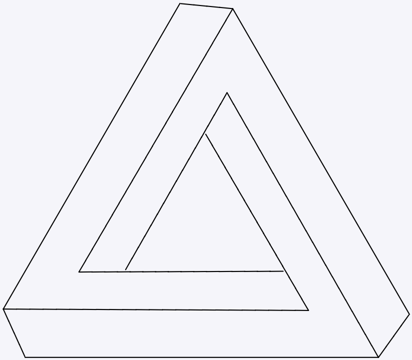
Diagonalen, die den Rahmen sprengen

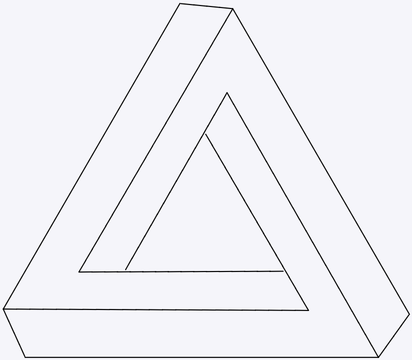
Mathe-Olympiade Hessen 27. Februar 2010

Martin Otto
Arbeitsgruppe Logik
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Darmstadt
www.mathematik.tu-darmstadt.de/˜otto

paradox?



paradox? . . . hängt vom Betrachter ab



Übersicht

- **Gefahr und Reiz „logischer Diagonalen“**
- **Diagonalisierung über Mengen**
- **Diagonalisierung über Algorithmen**
- **Diagonalisierung über formale Systeme**

Übersicht

- **Gefahr und Reiz „logischer Diagonalen“**

  Epimenides (7.Jh.v.Chr.)

- **Diagonalisierung über Mengen**

  Cantor (1845–1918), Russell (1872–1970)

- **Diagonalisierung über Algorithmen**

  Turing (1912–1954)

- **Diagonalisierung über formale Systeme**

  Gödel (1906–1978)

Teil I: Ein Beispiel logischer Diagonalisierung

überlieferte Quelle: Epimenides, Kreta, 7.Jh.v.Chr.

Voraussetzungen (klassische Logik):

- Aussagen entweder wahr oder falsch
- Wahrheitswerte 1 (wahr) 0 (falsch)

Wir betrachten Aussagen, die über andere Aussagen sprechen:

Teil I: Ein Beispiel logischer Diagonalisierung

überlieferte Quelle: Epimenides, Kreta, 7.Jh.v.Chr.

Voraussetzungen (klassische Logik):

- Aussagen entweder wahr oder falsch
- Wahrheitswerte 1 (wahr) 0 (falsch)

Wir betrachten Aussagen, die über andere Aussagen sprechen:

(A): (B) ist wahr.

„A sagt dasselbe wie B“ $(\mathrm{A} \equiv \mathrm{B})$

Teil I: Ein Beispiel logischer Diagonalisierung

überlieferte Quelle: Epimenides, Kreta, 7.Jh.v.Chr.

Voraussetzungen (klassische Logik):

- Aussagen entweder wahr oder falsch
- Wahrheitswerte 1 (wahr) 0 (falsch)

Wir betrachten Aussagen, die über andere Aussagen sprechen:

(A): (B) ist wahr.

„A sagt dasselbe wie B“ $(\mathrm{A} \equiv \mathrm{B})$

A \ B	0	1
0	✓	#
1	#	✓

Teil I: Ein Beispiel logischer Diagonalisierung

überlieferte Quelle: Epimenides, Kreta, 7.Jh.v.Chr.

Voraussetzungen (klassische Logik):

- Aussagen entweder wahr oder falsch
- Wahrheitswerte 1 (wahr) 0 (falsch)

Wir betrachten Aussagen, die über andere Aussagen sprechen:

(A): (B) ist falsch.

„A sagt das genaue Gegenteil von B“ $(\mathrm{A} \neq \mathrm{B})$

Teil I: Ein Beispiel logischer Diagonalisierung

überlieferte Quelle: Epimenides, Kreta, 7.Jh.v.Chr.

Voraussetzungen (klassische Logik):

- Aussagen entweder wahr oder falsch
- Wahrheitswerte 1 (wahr) 0 (falsch)

Wir betrachten Aussagen, die über andere Aussagen sprechen:

(A): (B) ist falsch.

