6 Extremale Kombinatorik

→ typische Fragestellung:

- wieviele Objekte aus einer gegebenen Menge kann man auswählen, bevor eine vorgegebene Eigenschaft verletzt ist?
- $\mathcal{F}$ Familie von Teilmengen von $[n]$, die alle eine vorgegebene Eigenschaft erfüllen. Wie groß kann $\mathcal{F}$ sein?

Bsp: G Graph mit n Knoten, und ohne Dreieck. Wieviele Kanten kann G haben?

→ $G = (A \cup B, E)$ bipartit
dann kann G $|A| \cdot |B|$ Kanten haben
und G ist dreiecksfrei
Das wird maximal für $|A| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ mit
$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ Kanten.

Mehr geht nicht:

dreiecksfrei ⇒ Für $(u,v) \in E$: u, v haben keinen gemeinsamen Nachbarn ⇒ $\deg(u) + \deg(v) \leq n$

Damit:

$$\sum_{v \in V} \deg(v)^2 = \sum_{(u,v) \in E} (\deg(u) + \deg(v)) \leq nm$$

wird $\deg(u)$ oft gezählt

Außerdem folgt aus Cauchy-Schwarz

$$\sum_{v\in V} \deg(v)^2 \geq \frac{1}{n}\Big(\sum \deg(v)\Big)^2 \underset{\uparrow}{\geq} \frac{4m^2}{n}$$

Handshake-Lemma

$$\Rightarrow \quad nm \geq \frac{4m^2}{n} \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{4}n^2$$

Das ist der <u>Satz von Mantel</u>

Der Satz lässt sich verallgemeinern.
Dafür:

<u>Def</u>: Graph $G=(V,E)$ heißt <u>k-partit</u>, wenn es Partition $V = A_1 \cup \dots \cup A_k$, $A_i \neq \emptyset$ gibt mit

$|e \cap A_i| \leq 1 \quad \forall e \in E$

<u>vollständig</u> <u>k-partit</u>, wenn $\{u,v\} \in E$ für alle $u \in A_i, v \in A_j$, $1 \leq i < j \leq k$.

Wenn $V=[n]$, $a_i := |A_i|$ und $|a_i - a_j| \leq 1 \ \forall i,j$, dann heißt der vollst. k-partite Graph $T_{n,k}$ auf den A_i <u>Turán-Graph</u>

<u>Prop</u>: Für $n = qk + r$ hat $T_{n,k}$ $\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{n^2-r^2}{2} + \binom{r}{2}$ Kanten.

<u>Satz</u> G Graph auf n Knoten und ohne Untergraph isomorph zu K_{k+1}.
Dann $|E(G)| \leq |E(T_{n,k})|$

Spernerfamilien

<u>Def</u> Familie $\mathcal{F}$ von Mengen ist Spernerfamilie,

$\iff \forall A, B \in \mathcal{F}, A \neq B : A \not\subseteq B$ und $B \not\subseteq A$

$(A \setminus B \neq \emptyset, B \setminus A \neq \emptyset)$

<u>Bsp</u>: Für jedes $k \leq n$ sind die $\binom{n}{k}$ k-Teilmengen aus n-Menge eine Spernerfamilie

$\to$ die größte Familie bekommen wir für

$k = \lfloor n/2 \rfloor$

<u>Satz</u> (Sperner)

$\mathcal{F}$ Spernerfamilie in $[n] \Rightarrow |\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

Der Satz ist eine direkte Folgerung aus

Satz (Lubell, Yamamoto, Meshalkin)

$\mathcal{F}$ Spernerfamilie in $[n]$, dann gilt

$$\sum_{M \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|M|}} \leq 1 \qquad \text{(LYM-Ungleichung)}$$

Sperner aus LYM:

$$1 \geq \sum_{M \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|M|}} \geq \sum_{M \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} = |\mathcal{F}| \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}$$

⌈LYM:

Betrachte Folgen $\mu := (\Pi_i)$ mit

$$\emptyset = \Pi_1 \subsetneq \Pi_2 \subsetneq \Pi_3 \subsetneq \dots \subsetneq \Pi_n = [n]$$

$\Rightarrow$ es gibt $n!$ unterschiedliche solche Folgen μ

Ausserdem: $|\mu \cap \mathcal{F}| = 1$

und wenn $A \in \mathcal{F} \cap \mu$ mit $|A| = k$,
dann $A = \Pi_k$

$\Rightarrow$ es gibt $k!(n-k)!$ Folgen, die A enthalten

Also ist die Anzahl der Folgen μ mit $|\mu \cap \mathcal{F}| = 1$:

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} |A|!\,(n-|A|)! \leq n!$$

⌋