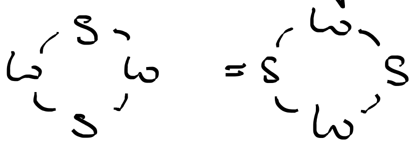
7 Abzählen von Mustern

→ Konfigurationen zählen unter Symmetrie

Bsp: (1) 4 weiße oder schwarze Bälle auf Kreis anordnen, bis auf Drehsymmetrie:



→ 6 Möglichkeiten

→ wie ist das für k Farben und n Bälle?

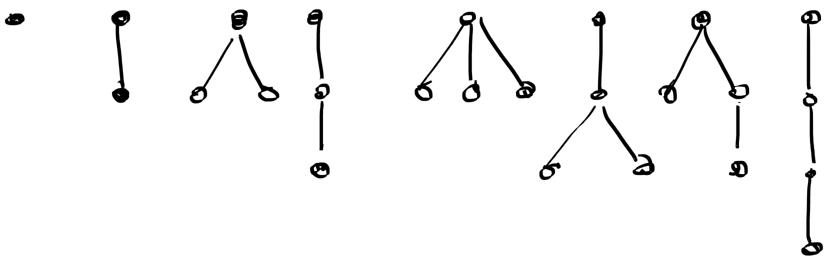
(2) Seitenflächen eines Würfels s/w färben

→ Bis auf Drehsymmetrie: 10 Möglichkeiten

→ stattdessen Kanten oder Ecken färben?

→ gleiche Symmetriegruppe, andere Wirkung

(3) ternäre Bäume mit Wurzel



→ hier können wir die Kinder permutieren, ohne die Struktur zu ändern

→ in allen Beispielen wirken Gruppen auf den Konfigurationen, und wir sehen Konfigurationen als gleich an, wenn es ein Gruppenelement gibt, dass die eine auf die andere abbildet

Bsp welche Gruppen wirken?

(1) zyklische Gruppe C_4 auf 4 Elementen

(2) Würfel: Drehungen

$\to$ in 3D haben Drehungen eine Achse

• Achse durch Seitenmitten	$3 \cdot 3$
• — " — gegenüberliegende Kanten	$6 \cdot 1$
• — " — diag. gegenüberliegende Ecken	$4 \cdot 2$
• Identität	1
	24

(3) Permutationen S_3 an jedem inneren Knoten

Def G, H endliche Gruppen

$\pi : G \to H$ ist Gruppenhomomorphismus, wenn

$$\pi(g \circ h) = \pi(g) \circ \pi(h) \quad \forall g, h \in G$$

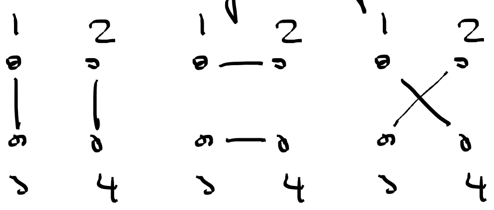
Für $H = S_n$ heißt π Permutationsdarstellung

Dann: π „wirkt" / „operiert" auf $[n]$

Bsp (1) $\pi : S_4 \to S_2$ $\quad \pi(\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma)$

(2) $\pi : S_2 \to S_4$ $\quad : (12) \mapsto (12)(34)$

(3) Π_4: perfekte Matchings auf 4 Knoten



1 2 3

$$\begin{array}{lll}(1234) & \mapsto & (23)\\ (12) & \mapsto & (13)\\ (12)(34) & \mapsto & id\\ (123) & \mapsto & (132)\end{array} \qquad \pi: S_4 \to S_3$$

Prop (1) $\pi(id) = \pi(g g^{-1}) = \pi(g)\pi(g^{-1})$
$\Rightarrow \pi(g^{-1}) = \pi(g)^{-1}$