„A sagt das genaue Gegenteil von B“ $(\mathrm{A} \neq \mathrm{B})$

A \ B	0	1
0	$\#$	$\checkmark$
1	$\checkmark$	$\#$

Diagonalisierung: Epimenides' Lügner

(A) : (B) ist wahr.

(B) : (A) ist falsch.

Diagonalisierung: Epimenides' Lügner

(A) : (B) ist wahr.

(B) : (A) ist falsch.

$\mathrm{A} \equiv B \not\equiv \mathrm{A}$

A \ B	0	1
0	#	#
1	#	#

Diagonalisierung: Epimenides' Lügner

(A) : (B) ist wahr.

(B) : (A) ist falsch.

$\mathrm{A} \equiv B \not\equiv \mathrm{A}$

A \ B	0	1
0	$\#$	$\#$
1	$\#$	$\#$

(A) : (A) ist falsch. „*Diese* **Aussage ist falsch.“**

„A besagt *sein eigenes* Gegenteil“, $\mathrm{A} \not\equiv \mathrm{A}$

Diagonalisierung: Epimenides' Lügner

(A) : (B) ist wahr.

(B) : (A) ist falsch.

$\mathrm{A} \equiv B \not\equiv \mathrm{A}$

A \ B	0	1
0	#	#
1	#	#

(A) : (A) ist falsch. „*Diese* **Aussage ist falsch.“**

„A besagt *sein eigenes* Gegenteil“, $\mathrm{A} \not\equiv \mathrm{A}$

A ist nicht bloß falsch, sondern *sinnlos*;
vielleicht *garkeine* Aussage?

Welcher Rahmen wird hier gesprengt?

Gesprengt:

- die Welt *einfacher* logischer Aussagen
  mit konsistenter Wahrheitsbewertung

Problematisch (im Gegensatz zu harmloseren Aussagen):

- innerer Bezug auf den Wahrheitswert der gesamten Aussage

(A) : **. . . (A) . . .** „*Diese* **Aussage**“

Welcher Rahmen wird hier gesprengt? ... und wodurch?

Gesprengt:

- die Welt *einfacher* logischer Aussagen
  mit konsistenter Wahrheitsbewertung

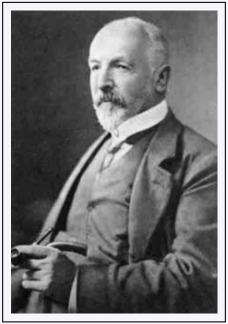
Problematisch (im Gegensatz zu harmloseren Aussagen):

- innerer Bezug auf den Wahrheitswert der gesamten Aussage

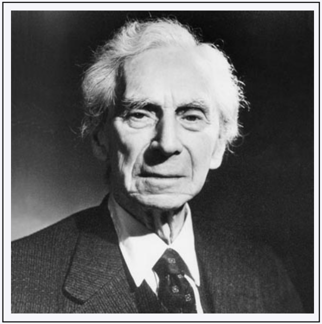
(A) : ... (A) ... „*Diese* **Aussage**“

Selbstbezüglichkeit

Teil II: Diagonalisierung über Mengen

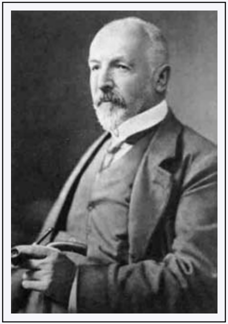


Georg Cantor (1845–1918)



Bertrand Russell (1872–1970)

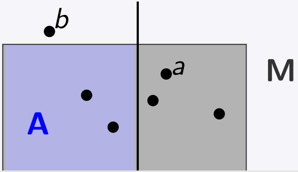
Teil II: Diagonalisierung über Mengen



Georg Cantor (1845–1918)

Begriffe der elementaren Mengenlehre:

$a \in M$: a ist *Element* der Menge M;
$A \subseteq M$: A ist *Teilmenge* von M;
$A := \{a \in M : a \text{ hat Eigenschaft } E\} \subseteq M$,
die *durch E definierte* Teilmenge von M.



