Unendlich? ∞ Infinite?

(1) Kann man die Größe unendlicher Mengen messen?

(2) Ein paar Gedankenexperimente im Unendlichen

some of them in English

Martin Otto
Arbeitsgruppe Logik
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Darmstadt
`www.mathematik.tu-darmstadt.de/~otto`

Zählen & Mengengrößen messen

- die Größe endlicher Mengen kann man durch Zählen messen:

  für $M = \{e_1, \dots, e_n\}$,
  mit paarweise verschiedenen Elementen $e_1, \dots, e_n$,
  ist die Elementezahl $|M| = n \in \mathbb{N}$ natürliches Maß

Zählen & Mengengrößen messen

- die Größe endlicher Mengen kann man durch Zählen messen:

  für $M = \{e_1, \dots, e_n\}$,
  mit paarweise verschiedenen Elementen $e_1, \dots, e_n$,
  ist die Elementezahl $|M| = n \in \mathbb{N}$ natürliches Maß

$\rightsquigarrow$ einfacher Größenvergleich unter endlichen Mengen:

$M \sim M'$ falls $|M| = |M'|$ **(“gleichgroß”)**

$M \preccurlyeq M'$ falls $|M| \leqslant |M'|$ **(“höchstens so groß wie”)**

Zählen & Mengengrößen messen

- die Größe endlicher Mengen kann man durch Zählen messen:

  für $M = \{e_1, \dots, e_n\}$,
  mit paarweise verschiedenen Elementen $e_1, \dots, e_n$,
  ist die Elementezahl $|M| = n \in \mathbb{N}$ natürliches Maß

$\rightsquigarrow$ einfacher Größenvergleich unter endlichen Mengen:

$M \sim M'$ falls $|M| = |M'|$ **(“gleichgroß”)**

$M \preccurlyeq M'$ falls $|M| \leqslant |M'|$ **(“höchstens so groß wie”)**

- **natürliche Zahlen messen die Größe endlicher Mengen**
  (eines der Grundkonzepte der natürlichen Zahlen)

  . . . und für unendliche Mengen?

unendliche Mengen

Beispiele:

$\mathbb{N}$	(Menge der natürlichen Zahlen)
$\{0, 2, 4, 6, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$	(Menge der geraden Zahlen)
$\{p \in \mathbb{N} \colon p \text{ prim } \} \subseteq \mathbb{N}$	(Menge der Primzahlen)
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ...	(ganze, rationale, reelle Zahlen)

viele interessante Mengen von Folgen, Funktionen, geometrischen Objekten, Gleichungen, Formeln, ...
sind unendlich

mögliche Definition:

"$|M| = \infty$" falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|M| \neq n$

unendliche Mengen

Beispiele:

$\mathbb{N}$	(Menge der natürlichen Zahlen)
$\{0, 2, 4, 6, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$	(Menge der geraden Zahlen)
$\{p \in \mathbb{N} \colon p \text{ prim } \} \subseteq \mathbb{N}$	(Menge der Primzahlen)
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ...	(ganze, rationale, reelle Zahlen)

viele interessante Mengen von Folgen, Funktionen, geometrischen Objekten, Gleichungen, Formeln, ... sind unendlich

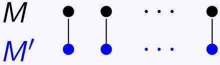
mögliche Definition:

"$|M| = \infty$" falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|M| \neq n$

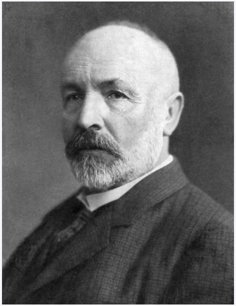
- ist das schon alles?
- sind denn je zwei unendliche Mengen "gleichgroß"?

