6 Extremale Kombinatorik II

→ Fragestellung: gg. Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von $[n]$, die alle eine vorgegebene Eigenschaft haben

Wie groß kann $|\mathcal{F}|$ sein?

Def $\mathcal{F}$ Spernerfamilie $:\Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{F}: A \not\subset B, B \not\subset A$

Bsp:
- alle k-Teilmengen einer n-Menge
- $\{1,2,3\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,4,5\}, \{3,5\}, \{2,4\}$

Satz (Sperner)

$\mathcal{F}$ Spernerfamilie in $[n]$ $\Rightarrow$ $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

Der Satz ist eine direkte Folgerung aus

Satz (Lubell, Yamamoto, Meshalkin)

$\mathcal{F}$ Spernerfamilie in $[n]$, dann gilt

$$\sum_{M \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|M|}} \leq 1 \qquad \text{(LYM-Ungleichung)}$$

→ wir haben in der letzten Vorlesung einen direkten Beweis gegeben.

Die Ungleichung folgt auch aus einem Satz von Bollobás mit vielen weiteren Anwendungen.

Satz (Bollobás) A_i, B_j Teilmengen von $[n]$, $1 \le i,j \le m$, $a_i := |A_i|$, $b_j := |B_j|$ mit $A_i \cap B_j = \emptyset \iff i = j$

Dann
$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{a_i + b_i}{a_i}} \le 1$$

Bsp: Sei $a < n$, A_i: alle a-Teilmengen von n
$B_j := [n] \setminus A_j$

$$\to \sum_{i=1}^{\binom{n}{a}} \frac{1}{\binom{a+(n-a)}{a}} = \binom{n}{a} \frac{1}{\binom{n}{a}} = 1$$

Der Beweis des Satzes ist ein erstes Beispiel für eine probabilistische Methode (später mehr)

Betrachte $D := \bigcup_{i=1}^{m} (A_i \cup B_i)$, $d := |D| \le \sum (a_i + b_i)$

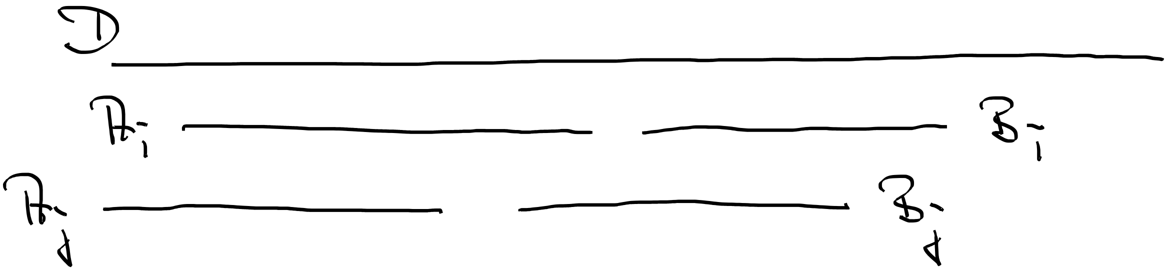
$\to$ es gibt $d!$ Möglichkeiten, D anzuordnen.

$\to$ wir sagen, dass A_i vor B_i kommt in Anordnung, wenn alle Elemente von A_i vor denen von B_i kommen.

Beh: Für $i \ne j$ kann in einer Anordnung nicht sowohl A_i vor B_i als auch A_j vor B_j sein

Wenn das letzte Element von A_j vor dem von A_i kommt, dann ist auch A_j vor B_i

aber: $A_j \cap B_i \neq \emptyset$



Sei nun X_i das Ereignis „A_i vor B_i"

$\Rightarrow$ X_i und X_j treten nie gleichzeitig auf.

Was ist die Wahrscheinlichkeit für X_i in einer beliebigen Anordnung?

$\rightarrow$ es gibt $(a_i+b_i)!$ Anordnungen von $A_i \cup B_i$ und in $a_i!\,b_i!$ davon ist A_i vor B_i

$$\Rightarrow \quad p(X_i) = \frac{a_i!\,b_i!}{(a_i+b_i)!} = \frac{1}{\binom{a_i+b_i}{a_i}}$$

Da Ereignisse disjunkt sind:

$$1 \geq \sum_{i=1}^{m} p(X_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{a_i+b_i}{a_i}}$$

Kor A_i Mengen der Größe a $\quad 1 \leq i \leq m$

B_j — " — b

und $A_i \cap B_j = \emptyset \Leftrightarrow i = j$

$$\Rightarrow \quad m \leq \binom{a+b}{a}$$

Nun können wir wieder die LYM-Ungleichung folgern:

⌈ LYM aus Bollobas: $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$, $B_i := [n] \setminus A_i$

Dann $b_i = n - a_i$ und

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{a_i}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{a_i+b_i}{a_i}} \leq 1$$ ⌋

es gibt eine Reihe von Verallgemeinerungen, z.B.

