

DISKRETE MATHEMATIK



- großes Gebiet, vereint viele unterschiedliche Richtungen
- oft verknüpft in Kombinatorik und Graphentheorie
- nicht scharf abgegrenzt
Schnittmenge mit vielen anderen Gebieten:
Algebra, Geometrie, Zahlentheorie, Optimierung
Logik
- betrachtete Strukturen oft endlich oder abzählbar

Bsp: • endliche / abzählbare Mengen

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

+ Permutationen / Teilmengen, ...

• partiell geordnete Mengen

P Menge, $R \subseteq P \times P$, $(x, y) \in R \Leftrightarrow x \leq y$
reflexiv, transitiv, antisymmetrisch

z.B. $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit Teilbarkeit

Simplex(komplexe mit \leq)

• Graphen $G = (V, E)$, $E \subseteq \binom{V}{2}$
allgemeiner: Relationen

• endliche Gruppen, Verbände

• Punktmenge, Polygone, Polyeder

- im Vergleich zu anderen Gebieten
wenig kohärente Theorie / systematische Struktur
Fokus liegt eher auf Methoden als
konkreten Resultaten
- Fragestellungen entstehen oft aus Teilproblemen
in anderen Gebieten
→ zeigen oft Verbindungen auf
→ Methoden aus Algebra, Geometrie, Analysis, ...
- Ausgangspunkte sind oft leicht und durch
Vorkenntnisse zu formulieren
→ Schwierigkeit liegt in den Methoden
 - Wieviele Subthemen gibt es?
 - Wieviele Fakten braucht man, um einen
planaren Graphen zu färben?
 - Wieviele Teilmengen eines Mengen Π kann
man wählen, so dass keine zwei disjunkt
sind?
 - Wieviele Kannten kann ein Graph haben,
das kein Δ enthält?
 - Auf wieviele Folgen kann man eine
bestimmte Zahl als Summe natürlicher
Zahlen schreiben?

• typische Fragestellungen:

• Enumeration:

Wieviele Graphen mit gegebenen Eigenschaften gibt es?

• wieviele Permutationen von $[n]$?

• wieviele ohne Fixpunkte?

• wieviele Bäume mit n Knoten gibt es?

• Existenz

Gibt es eine Struktur mit vorgegebenen Bedingungen?

• gibt es Graph mit genau 3 Knoten mit ungeradem Grad?

• extreme Fragen

• wie groß kann eine Struktur werden

• wie klein / groß kann ein Parameter sein, damit eine bestimmte Struktur (noch) existiert?

• wieviele Knoten muss ein Graph haben, damit ein Δ existiert?

Womit wollen wir uns beschäftigen?

4

• Zählen / Enumeration

klassische Zählprobleme und Methoden
 $|\{f: X \rightarrow N\}|$

Permutationen, Partionen, Derangements
Ausdrücke ohne / mit Symmetrie
ohne / mit Wiederholung
kombinatorische Identitäten, $\sum \binom{n}{k} = 2^n$

allgemeines: Folgen $(a_n)_n$ verstehen

Würfel: Wahrscheinlichkeit für 3?

für 3 und 4?

Augensumme 7?

was heißt „zählen“?

• explizit enumerieren

• geschlossene Form $a_n = a(n)$

• Rekursion $a_n = f(a_{n-1}, \dots, a_0)$

• Erzeugendefkt $A(x) = \sum a_n x^n$

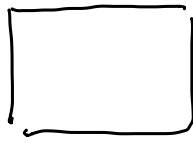
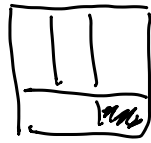
$$a_n = 2^n - 1, A(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-x)}$$

→ Methoden aus Algebra und Analysis

Schere Brett mit Dominosteinen überdecken:

5

$(m \times n)$ - Brett



für welche m, n ?
wie viele Varianten?