Größenvergleich, Mächtigkeit/Kardinalität (Cantor)

Idee: (partielle) Paarungen statt Zählen



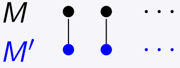
zeigt dass $M \sim M'$



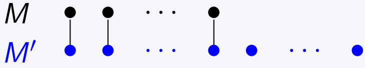
Georg Cantor (1845–1918)

Größenvergleich, Mächtigkeit/Kardinalität (Cantor)

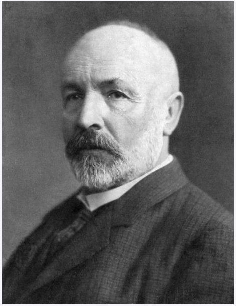
Idee: (partielle) Paarungen statt Zählen



zeigt dass $M \sim M'$



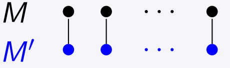
zeigt dass $M \preccurlyeq M'$



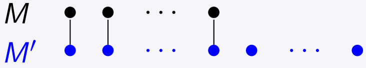
Georg Cantor (1845–1918)

Größenvergleich, Mächtigkeit/Kardinalität (Cantor)

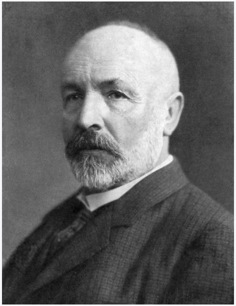
Idee: (partielle) Paarungen statt Zählen



zeigt dass $M \sim M'$



zeigt dass $M \preccurlyeq M'$



Georg Cantor (1845–1918)

Definition: $M \preccurlyeq M'$ falls $M = \{m_i \colon i \in M'\}$

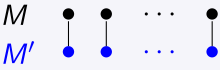
(eine Liste $(m_i)_{i \in M'}$ deckt M ab)

$M \sim M'$ falls sowohl $M \preccurlyeq M'$ als auch $M' \preccurlyeq M$

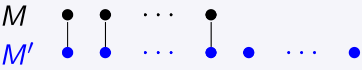
$M \prec M'$ falls $M \preccurlyeq M'$ und nicht $M' \preccurlyeq M$

Größenvergleich, Mächtigkeit/Kardinalität (Cantor)

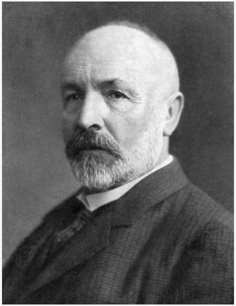
Idee: (partielle) Paarungen statt Zählen



zeigt dass $M \sim M'$



zeigt dass $M \preccurlyeq M'$



Georg Cantor (1845–1918)

manche Intuitionen aus dem Endlichen setzen sich fort, andere nicht!

Hilbertsches Hotel (1): $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$

in einem Hotel mit unendlich vielen Zimmern (Zimmer 1, 2, 3, ...) sind alle Zimmer schon belegt — und es kommt ein neuer Gast

David Hilbert (1862–1943)
Mathematiker, nicht Hotelier

Hilbertsches Hotel (1): $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$

in einem Hotel mit unendlich vielen Zimmern (Zimmer 1, 2, 3, ...) sind alle Zimmer schon belegt — und es kommt ein neuer Gast

- **unmöglich, ihn unterzubringen?**
- **oder doch?**

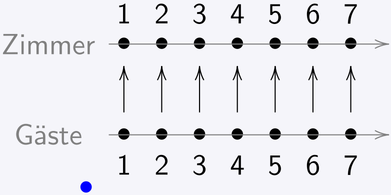
David Hilbert (1862–1943)
Mathematiker, nicht Hotelier

Hilbertsches Hotel (1): $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$

in einem Hotel mit unendlich vielen Zimmern (Zimmer 1, 2, 3, . . .)
sind alle Zimmer schon belegt — und es kommt ein neuer Gast