Drei Fragen zu Mengen:

(1): Wieviele Teilmengen hat eine *n*-elementige Menge?

(2): Wieviele Teilmengen hat die (unendliche) Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$?

(3): Kann es eine/die Menge aller Mengen geben?

(1): Wieviele Teilmengen hat eine n-elementige Menge?

das wisst ihr!

(1): Wieviele Teilmengen hat eine n-elementige Menge?

das wisst ihr!

Erinnerung: Eine Teilmenge $A \subseteq M$ besteht
ausschließlich aus Elementen von M

(1): Wieviele Teilmengen hat eine n-elementige Menge?

das wisst ihr!

Erinnerung: Eine Teilmenge $A \subseteq M$ besteht
ausschließlich aus Elementen von M

Beispiel: $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ hat fünf Elemente
und *wieviele* Teilmengen?

(1): Wieviele Teilmengen hat eine n-elementige Menge?

das wisst ihr!

Erinnerung: Eine Teilmenge $A \subseteq M$ besteht ausschließlich aus Elementen von M

Beispiel: $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ hat fünf Elemente und *wieviele* Teilmengen?

Antwort: 2^n

(2): Wieviele Teilmengen hat die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

was heißt hier 'wieviele'? $\longrightarrow$ Cantor

Wir wollen uns überzeugen, dass es *keine* vollständige Aufzählung aller Teilmengen $A \subseteq \mathbb{N}$ geben kann:

Zu *jeder* (unendlichen) Liste von Teilmengen $A_0, A_1, A_2, \ldots$ von $\mathbb{N}$
gibt es mindestens eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$,
die in dieser Liste *nicht* vorkommt!

(2): Wieviele Teilmengen hat die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

was heißt hier 'wieviele'? $\rightarrow$ Cantor

Wir wollen uns überzeugen, dass es *keine* vollständige Aufzählung aller Teilmengen $A \subseteq \mathbb{N}$ geben kann:

> Zu *jeder* (unendlichen) Liste von Teilmengen $A_0, A_1, A_2, \ldots$ von $\mathbb{N}$
> gibt es mindestens eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$,
> die in dieser Liste *nicht* vorkommt!

Beweis durch **Diagonalisierung:**

Wir beschreiben anhand einer gegebenen Liste $A_0, A_1, A_2, \ldots$ eine Teilmenge A, die von *allen* A_n verschieden ist:

$$\mathbf{A := \{n \in \mathbb{N} : n \notin A_n\}}$$

Dann ist $n \in A$ genau dann, wenn $n \notin A_n$;
also ist $A \neq A_n$.

Das Diagonalisierungs-Argument

	0	1	2	3	4	5	6	7	...
A_0	✓	×	✓	✓	×	✓	✓	✓	
A_1	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	
A_2	×	×	×	✓	×	✓	✓	✓	
A_3	×	×	×	✓	×	✓	×	✓	
A_4	×	×	✓	×	×	✓	×	✓	
$\vdots$									

Das Diagonalisierungs-Argument

	0	1	2	3	4	5	6	7	...
A_0	✓	×	✓	✓	×	✓	✓	✓	
A_1	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	
A_2	×	×	×	✓	×	✓	✓	✓	
A_3	×	×	×	✓	×	✓	×	✓	
A_4	×	×	✓	×	×	✓	×	✓	
$\vdots$									

A	×	×	✓	×	✓			

Konsequenzen

- Es muss Teilmengen $A \subseteq \mathbb{N}$ geben, die durch *keine* (aufschreibbare) Eigenschaft definierbar sind.
- Es gibt unterschiedliche Grade von *Unendlichkeit*; genau wie die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, ist $\mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen) „viel unendlicher" als $\mathbb{N}$, während $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ auf der gleichen Stufe stehen (Cantor).

(3): Es kann keine Menge aller Mengen geben!

$\longrightarrow$ Russell

Wäre $\mathbb{A}$ die Menge *aller* Mengen, so müsste $\mathbb{A} \in \mathbb{A}$ sein
(aber das schreckt uns noch nicht).

(3): Es kann keine Menge aller Mengen geben!

$\longrightarrow$ Russell

Wäre $\mathbb{A}$ die Menge *aller* Mengen, so müsste $\mathbb{A} \in \mathbb{A}$ sein (aber das schreckt uns noch nicht).

