Variation: Modallogik M

eingeschränkte Quantifizierung der Form

$\langle\alpha\rangle\psi$: $\quad \exists y\Big((x \xrightarrow{\alpha} y) \wedge \psi(y)\Big)$

$[\alpha]\psi$: $\quad \forall y\Big((x \xrightarrow{\alpha} y) \to \psi(y)\Big)$

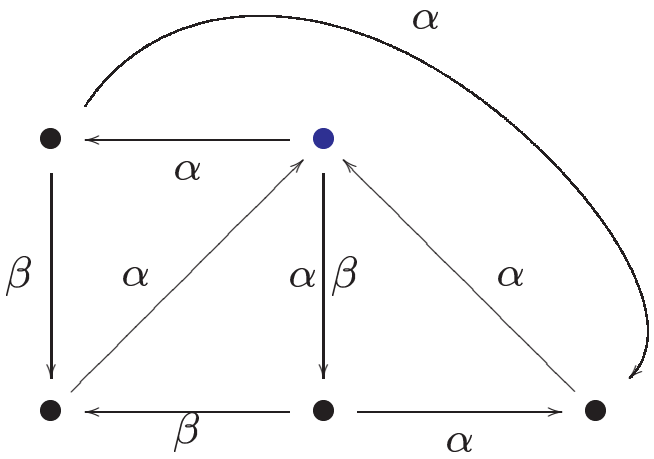
$\langle\alpha\rangle\psi$?
$[\alpha]\psi$?



Beispiel

Spiele = Transitionssysteme

Graphen mit **Knotenfarben** und **Kantenfarben** $(\alpha, \beta, \ldots)$
Positionstypen Zugtypen



- $\models \langle\alpha\rangle[\beta]\langle\alpha\rangle[\beta]\langle\alpha\rangle[\beta]\bot$

  Strategie für Spieler α in 3 Runden
  "wer nicht kann, verliert; α beginnt"

Ehrenfeucht-Fraïssé modal: Bisimulation

Äquivalenz(-spiel) zwischen Spielen

Bisimulations-Äquivalenz

$G, v \sim G', v'$ gdw.

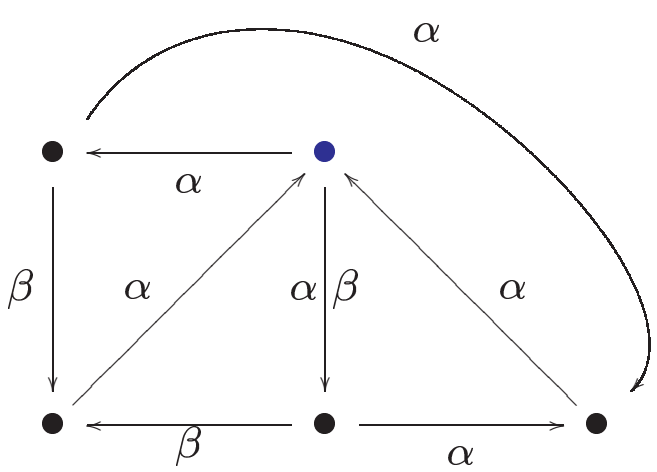
- v/v' haben gleiche Knotenfarbe
- für alle $v \xrightarrow{\alpha} w$ in G existiert $v' \xrightarrow{\alpha} w'$ in G': $G, w \sim G', w'$
- für alle $v' \xrightarrow{\alpha} w'$ in G' existiert $v \xrightarrow{\alpha} w$ in G: $G, w \sim G', w'$

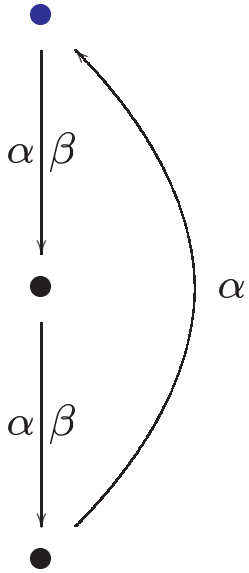
vollständige Korrespondenz möglicher Spielverläufe

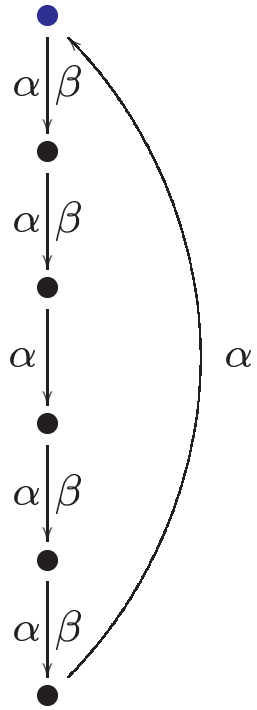
Bisimulations-Spiel/Äquivalenz für Transitionssysteme adäquat für **Analyse von Gewinnstrategien** in Spielen

