9 Planare Graphen IV

Satz (Appel & Haken)
Für planare Graphen G gilt $\chi(G) \le 4$

[ohne Beweis]

Satz (Fünf-Farben-Satz)
Für planare Graphen gilt $\chi(G) \le 5$

G planar $\rightarrow$ $k \le 3n-6$

$\Rightarrow \sum_{v \in V} \deg v = 2k \le 6n-12$

$\Rightarrow$ G hat einen Knoten vom Grad ≤ 5

Beweis mit Induktion:

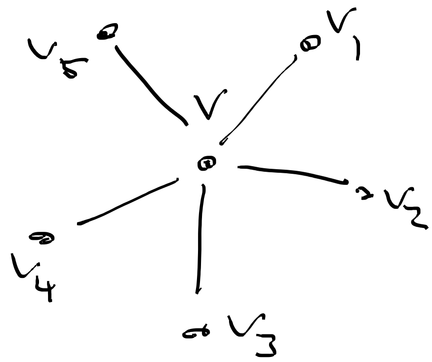
$n \le 5$ ✓

$n \ge 6$: wähle v mit $\deg(v) = 5$
G − v hat Färbung mit 5 Farben

Wenn $\deg v \le 4$ oder $\deg v = 5$ und in $N(v)$
kommen nur vier Farben vor:
können Färbung auf G erweitern.

Bleibt: $\deg v = 5$ und alle 5 Knoten in $N(v)$
haben unterschiedliche Farbe.

Nummeriere $N(v)$
zyklisch mit $v_1, \dots, v_5$
und v_i hat Farbe i



V_{13}: Menge der Knoten, die von v_1 über Pfad erreichbar ist, der nur Farben 1 und 3 benutzt

(→ notwendig abwechselnd)

V_{24}: ebenso, aber von v_2 aus für Farben 2, 4

(a) $v_3 \notin V_{13}$: tausche Farben 1 und 3 bei Knoten in V_{13}
⇒ Farbe 1 nicht mehr in $N(v)$
→ Färbe v mit 1.

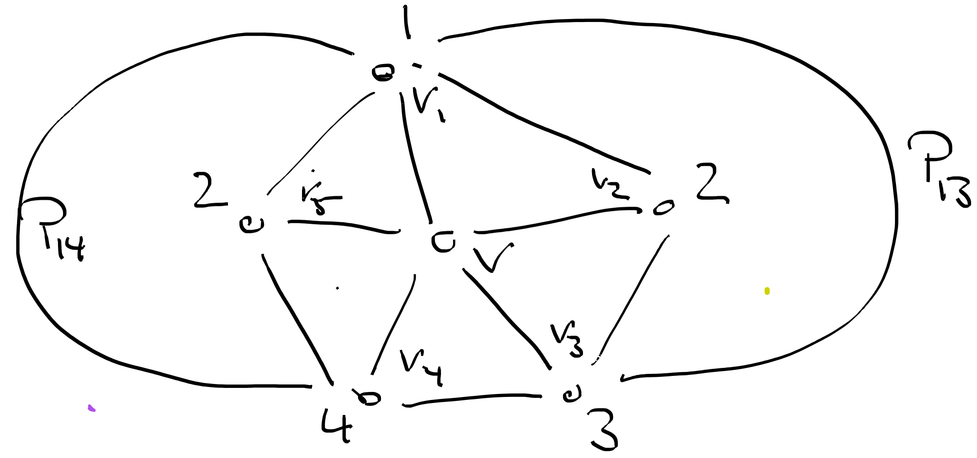
(b) $v_3 \in V_{13}$: Dann gibt es Weg $v_1 \to v_3$ in V_{13}
→ ergänze mit v zu Kreis C
⇒ v_2, v_4 liegen in verschiedenen Komponenten von $G \setminus C$
⇒ kein Weg $v_2 \to v_4$ in V_{24}
→ Vertausche 2 und 4 in V_{24}
⇒ Farbe 2 nicht in $N(v)$
→ Färbe v mit 2

→ Knoten v_5 wurde im Beweis nicht benutzt
→ können wir das für Verbesserung $\chi(G) \leq 4$ nutzen?