- **unmöglich, ihn unterzubringen?**

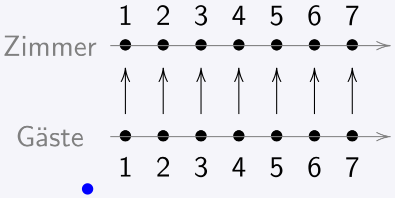
- **oder doch?**

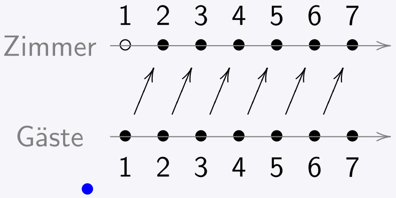


Hilbertsches Hotel (1): $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$

in einem Hotel mit unendlich vielen Zimmern (Zimmer 1, 2, 3, . . .)
sind alle Zimmer schon belegt — und es kommt ein neuer Gast

- **unmöglich, ihn unterzubringen?**
- **oder doch?**

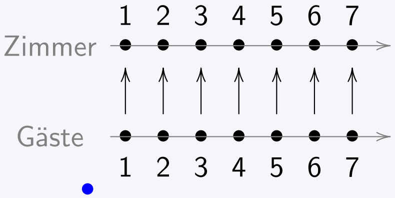


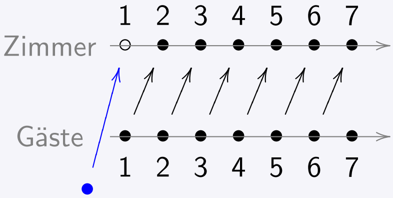


Hilbertsches Hotel (1): $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$

in einem Hotel mit unendlich vielen Zimmern (Zimmer 1, 2, 3, . . .) sind alle Zimmer schon belegt — und es kommt ein neuer Gast

- **unmöglich, ihn unterzubringen?**
- **oder doch?**

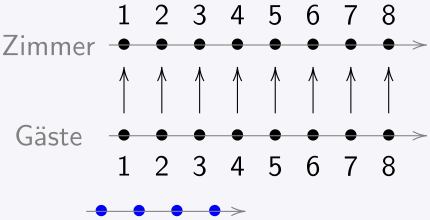




Hilbertsches Hotel (2): $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

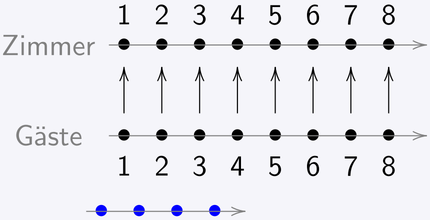
wieder sind alle Zimmer schon belegt

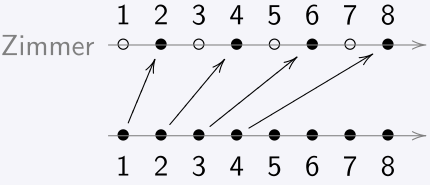
— und es kommen unendlich viele neue Gäste (1, 2, 3, . . .)



Hilbertsches Hotel (2): $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

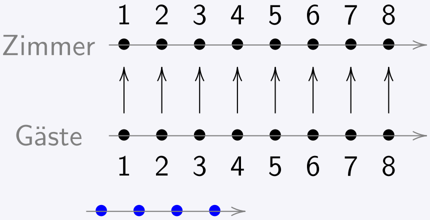
wieder sind alle Zimmer schon belegt
— und es kommen unendlich viele neue Gäste (1, 2, 3, . . .)

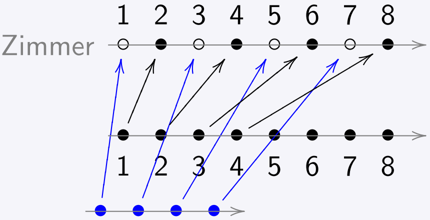




Hilbertsches Hotel (2): $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

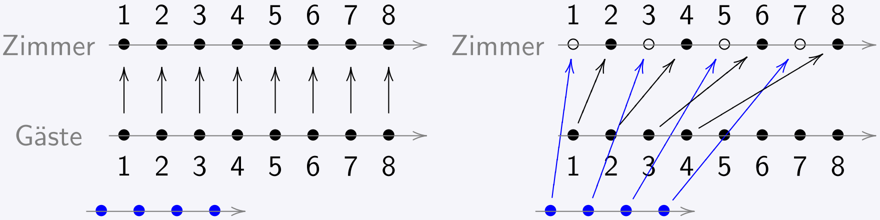
wieder sind alle Zimmer schon belegt
— und es kommen unendlich viele neue Gäste (1, 2, 3, ...)