Spiel: eine Marke pro Struktur / rücken längs Kanten

Bisimulations-Äquivalenz: Beispiel





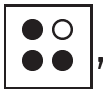


jede Gewinnbedingung / jede modale Formel wird erhalten, zB:

- $\models \langle\alpha\rangle[\beta]\langle\alpha\rangle[\beta]\langle\alpha\rangle[\beta]\bot$

Beispiel: Spiele/Prozesse über Logik analysieren

a pub game (blind man's beer mats)

4 Bierdeckel auf Tablett / je zwei Zustände: , ,  , ...

B soll blind oder erreichen;
gibt Anweisungen zum Wenden, etwa ($\dot{}$.)

A darf Tablett drehen, $0°, 90°, 180°, 270°$

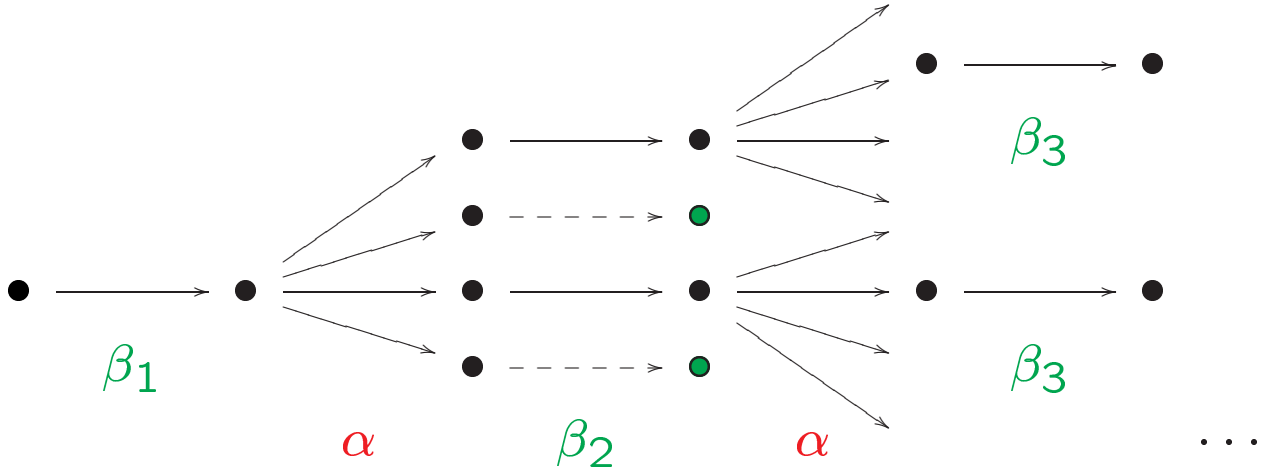
hat B eine Gewinnstrategie?

gesucht: Strategie gegen mangelnde Information

Modellierung

garantierter Gewinn in $\leqslant \ell$ Runden?

Spielbaum (Wald) für ℓ Runden: naiv ca. $16 \times (4 \times 16)^{\ell}$ Knoten



$\varphi :=$ $[\beta_1]$ $[\alpha]$ $[\beta_2]$ $[\alpha]$ $[\beta_3]$ $\cdots$ $[\beta_\ell]$ $\bot$

Zugsequenz $\beta_1, \ldots, \beta_\ell$ garantiert Gewinn für **B**

Spielbaum $\longrightarrow$ Transitionssystem:
Graph mit 16 (14) Knoten und $14 + 1$ Transitionstypen

Symmetrien schaffen und eliminieren

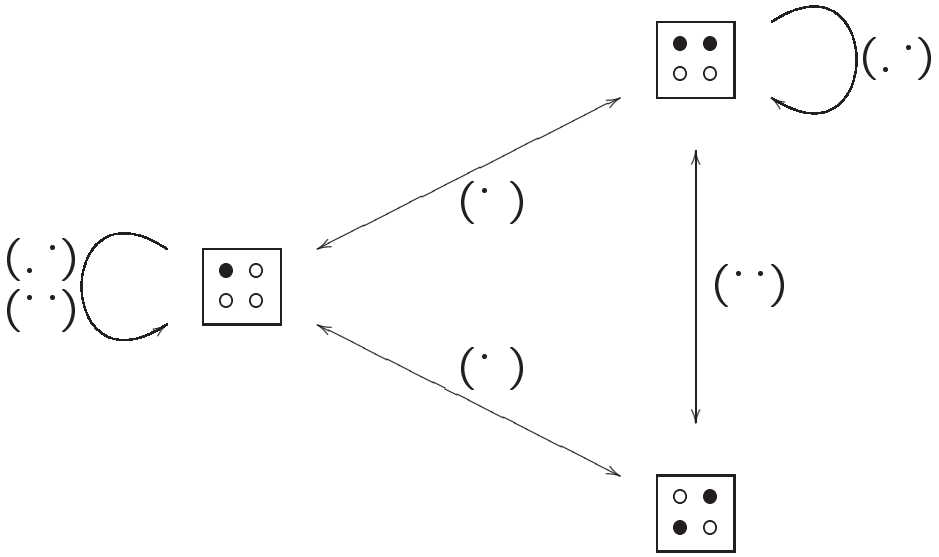
ersetze α durch $\alpha \cup \big((::) \circ \alpha\big)$ •/∘-Symmetrie

