7 Abzählen von Mustern III

R, N Mengen, $r := |R|$, $n := |N|$

R^N Abbildungen $f: N \to R$

G Gruppe mit Wirkung $G \curvearrowright N$ durch Permutationsdarstellung $\pi: G \to S_N$

$\to$ $f' \sim f :\Longleftrightarrow f' = f \circ \pi(g)$ für ein $g \in G$
ist eine Äquivalenzrelation auf R^N
Die Äquivalenzklassen heißen <u>Muster</u>

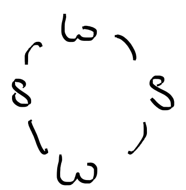
$\to$ zu $r \in R$ definiere Variable x_r

Damit: $\quad w(f) := \prod_{a \in N} x_{f(a)} \quad$ <u>Gewicht</u> von f

$\to$ $w(f') = w(f)$ für $f' \sim f$

$\to$ $w(M) := w(f)$ für ein $f \in M$ Gewicht von M

Wir setzen $\quad w(R^N, G) := \sum_{M \in \mu} w(M) \quad$ (μ: Menge der Muster)

Bsp: f:  $\to$ $w(f) = x_w^2 x_s^2$

$$w(R^N, G) = x_w^4 + x_w^3 x_s + 2 x_w x_s + x_w x_s^3 + x_s^4$$

Setze $\pi_g = \pi(g)$

und π_g in Zykelschreibweise:

$\pi_g = (a\ \pi_g a\ \pi_g^2 a \ldots)(b\ \pi_g b\ \pi_g^2 b \ldots)(c \ldots)(\ldots)$

und für $f \in (R^N)_g$ ist f konstant auf den Zykeln.

$\to$ für $\sigma \in S_N$: $b_i(\sigma) :=$ Anzahl Zykel der Länge i in σ

Def Der <u>Zykelindikator</u> von $G \curvearrowright R^N$ ist

$$Z(G, y_1, \ldots, y_n) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} y_1^{b_1(\pi_g)} \cdots y_n^{b_n(\pi_g)}$$

Bsp (1) Bälle im Kreis: $C_4 \curvearrowright N$

$$Z(C_4, y_1, \ldots, y_4) = \frac{1}{4}\left(y_1^4 + y_2^2 + 2y_4\right)$$

Satz (Polya) N, R Mengen, $n = |N|$, $r = |R|$

G Gruppe mit $G \curvearrowright N$

Dann

$$w(R^N; G) = \sum_{M \in \mathcal{M}} w(M) = Z\Big(G, \sum_{j \in R} x_j, \sum_{j \in R} x_j^2, \ldots, \sum_{j \in R} x_j^n\Big)$$

D.h.: man erhält $w(R^N, G)$ durch Ersetzen

$$y_k \longmapsto \sum_{j \in R} x_j^k \quad \text{in } Z(G, y_1, \ldots, y_n)$$

Kor. $|\mu| = Z(G, r, \dots, r)$

$\lceil$ Setze $x_j = 1 \ \forall j \Rightarrow \sum x_j^k = r \ \forall k \rfloor$

Kor.: Für $r = 2$ (z.B. $R = \{s, w\}$) und
$a_k :=$ Anzahl Muster mit k-mal 1

$$\sum a_k x^k = Z(G, 1+x, 1+x^2, \dots, 1+x^n)$$

$\lceil$ Setze $x_1 = x$, $x_2 = 1 \rfloor$

$\to$ lässt sich verallgemeinern:
z.B. $R = \{$rot, grün, blau, gelb$\}$
$a_{kl} :=$ Anzahl mit genau k rot, l grün

$$\to \sum a_{kl} x^k y^l = Z(G, 2+x+y, 2+x^2+y^2, \dots, 2+x^n+y^n)$$

Bsp (1) Bälle, r Farben, n Plätze
($r=2, n=4$: $|\mu| = 6$)

$N = [n]$, $C_n \curvearrowright N$: $g_k : j \mapsto j+k \pmod n$
$\to g_k = g_1^k$

$\to g_k$ zerlegt N in Zyklen gleicher Länge d
$\Rightarrow d \mid n$ und g_k lässt sich als

$$\pi(g_k): \underbrace{\underbrace{(\ldots)}_{d}\underbrace{(\ldots)}_{d} \ \ldots \ (\ldots)}_{\frac{n}{d}}$$

schreiben

$\rightarrow$ d ist die kleinste Zahl, so dass

$$n \mid dk$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{n}{ggT(n,k)}$$

[z.B. $n=6$, $k=4$, $d=3$
$g_4 = (642)(153)$]

Damit folgt:

Anzahl Muster mit n Bällen und r Farben:

$$|\mu| = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \varphi(d) \, r^{\frac{n}{d}}$$