Wir sehen auf

$$\mathbb{B} := \{\mathbf{M} \in \mathbb{A} \colon \mathbf{M} \notin \mathbf{M}\}$$

(3): Es kann keine Menge aller Mengen geben!

$\longrightarrow$ Russell

Wäre $\mathbb{A}$ die Menge *aller* Mengen, so müsste $\mathbb{A} \in \mathbb{A}$ sein (aber das schreckt uns noch nicht).

Wir sehen auf

$$\mathbb{B} := \{\mathbf{M} \in \mathbb{A} \colon \mathbf{M} \notin \mathbf{M}\}$$

Was gilt: $\mathbb{B} \in \mathbb{B}$ oder $\mathbb{B} \notin \mathbb{B}$?

(3): Es kann keine Menge aller Mengen geben!

$\longrightarrow$ Russell

Wäre $\mathbb{A}$ die Menge *aller* Mengen, so müsste $\mathbb{A} \in \mathbb{A}$ sein (aber das schreckt uns noch nicht).

Wir sehen auf

$$\mathbb{B} := \{\mathbf{M} \in \mathbb{A} \colon \mathbf{M} \not\in \mathbf{M}\}$$

Was gilt: $\mathbb{B} \in \mathbb{B}$ oder $\mathbb{B} \not\in \mathbb{B}$?

Wir finden: $\left.\begin{array}{l} \mathbb{B} \in \mathbb{B} \\ \mathbb{B} \not\in \mathbb{B} \end{array}\right\}$ beides unmöglich! $\longrightarrow$ Lügner

(3): Es kann keine Menge aller Mengen geben!

$\longrightarrow$ Russell

Wäre $\mathbb{A}$ die Menge *aller* Mengen, so müsste $\mathbb{A} \in \mathbb{A}$ sein (aber das schreckt uns noch nicht).

Wir sehen auf

$$\mathbb{B} := \{\mathbf{M} \in \mathbb{A} \colon \mathbf{M} \not\in \mathbf{M}\}$$

Was gilt: $\mathbb{B} \in \mathbb{B}$ oder $\mathbb{B} \not\in \mathbb{B}$?

Wir finden: $\left.\begin{array}{l} \mathbb{B} \in \mathbb{B} \\ \mathbb{B} \not\in \mathbb{B} \end{array}\right\}$ beides unmöglich! $\longrightarrow$ Lügner

Es folgt, dass $\mathbb{A}$ als Menge nicht existiert!

(3): Es kann keine Menge aller Mengen geben!

$\longrightarrow$ Russell

Wäre $\mathbb{A}$ die Menge *aller* Mengen, so müsste $\mathbb{A} \in \mathbb{A}$ sein (aber das schreckt uns noch nicht).

Wir sehen auf

$$\mathbb{B} := \{\mathbf{M} \in \mathbb{A} \colon \mathbf{M} \not\in \mathbf{M}\}$$

Was gilt: $\mathbb{B} \in \mathbb{B}$ oder $\mathbb{B} \not\in \mathbb{B}$?

Wir finden: $\left.\begin{array}{l} \mathbb{B} \in \mathbb{B} \\ \mathbb{B} \not\in \mathbb{B} \end{array}\right\}$ beides unmöglich! $\longrightarrow$ Lügner

Es folgt, dass $\mathbb{A}$ als Menge nicht existiert!

"$\mathbb{A}$ vanishes in a puff of logic"

Hitchhiker's Guide to the Galaxy

Teil III: Diagonalisierung über Algorithmen/Programme

Alan Turing (1912–1954) und das „Halteproblem“ als Quelle vieler Unmöglichkeitsbeweise

Algorithmus = Berechnungsverfahren/Lösungsverfahren

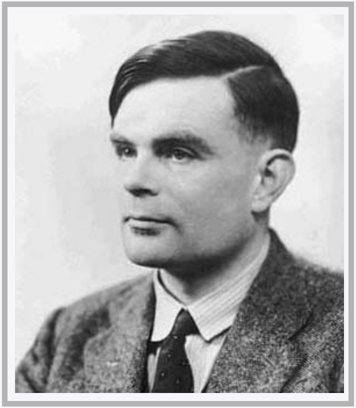
Al Chwarismi ($\sim$ 800)

