Einfaches Zählen II

Prinzip der Inklusion - Exklusion

\# Permutationen von $[n]$: $n!$

wieviele davon bilden kein Element auf sich selbst ab?

→ Derangements. (fixpunktfreie Perm)

→ einfach: # Permutationen, die i auf sich abbilden: $(n-1)!$

⇒ # Perm, die i nicht festlassen: $n! - (n-1)!$

aber: Ereignisse für i und j nicht disjunkt ⇒ können nicht addieren.

neues Ansatz: gegeben Menge A, Eigenschaften $E_1, \ldots, E_n$

$$A_i := \{ a \in A \mid a \text{ hat } E_i \}$$

→ $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \ldots$

Wir setzen $A_I := \bigcap_{i \in I} A_i$

Satz $$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \subsetneq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} |A_I|$$

$\ulcorner$ $a \in A_I \Leftrightarrow a \in A_i$ für alle $i \in I$

setze $\Pi_a := \{ i \mid a \in A_i \}$

dann: zählen auf der rechten Seite a für jede nicht-leere Auswahl aus Π_a (mit Vorzeichen)

sei $m := |\Pi_a|$, dann zählen wir a:

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{k-1} \text{ mal}$$

Nun:
$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{k-1} = 1 - \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{k}$$
$$= 1 - (1-1)^m = 0 \quad (m \geq 1)$$

Auf der rechten Seite zählen wir $a \in A$ genau einmal, wenn $|\Pi_a| \geq 1$. $\lrcorner$

Korollar:
$$\left|A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |A| + \sum_{\emptyset \subsetneq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |A_I| \qquad \text{(E)}$$

oft: $|A_I| = N_k$ für $|I| = k$

Dann $$\left|A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k N_k \quad (N_0 := n)$$

Zurück zu Derangements:

$$A_i := \{ \pi \mid \pi(i) = i \}$$

$$A_I := \{ \pi \mid \pi(i) = i \ \forall i \in I \}$$

$$\Rightarrow \quad |A_i| = (n-1)! \quad , \quad |A_I| = (n - |I|)!$$

$$= (n-k)! \text{ für } k = |I|$$

Setze $N_0 = n!$

$N_k = (n-k)!$ für $k \geq 1$

Dann:

$$|A \setminus \bigcup A_i| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} N_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!}$$

Analysis I: $e^{-1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{1}{k!}$

und $\left| \sum_{k>n} (-1)^k \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{4}{(n+1)!}$

$$\Rightarrow \left| n! \sum_{k>n} (-1)^k \frac{1}{k!} \right| < \frac{1}{2} \text{ für } n \geq 8$$

$\Rightarrow$ # Derangements ist $\left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rceil$ für $n \geq 8$

(stimmt auch für $n \leq 7$)

Zweite Anwendung:

M, N Mengen mit $|M| = m$, $|N| = n$

$\to$ es gibt n^m Abb. $f: M \to N$

wieviele davon sind surjektiv?

$\to$ können $M = [m]$, $N = [n]$ annehmen

$A_i := \{ f: M \to N \mid i$ nicht im Bild von $f \}$

Dann: $|A_i| = (n-1)^m$

$|A_I| = (n - |I|)^m$

$\to$ unabh. von I

Setze $N_0 = n^m$, $N_k := (n-k)^m$

Dann:

$$\left| A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

$$=: T(m,n)$$

surjektive Abb.

$m \geq 1$, $n = 1$: $\binom{1}{0} 1^m + \binom{1}{1} 0^m = 1$

$n = 2$ $\binom{2}{0} 2^m - \binom{2}{1} 1^m = 2^m - 2$

$n = 3$ $\binom{3}{0} 3^m - \binom{3}{1} 2^m + \binom{3}{2} 1^m$

$$= 3^m - 3(2^m - 1)$$

$n = 4$ $4^m - 4 \cdot 3^m + 6 \cdot 2^m - 4$

$m = 1$: $4 - 12 + 12 - 4 = 0$

2: $16 - 36 + 24 - 4 = 0$

3: $64 - 108 + 48 - 4 = 0$

4: $256 - 324 + 96 - 4 = 24 = 4!$