ersetze $\begin{cases} \beta_i \\ \varphi \end{cases}$ durch $\begin{cases} \widehat{\beta}_i := \alpha \circ \beta_i \circ \alpha \\ \widehat{\varphi} := [\widehat{\beta}_1][\widehat{\beta}_2] \cdots [\widehat{\beta}_\ell] \bot \end{cases}$ **Solitär-Spiel !**

Transitions-Symmetrie:

$(\cdot\ )\frown = (\ \cdot)\frown = (\ .)\frown = (.\ )\frown = (.:)\frown = (:.)\frown = (:\cdot)\frown = (\cdot:)\frown$
$(\cdot.)\frown = (.\cdot)\frown$
$(\cdot\cdot)\frown = (\ :)\frown = (..)\frown = (:\ )\frown$

Bisimulations-Quotient:



automatentheoretische Methode

endliche Automaten: Transitionssysteme mit operationaler Interpretation

effiziente Erfüllbarkeits- und model checking Algorithmen

im Beispiel

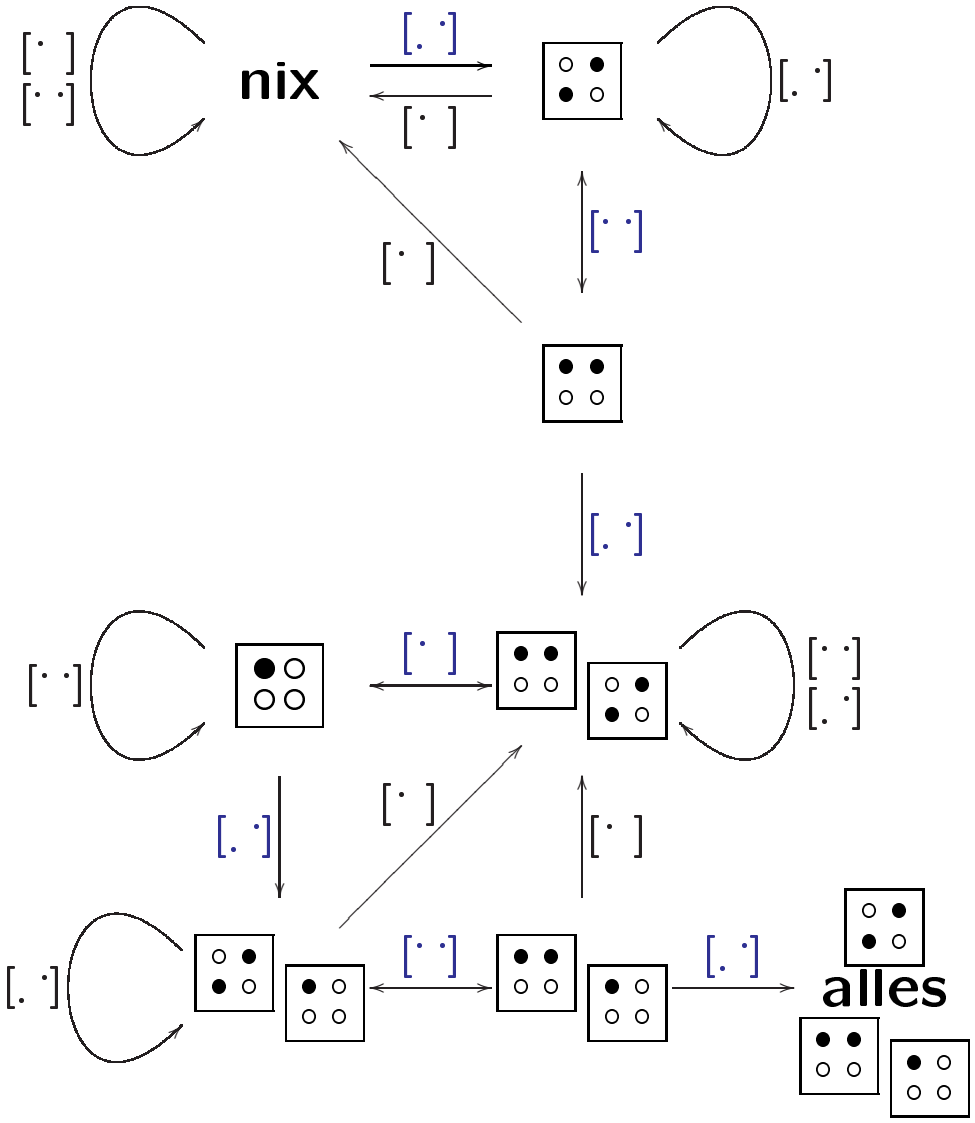
Exploration: **wo gilt** $[\beta_1] \ldots [\beta_{n-1}] [\beta_n] \bot$ **?**

