Diskrete Mathematik

Andreas Paffenholz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WiSe 2022/23
01. Dezember 2022
Aufgabenblatt 7

Bis zum 18.12. läuft noch die Vorlesungsevaluation. Sie können dort Vorlesung und Tutorium bewerten. Sie erreichen die Evaluation über die Adresse

t1p.de/LVE

Für die Vorlesung brauchen Sie die Losung **LVV3M** und für das Tutorium **AYX6K**.

Aufgabe 7.1: Maximale Schnittfamilien

Sei F eine maximale k-uniforme Schnittfamilie einer n-Menge, d.h. es gibt keine weitere k-Menge $A \notin F$, die wir zu F hinzufügen könnten. Dann gilt

$$|F| \geq \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n-k}\right)^k .$$

Hinweis: Zählen Sie Paare (A, B) für $A \in F$ und B disjunkt von A und mit $|B| = k$. Wie viele gibt es mindestens? Wieviele höchstens?

Zeigen Sie dafür auch die Abschätzung $\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}^{-1} \geq \left(\frac{n}{n-k}\right)^k$.

Bemerkung: Das ist (mit einer besseren Schranke) ein Resultat von Fűredi.

Aufgabe 7.2: Untere Schranke für Sonnenblumen

Zu gegebenem $k, r \in \mathbb{Z}_{>0}$ seien $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ paarweise diskunkte Mengen der Größe $k-1$ und

$$F := \{M \mid |M| = r \text{ und } |M \cap Z_i| = 1 \text{ für alle } i\}$$

Zeigen Sie, dass F keine Sonnenblume mit k Blättern enthält und folgern Sie, dass kleinste Zahl $f(r, k)$, so dass jede r-uniforme Familie von Mengen eine Sonnenblume mit k Blättern enthält, $f(r, k) \geq (k-1)^r$ erfüllt.

Bemerkung: Aus der Vorlesung folgt $f(r, k) \leq r!(k-1)^r + 1$. Eine wesentlich bessere untere oder obere Abschätzung von $f(r, k)$ ist nicht bekannt.

Aufgabe 7.3: (3×3)-Felder

Wir betrachten ein Quadratisches Gitter mit drei Reihen und Spalten, also neun Feldern (Tic-Tac-Toe-Spiel). Wir wollen nun auf manche Felder Kreuze oder Kreise zeichnen. Dabei betrachten wir zwei Konstellationen als äuquivalent, wenn Sie durch eine Drehung oder eine Spiegelung auseinander hervorgehen.

1. Benutzen Sie das Lemma von Burnside-Frobenius, um die Anzahl der Konstellationen unter dieser Symmetrie mit genau drei Kreuzen und drei Kreisen zu bestimmen.
2. Bestimmen Sie nun die Erzeugendenfunktion der Zahlen a_{kl} von Konstellationen mit genau k Kreuzen und l Kreisen. Überprüfen Sie damit Ihr Ergebnis aus der vorangegangen Teilaufgabe.

Aufgabe 7.4: gestreifte Decken

Eine Decke sei in n waagerechte Streifen unterteilt, von denen genau k weiß gefärbt sind, und die anderen schwarz (weiße bzw. schwarze Streifen dürfen auch direkt nebeneinander liegen). Wieviele Deckenmuster gibt es, wenn die Decke um $180°$ (um die zur Decke senkrechte Achse) gedreht werden darf?

Testen Sie ihr Resultat für kleine Werte, z.B. $(n, k) \in \{(5, 3), (6, 4)\}$.

∗ Aufgabe 7.5: Kantenpermutationen des K_5

Wir betrachten den vollständigen Graph K_5 mit seiner vollen Symmetrie S_5.

1. Zeigen Sie, dass der Zykelindex für die dadurch auf der Menge der Kanten induzierte Wirkung

$$Z(S_5, x_1, \ldots, x_{10}) \;=\; \frac{1}{120}\left(x_1^{10} + 10x_1^4x_2^3 + 20x_1x_3^3 + 15x_1^2x_2^4 + 30x_2x_4^2 + 20x_1x_3x_6 + 24x_5^2\right)$$

2. Wieviele Färbungen mit zwei Farben gibt es? Wieviele mit drei?
3. Auf wieviele Weisen können Sie von den Kanten des K_5 eine rot, zwei grün und den Rest blau färben? Können Sie diese Färbungen zeichnen?
4. Wieviele Färbungen gibt es mit zehn Farben?
5. Wieviele Graphen mit fünf Knoten gibt es? Können Sie alle zeichnen?

∗ Aufgabe 7.6: Involutionen

Eine Involution ist eine Permutation $\pi \in S_n$ von $[n]$, die $\pi^2 = 1$ erfüllt. Sei i_n die Anzahl der Involutionen in S_n.

1. Zeigen Sie, dass es $\prod_{k<\frac{n}{2}}(n - 2k - 1) = (n - 1)(n - 3)\ldots$ fixpunktfreie Involutionen in S_n gibt.
2. Zeigen Sie die Rekursion $i_{n+1} = i_n + ni_{n-1}$ mit $i_0 = i_1 = 1$.
3. Folgern Sie, dass die exponentielle Erzeugendenfunktion der Involutionen $e^{x+\frac{x^2}{2}}$ ist.
4. Bestimmen Sie i_n.