Teil III: Diagonalisierung über Algorithmen/Programme

Alan Turing (1912–1954) und das „Halteproblem“ als Quelle vieler Unmöglichkeitsbeweise

Algorithmus = Berechnungsverfahren/Lösungsverfahren

Al Chwarismi ($\sim$ 800)



Alan Turing (1912–1954)

Algorithmen/Berechnungsverfahren

können viele *Entscheidungsprobleme* lösen, z.B.:

Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$:
Ist n gerade?

Zu gegebenen $k, m, n \in \mathbb{N}$:
Ist $k * m = n$?

Zu gegebenem Sudoku S:
Ist S lösbar?

Zu gegebener Schach-Position:
Kann Weiß Gewinn erzwingen?

Gibt es (sinnvoll gestellte, mathematische) Probleme, die prinzipiell nicht durch Algorithmen zu lösen sind?

Verfahren/Programme/Computer ——————— Kreativität?

Gibt es (sinnvoll gestellte, mathematische) Probleme, die prinzipiell nicht durch Algorithmen zu lösen sind?

Verfahren/Programme/Computer ——————— Kreativität?

Annahmen:

- Verfahren V sind als Texte (Programme) $\langle V \rangle$ kodiert und anhand der kodierten Fassung auf Eingaben ausführbar.
- Um ein Entscheidungsproblem zu lösen, muss ein Verfahren auf jede (zulässige) Eingabe nach endlich vielen Schritten korrekt JA oder NEIN antworten (jedenfalls *terminieren/anhalten*).

Gibt es (sinnvoll gestellte, mathematische) Probleme, die prinzipiell nicht durch Algorithmen zu lösen sind?

Verfahren/Programme/Computer ———— Kreativität?

Annahmen:

- Verfahren V sind als Texte (Programme) $\langle V \rangle$ kodiert und anhand der kodierten Fassung auf Eingaben ausführbar.
- Um ein Entscheidungsproblem zu lösen, muss ein Verfahren auf jede (zulässige) Eingabe nach endlich vielen Schritten korrekt JA oder NEIN antworten (jedenfalls *terminieren/anhalten*).

Ein gefährlich klingendes Entscheidungsproblem:

> Zu gegebenen Verfahren V, W:
> Hält V auf Eingabe $\langle W \rangle$ schließlich an?

Halteproblem: Diagonalisierung

Nützliche Variante ($\rightarrow$ Selbstreferenz, Lügner, Russell):

Zu gegebenen Verfahren V:
Hält V auf Eingabe ⟨V⟩ schließlich an? **(H)**

Halteproblem: Diagonalisierung

Nützliche Variante ($\rightarrow$ Selbstreferenz, Lügner, Russell):

Zu gegebenen Verfahren V:
Hält V auf Eingabe $\langle \mathbf{V} \rangle$ schließlich an? **(H)**

Annahme, Verfahren T löst dieses Entscheidungsproblem **H**:

Für jedes V liefert T auf Eingabe $\langle V \rangle$

$$\begin{cases} \text{NEIN} & \text{falls } V \text{ auf } \langle V \rangle \text{ nicht anhält.} \\ \text{JA} & \text{falls } V \text{ auf } \langle V \rangle \text{ schließlich anhält.} \end{cases}$$

Halteproblem: Diagonalisierung

Nützliche Variante ($\rightarrow$ Selbstreferenz, Lügner, Russell):

Zu gegebenen Verfahren V:
Hält V auf Eingabe $\langle \mathbf{V} \rangle$ schließlich an? **(H)**

Annahme, Verfahren T löst dieses Entscheidungsproblem **H**:

Für jedes V liefert T auf Eingabe $\langle V \rangle$

$$\begin{cases} \text{NEIN} & \text{falls } V \text{ auf } \langle V \rangle \text{ nicht anhält.} \\ \text{JA} & \text{falls } V \text{ auf } \langle V \rangle \text{ schließlich anhält.} \end{cases}$$

Wir könnten dann T etwas umbauen zu T':
nicht-terminierende Schleife statt Antwort „JA“