(2) $\ker \pi$ ist Untergruppe von G
$\operatorname{im} \pi$ — " — S_n

(3) $\operatorname{im} \pi \cong G/\ker \pi$ (Homomorphiesatz)

(4) Für endliche Mengen X: $S_X \cong S_n$, $n = |X|$

Def π heißt treu, wenn π injektiv

Bsp $\pi: C_4 \to S_2$
$(1234) \mapsto (12)$
$\to$ nicht treu

$\pi((13)(24)) = \pi((1234)^2) = id$
$\ker \pi = \{id, (13)(24)\}$

π: Drehungen des Würfels $\to S_6$ ist treu

→ was wollen wir nun zählen?

→ bei den Anordnungen im Kreis haben wir r Farben für n Plätze

⇒ r^n mögliche Anordnungen

Das können wir als Abbildung $f: [n] \to [r]$ auffassen

→ allgemeiner: Abbildungen $f: N \to R$ einer n-Menge in eine r-Menge.

→ dabei wollen wir jedoch manche Abbildungen als „gleich" ansehen

im Bsp wirkt die zyklische Gruppe $G = C_4$ auf den Anordnungen:

zwei Abbildungen $f, f' : N \to R$ sind gleich wenn $f' = f \circ \pi(g)$ für ein $g \in G$, $\pi: G \to S_4$

→ das definiert eine Äquivalenzrelation auf die Menge der Abbildungen R^N

→ allgemeiner: $\pi: G \to S_X$ für eine Wirkung von G auf einer Menge X

definiert über $y \sim x$:

$$\underset{\exists g}{y = \pi(g)(x)}$$

eine Äquivalenzrelation (oben: $X = R^N$)

Def: Die Äquivalenzklassen dieser Relation heißen Muster

→ wir wollen Muster zählen

Bsp $G = S_n$ → Multimengen von $[r]$ mit n Elementen

→ $\binom{n+r-1}{r-1}$ Muster

$G = id$ → r^n Muster

→ nun: wollen Häufigkeit von $r \in R$ im Bild von $f: N \to R$ festhalten

→ dafür: wie bei Erzeugendenfunktionen Variablen x_r für $r \in R$

Wir setzen: $w(f) = \prod_{a \in N} x_{f(a)}$

Für äquivalente Abbildungen f, f' gilt $w(f) = w(f')$

Def Π Muster. Dann heißt $w(\Pi) := w(f)$ für $f \in \Pi$ Gewicht von Π.

Bsp Anordnung von Bällen:

mögliche Gewichte: $x_\omega^4, x_\omega^3 x_s, x_\omega^2 x_s^2, x_\omega x_s^3, x_s^4$

→ wenn μ die Menge der Muster zu R^N mit $G \curvearrowright N$ ist, dann wollen wir

$$w(R^N; G) := \sum_{M \in \mu} w(M)$$

bestimmen.

Bsp (1) Bälle:

