6 Extremale Kombinatorik III

11-1

→ letztes Mal:

Spernerfamilien: Antiketten in $2^{[n]}$

Satz von Sperner: keine Antikette größer als $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

außerdem:

können Posets mit der minimal notwendigen Zahl von (Anti-)Ketten überdecken

minimal notwendig: Länge der längsten (Anti-)Kette.

→ minimale Anzahl Ketten: Satz von Dilworth

impliziert z.B. • Erdős-Szekeres
• Satz von Hall / Heiratssatz
→ Übungen

im restlichen Kapitel: Mengensysteme, in denen viele/alle Mengen gem. Schnitt haben.

Def Eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von $[n]$ heißt Schnittfamilie, wenn $A \cap B \neq \emptyset \ \forall A, B \in \mathcal{F}$

Bsp $\mathcal{F} = \{ A \subseteq [n] \mid 1 \in A \} \to |\mathcal{F}| = 2^{n-1}$

Prop: F Schnittfamilie in $[n]$ $\Rightarrow$ $|F| \le 2^{n-1}$

⌈ Max eine der Mengen A und $[n] \setminus A$ sind in F ⌋

Def: Eine Familie von Mengen heißt k-uniform wenn
$|A| = k \quad \forall A \in F$

Bsp
- $F = \{ \{1\} \cup K \mid K \ (k-1)\text{-Teilmenge von } [n] \}$
  Schnittfamilie mit $|F| = \binom{n-1}{k-1}$
- $n < 2k$: $F :=$ Menge aller k-Teilmengen von $[n]$
  ist Schnittfamilie mit $|F| = \binom{n}{k}$

Satz (Erdős-Ko-Rado)
F Schnittfamilie von k-Teilmengen einer n-Menge, $n \ge 2k$. Dann
$$|F| \le \binom{n-1}{k-1}$$

| betrachte Zahlen modulo n

k-Strecke: Menge der Form $\{i, i+1, \dots, i+k-1\}$

mod n, wenn $\ge n$

Beh: wenn $A_1, A_2, \dots, A_m$ Strecken sind, die sich paarweise schneiden, dann $m \le k$

11-3

$\lceil A_2, \dots, A_m$ haben Start- oder Endpunkt in A.

- nur Startpunkte oder nur Endpunkte
  $\Rightarrow$ können max $k-1$ sein, da erstes Element von A kein Start-, letztes kein Endpunkt ist.

- sowohl Start- als auch Endpunkte:
  $a \in A$ Endpunkt $\Rightarrow a+1$ kein Startpunkt
  $\Rightarrow$ ebenfalls max $k-1$ Start- / Endpunkte $\rfloor$

Nun betrachte Anordnung von $[n]$
$\rightarrow$ da wir Zahlen modulo n betrachten, gibt es $(n-1)!$ verschiedene solche

$\rightarrow$ manche $A \in F$ sind in dieser Anordnung Strecken
aber: Das kann nach Beh. oben nur für höchstens k Mengen der Fall sein.

Wie oft taucht $A \in F$ in einer Anordnung als Strecke auf?
$\rightarrow A$ hat $k!$ Anordnungen, Komplement $[n] \setminus A$ hat $(n-k)!$ Anordnungen

$$\Rightarrow \quad |F| \, k!(n-k)! \leq k \cdot (n-1)!$$

Mengen A ihre Anordnungen   Anzahl A, die wir darin finden können   Anordnungen von n

$$|F| \leq \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$$ $\rfloor$

→ können andersherum fragen, wann in einem Mengensystem viele Mengen mit gemeinsamem Schnitt geben muss

Def S Familie von Mengen

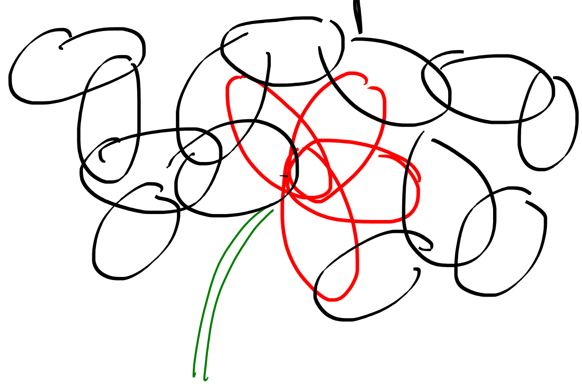
S heißt <u>Sonnenblume mit k Blättern</u>, wenn $|S| = k$ und es gibt eine Menge K mit $A \cap B = K$ für alle $A, B \in S$, $A \neq B$ sowie $A \setminus K \neq \emptyset$ für alle $A \in S$

Dabei ist $Z = \emptyset$ erlaubt

→ wollen Sonnenblumen in großen Mengenfamilien finden

→ Vorstellung: $n \gg k$, viele k-Mengen in $[n]$ gegeben, ohne Struktur

→ wollen Sonnenblume finden



Satz F r-uniforme Menge (ggf. Dummy-Elemente)

wenn $|F| \geq r!(k-1)^r$

dann enthält F eine Sonnenblume S mit k Blättern

Induktion:

$r=1 \Rightarrow |\mathcal{F}| > k-1 \Rightarrow \mathcal{F}$ enthält $\geq k$ einelementige Mengen

$\Rightarrow$ haben Sonnenblume S mit $K = \emptyset$

$r > 1$: Wähle maximale Menge $A_1, A_2, \dots, A_t$ disjunkte Mengen in $\mathcal{F}$

$t \geq k \Rightarrow$ je k sind Sonnenblume mit $K = \emptyset$

$t < k$: Sei $M := A_1 \cup \dots \cup A_t$

Dann: $|M| \leq r(k-1)$

und $M \cap A \neq \emptyset \quad \forall A \in \mathcal{F}$

nach dem Schubfachprinzip gibt es $x \in M$, das in

$$\frac{|\mathcal{F}|}{|M|} \geq \frac{r!(k-1)^r}{r(k-1)} = (r-1)!(k-1)^{r-1}$$

Mengen enthalten ist

Setze $\mathcal{F}_x := \{ A \setminus \{x\} \mid x \in A, A \in \mathcal{F} \}$

$\rightarrow$ es gibt Sonnenblume S_x mit k Blättern in $\mathcal{F}_x$

Wenn wir x zu allen Blättern hinzufügen, bekommen wir eine Sonnenblume in $\mathcal{F}$

$\lrcorner$