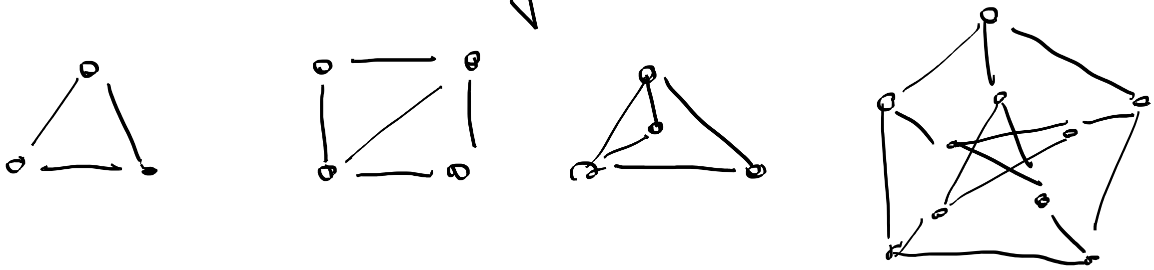
9 Planare Graphen

Erinnerung aus ADM:

Graph G: Paar (V,E) aus einer (endlichen) Menge von Knoten und einer Menge $E \subseteq \binom{V}{2}$ von Kanten

→ oft durch Zeichnung angegeben:

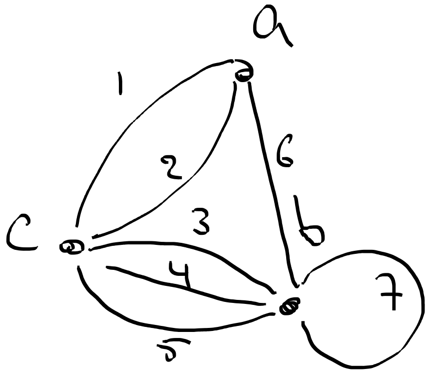


→ Zeichnung ist nicht eindeutig

In unserer Definition: G ist ein einfacher, schleifenfreier, ungerichteter Graph.

Man kann die Definition erweitern:

- Schleifen: Kanten mit zwei gleichen Endpunkten
  $$E \subseteq \binom{V}{2} \cup V$$
- mehrfache Kanten:
  $G = (V, E, \varepsilon)$ aus zwei endlichen Mengen V, E und einer Abbildung
  $$\varepsilon: E \to \binom{V}{2} \cup V$$



$G = (\{a,b,c\}, [7], \varepsilon)$

mit

$\varepsilon(1) = \{a,c\}$, $\varepsilon(2) = \{a,c\}$

$\varepsilon(3) = \{b,c\}$ ..., $\varepsilon(7) = \{b\}$

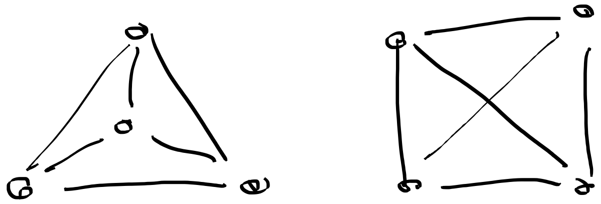
Eine Kante e ist inzident zu einem Knoten v, wenn $v \in e$. v und w sind adjazent, wenn $\{v,w\} \in E$

Der Grad eines Knotens ist die Anzahl inzidenter Kanten.

→ Handshake-Lemma: $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$

→ Bäume mit n Knoten haben $n-1$ Blätter

Zeichnungen eines Graphen sind nicht eindeutig, Kanten können sich überschneiden:



→ Umkehrung ist eindeutig

→ wollen überschneidungsfreie Zeichnungen eines Graphen als eigenständiges Objekt auffassen

→ ebene Graphen / Zeichnungen

<u>Def</u>: Eine Menge der Form
$$\alpha := \gamma([0,1]) = \{\gamma(t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$
für eine stetige, injektive Abbildung
$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$
heißt <u>ebene Kurve</u>

$\gamma(0), \gamma(1)$ sind die Endpunkte der Kurve α.

<u>Def</u>: Ein <u>ebener Graph</u> G ist eine injektive Abbildung
$$b : V \to \mathbb{R}^2$$
zusammen mit einer Menge E und ebenen Kurven $\alpha(e)$ für $e \in E$, so dass
- die Endpunkte von $\alpha(e)$ im Bild von b sind.
- das Innere jeder Kurve keinen Punkt $b(v)$ enthält
- $\alpha(e), \alpha(e')$ für e, e' sich höchstens Endpunkten berühren.