<u>Satz</u> $A_1, \dots, A_m$ a-Mengen, $B_1, \dots, B_m$ b-Mengen

mit $|A_i \cap B_i| \leq s$, $|A_i \cap B_j| > s$ für $i \neq j$

Dann $$m \leq \binom{a+b-2s}{a-s}$$ ⊠

Im Satz von Sperner kamen Ketten von Mengen vor. Das wollen wir allgemeiner betrachten:

Def: Partiell geordnete Menge (poset) ist Paar $(P, \leq)$

mit $\leq \subseteq P \times P$ ((x,y) geschrieben als $x \leq y$)

und

$x \leq x \quad \forall x$ reflexiv

$x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$ antisymmetrisch

$x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$ transitiv

Bsp: • Teilmengen einer Menge mit $\subseteq$

• Teiler einer Zahl n

Bsp: • $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{>0}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ mit $\le$

• Teilmengen einer endlichen Menge mit $\subseteq$

• Teiler einer Zahl

Def P Poset

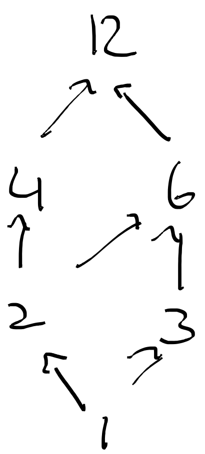
<u>Kette</u>: geordnetes Tupel $(x_1, \dots, x_k)$, $x_i \in P$ und $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_k$

<u>Antikette</u>: Menge $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq P$ so dass weder $x_i \le x_j$ noch $x_j \le x_i$ $\forall i \neq j$

Bsp: • Teilmengen gleicher Größe sind eine Antikette

• Für $S = \{s_1, \dots, s_k\} \subseteq [n]$ sind die $S_i := \{s_1, \dots, s_i\}$ für $i \le k$ eine Kette.

• Teiler einer Zahl



$1 \le 2 \le 4 \le 12$ und $3 \le 6$ Ketten

$\{1\}, \{2,3\}, \{4,6\}, \{12\}$ Antiketten

Def Das <u>Hassediagramm</u> von P ist der gerichtete Graph mit Knotenmenge P und einer Kante (x,y) für $x, y \in P$, wenn es kein $z \in P$ gibt mit $x \le z \le y$

In dem Fall: y <u>überdeckt</u> x

<u>Lemma</u>: P Poset

(1) Kette der Länge k in P $\Rightarrow$ jede Partition in Antiketten hat $\geq k$ Elemente

(2) Antikette der Größe k $\Rightarrow$ jede Partition in Ketten hat $\geq k$ Elemente

$\ulcorner$ Kette und Antikette können sich höchstens in einem Element schneiden $\lrcorner$

<u>Satz</u> P Poset, längste Kette hat Länge k
$\Rightarrow$ P kann in $\leq k$ Antiketten partitioniert werden.

$\ulcorner$ zu $x \in P$ sei $h_x :=$ Länge der längsten Kette, die in x endet

und $A_i := \{ x \in P \mid h_x = i \}$

$$\Rightarrow P = \dot{\bigcup_{i=1}^{k}} A_i$$

Nun sei $x, y \in A_i$, $x \neq y$

wenn $x \leq y$, dann $h_x \geq h_y + 1$

ebenso für $y \leq x$

$\Rightarrow A_i$ ist Antikette $\lrcorner$

Satz (Dilworth)

P Poset, alle Antiketten A erfüllen $|A| \leq k$

$\Rightarrow P$ kann in k Ketten partitioniert werden.

Induktion nach $|P|$

$|P| = 0$ ✓

$|P| > 0$: C Kette maximaler Länge

$\rightarrow$ zwei Fälle:

- $P \setminus C$ hat nur Antiketten der Länge $\leq k-1$
  $\Rightarrow$ können $P \setminus C$ in $k-1$ Ketten zerlegen
  mit C: k Ketten für P
- $P \setminus C$ hat Antikette $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ der Länge k
  $\Rightarrow A$ ist auch maximale Antikette in P

Setze: $I^- := \{x \in P : x \leq a_i \text{ für ein } i\}$
$I^+ := \{ \text{ — " — } x \geq a_i \text{ — " — } \}$

Dann: jedes $x \in P$ ist in I^+ oder I^-
$\rightarrow$ sonst: $A \cup \{x\}$ Antikette der Länge $k+1$

- $I^- \cap I^+ = A$
- Anfang von C ist nicht in I^+
  Ende von C ist nicht in I^-
  ($\rightarrow$ sonst längere Kette)

- a_i sind maximal in I^-
  minimal in I^+

  (sonst z.B. $a_i \leq y \in I^-$
  $\Rightarrow$ es gibt j: $a_i \leq y \leq a_j$
  $\Rightarrow a_i = y = a_j$)

$\Rightarrow I^+, I^-$ echte Teilmengen von P
mit Antikette der Länge k

$\rightarrow I^\pm$ zerfallen je in k Ketten
die in a_i enden bzw beginnen

$\rightarrow$ können Ketten an a_i zusammensetzen
für Partition von P

Bem: • Eine Spernerfamilie ist eine Antikette in der Potenzmenge von $[n]$

$\rightarrow$ keine Antikette in $2^{[n]}$ ist länger als $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$