1. Einfache Zählaufgaben

Schubfächer, Zählprinzipien, Inklusion-Exklusion

Schubfachprinzip

Version I m Bälle, n Fächer, $m > n$
$\Rightarrow$ es gibt Fach mit mehr als einem Ball

Beachte: wir wissen nicht, welches Fach!

Bsp: • Von 367 Personen haben min. 2 am gleichen Tag Geburtstag

• $M \subseteq [200] = \{1, \dots, 200\}$, $|M| \geq 101$
$\Rightarrow$ es gibt $a, b \in M$: $a \mid b$
(warum reichen 100 nicht?)

Version II: $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $n := \sum n_i$
Verteile $n-k+1$ Bälle auf k Fächer

$\Rightarrow$ es gibt i: Fach i enthält min. n_i Bälle

[sonst hätten wir nur
$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) = n - k$$
Bälle verteilt
]

Version III m Bälle in k Fächer
Dann gibt es Fach mit (1) $\geq \lceil \frac{m}{k} \rceil$ Bällen
(2) $\leq \lfloor \frac{m}{k} \rfloor$ Bällen

in Worten: ein Fach hat min. so viele Bälle wie Durchschnitt, eines höchstens

Bsp
- Korb mit roten, grünen, blauen Bällen
Wieviele muss man ziehen um sicher
3 rote oder 4 grüne oder 5 blaue
zu haben?
$\longrightarrow$ $3+4+5-3+1 = 10$ Bälle

- K_6, färbe Kanten rot oder blau
Dann gibt es rotes oder blaues Dreieck
(reicht auch K_5?)

allgemeiner:
$$r(m,n) := \min\left(p \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{jedes rot/blau gefärbte } K_p \\ \text{enthält roten } K_m \text{ oder blauen } K_n\end{array}\right)$$

$r(m) := r(m,m)$ **Ramseyzahlen**

Dann: $r(2) = 1$ $\quad r(3) = 6$
$r(4) = 18$ $\quad r(5)$ ist unbekannt

$r(2,n) = n$

$r(3,4) = 9$

$r(k) < \infty \ \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ (Satz von Ramsey)

Satz (Erdős-Szekeres)

Jede Folge $a_1, a_2, ..., a_{n^2+1}$ ganzer Zahlen enthält eine monotone Teilfolge der Länge $n+1$

Bsp: $n=3$ $\quad$ 4 $\underline{1}$ 8 $\underline{3}$ 17 $\underline{11}$ 2 3 $\underline{15}$ 8

$\ulcorner$ Für $1 \leq k \leq n^2+1$:

$\ell(k) :=$ Länge der längsten mon. steigenden Teilfolge die mit a_k beginnt

Dann: (1) es gibt k: $\ell(k) \geq n+1$ ✓

(2) $1 \leq \ell(k) \leq n \quad \forall k$

$\Rightarrow$ es gibt r: $\ell(k) = r$ für $\min \lceil \frac{n^2+1}{n} \rceil = n+1$ der k

$\rightarrow k_1 < k_2 < ... < k_{n+1}$ mit $\ell(k_i) = r$

Falls $a_{k_i} < a_{k_j}$ für $i < j$: $\ell(k_i) > \ell(k_j)$

also $a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq ... \geq a_{k_{n+1}}$ $\lrcorner$

Einfaches Zählen

- mögliche verschiedene Ausgänge beim Würfeln mit
  - einem Würfel ?
  - zwei Würfeln ?

→ was sind „verschiedene Ausgänge" ?

ein Würfel rot, einer blau

(1) ist rot 2, blau 5 = rot 5 blau 2 ?
(2) wollen wir nur die Summe ?

(1) nein: 36 Ausgänge, sonst 21
(2) 11 Ausgänge

- auf wieviele Weisen Augensumme 7 ?

$$7 = 1+6 = 2+5 = 3+4 = 4+3 = 5+2 = 6+1$$

- Augensumme 7 oder 11 ?