Hilbertsches Hotel (2): $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

wieder sind alle Zimmer schon belegt
— und es kommen unendlich viele neue Gäste (1, 2, 3, ...)

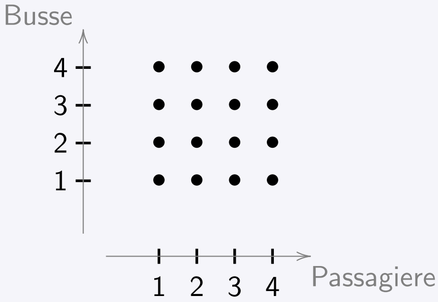


Beobachtung: $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen hat dieselbe Kardinalität wie die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ("abzählbar unendlich")

Hilbertsches Hotel (3): $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

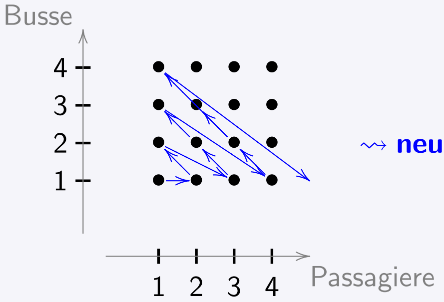
wieder sind alle Zimmer schon belegt
— und es kommen unendlich viele Busse (1, 2, 3,. . .)
mit jeweils unendlich vielen Passagieren (1, 2, 3,. . .)



Hilbertsches Hotel (3): $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

wieder sind alle Zimmer schon belegt

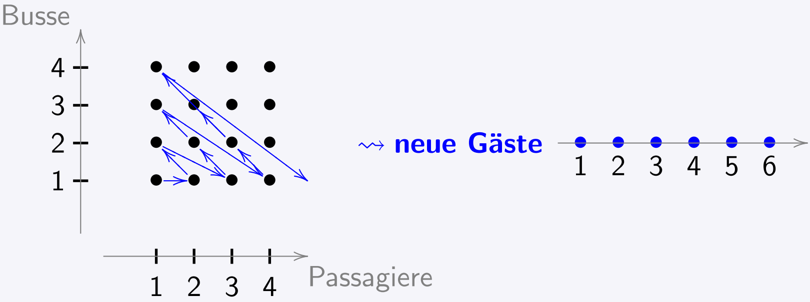
— und es kommen unendlich viele Busse (1, 2, 3,. . .)
mit jeweils unendlich vielen Passagieren (1, 2, 3,. . .)



$\rightsquigarrow$ **neue Gäste**

Hilbertsches Hotel (3): $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

wieder sind alle Zimmer schon belegt
— und es kommen unendlich viele Busse (1, 2, 3,. . .)
mit jeweils unendlich vielen Passagieren (1, 2, 3,. . .)