Ziel: β_i**-Sequenz, die in allen Knoten greift!**

Zustandsraum: Teilmengen $M \subseteq \left\{ \boxed{\begin{smallmatrix}\circ & \bullet \\ \bullet & \circ\end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix}\bullet & \bullet \\ \circ & \circ\end{smallmatrix}}, \boxed{\begin{smallmatrix}\bullet & \circ \\ \circ & \circ\end{smallmatrix}} \right\}$

Transitionen: $M \xrightarrow{[\beta_i]} M' = \{ p\text{: für alle } p \xrightarrow{\beta_i} q \text{ ist } q \in M \}$

Strategiesuche im Zustandsraum



optimale Strategie

(⚀)(⚅)(⚀)(⚁)(⚀)(⚅)(⚀)

Gewinn in 7 Zügen
– wie ohne Gegner!

maßgeschneiderte Logiken
Charakterisierungssätze

van Benthem, Rosen, __

für FO-definierbare Eigenschaften:

Bisimulations-Invarianz = Definierbarkeit in M

modelltheoretische Beweismethoden

Invarianz unter (unbeschränkter) Bisimulation

$\Rightarrow$ Invarianz unter Bisimulation für ℓ Runden

$\Rightarrow$ definierbar in M durch charakteristische Formeln

klassisch: Kompaktheit/Endlichkeitssatz

konstruktiv: explizite Modellkonstruktionen

Ehrenfeucht-Fraïssé: FO vs M

$\varphi \in$ **FO, Quantorentiefe q, invariant unter Bisimulation**

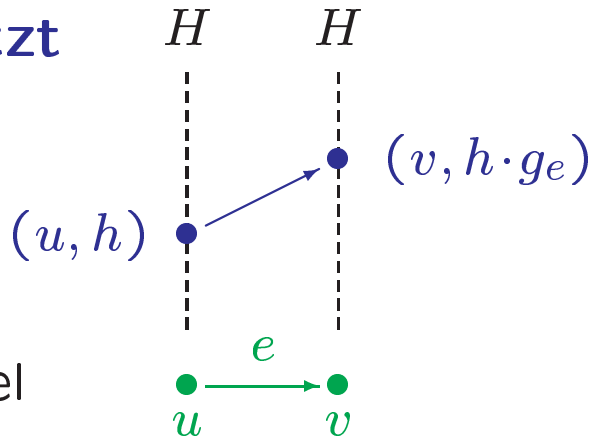
$\Rightarrow$ φ ℓ-lokal, $\ell = 2^q$ (FO-Spiel!)

$\Rightarrow$ **φ invariant unter ℓ-Bisimulation**

Satz

---

jedes endliche Transitionssystem besitzt lokal ℓ-azyklische Überlagerungen.



"Bündel-Konstruktion" mit Faser H
Gruppe H; Cayley Graph ohne kurze Zykel

in geeigneten Überlagerungen:
Strategie für ℓ Runden im Bisimulations-Spiel
$\Rightarrow$ lokale Strategie für q Runden im FO-Spiel

unendliche Spiele
infinitäre Gewinnbedingungen

temporale Spezifikation reaktiver Systeme: liveness, fairness, ...

unendliches Spiel: **System** vs. **Herausforderer**
Gewinn für S: akzeptable unendliche Ereignissequenzen

Logik

- Definierbarkeit der Gewinnmengen
- Fixpunkte monotoner modaler Operatoren
- modale Fixpunktlogik $\mathbf{L}_\mu$

offen:

- **MC für $\mathbf{L}_\mu$ in Ptime?** bekannt: in $\mathbf{NP} \cap$ **co-NP**
- **Charakterisierung von $\mathbf{L}_\mu$ über endlichen Systemen**

aktuelle Forschungsthemen

- **modelltheoretische Charakterisierungen über natürlichen, eingeschränkten Klassen**
  - endliche/zusammenhängende/transitive/. . . Systeme
- **Spiele und Modellkonstruktionen**
  - Logik $\leftrightarrow$ Kombinatorik/Algebra/Graphentheorie
- **Definierbarkeit und Komplexität**
  - Analyse von Rekursionsmechanismen
  - Algorithmen für logische Probleme