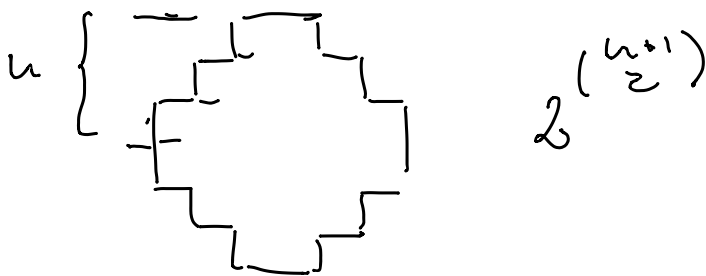
$(2m \times 2n)$ - Brett: $4 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\cos^2 \frac{i\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{j\pi}{2n+1})$

(Temperley & Fisher, Kasteleyn (1))

	1	2	3	4
1	2			
2	5	36		
3	13	281	6728	
4	34	2245	167089	12988816



was passiert für Bretter, die nicht rechteckig sind / Löcher haben?



• Graphen / Relationen

→ aus FDT: algorithmische Fragen

was: strukturelle Fragen

- wenn löst sich ein Graph über-schneidungslos zeichnen? (planar)

• wie viele aufspannende Bäume gibt es?

• Färbungen planarer Graphen

• Ramseytheorie

Kanten des K_6 mit zwei Farben
→ gleichfarbiges K_3

• Extremale Fragen

G mit $2n$ Knoten, m Kanten

Dann: Partition des G in zwei gleiche Teile A, B , so dass $\frac{m}{2}$ Kanten zwischen A und B .

→ Methoden aus der linearen Algebra

• Inzidenz- / Adjazenzmatrix
Eigenwerte / Eigenvektoren

→ lineare Algebra findet an weiteren Stellen auf

• Matrizen (\mathbb{I}, E)

Verallgemeinerung von Vektorräumen
Wälder in Graphen

• Codes: lineare Codes

→ 1880, QR-Codes, ECC-DAT, Signalübertragung
Barcodes

→ Fehlerrechnung, Fehlervektor

7

• faktorielle Anordnung

◦ Design

→ Versuchsdesign: in Methoden / Techniken / ...
je k gleichzeitig

→ Wechselwirkungen!

→ können nicht alle k -Tupel testen

→ alle Paare / Tripel gleich oft → 2- β -Design

→ 15 Studierende, sieben Tutoratstermine
Dreisgruppen, so dass je zwei genau einmal
zusammen sind?

→ 2-(15, 3, 1)-Design

oder Kirkman-Tripel-System zu $6u+3$,
 $u=2$

→ Stochastik / Probabilistische Methoden

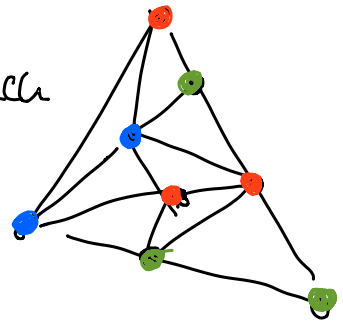
" \mathcal{M} Menge, $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{M}$ Teilmengen, $1 \leq i \leq u$
 \mathcal{M} 2-färbbar: kein \mathcal{A}_i ist monochromatisch
Wie groß kann u sein?

• Kombinatorik in der Geometrie

- Seiten von Polyedern
 f -Verteilen: Welche sind realisierbar?
- Symmetrie von Polyedern
 regulär, semi-reguläre Polyeder
- Satz von Euler

• Triangulierung

- Triangulierungen
 - Anzahl Triang. in Polyedern
 - Sperner Lemma:



• Punkte und Geraden

- n Punkte, nicht alle auf einer Geraden
- wieviele Geraden gibt es dann?
- können auf allen ≥ 3 Punkte liegen?
- (weil: Satz von Sylvester-Gallai)
- endliche projektive Geometrien