→ 6 Möglichkeiten für 7, 2 für 11

⇒ $6+2=8$ Möglichkeiten

Additionsprinzip:

$M_1, \dots, M_k$ disjunkte Mengen
dann $|\bigcup M_i| = \sum |M_i|$

(disjunkt ist wichtig
z.B. auf wieviele Weisen kann 3 vorkommen)

wieviele Ausgänge mit 2 Würfeln:

6 für ersten, 6 für zweiten: $6 \cdot 6 = 36$

Multiplikationsprinzip

k Ereignisse, m_i Ausgänge im i-ten
unabhängig vom Rest

$\Rightarrow$ insgesamt $\prod m_i$ Ausgänge

beachte: • unabhängig ist wichtig
• es kommt nur auf Anzahl an:

6 nummerierte Bälle, wir ziehen 2

$\rightarrow 6 \cdot 5 = 30$ verschiedene Ausgänge

aber: konkrete Menge im zweiten Zug verschieden.

allgemeines:

n nummerierte Bälle, wir ziehen k:

- mit Zurücklegen: n^k Ausgänge
- ohne Zurücklegen:

$$n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \left(=: (n)_k \right)$$

Spezialfall: $k=n$: $n!$ Möglichkeiten

$\hat{=}$ Anzahl Möglichkeiten, n Objekte anzuordnen

$\hat{=}$ Permutation der Ausgangsmenge

Satz: Es gibt $n!$ Permutationen einer Menge von n Elementen. ☒

Bei diesen Überlegungen war die Reihenfolge der Ereignisse wichtig.

→ was ändert sich, wenn die Reihenfolge egal ist?

n Objekte, k sollen gewählt werden.

$\binom{n}{k}$:= Anzahl der Möglichkeiten

Binomialkoeffizient „n über k"
(n choose k, nicht n over k)

$\binom{n}{k}$ zählt Auswahlen, ein Element kann nicht mehrfach vorkommen → „Ziehen ohne Zurücklegen"

Nach Wählen von k Elementen können wir diese auf k! Arten anordnen

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k! \iff \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Wir setzen $0! = 1$

<u>Satz</u> $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Γ $\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \frac{n-k}{n}\binom{n}{k} + \frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{k}$

kombinatorisch:

Π k-Menge aus n-Menge $a_1, \dots, a_n$

zwei Fälle: Π enthält a_n Π enthält a_n nicht

$\binom{n-1}{k-1}$ Mögl. $\binom{n-1}{k}$ Mögl.

Fälle sind disjunkt $\rightarrow$ Additionsprinzip $\lrcorner$

<u>Satz</u> $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Γ k Elemente auswählen $\iff$ n-k Elemente zurücklassen $\lrcorner$

Wieviele Teilmengen hat eine n-Menge A

$\to \quad \sum \binom{n}{k}$

Wir können das auch aus dem Multiplikations-
prinzip folgern:

Teilmenge wählen: Für jedes $a \in A$ entscheiden
ob in Menge oder nicht

$\to$ zwei Ausgänge pro Element, unabhängig

$\to$ A hat $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n} = 2^n$ Teilmengen

<u>Satz</u> Eine n-Menge A hat 2^n Teilmengen $\square$

<u>Def</u>: Die Menge der Teilmengen wird mit 2^A bezeichnet.

Bsp:
$M \subseteq [100]$, $|M| \geq 10$
$\Rightarrow$ zwei Teilmengen von M haben die
gleiche Summe

<u>Satz</u>: Eine n-Menge A hat je 2^{n-1} Teilmengen mit
gerader und ungerader Anzahl Elemente.

Induktion: $n=1$: $2^A = \{\emptyset, \{a\}\}$

$2^0 = 1$ mit gerade / ungerade Anzahl.

$n \geq 2$: $A' := A \setminus \{a_n\}$

$\Rightarrow 2^A = \{ T, T \cup \{a_n\} \mid T \subseteq 2^{A'} \}$

2^{n-2} gerade Teilmengen in A'

$\to$ auch in A

2^{n-2} ungerade Teilmenge in A'

$\to$ mit a_n gerade und in A

$\Rightarrow 2^{n-1}$ gerade Teilmenge

$\Rightarrow$ — " — ungerade — " —

Korr: $\sum (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

$$\sum_{k \text{ gerade}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ ungerade}} \binom{n}{k}$$ nach Satz.