Halteproblem: Diagonalisierung

Nützliche Variante ($\rightarrow$ Selbstreferenz, Lügner, Russell):

Zu gegebenen Verfahren V:
Hält V auf Eingabe $\langle \mathbf{V} \rangle$ schließlich an? **(H)**

Annahme, Verfahren T löst dieses Entscheidungsproblem **H**:

Für jedes V liefert T' auf Eingabe $\langle V \rangle$

$$\begin{cases} \text{NEIN} & \text{falls } V \text{ auf } \langle V \rangle \text{ nicht anhält.} \\ \infty & \text{falls } V \text{ auf } \langle V \rangle \text{ schließlich anhält.} \end{cases}$$

Wir könnten dann T etwas umbauen zu T':
nicht-terminierende Schleife statt Antwort „JA“

Halteproblem: Diagonalisierung

Wenn es ein Verfahren zur Lösung von **H** *gäbe*,
dann auch ein Verfahren T':

Für jedes V liefert T' auf Eingabe $\langle V \rangle$

$$\begin{cases} \text{NEIN} & \text{falls } V \text{ auf } \langle V \rangle \text{ nicht anhält.} \\ \infty & \text{falls } V \text{ auf } \langle V \rangle \text{ schließlich anhält.} \end{cases}$$

Was liefert dieses T' auf Eingabe $\langle T' \rangle$?

Halteproblem: Diagonalisierung

Wenn es ein Verfahren zur Lösung von **H** *gäbe*,
dann auch ein Verfahren T':

Für jedes V liefert T' auf Eingabe $\langle V \rangle$

$$\begin{cases} \text{NEIN} & \text{falls } V \text{ auf } \langle V \rangle \text{ nicht anhält.} \\ \infty & \text{falls } V \text{ auf } \langle V \rangle \text{ schließlich anhält.} \end{cases}$$

Was liefert dieses T' auf Eingabe $\langle T' \rangle$?

$$\begin{cases} \text{NEIN} & \text{falls } T' \text{ auf } \langle T' \rangle \text{ nicht anhält.} \\ \infty & \text{falls } T' \text{ auf } \langle T' \rangle \text{ schließlich anhält.} \end{cases} \qquad \#$$

Halteproblem: Diagonalisierung

Wenn es ein Verfahren zur Lösung von **H** *gäbe*,
dann auch ein Verfahren T':

Für jedes V liefert T' auf Eingabe $\langle V \rangle$

$$\begin{cases} \text{NEIN} & \text{falls } V \text{ auf } \langle V \rangle \text{ nicht anhält.} \\ \infty & \text{falls } V \text{ auf } \langle V \rangle \text{ schließlich anhält.} \end{cases}$$

Was liefert dieses T' auf Eingabe $\langle T' \rangle$?

$$\begin{cases} \text{NEIN} & \text{falls } T' \text{ auf } \langle T' \rangle \text{ nicht anhält.} \\ \infty & \text{falls } T' \text{ auf } \langle T' \rangle \text{ schließlich anhält.} \end{cases} \qquad \#$$

Auf Eingabe $\langle T' \rangle$ kann T' weder anhalten noch nicht anhalten;
Es kann also kein solches T' geben, also auch kein T.

Halteproblem: Diagonalisierung

Wenn es ein Verfahren zur Lösung von **H** *gäbe*,
dann auch ein Verfahren T':

Für jedes V liefert T' auf Eingabe $\langle V \rangle$

$$\begin{cases} \text{NEIN} & \text{falls } V \text{ auf } \langle V \rangle \text{ nicht anhält.} \\ \infty & \text{falls } V \text{ auf } \langle V \rangle \text{ schließlich anhält.} \end{cases}$$

Was liefert dieses T' auf Eingabe $\langle T' \rangle$?

$$\begin{cases} \text{NEIN} & \text{falls } T' \text{ auf } \langle T' \rangle \text{ nicht anhält.} \\ \infty & \text{falls } T' \text{ auf } \langle T' \rangle \text{ schließlich anhält.} \end{cases} \qquad \#$$

Auf Eingabe $\langle T' \rangle$ kann T' weder anhalten noch nicht anhalten;
Es kann also kein solches T' geben, also auch kein T.

