5 Partitionen II

$p(n) :=$ Anzahl Partitionen von n

$p_k(n) :=$ — " — in genau n Teile

<u>Satz</u>: Die gew. Erz.fkt von $p(n)$ ist

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

<u>Satz</u>: Für festes k: $p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}$

insbesondere $p_2(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \qquad p_3(n) = \left[\frac{n^2}{12} \right]$

Wir wollen noch Schranken an $p(n)$ herleiten:

Def.: $P(x) = \sum p(n) x^n$

für festes $0 \le x < 1$:

$$p(n) \le \frac{1}{x^n} p(0) + \frac{1}{x^{n-1}} p(1) + \ldots + \frac{1}{x} p(n-1) + p(n) + x p(n+1) + \ldots$$

$$= \frac{1}{x^n} P(x)$$

-> Ziel: bestimme $x \in [0,1)$, so dass $\frac{1}{x^n} P(x)$ möglichst klein.

Dafür

$$\ln p(n) \le \ln \frac{1}{x^n} P(x) = -n \ln x - \sum_{k\ge 1} \ln(1-x^k)$$

Für $x<1$ gilt

$$(1-x^j) = (1-x)(1+x+\dots+x^{j-1}) \ge (1-x)x^{j-1} \cdot j$$

Damit folgt:

$$-\sum_{k\ge 1} \ln(1-x^k) = \sum_{k\ge 1}\sum_{j\ge 1} \frac{x^{k\cdot j}}{j} = \sum_{j\ge 1} \frac{1}{j} \sum_{k\ge 1} x^{k\cdot j}$$

$$-\ln(1-x) = \sum \frac{x^j}{j}$$

$$= \sum_{j\ge 1} \frac{1}{j} \frac{x^j}{1-x^j}$$

$$\le \sum_{j\ge 1} \frac{1}{j} \frac{x^j}{(1-x)x^{j-1}\cdot j} = \frac{x}{1-x} \sum_{j\ge 1} \frac{1}{j^2}$$

$$= \frac{x}{1-x} \frac{\pi^2}{6}$$

Insgesamt also

$$\ln p(n) \le -n \ln x + \frac{\pi^2}{6} \frac{x}{1-x}$$

Mit $y = \frac{x}{1-x} \iff x = 1 + \frac{1}{y}$ folgt

$$\ln p(n) \le -n \ln \frac{y}{1+y} + \frac{\pi^2}{6} y = n \ln \frac{1+y}{y} + \frac{\pi^2}{6} y =$$

$$= n \ln\left(1+\frac{1}{y}\right) + \frac{\pi^2}{6} y \le \frac{n}{y} + \frac{\pi^2}{6} y$$

Das nimmt Min für $y = \frac{1}{\pi}\sqrt{6n}$ an

$$\boxed{\Rightarrow \ln p(n) \le \pi \sqrt{\tfrac{2}{3} n}}$$

Aus $p(n) \geq p_k(n) \geq \frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1}$

lässt sich auch eine untere Schranke herleiten

<u>Satz</u> (Hardy & Ramanujan)

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}\,n}\, e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}$$

$\rightarrow$ $p(n)$ wächst langsamer als c^n für jedes $c > 1$.