Für $n=4$ ergibt sich

$$|\mu| = \frac{1}{4}(r^4 + r^2 + 2r) = \frac{1}{4} r(r+1)(r^2 - r + 2)$$

und für

r	2	4	5	6	10
$\lvert\mu\rvert$	6	70	165	336	1430

(2) Seitenflächen des Würfels, k Farben

$\rightarrow$ Beiträge zum Zykelindikator:

Identität: y_1^6

Seitenachsen: $3y_1^2 y_2^2 + 6y_1^2 y_4$

Kanten: $6y_2^3$

Ecken: $8y_3^2$

$$\Rightarrow Z(G, y_1, \dots, y_6) = \frac{1}{24}\left(y_1^6 + 3y_1^2 y_2^2 + 6y_1^2 y_4 + 6y_2^3 + 8y_3^2\right)$$

$$\Rightarrow |\mu| = \frac{1}{24}(k^6 + 3k^4 + 6k^3 + 6k^3 + 8k^2)$$
$$= \frac{1}{24} k^2(k+1)(k^3 - k^2 + 4k + 8)$$

k	2	3	4	5	6	7
	10	57	240	800	2226	5390

Neu: zwei rot, eine blau, Rest grün oder gelb:

$$\sum a_{kl} x^k y^l = \frac{1}{24}\Big((2+x+y)^6 + 3(2+x+y)^2(2+x^2+y^2)$$
$$+ 6(2+x+y)^2(2+x^4+y^4) + 6(2+x^2+y^2)^3 + 8(2+x^3+y^3)^2\Big)$$

$$= 10 + 12(x+y) + 16(x^2+y^2) + 22xy + 10(x^3+y^3)$$
$$+ 22(x^2y + xy^2) + 6(x^4+y^4) + 11(x^3y + xy^3) + 20x^2y^2$$
$$+ \dots$$

$\Rightarrow a_{21} = 22$ Möglichkeiten

(3) ternäre gewurzelte Bäume

→ das hängt von der Anzahl n der Knoten ab

⇒ suchen Erzeugendenfunktion

$$T(z) = \sum_{n \geq 0} t_n z^n$$

für t_n: ternäre Bäume mit n Knoten

wenn R die Menge aller ternären Bäume ist,
dann haben wir an einem Knoten eine Abbildung f

$f: N \to R$ für $N = [3]$

und auf N wirkt die volle symm. Gruppe S_3

→ der Zykelindikator ist

$$Z(S_3, y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{6}\left(y_1^3 + 3y_1y_2 + 2y_3\right)$$

id (12), (13), (23) (123), (132)

⇒ wir müssten jetzt mit Variable x_t für Baum t

$$y_1 = \sum_{t\in R} x_t, \quad y_2 = \sum_{t \in R} x_t^2, \ldots$$

einsetzen.

→ aber: sind nur an Gesamtzahl t_n der Bäume auf n Knoten interessiert

→ würden später x_t für einen Baum t mit n Blättern durch z^n ersetzen.

→ das machen wir gleich

⇒ ersetzen

$$y_1 = \sum_{t\in R} x_t = \sum_{n\geq 0} t_n z^n = T(z)$$

$$y_2 = \sum_{t\in R} x_t^2 = \sum_{n \geq 0} t_n z^{2n} = T(z^2)$$

$$y_3 = \quad \ldots \quad = T(z^3)$$

$\vdots$

Damit ergibt sich aus dem Zykelindikator die Gleichung

$$T(z) - 1 = \frac{z}{6}\left(T(z)^3 + 3T(z)T(z^2) + 2T(z^3)\right)$$

weil.

$\emptyset$

$$\Rightarrow \sum t_n z^n = 1 + \frac{1}{6} z \left(\sum t_n z^n\right)^3 + \frac{1}{2} z \left(\sum t_n z^n\right)\left(\sum t_n z^{2n}\right) + \frac{1}{3} z \sum t_n z^{3n}$$

$$= 1 + \frac{1}{6} \sum_{n\geq 0} \Big(\sum_{i+j+k=n} t_i t_j t_k \Big) z^{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \Big(\sum_{i+2j=n} t_i t_j \Big) z^{n+1} + \frac{1}{3} \sum t_n z^{3n}$$

$$= 1 + \frac{1}{6} \sum_{n\geq 1} \Big(\sum_{i+j+k=n-1} t_i t_j t_k \Big) z^{n} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \Big(\sum_{i+2j=n-1} t_i t_j \Big) z^{n} + \frac{1}{3} \sum_{3 \mid n-1} t_{\frac{n-1}{3}} z^n$$

→ Koeffizientenvergleich:

$$t_0 = t_1 = 1, \quad t_n = \frac{1}{6} \sum_{i+j+k=n-1} t_i t_j t_k + \frac{1}{2} \sum_{i+2j=n-1} t_i t_j + \begin{cases} \frac{1}{3} t_{\frac{n-1}{3}} & 3 \mid n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t_n	1	1	1	2	4	8	17	39	89	211	507	1238

$t_{30} = 95991365288$

→ OEIS (A000598)