$\deg w \leq 4$ oder nur drei Farben in $N(w)$ wie oben.

→ einziger interessanter Fall:

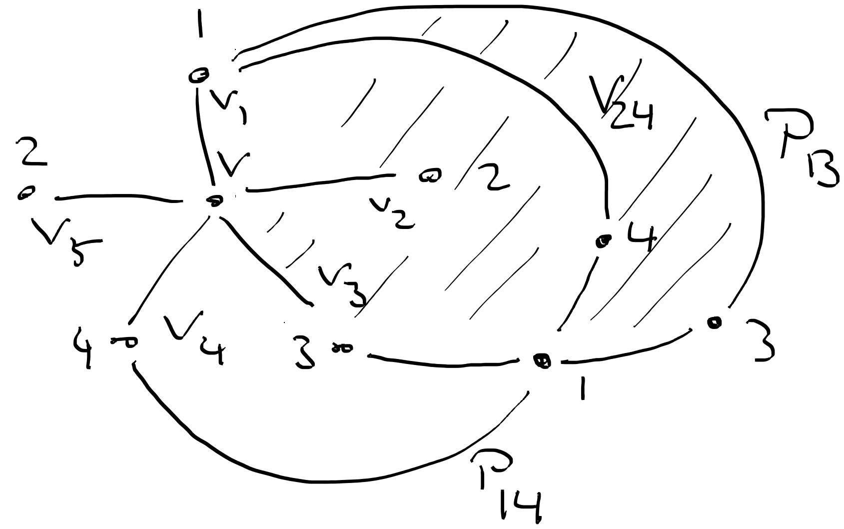
$\deg v = 5$, vier Farben in $N(v)$



- Wenn es P_{14} oder P_{13} nicht gibt: V_{14} oder V_{13} umfärben
- sonst: $v_4 \notin V_{24}$ und $v_3 \notin V_{53}$ (mit Farben 2 und 3!)

  → beide umfärben, so dass 2 nicht mehr in $N(v)$?

→ Umfärben von V_{24} könnte V_{53} ändern!



→ explizites Bsp am Ende des Abschnitts.

Graphen von 3-dim. Polytopen.

Prop Der Graph eines 3-Polytops ist planar

⌜ Schlegeldiagramm: Zentralprojektion bzgl $y \notin P$ nahe an einer Seite

⌟

Satz (Satz von Balinski)

Der Graph G eines 3-Polytops ist 3-zshgd

⌜ → Graph jede Seite ist 2-zshgd.

- u, v Ecken von G

→ wollen zeigen: $G - \{u,v\}$ zshgd.

→ wähle Ecke $w \neq u,v$ von P

⇒ u,v,w definieren affine Hyperebene H mit Normale n

→ können $n = e_3$ und $H = \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ annehmen

Betrachte Simplexalgorithmus bzgl $f(x) = x_3$

$x^{\pm}$ maximale / minimale Ecke bzgl. $f(x)$

Drei Fälle:

(a) Alle Ecken von P haben $x_3 \geq 0$

⇒ $x_3^+ > 0$ und jede Ecke ist über

aufsteigenden Weg mit x^+ verbunden

→ zusammengesetzt bekommen wir Weg zwischen beliebigen Ecken.

(b) Alle Ecken haben $x_3 \leq 0$: analog

(c) $x_3^+ > 0$, $x_3^- < 0$

⇒ w hat auf-/absteigenden Weg nach $x^\pm$, jede andere Ecke mindestens nach x^+ oder x^- → zusammensetzen.

<u>Satz</u> (Satz von Steinitz)
Jeder planare 3-zshgd Graph ist Graph eines Polytops.

⌈ohne Beweis⌋

<u>Def</u> P 3-Polytop heißt <u>regulär</u> wenn
- alle Seiten kongruente reguläre Polygone sind
- an jeder Ecke die gleiche Anzahl zusammentrifft.