. . . vanishes in a puff of logic

Fazit: H ist durch keinen Algorithmus lösbar.

Konsequenzen aus Unlösbarkeit des Halteproblems

Viele andere Probleme erben die prinzipielle algorithmische Unlösbarkeit vom Halteproblem, z.B.:

> Zu gegebenen Programmen P_1, P_2:
> Liefern P_1 und P_2 auf allen Eingaben dasselbe Ergebnis?

Konsequenzen aus Unlösbarkeit des Halteproblems

Viele andere Probleme erben die prinzipielle algorithmische Unlösbarkeit vom Halteproblem, z.B.:

> Zu gegebenen Programmen P_1, P_2:
> Liefern P_1 und P_2 auf allen Eingaben dasselbe Ergebnis?

> Zu gegebener Menge von Kacheln mit gefärbten Rändern:
> Kann man damit beliebig große Quadrate kacheln?

Beispiel:

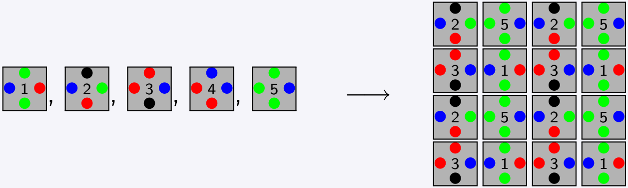
Konsequenzen aus Unlösbarkeit des Halteproblems

Viele andere Probleme erben die prinzipielle algorithmische Unlösbarkeit vom Halteproblem, z.B.:

> Zu gegebenen Programmen P_1, P_2:
> Liefern P_1 und P_2 auf allen Eingaben dasselbe Ergebnis?

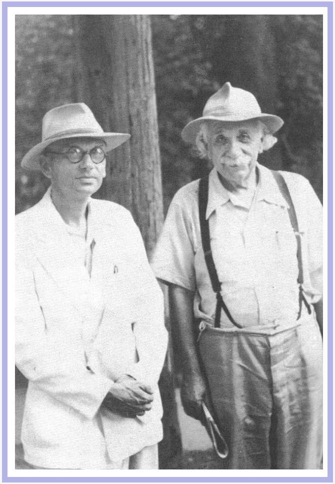
> Zu gegebener Menge von Kacheln mit gefärbten Rändern:
> Kann man damit beliebig große Quadrate kacheln?

Beispiel:



u.v.a. Fragen aus allen möglichen Bereichen der Mathematik

Teil IV, Ausblick: Gödels Unvollständigkeits-Beweis
oder: es kommt noch schlimmer



Kurt Gödel (1906–1978)
rechts: Albert Einstein

Gödels Unvollständigkeitsbeweis

Epimenides' Lügner: **(A): „Aussage (A) ist nicht wahr"**

Gödels Aussage: **(G): „Aussage (G) ist nicht beweisbar"**

mit Bezug auf *Beweisbarkeit*
in einem (vernünftigen) formalen System
(mathematischer Beweiskalkül + Axiomensystem)

Gödels Unvollständigkeitsbeweis

Epimenides' Lügner: **(A): „Aussage (A) ist nicht wahr“**

Gödels Aussage: **(G): „Aussage (G) ist nicht beweisbar“**

mit Bezug auf *Beweisbarkeit*
in einem (vernünftigen) formalen System
(mathematischer Beweiskalkül + Axiomensystem)

Dann ergibt sich zwar kein Widerspruch, aber dass

(G) wahr und tatsächlich **nicht beweisbar** ist!

$\longrightarrow$ prinzipielle Unvollständigkeit/Offenheit der Mathematik

Diagonalisierung

Selbstbezüglichkeit als Quelle

- verblüffender Konstruktionen
- überraschender Unmöglichkeitsbeweise
- nachweisbarer prinzipieller Grenzen

Diagonalisierung

Selbstbezüglichkeit als Quelle

- verblüffender Konstruktionen
- überraschender Unmöglichkeitsbeweise
- nachweisbarer prinzipieller Grenzen

Unentscheidbarkeit und Unvollständigkeit
sind Grundphänomene der Mathematik

Mathematik und Meta-Mathematik in der mathematischen Logik