Satz (Cantor): $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen hat dieselbe Kardinalität wie die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen (auch abzählbar unendlich)

die nach oben offene Kardinalitäts-Skala

Satz (Cantor): $\mathbf{M} \prec \mathcal{P}(\mathbf{M})$

für jede Menge M gilt $M \prec \mathcal{P}(M)$,
d.h. die Menge der Teilmengen einer Menge ist
stets strikt mächtiger als die Menge selbst

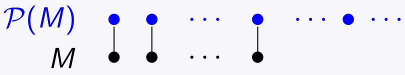
vgl. im Endlichen: $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$

die nach oben offene Kardinalitäts-Skala

Satz (Cantor): M $\prec \mathcal{P}$(M)

für jede Menge M gilt $M \prec \mathcal{P}(M)$,
d.h. die Menge der Teilmengen einer Menge ist
stets strikt mächtiger als die Menge selbst

vgl. im Endlichen: $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$

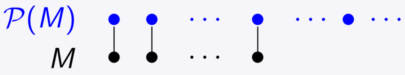


jede Paarung bleibt auf Seite von $\mathcal{P}(M)$ unvollständig

Satz (Cantor): $\mathbf{M} \prec \mathcal{P}(\mathbf{M})$

für jede Menge M gilt $M \prec \mathcal{P}(M)$,
d.h. die Menge der Teilmengen einer Menge ist
stets strikt mächtiger als die Menge selbst

vgl. im Endlichen: $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$



jede Paarung bleibt auf Seite von $\mathcal{P}(M)$ unvollständig

Beweis ("Diagonalisierung"): in jeder Liste $(s_m)_{m \in M}$ von M-vielen Teilmengen von M fehlt immer mindestens diese:

$$s := \{m \in M : m \notin s_m\}$$

denn für jedes m ist $s \neq s_m$, da $m \in s$ gdw. $m \notin s_m$

die nach oben offene Kardinalitäts-Skala

Satz (Cantor): $\mathbf{M} \prec \mathcal{P}(\mathbf{M})$

für jede Menge M gilt $M \prec \mathcal{P}(M)$,
d.h. die Menge der Teilmengen einer Menge ist
stets strikt mächtiger als die Menge selbst

vgl. im Endlichen: $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$

Korollar: $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$

die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar,
d.h. strikt mächtiger als die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$

Diagonalisierungsidee:

Überabzählkbarkeit von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: keine Liste von Teilmengen $s_0, s_1, s_2, \ldots \subseteq \mathbb{N}$ kann vollständig sein:

	0	1	2	3	4	5	6	7	$\ldots$
s_0	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	
s_1	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$	
s_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	
s_3	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	
s_4	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	
$\vdots$									

Diagonalisierungsidee:

Überabzählkbarkeit von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: keine Liste von Teilmengen $s_0, s_1, s_2, \ldots \subseteq \mathbb{N}$ kann vollständig sein:

	0	1	2	3	4	5	6	7	...
s_0	✓	×	✓	✓	×	✓	✓	✓	
s_1	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	
s_2	×	×	×	✓	×	✓	✓	✓	
s_3	×	×	×	✓	×	✓	×	✓	
s_4	×	×	✓	×	×	✓	×	✓	
$\vdots$									

Diagonalisierungsidee:

Überabzählkbarkeit von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: keine Liste von Teilmengen $s_0, s_1, s_2, \ldots \subseteq \mathbb{N}$ kann vollständig sein:

	0	1	2	3	4	5	6	7	…
s_0	✓	×	✓	✓	×	✓	✓	✓	
s_1	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	
s_2	×	×	×	✓	×	✓	✓	✓	
s_3	×	×	×	✓	×	✓	×	✓	
s_4	×	×	✓	×	×	✓	×	✓	
$\vdots$									
$\nparallel$									
s	×	×	✓	×	✓				

Kombinatorik unendlicher Mengen: ein Beispiel

make only finitely many mistakes

an infinite team is challenged to find a strategy for the following:

(fair play, no cheating, no tricks!)

- each player is going to be given a blue or green cap and cannot see his/her own colour but everbody else's;
- they then must simultaneously and independently respond to the question what colour their own cap is;
- they win (as a team) if only finitely many answers are wrong.

make only finitely many mistakes

an infinite team is challenged to find a strategy for the following:

(fair play, no cheating, no tricks!)

- each player is going to be given a blue or green cap and cannot see his/her own colour but everbody else's;
- they then must simultaneously and independently respond to the question what colour their own cap is;
- they win (as a team) if only finitely many answers are wrong.

impossible?