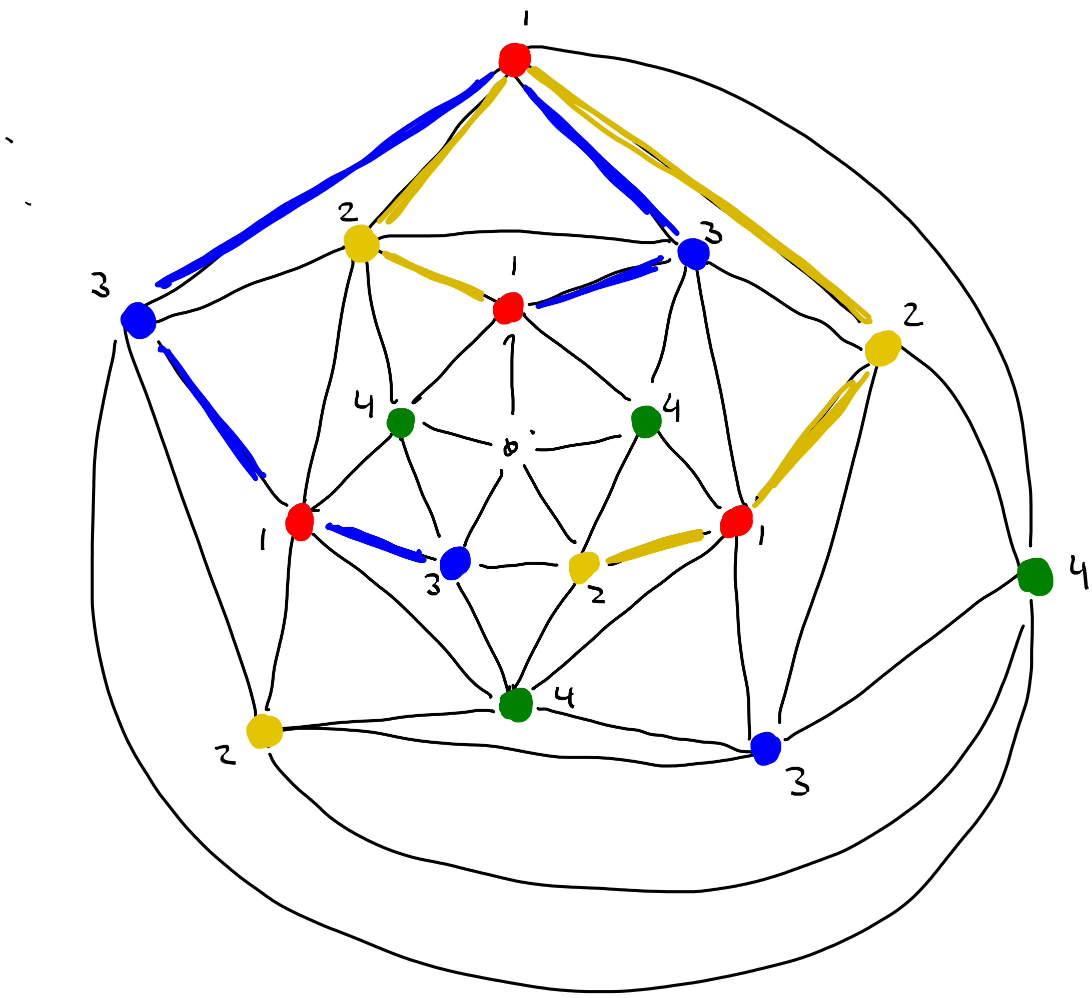
<u>Bsp</u>: Tetraeder, Würfel, Okta-, Dodeka-, Ikosaeder

<u>Satz</u>: Das sind alle.

⌈Übung⌋

→ das sind die fünf <u>Platonischen Körper</u>.

Ein Beispiel, das zeigt, dass wir nicht notwendig zwei Komponenten umfärben können:



[Errera-Graph]