Zu jedem ebenen Graph gibt es einen eindeutigen Graph $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$, so dass G eine Zeichnung von $\hat{G}$ ist (ggf Multigraph mit Schleifen)

Ein ebener Graph ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

→ G ist eine ebene Zeichnung von $\hat{G}$

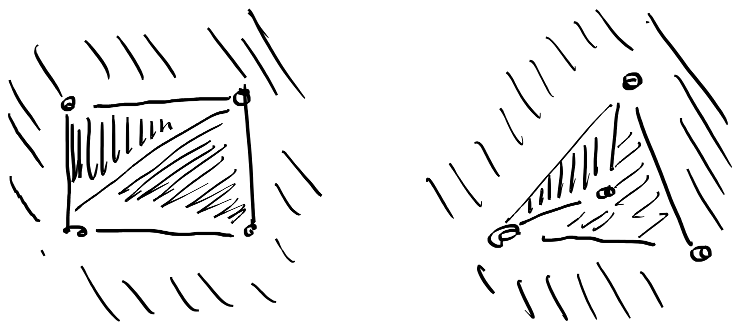
→ in der Regel benutzen wir wieder das Symbol G statt $\hat{G}$

Def: Ein Graph G heißt *planar*, wenn er eine ebene Zeichnung hat

Bsp: $K_2, K_3, K_4, K_{2,3}$

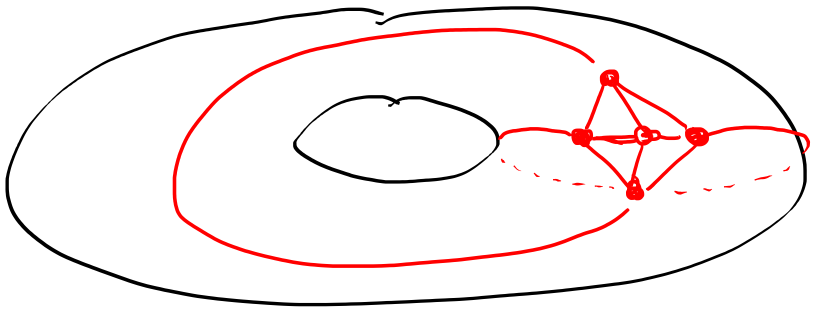
Def G ebener Graph. Dann zerfällt $\mathbb{R}^2 \setminus G$ in Zusammenhangskomponenten, die *Länder* von G.
Es gibt genau eine unbegrenzte Komponente, das *äußere Land / Gebiet*.
Alle anderen sind innere Länder / Gebiete

→ Achtung: Länder sind für einen konkreten ebenen Graphen definiert.
Zwei Zeichnungen des gleichen Graphen können verschiedene Länder haben.



Bem: Planarität hängt vom Raum der Einbettung ab
→ werden sehen: K_5 nicht planar in $\mathbb{R}^2$

aber auf dem Torus:



→ nach Festlegung des Raums (für uns $\mathbb{R}^2$) ist Planarität eine kombinatorische Eigenschaft !

Zusammenhang Geometrie ⟷ Kombinatorik über den Jordanschen Kurvensatz

→ Jordankurve: „geschlossene Kurve ohne Selbstschnitt"

$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ stetig, injektiv auf $[0,1)$
$\gamma(0) = \gamma(1)$

<u>Satz</u> (Jordansches Kurvensatz)

Eine Jordankurve teilt die Ebene in zwei zusammenhängende Gebiete, von denen eines beschränkt, das andere unbeschränkt ist.

es gilt mehr: Jede Jordankurve ist homöomorph zu S^1

[das ist in $\mathbb{R}^3$ falsch, nicht jedes Bild einer stetigen Abb. $S^2 \to \mathbb{R}^3$ hat ein zu S^2 homöomorphes Bild]

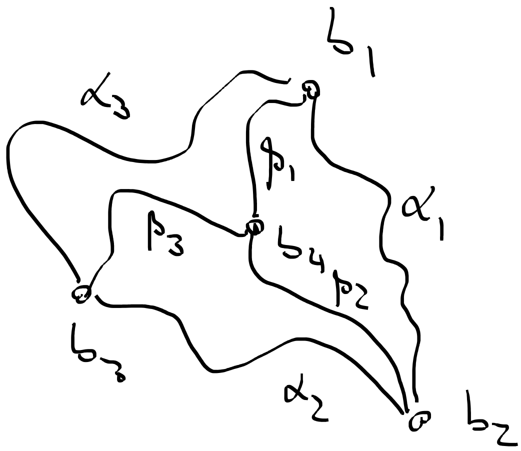
Satz K_5 ist nicht planar

⌈ Seien $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \in \mathbb{R}^2$ die Ecken einer ebenen Zeichnung und $\alpha(i,j)$, $1 \le i < j \le 5$ die ebenen Kurven, die b_i und b_j verbinden

b_1, b_2, b_3 bilden ein Dreieck, daher ist die Zusammensetzung von $\alpha(1,2), \alpha(2,3), \alpha(1,3)$ eine Jordankurve.

→ b_4, b_5 sind verbunden
⇒ liegen beide im beschränkten oder unbeschränkten Gebiet

beide im beschränkten Gebiet:



→ b_5 liegt im Inneren der von $\alpha_1 \beta_1 \beta_2$ oder $\alpha_2 \beta_2 \beta_3$ oder $\alpha_3 \beta_1 \beta_3$ definierten Jordankurve.

ang. in $\alpha_1 \beta_1 \beta_2$ → ebene Kurve α von b_3 nach b_5 muss diese Jordankurve schneiden

alle anderen Fälle analog ⌋

Satz $K_{3,3}$ ist nicht planar [Beweis analog]

Satz G ist genau dann planar, wenn es keinen K_5 oder $K_{3,3}$ als Minor hat. [ohne Beweis]