Modellierung des Gedankenexperiments

... simultaneously and independently declare the colour of their own cap; the team wins if only finitely many answers are wrong

für das Team ($\sim \mathbb{N}$) betrachten wir die Menge M aller 0-1-Folgen $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$M \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ **überabz.!**

M kodiert alle möglichen

Kappen-Verteilungen	**Antworten des Teams**
$s_n = \begin{cases} 0: & n \text{ hat grüne Kappe} \\ 1: & n \text{ hat blaue Kappe} \end{cases}$	$a_n = \begin{cases} 0: & n \text{ antwortet "grün"} \\ 1: & n \text{ antwortet "blau"} \end{cases}$

Modellierung des Gedankenexperiments

... simultaneously and independently declare the colour of their own cap; the team wins if only finitely many answers are wrong

für das Team ($\sim \mathbb{N}$) betrachten wir die Menge M aller 0-1-Folgen $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$M \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ **überabz.!**

M kodiert alle möglichen

Kappen-Verteilungen	**Antworten des Teams**
$s_n = \begin{cases} 0: & n \text{ hat grüne Kappe} \\ 1: & n \text{ hat blaue Kappe} \end{cases}$	$a_n = \begin{cases} 0: & n \text{ antwortet "grün"} \\ 1: & n \text{ antwortet "blau"} \end{cases}$

Ziel: $s \Delta a := \{n \colon a_n \neq s_n\}$ endlich **"only finitely many mistakes"**

Modellierung des Gedankenexperiments

... simultaneously and independently declare the colour of their own cap; the team wins if only finitely many answers are wrong

für das Team ($\sim \mathbb{N}$) betrachten wir die Menge M aller 0-1-Folgen $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$M \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ **überabz.!**

M kodiert alle möglichen

Kappen-Verteilungen	**Antworten des Teams**
$s_n = \begin{cases} 0: & n \text{ hat grüne Kappe} \\ 1: & n \text{ hat blaue Kappe} \end{cases}$	$a_n = \begin{cases} 0: & n \text{ antwortet "grün"} \\ 1: & n \text{ antwortet "blau"} \end{cases}$

Ziel: $s \Delta a := \{n \colon a_n \neq s_n\}$ endlich **"only finitely many mistakes"**

Problem: Antwort a_n darf nicht von s_n abhängen,
wohl aber von allen s_m für $m \neq n$: $(s_m)_{m \neq n}$

Modellierung & Lösungsansatz:

Idee 1: Modellierung der verfügbaren Information

- der einzelne Spieler n kennt nur $(s_m)_{m \neq n}$
- was wissen Spieler $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *gemeinsam* über s?

Modellierung & Lösungsansatz:

Idee 1: Modellierung der verfügbaren Information

- der einzelne Spieler n kennt nur $(s_m)_{m \neq n}$
- was wissen Spieler $n_1, n_2, \dots, n_k$ *gemeinsam* über s?

Idee 2: Modellierung der relevanten Information

- Antworten $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $a' = (a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind *gleich gut* falls die Differenzmenge $a \Delta a' = \{n \colon a_n \neq a'_n\}$ endlich ist

Modellierung & Lösungsansatz:

Antworten $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $a' = (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind *gleich gut*
falls die Differenzmenge $a\Delta a' = \{n\colon a_n \neq a'_n\}$ endlich ist

$\rightsquigarrow$ gröbere Sicht auf M (relevante & allen verfügbare Information):

wir definieren **Äquivalenzrelation $\equiv$ auf M**

$$\boxed{\mathbf{s \equiv s' \;:\Leftrightarrow\; s\Delta s' \text{ endlich}}}$$

Modellierung & Lösungsansatz:

Antworten $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $a' = (a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind *gleich gut* falls die Differenzmenge $a \Delta a' = \{n \colon a_n \neq a'_n\}$ endlich ist