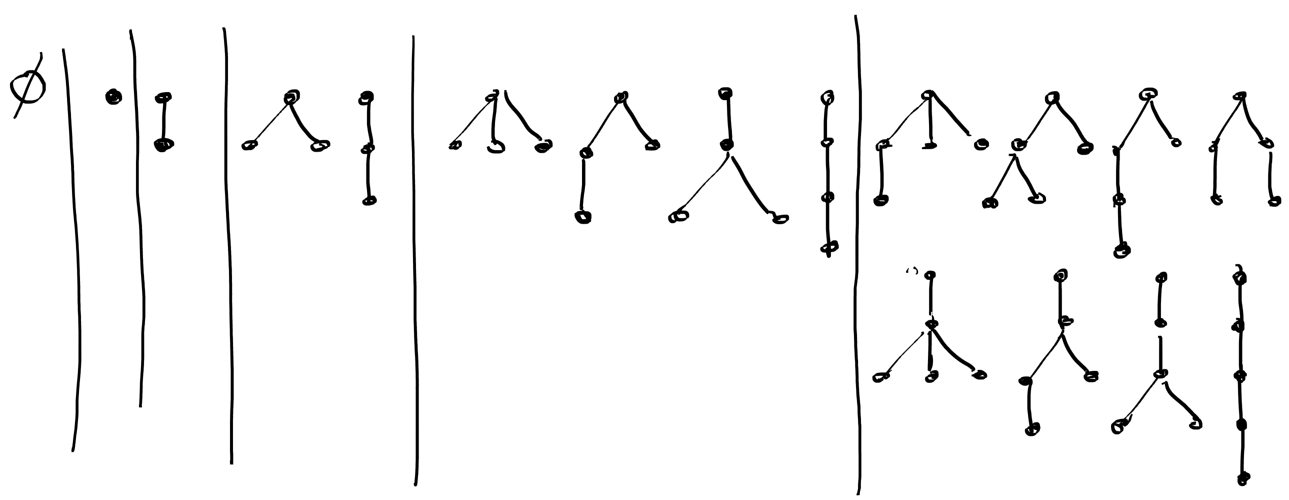
$$w(\{\omega,s\}^{[4]}, C_4) = x_\omega^4 + x_\omega^3 x_s + 2 x_\omega^2 x_s^2 + x_\omega x_s^3 + x_s^4$$

(2) Würfel:

$$w(\{\omega,s\}^{\text{Seiten}}, G) = x_\omega^6 + x_\omega^5 x_s + 2 x_\omega^4 x_s^2 + 2 x_\omega^3 x_s^3 + 2 x_\omega^2 x_s^4 + x_\omega x_s^5 + x_s^6$$

(3) ternäre Bäume:

$$w(\dots, S_3) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 8x^5 + \dots$$



Def: X Menge, $\pi : G \to S_X$

$x \in X$, dann $\Pi(x) := \{ \pi(g)(x) \mid g \in G \}$

ist das Muster zu x

$x \in X$, dann ist $G_x := \{ g \mid \pi(g)(x) = x \}$

die Fixpunktgruppe zu x

Prop G_x ist eine Gruppe $\square$

Def $g \in G$, Dann ist $X_g := \{ x \mid \pi(g)(x) = x \}$

die Fixpunktmenge von g.

Prop

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |X_g| \qquad (*)$$

$\ulcorner$ Paare (x, g) mit $\pi(g)(x) = x$ einmal über $g \in G$, einmal über $x \in X$ zählen $\lrcorner$

Satz (Lemma von Burnside-Frobenius)

$$|\mu| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$$

$\ulcorner$ $\Pi(x) = \{ \pi(g)(x) \mid g \in G \}$

Nun:

$$\pi(g)(x) = \pi(h)(x) \iff \pi(g^{-1}h)(x) = x$$
$$\iff g^{-1}h \in G_x$$
$$\iff h = gp \quad \text{für } p \in G_x$$

$\Rightarrow$ zu jedem $g \in G$ ergeben genau die $h = gp$ für $p \in G_x$ dasselbe Element $\pi(g)(x) \in \Pi(x)$

$\rightarrow$ das sind $|G_x|$ viele

$$\Rightarrow |\Pi(x)| = \frac{|G|}{|G_x|} \quad \text{für alle } x \in X.$$

Nun $\Pi(x) = \Pi(y)$ für $y \in \Pi(x)$

$$\Rightarrow |G_x| = |G_y|$$

$$\Rightarrow |G| = |\Pi(x)|\,|G_y| = \sum_{y \in \Pi(x)} |G_y|$$

$$\Rightarrow |\mu|\,|G| = \sum_{\text{Bahnen } \Pi(x)} \sum_{y \in \Pi(x)} |G_y| = \sum_{y \in X} |G_y|$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{g \in G} |X_g|$$

$\rightsquigarrow$ oft sind Fixpunktmengen leichter zu bestimmen als Bahnen.