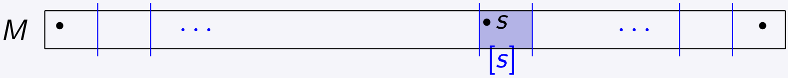
$\leadsto$ gröbere Sicht auf M (relevante & allen verfügbare Information):

wir definieren **Äquivalenzrelation $\equiv$ auf M**

$$\boxed{\mathbf{s \equiv s' \;\; :\Leftrightarrow \;\; s \Delta s' \; endlich}}$$

- **M zerfällt in Äquivalenzklassen** **(überabz. viele/abz. groß)**

  $\mathbf{[s] := \{s' \colon s' \equiv s\}}$ **“s bis auf endlich viele Differenzen”**



Modellierung & Lösungsansatz:

Antworten $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $a' = (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind *gleich gut*
falls die Differenzmenge $a\Delta a' = \{n\colon a_n \neq a'_n\}$ endlich ist

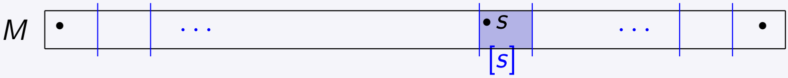
$\rightsquigarrow$ gröbere Sicht auf M (relevante & allen verfügbare Information):

wir definieren **Äquivalenzrelation $\equiv$ auf M**

$$\boxed{\mathbf{s \equiv s' \;\; :\Leftrightarrow \;\; s\Delta s' \text{ endlich}}}$$

- **M zerfällt in Äquivalenzklassen** **(überabz. viele/abz. groß)**

  $\mathbf{[s] := \{s' \colon s' \equiv s\}}$ **"s bis auf endlich viele Differenzen"**



- **Ziel: $\mathbf{a \equiv s}$, d.h. $\mathbf{a \in [s]}$** **. . . und jeder kennt [s] (!!)**

the rest is easy . . .

at least if we ignore some issues of ‘arbitrary’ choices and people’s cognitive capacities ;-)

all players agree in advance on some fixed

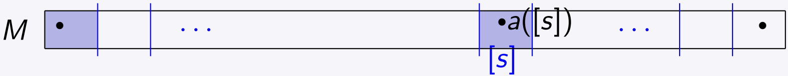
system of representatives: **a choice of one element a([s]) from each equivalence class [s]**

the rest is easy . . .

at least if we ignore some issues of ‘arbitrary’ choices and people’s cognitive capacities ;-)

all players agree in advance on some fixed

system of representatives: **a choice of one element a([s]) from each equivalence class [s]**

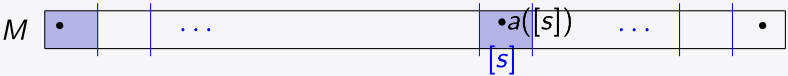


the rest is easy . . .

at least if we ignore some issues of ‘arbitrary’ choices and people’s cognitive capacities ;-)

all players agree in advance on some fixed

system of representatives: **a choice of one element a([s]) from each equivalence class [s]**



in situation s

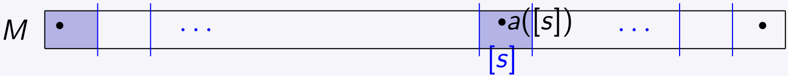
- no-one knows s, but
- **everyone knows [s]**
- **everyone can answer according to a([s])**

the rest is easy ...

at least if we ignore some issues of ‘arbitrary’ choices
and people’s cognitive capacities ;-)

all players agree in advance on some fixed

system of representatives: $\boxed{\textbf{a choice of one element } a([s]) \textbf{ from each equivalence class } [s]}$



in situation s
- no-one knows s, but
- **everyone knows [s]**
- **everyone can answer according to a([s])**

then a([s]) $\in$ [s] guarantees a([s]) $\equiv$ s, **a sure win**